Bericht

über das

Gymnasium Petrinum zu Brilon

während

seines sechszehnten Schuljahrs, 1873—74,

erstattet

von dem

Director **C. Roeren.**

Voraus geht eine mathematische Abhandlung: Untersuchungen über die Cissoide des Diocles, vom Gymnasiallehrer Dr. W. Böhmer.

Brilon, 1874.
Buchdruckerei von M. Friedländer.

Untersuchungen über die Cissoide des Diocles.

Erster Abschnitt.

Verhältniß der Cissoide zum Kreise und zur Parabel; Eigenschaften der Cissoide.

§. 1. **Herleitung der Cissoide vom Kreise.**

1. Definition der Cissoide. Wenn man in dem einen Endpunkte B eines Kreisdurchmessers AB (Fig. 1) eine Tangente an den Kreis construirt, von A aus gerade Linien nach dieser Tangente zieht, und dann das Stück CD einer solchen Geraden, welches zwischen den Kreis und die Tangente fällt, auf der Geraden von A aus abträgt, so daß also $AP = CD$ wird, so gehören alle diese Punkte P einer Curve an, welche man Cissoide nennt. Da diese Cissoide zuerst von Diocles bekannt gemacht ist, so nennt man sie auch die Cissoide des Diocles.

2. Gleichung der Cissoide. Es sei (Fig. 1) AB der Durchmesser eines Kreises, dessen Centrum O und dessen Radius a sei; es sei ferner UV die in B an den Kreis gelegte Tangente. Ist nun AD eine Gerade, welche A mit einem beliebigen Punkte D der Tangente UV verbindet und den Kreis in C schneidet, so ist, wenn $CD = AP$ gemacht wird, P ein Punkt der Cissoide. — Wir nehmen nun A als Anfangspunkt, eine mit AB zusammenfallende Gerade als Abscissenaxe, und eine in A auf AB senkrechte Gerade als Ordinatenaxe eines Coordinatensystems; die Coordinaten von P seien $AR = x$, $PR = y$. Ziehen wir noch durch C die Parallelen CE und CF zu den Axen, so ist $\triangle APR \cong CDE$, und also $AR = CE = BF = x$. Ferner ist, wenn man BC zieht, $\sphericalangle ACB = R$, und also $AC.CD = BC^2 = AB.BF = 2ax$, oder, da $CD = AP$ ist, auch $AC.AP = 2ax$. Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke APR und ACF folgt $AP:AC = AR:AF = x:2a-x$. Multipliciren wir die Ausdrücke $AC.AP = 2ax$ und $AP:AC = x:2a-x$ mit einander, so wird $AP^2 = \frac{2ax^2}{2a-x}$, und wenn wir hierin $AP^2 = x^2 + y^2$ einsetzen, so erhalten wir $y^2 = \frac{2ax^2}{2a-x} - x^2$ oder $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$.

3. Aus der soeben entwickelten Gleichung für die Cissoide ergiebt sich $y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$.

Wir erhalten hiernach für jedes positive x, welches kleiner als $2a$ ist, zwei der absoluten Größe nach gleiche Werthe für y, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Die Abscissenaxe halbirt also alle der Ordinatenaxe parallelen Sehnen, d. h. sie ist ein Durchmesser der Cissoide. Wird ferner x größer als $2a$, so wird y imaginär: wir erhalten also keinen Punkt der Curve. Ist aber $x = 2a$, so wird $y = \pm\infty$: die Gerade, welche in der Entfernung $2a$ zur Ordinatenaxe parallel gezogen ist, also die vorhin erwähnte Tangente des Leitkreises, wird daher Asymptote der Cissoide, wie das Uebrigens auch schon aus der Definition in 1. geschlossen werden konnte. — Für ein negatives x wird y stets imaginär; die Curve liegt also nur in dem ersten und vierten Quadranten zwischen den beiden Tangenten, welche in den Endpunkten A und B des Durchmessers AB an den Leitkreis gezogen sind.

4. Bezeichnet y_1 eine Ordinate der Cissoide, welche zur Abscisse x_1 gehört, und y_2 diejenige Ordinate des Leitkreises, welche derselben Abscisse entspricht, so ist $y_1 = \sqrt{\frac{x_1^3}{2a - x_1}}$ und $y_2 = \sqrt{x_1(2a - x_1)}$, woraus wir durch Multiplication die Relation $y_1 . y_2 = x_1^2$ erhalten. Es ist also das Product zweier Ordinaten der Cissoide und des Leitkreises, welche derselben Abscisse angehören, dem Quadrate dieser Abscisse gleich. — Gehört daher (Fig. 1) zur Abscisse AR in der Cissoide die Ordinate RP, im Kreise die Ordinate RM, so ist $RP . RM = AR^2$. Liegen nun, wie in Fig. 1., die Punkte P und M in verschiedenen Quadranten, so folgt nach bekannten Sätzen der elementaren Geometrie, daß, wenn man P und M mit dem Ursprunge A verbindet, der Winkel PAM ein rechter Winkel ist. Zieht man also eine Gerade parallel zur Ordinatenaxe, so stehen die Radien vectoren der beiden in verschiedenen Quadranten gelegenen Punkte der Cissoide und des Leitkreises, in denen die beiden Curven von der Geraden geschnitten werden, auf einander senkrecht.

5. Aus den vorhin aufgestellten beiden Gleichungen $y_1 = \sqrt{\frac{x_1^3}{2a - x_1}}$ und $y_2 = \sqrt{x_1(2a - x_1)}$ folgt noch die Proportion $y_1 : y_2 = x_1 : 2a - x_1$. Die beiden Dreiecke RAP und RAN sind aber ähnlich, weil sie übereinstimmen in den beiden Winkeln RAP und RNA, und in den rechten Winkeln bei R; es ist also $RAP : RAN = AP^2 : AN^2 = r_1^2 : r_2^2$, wenn wir die Radien vectoren mit r_1 und r_2 bezeichnen. Die beiden Dreiecke haben aber auch gleiche Höhe AR; es ist also auch $RAP : RAN = RP : RN = y_1 : y_2$. Daraus folgt die Proportion $r_1^2 : r_2^2 = y_1 : y_2$ und mit Rücksicht auf die vorhin aufgestellte wird $r_1^2 : r_2^2 = x_1 : 2a - x_1$. Wenn wir aber noch BN ziehen, so ist Winkel ANB ein rechter, und es ist somit $AN^2 : BN^2 = AR : BR$ oder $r_2^2 : BN = x_1 : 2a - x_1$. Vergleichen wir diese mit der vorigen Proportion, so ergibt sich $r_1^2 : r_2^2 = r_2^2 : BN^2$ oder $r_1 : r_2 = r_2 : BN$. Es ist hiernach also BN die dritte geometrische Proportionale zu dem Radius vector der Cissoide und dem des Leitkreises, wofern beide zu derselben Abscisse gehören.

6. Der Gleichung der Cissoide können wir auch die Form geben $y^2\ (2a - x) - x^3 = 0$. Um die Polargleichung der Cissoide zu erhalten, setzen wir hierin $y = r \sin\varphi$ und $x = r\cos\varphi$ und erhalten darnach: $r^2\ \sin\varphi^2\ (2a - r\cos\varphi) - r^3 \cos\varphi^3 = 0$, oder auch $r^2\ [\sin\varphi^2 (2a - r\cos\varphi) -$

$r \cos \varphi^3] = 0$. Diese Gleichung liefert zweimal $r = 0$, woraus wir erkennen, daß der Anfangspunkt der Cissoide ein Doppelpunkt ist, was wir wohl zu beachten haben. Unterdrücken wir nach dieser Bemerkung den Factor r^2, so wird $\sin \varphi^2 (2a - r \cos \varphi) - r \cos \varphi^3 = 0$ oder $2a \sin \varphi^2 - r \cos \varphi = 0$. Die Polargleichung der Cissoide hat darnach die Form $r = 2a . \frac{\sin \varphi^3}{\cos \varphi}$.

7. Aus der Gleichung des Leitkreises $y^2 = x(2a - x)$ erhalten wir bekanntlich als Polargleichung desselben $r = 2a \cos \varphi$. Bezeichnen wir nun mit r_1 und r_2 diejenigen Radien vectoren der Cissoide und des Leitkreises, welche derselben Anomalie φ angehören, so erhalten wir durch Multiplication derselben $r_1 . r_2 = 2a \frac{\sin \varphi^2}{\cos \varphi} . 2a \cos \varphi = [2a \sin \varphi]^2$. Wenn wir noch r als die mittlere Proportionale zu r_1 und r_2 annehmen, so wird darnach $r = \pm 2a \sin \varphi$. Diese Gleichung stellt uns aber das System zweier Kreise dar, welche beide mit dem Radius a beschrieben sind; die Mittelpunkte beider Kreise liegen auf der Ordinatenaxe zu verschiedenen Seiten des Ursprungs, von dem sie um den Radius entfernt sind.

Nehmen wir auf der negativen Axe der Abscissen einen Punkt O_1 so an, daß $AO_1 = AO = a$ ist, und beschreiben um O_1 mit a als Radius einen Kreis, so ist, wenn wir AP rückwärts bis zum Durchschnitt Q mit diesem Kreise verlängern, $AQ = AC$. Nun ist aber $CD . AC = CB^2$; setzen wir hierin für CD, AC und CB die gleichen Werthe AP, AQ und AM ein, so erhalten wir $AP . AQ = AM^2$. Da nun AM senkrecht auf PQ steht, so muß, wenn wir noch MQ ziehen, Winkel PMQ ein rechter, und also MQ parallel zur Abscissenaxe sein. Hieraus ergiebt sich wieder eine einfache Construction der Cissoide.

8. Setzen wir in der Polargleichung der Cissoide $r = \frac{x}{\cos \varphi}$, so erhalten wir eine Relation zwischen der Abscisse und der Anomalie, nämlich $x = 2a \sin \varphi^2$. Ebenso erhalten wir beim Leitkreise $x = 2a \cos \varphi^2$. Bezeichnen wir nun die Abscissen, welche zu derselben Anomalie gehören, bei der Cissoide mit x_1, bei dem Leitkreise mit x_2, so ist $x_1 + x_2 = 2a \sin \varphi^2 + 2a \cos \varphi^2 = 2a$. Sind also P und C die betreffenden Punkte der Cissoide und des Leitkreises, so ist, wenn AB und AF ihre Abscissen vorstellen, $AR + AF = 2a = AB$; hieraus folgt noch $AR = BF$. Es ist also auch $RN = FC$, weil beide auf dem Durchmesser AB senkrecht stehen und ihre Fußpunkte gleichweit von den Enden des Durchmessers entfernt sind. Errichtet man folglich auf dem Durchmesser AB des Leitkreises zwei Senkrechten, welche gleichweit von den Enden des Durchmessers abstehen, und verbindet den Punkt, in welchem eine der beiden Senkrechten den Kreis schneidet, mit dem Ursprunge, so schneidet diese Verbindungslinie die andere Senkrechte in einem Punkte der Cissoide. Auch diese Eigenschaft läßt sich leicht zur Construction der Cissoide verwerthen.

9. Eine andere interessante und einfache Beziehung besteht noch zwischen der Anomalie der Cissoide und dem Winkel, den die Tangente des Leitkreises mit der (positiven) Seite der Abscissen-Axe bildet, wofern die beiden Punkte der Cissoide und des Leitkreises dieselbe Abscisse haben, also auf derselben Parallelen zur Ordinatenaxe liegen.

Bezeichnen wir die Anomalie der Cissoide mit φ, so ist bekanntlich $\operatorname{tang} \varphi = \frac{y}{x}$, und wenn wir hier $y = \sqrt{\frac{x^3}{2a - x}}$ setzen, so wird $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a - x}}$. Es sei ferner ϑ der Winkel, den die Tangente des Leitkreises mit der positiven Seite der Abscissenaxe bildet; es ist dann $\operatorname{tang} \vartheta = \frac{dy}{dx}$ Da nun $y = \sqrt{x(2a - x)}$ ist, so wird $\operatorname{tang} \vartheta = \frac{a - x}{\sqrt{x(2a - x)}}$. Aus der Gleichung $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a - x}}$ erhalten wir nun zunächst $\operatorname{tang} \varphi^2 = \frac{x}{2a - x}$, woraus $x = \frac{2a \operatorname{tang} \varphi^2}{1 + \operatorname{tang} \varphi^2}$ und also $2a - x = 2a - \frac{2a \operatorname{tang} \varphi^2}{1 + \operatorname{tang} \varphi^2} = \frac{2a}{1 + \operatorname{tang} \varphi^2}$ wird; es ist also $x\,(2a - x) = \frac{2a \operatorname{tang} \varphi^2}{1 + \operatorname{tang} \varphi^2} \cdot \frac{2a}{1 + \operatorname{tang} \varphi^2} = \left[\frac{2a \operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang} \varphi^2}\right]^2$, und demnach $\sqrt{x\,(2a - x} = \frac{2a \operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang} \varphi^2}$. Auch ist noch $a - x = a - \frac{2a \operatorname{tang} \varphi^2}{1 + \operatorname{tang} \varphi^2} = \frac{a(1 - \operatorname{tang} \varphi^2)}{1 + \operatorname{tang} \varphi^2}$. Setzen wir diese Werthe in die Gleichung $\operatorname{tang} \vartheta = \frac{a - x}{\sqrt{x\,(2a - x)}}$ ein, so erhalten wir

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{\frac{a\,(1 - \operatorname{tang} \varphi^2)}{1 + \operatorname{tang} \varphi^2}}{\frac{2a \operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang} \varphi^2}} = \frac{1 - \operatorname{tang} \varphi^2}{2 \operatorname{tang} \varphi}$$

$$= \frac{1}{\frac{2 \operatorname{tang} \varphi}{1 - \operatorname{tang} \varphi^2}} = \frac{1}{\operatorname{tang} 2\varphi} = \operatorname{cotg} 2\varphi$$

Nun ist zunächst $\operatorname{cotang} 2\varphi = \operatorname{tang} (R - 2\varphi)$. Da aber φ bis zu einem rechten, folglich $2\,\varphi$ bis zu $2\,R$ wächst, so müssen wir auch noch die Relation $\operatorname{cotang} 2\,\varphi = \operatorname{tang} (3R - 2\varphi)$ hinzunehmen Wir erhalten also $\operatorname{tang} \vartheta = \operatorname{tang} (R - 2\varphi)$ oder $\operatorname{tang} \vartheta = \operatorname{tang} (3R - 2\varphi)$. Aus der ersten Gleichung wird $\vartheta + 2\,\varphi = R$; diese gilt aber nur so lange, als φ kleiner ist als $1/2$ R, also die Abscisse x kleiner als a; es schneidet alsdann die Kreistangente die Abscissenaxe stets auf der negativen Seite, und der Winkel ϑ nimmt ab von R bis O. Aus der zweiten Gleichung folgt $\vartheta + 2\,\varphi = 3\,R$; diese gilt für den Fall, wo φ größer ist als ein halber rechter Winkel, also die Abscisse größer als a; es schneidet alsdann die Kreistangente die positive Seite der Abscissenaxe, und der Winkel ϑ nimmt ab von 2 R bis R. Für den Grenzfall, wo $\varphi = 1/2 R$, also $x = a$ wird, gelten beide Relationen, da ϑ je nach der Auffassung als Winkel von 0^0 oder von 180^0 betrachtet werden kann.

§. 2. Die Cissoide als Tangentenfußpunktcurve einer Parabel.

1. Die Gleichung einer Tangente, welche im Punkte $x_1 y_1$ an eine Parabel $y^2 = 2px$ gezogen ist, hat bekanntlich die Form $y = \frac{p}{y_1}x + \frac{y_1}{2}$. Fällen wir nun vom Ursprunge des Coordinatensystems auf diese Tangente eine Senkrechte, so erhält diese die Gleichung $y = -\frac{y_1}{p}x$. Wir bestimmen nun den geometrischen Ort des Durchschnittspunktes der Tangente und der darauf vom Ursprunge gefällten Senkrechten. Aus der zweiten Gleichung folgt $y_1 = -\frac{py}{x}$. Setzen wir dieses in die erste Gleichung ein, so erhalten wir

$$y = -\frac{x^2}{y} - \frac{py}{2x} = -\frac{2x^3 + py^2}{2xy};$$

hieraus erhalten wir nach einigen leichten Umformungen $y^2 = -\frac{x^3}{\frac{p}{2} + x} = \frac{(-x^3)}{\frac{p}{2} - (-x)}$.

Wir ersehen hieraus, daß die Tangentenfußpunktcurve einer Parabel eine Cissoide ist, bei der der Radius des Leitkreises gleich dem halben Parameter der erzeugenden Parabel ist, und welche im zweiten und dritten Quadranten liegt, wenn sich die Parabel in den ersten und vierten Winkelraum erstreckt. Legen wir also die Parabel auf die andere Seite, so fällt die Cissoide auf die positive Seite der Abscissenaxe und zur Parabel $y^2 = -2px$ gehört dann als Tangentenfußpunktcurve die Cissoide $y^2 = \frac{x^3}{\frac{p}{2} - x}$, oder wenn wir $\frac{p}{2} = 2a$ setzen, wird

$$\text{die Gleichung der Parabel } y^2 = -8ax$$

$$\text{die Gleichung der Cissoide } y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

2. Setzen wir in diesen beiden Gleichungen, um ihre Polargleichungen zu erhalten, $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$, so erhalten wir als

$$\text{Polargleichung der Cissoide } r = 2a\frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi}$$

$$\text{Polargleichung der Parabel } r = -8a\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi^2}$$

Bezeichnen wir nun den Radius vector der Cissoide, welcher zur Anomalie φ gehört, mit r_1, und den Radius vector der Parabel, der zur Anomalie $2R + \varphi$ gehört, mit r_2, so ist $r_1 = 2a\frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi}$ und $r_2 = 8a\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi^2}$ und wir erhalten folglich durch Multiplikation der beiden Ausdrücke $r_1 r_2 = (4a)^2$. Legt man also durch den Anfangspunkt des Systems eine Gerade, so wird dieselbe durch die im Vorigen näher bezeichnete Cissoide und Parabel so geschnitten, daß das Produkt der Entfernungen, welche die Durchschnittspunkte jener Geraden mit der Cissoide und der Parabel vom Ursprunge des Coordinatensystems haben, constant ist und zwar gleich dem Quadrate des doppelten Durchmessers des Leitkreises.

3. Setzt man in die vorhin angeführten Polargleichungen der Cissoide und der Parabel einmal $r = \frac{x}{\cos\varphi}$, dann $r = \frac{y}{\sin\varphi}$, so erhält man die Coordinaten als Funktionen der Anomalie und zwar wird:

$$\text{für die Cissoide: } x = 2a\sin\varphi^2,\ y = 2a\frac{\sin\varphi^3}{\cos\varphi};$$

$$\text{für die Parabel: } x = -8a\frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi^2},\ y = -8a\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Bezeichnet $x_1\,y_1$ einen Punkt der Cissoide und $x_2\,y_2$ einen Punkt der Parabel, deren Anomalien um 2 R von einander verschieden sind, so wird

$$x_1\,x_2 = -\ (4a\cos\varphi)^2 = -4\,(2a\cos\varphi)^2,$$
$$y_1\,y_2 = -\,(4a\sin\varphi)^2 = -4\,(2a\sin\varphi)^2.$$

Um diese Ausdrücke an der Figur darzustellen, bedienen wir uns wieder des Leitkreises. Es ist nämlich $2a\cos\varphi$ der Radius vector des Leitkreises, welcher zur Anomalie φ gehört, und $2a\sin\varphi$ die Suplementarsehne desselben, d. h. die Verbindungslinie des Kreispunktes mit dem andern Endpunkte des Kreisdurchmessers. Es ist also das Produkt derjenigen $\left\{\begin{matrix}\text{Abscissen}\\\text{Ordinaten}\end{matrix}\right\}$ der Cissoide und der Parabel, welche zu zwei um 2 R verschiedenen Anomalien gehören, gleich dem vierfachen Quadrate $\left\{\begin{matrix}\text{der Scheitelsehne}\\\text{ihrer Suplementarsehne}\end{matrix}\right\}$ des Leitkreises, welche zu dem Winkel φ der Cissoide gehört.

4. Durch die Addition der beiden für $x_1\,x_2$ und $y_1\,y_2$ angegebenen Ausdrücke erhält man noch $x_1\,x_2 + y_1\,y_2 = -16\,a^2$. Wie man sich erinnern wird, ist aber auch $r_1\,r_2 = (4\,a)^2$, und wir erhalten so noch die Relation $x_1\,x_2 + y_1\,y_2 = -r_1\,r_2$.

§. 3. Die Cissoide als Rollcurve einer Parabel.

Im vorigen §. haben wir die Cissoide betrachtet, insofern sie die Tangentenfußpunktcurve einer Parabel ist. Man kann sie indeß auch noch auf eine andere interessante Weise aus der Parabel herleiten. Denkt man sich nämlich zwei genau gleiche Parabeln, die sich mit ihren Scheiteln berühren, so daß sie also die Scheiteltangente gemeinschaftlich haben, übrigens völlig entgegengesetzt liegen, und läßt man nun die eine auf der andern sich fortbewegen, so beschreibt der Scheitel der sich fortbewegenden Parabel eine Cissoide.

Zum Beweise dieses Satzes gelangen wir durch folgende Betrachtung. Denken wir uns, die rollende Parabel sei bis zum Punkte $x_1\,y_1$ der ruhenden Parabel gelangt, so werden beide die im Punkte $x_1\,y_1$ gezogene Tangente als gemeinschaftliche Tangente haben. Die Lage beider Parabeln wird also gegen diese Tangente eine völlig symmetrische sein, und die Verbindungslinie der Scheitel beider Parabeln wird senkrecht zu dieser gemeinschaftlichen Tangente stehen und durch dieselbe halbirt werden. Daraus folgt, daß die Coordinaten des Scheitels der rollenden Parabel stets doppelt so groß sein werden, als die Coordinaten des Punktes, in welchem die Verbindungslinie beider Parabelscheitel die gemeinschaftliche Tangente schneidet. Nach diesen Bemerkungen wird es nicht schwer sein, die Gleichung der Curve aufzustellen, welche der Scheitel der rollenden Parabel beschreibt.

Eine im Punkte $x_1 y_1$ an eine Parabel $y^2 = 2px$ gezogene Tangente hat, wie aus der Theorie der Kegelschnitte bekannt ist, die Gleichung $y y_1 = p(x + x_1)$.
Fällen wir nun vom Anfangspunkte des Systems, d. h. vom Scheitel der ruhenden Parabel, auf diese Tangente eine Senkrechte, so wird darnach die Gleichung dieser Senkrechten $y = -\frac{y_1}{p}x$. Bezeichnen wir mit x_2 und y_2 die Coordinaten des Durchschnittspunktes beider Geraden, so gelten für dieselben beide Gleichungen und wir erhalten also

$$x_2 = -\frac{p^2 x_1}{p^2 + y_1^2} \text{ und } y_2 = \frac{p x_1 y_1}{p^2 + y_1^2}.$$

Sind x_3 und y_3 die Coordinaten des rollenden Parabelscheitels, so ist $x_3 = 2x_2$ und $y_3 = 2y_2$; wir erhalten demnach $x_3 = -\frac{2p^2 x_1}{p^2 + y_1^2}$ und $y_3 = \frac{2p x_1 y_1}{p^2 + y_1^2}$. Durch Division erhält man hieraus $\frac{y_3}{x_3} = -\frac{y_1}{p}$, wonach also $y_1 = -\frac{p y_3}{x_3}$ wird. Setzen wir diesen Werth für y_1 in die Gleichung für x_3 ein, so erhalten wir daraus nach einigen leicht auszuführenden Umformungen $x_1 = -\frac{x_3^2 + y_3^2}{2 x_3}$. Beachten wir noch, daß die Coordinaten x_1 und y_1 der ruhenden Parabel angehören, und also mit einander durch die Bedingungsgleichung $y_1^2 = 2p x_1$ verbunden sind, so erhalten wir, wenn wir jene Ausdrücke für x_1 und y_1 einsetzen, die Beziehung, durch welche x_3 und y_3 mit einander verbunden sind. Unterdrücken wir zugleich die Marken, so erhalten wir als Gleichung für die gesuchte Curve

$$\frac{p^2 y^2}{x^2} = -2p\frac{x^2 + y^2}{2x}$$

woraus sich nach einigen Umformungen ergibt

$$y^2 = -\frac{x^3}{p + x} = \frac{(-x)^3}{p - (-x)}.$$

Vertauschen wir hierin noch x mit $-x$, so wird $y^2 = \frac{x^3}{p - x}$. Wir erhalten also eine Cissoide, für welche der Radius des Leitkreises $a = \frac{1}{2}p$ ist.

§. 4. Weitere Untersuchungen über Gestalt und Lauf der Cissoide.

1. Im §. 1 haben wir bereits gezeigt, daß die Cissoide vom Anfangspunkte des Coordinatensystems zu beiden Seiten der Abscissenaxe, aber auf der positiven Seite der Ordinatenaxe sich in's Unendliche erstreckt, jedoch so, daß eine in der Entfernung $2a$ zur Ordinatenaxe parallel gezogene Gerade Asymptote wird. Außerdem lernten wir den Anfangspunkt als Doppelpunkt kennen. Wir wollen nun zunächst zeigen, daß mit wachsendem x auch die y wachsen, aber in stärkerm Grade. Gehören y_1 und y_2 zu den Abscissen x_1 und x_2, so ist $y_1^2 : y_2^2 = \frac{x_1^3}{2a - x_1} : \frac{x_2^3}{2a - x_1}$. Ist nun $x_2 > x_1$, so ist um so mehr $x_2^3 > x_1^3$, aber $2a - x_2 < 2a - x_1$; wächst also x, so wird auch $\frac{x^3}{2a - x}$ wachsen, aber in weit stärkerem Maaße.

2. Untersuchung der Krümmung gegen die Abscissenaxe. Eine Curve ist in einem Punkte convex oder concav gegen die Abscissenaxe, je nachdem für diesen Punkt $y.\frac{d^2y}{dx^2} \gtrless 0$ ist. Setzen wir nun die Gleichung der Cissoide $y^2(2a - x) - x^3 = 0 = F$, so ist bekanntlich:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}.\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.\frac{\partial F}{\partial x}.\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}$$

Für unsere Cissoide ist nun:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -(y^2 + 3x^2), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y(2a - x),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -6x, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -2y, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2(2a - x).$$

Setzen wir dieses ein, so erhalten wir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12xy^2(2a-x)^2 + 4y^2(2a-x)(y^2+3x^2) - (2a-x)(y^2+3x^2)^2}{4y^3(2a-x)^3}$$

$$= \frac{12xy^2(2a-x)^2 + 3(2a-x)(y^2+3x^2)(y^2-x^2)}{4y^3(2a-x)^3}.$$

Aus der Gleichung der Curve folgt nun:

$$y^2(2a-x) = x^3, \quad y^2 + 3x^2 = \frac{2x^2(3a-x)}{2a-x}, \quad y^2 - x^2 = \frac{2x^2(x-a)}{2a-x}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke ein, so erhalten wir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12x^4(2a-x)^2 + 12x^4(3a-x)(x-a)}{4yx^3(2a-x)^3}$$

$$= 3x.\frac{(2a-x)^2 + (3a-x)(x-a)}{y(2a-x)^3} = \frac{3a^2x}{y(2a-x)^3}.$$

Mithin erhalten wir $y\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{3a^2 x}{(2a - x)^3}$. Da nur solche x zulässig sind, welche positiv und kleiner als $2a$ sind, so ist jener Ausdruck stets positiv, d. h. die Cissoide hat in ihrem ganzen Verlaufe eine convexe Krümmung gegen die Abscissenaxe.

Durch eine ähnliche Untersuchung finden wir, daß die Cissoide stets eine concave Krümmung gegen die Ordinatenaxe hat.

Maxima und Minima sind, wie schon aus der Entstehung der Cissoide hervorgeht, nicht vorhanden.

§ 5. Conjugirte und opponirte Punkte der Cissoide.

1. Erklärung. Ist die Summe der Abscissen zweier auf demselben Cissoidenzweige gelegenen Punkte gleich dem Durchmesser des Leitkreises, so mögen sie conjugirte Punkte heißen. Sind also x_1 und x_2 die Abscissen zweier conjugirten Punkte, so ist $x_1 + x_2 = 2a$. Liegen aber beide Punkte auf verschiedenen Zweigen, so können sie opponirte genannt werden.

2. Sind nun y_1 und y_2 die Ordinate zweier conjugirten Punkte, so ist $y_1 = \frac{x_1\sqrt{x_1}}{\sqrt{2a - x_1}} = \frac{x_1\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}$ und $y_2 = \frac{x_2\sqrt{x_2}}{\sqrt{2a - x_2}} = \frac{x_2\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$. Hieraus folgt sofort $y_1 y_2 = x_1 x_2$, d. h. das Product ihrer Abscissen. Der Maximalwerth für $x_1 x_2$ tritt ein, wenn $x_1 = x_2 = a$ wird; es kann daher auch das Product der Ordinaten zweier conjugirten Punkte höchstens gleich a^2 werden. Gehören y_1 und y_2 opponirten Punkten an, so bleibt dieser Satz noch richtig, da nur das Vorzeichen einer der Ordinaten, nicht aber die absolute Größe sich ändert. — Bezeichnen wir die zu x_1 gehörige Ordinate des Leitkreises mit η, so ist auch die zu x_2 gehörige Ordinate des Leitkreises gleich η, und wir erhalten $\eta^2 = x_1 x_2$. Es ist also $y_1 . y_2 = \eta^2$ oder $y_1 : \eta = \eta : y_2$, d. h. die Ordinate des Leitkreises welche mit einem von zwei conjugirten (oder opponirten) Punkten einer Cissoide gleiche Abscisse hat, ist die mittlere Proportionale zu den Ordinaten dieser Punkte.

3. Ist r der Radius vector eines Cissoidenpunktes, so ist $r = \sqrt{y^2 + x^2} = x\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a - x}}$. Für die Radien vectoren r_1 und r_2 zweier conjugirten und opponirten Punkte wird also $r_1 = x_1\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{x_2}}$. Daraus folgt $r_1 r_2 = 2a\sqrt{x_1 x_2} = 2a\eta$, wo η die vorhin angegebene Bedeutung hat. Das Product der Radien vectoren zweier conjugirten (oder opponirten) Punkte einer Cissoide ist also gleich dem Producte des Durchmessers des Leitkreises in diejenige Ordinate desselben, welche mit einem der beiden Cissoidenpunkte gleiche Abscissen hat. — Ferner ist noch $r_1 : r_2 = x_1\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{x_2}} : x_2\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{x_1}} = x_1^{3/2} : x_2^{3/2} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1}} : \frac{y_2}{\sqrt{x_2}}$.

4. Die Polargleichung der Cissoide lautet $r = 2a \frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi}$; setzen wir hierin $r = \frac{x}{\cos\varphi}$, so wird $x = 2a\sin\varphi^2$, woraus $\frac{x}{\sin\varphi^2} = 2a =$ constant folgt. Auch wird $\sin\varphi^2 = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}$. Sind nun φ_1 und φ_2 die Anomalien zweier conjugirten Punkte, so ist $\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{2a}}$ und $\sin\varphi_2 = \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{2a}}$; darnach wird $\cos\varphi_2 = \sqrt{1 - \sin\varphi_2{}^2} = \sqrt{1 - \frac{x_2}{2a}} = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{2a}}$. Es wird also $\sin\varphi_1 = \cos\varphi_2 = \sin(R - \varphi_2)$, woraus $\varphi_1 + \varphi_2 = R$ folgt. Die Anomalien zweier conjugirten Punkte bilden also zusammen einen rechten Winkel; folglich stehen die Radien vectoren zweier opponirten Punkte auf einander senkrecht.

5. Bezeichnen wir den Endpunkt B des Durchmessers des Leitkreises als Gegenscheitel der Cissoide und ist ψ der Winkel, den die Verbindungslinie eines Cissoidenpunktes und des Gegenscheitels mit der Abscissenaxe bildet, so ist $\operatorname{tg}\psi = \frac{y}{2a - x} = \frac{x^{3/2}}{(2a - x)^{3/2}}$. Bezeichnen wir diese Winkel mit ψ_1 und ψ_2, wenn sie zwei conjugirten (oder opponirten) Punkten entsprechen, so ist $\operatorname{tang}\psi_1 = \frac{x_1\sqrt{x_1}}{x_2\sqrt{x_2}}$ und $\operatorname{tang}\psi_2 = \frac{x_2\sqrt{x_2}}{x_1\sqrt{x_1}}$, woraus durch Multiplication folgt $\operatorname{tang}\psi_1 . \operatorname{tang}\psi_2 = 1$; es ist also $\operatorname{tang}\psi_1 = \operatorname{cotg}\psi_2 = \operatorname{tang}(R - \psi_2)$ und also $\psi_1 + \psi_2 = R$. Es ist also auch die Summe der beiden Winkel, welche die Abscissenaxe und die Verbindungslinien zweier conjugirten (oder opponirten) Punkte mit dem Gegenscheitel bilden, gleich einem rechten Winkel; folglich stehen die Verbindungslinien zweier opponirten Punkte mit dem Gegenscheitel auf einander senkrecht. In Verbindung mit dem vorhin angeführten Satze folgt hieraus, daß ein über der Verbindungslinie zweier opponirten Punkte als Durchmesser beschriebener Kreis stets durch den Scheitel und den Gegenscheitel der Cissoide geht.

6. Die Verbindungslinie zweier conjugirten Punkte. Die Gleichung einer durch zwei conjugirte Punkte gelegten Geraden ist $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. Nun ist aber mit Hülfe der Cissoidengleichung $y_1 - y_2 = \frac{x_1\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} - \frac{x_2\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{x_1{}^2 - x_2{}^2}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{2a(x_1 - x_2)}{\sqrt{x_1 x_2}}$, also $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2a}{\sqrt{x_1 x_2}}$. Folglich wird die Gleichung der Geraden:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{2a}{\sqrt{x_1 x_2}} \text{ oder } y = \frac{2a}{\sqrt{x_1 x_2}}(x - x_1) + y_1 = \frac{2a}{\sqrt{x_1 x_2}} x - \sqrt{x_1 x_2}.$$

Ist also x_0 die Abscisse des Durchschnittspunktes mit der Abscissenaxe, und y_0 die Ordinate des

§ 6. Das delische Problem und Newton's Construction der Cissoide.

1. Wie schon im Eingange der Abhandlung bemerkt wurde, war es Diocles, der die Cissoide erfand, um mittelst derselben das bei den griechischen Mathematikern bekannte Problem von der Verdoppelung des Würfels zu lösen. Dieses Problem hieß das delische, weil einst bei einer Hungersnoth das Orakel des Apollo geboten hatte, den goldenen Altar des Gottes, der die Gestalt eines Würfels hatte, zu verdoppeln. — Denken wir uns zwei congruente Würfel mit einer Fläche auf einandergesetzt, so kommt es also darauf an, dieses nunmehrige rechtwinklige Parallelepipedum in einen Würfel zu verwandeln. Da man indeß leicht ein beliebiges Parallelepipedum in ein inhaltsgleiches rechtwinkliges mit quadratischem Inhalte verwandeln kann, so haben wir also hier die Aufgabe, ein Parallelepipedum in einen Würfel zu verwandeln.

Es sei nun p die Kante der quadratischen Grundfläche, q die Höhe des Parallelepipedums, und man bezeichne mit z die Kante des gesuchten Würfels. Es soll dann $z^3 = p^2 q$ sein, wobei für das delische Problem noch $q = 2p$ ist. Man kann die Aufgabe auch so darstellen: man soll zu zwei Linien p und q zwei mittlere geometrische Proportionalen suchen. Sind dies z und v, so soll also $p:z = z:v = v:q$ sein, woraus $z^2 = pv$, $v^2 = qz$ und $z^3 = p^2 q$ folgt. Denkt man sich nun z und v als Parallelcoordinaten, so sind $z^2 = pv$ und $v^2 = qz$ zwei apollonische Parabeln, und die Aufgabe wäre also durch die Construction der beiden Parabeln gelöst. Indeß müßte man dann für jedes p und q neue Parabeln construiren.

Mit Hülfe der Cissoide wird die Aufgabe in folgender Weise gelöst. Es werde (Fig. 3.) auf dem Durchmesser des Leitkreises von B aus ein Stück $BN = q$ abgetragen, und auf AB in N die Senkrechte $NM = p$ errichtet; verbindet man dann B mit M und verlängert die BM bis zum Durchschnitt P mit der Cissoide, zieht AP und hierzu durch M die Parallele KM, so ist KM die Kante z des gesuchten Würfels. — Denn es ist zunächst nach der Cissoidengleichung $PR^2 = \frac{AR^3}{AB - AR} = \frac{AR^3}{BR}$, also $AR^3 = AP^2 . BR$. Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke APR und KMN folgt nun $AR:KN = PR:MN$. Aus dieser Gleichung wird also:

$$\frac{AR^3}{KN^3} = \frac{PR^3}{MN^3} = \frac{PR^2}{MN^2} \cdot \frac{PR}{MN} = \frac{PR^2}{MN^2} \cdot \frac{BR}{BN}.$$

Da nun aber $AR^3 = PR^2 . BR$ ist, so muß auch $KN^3 = MN^2 . BN$ oder $z^3 = p^2 q$ sein.[1])

2. Eine sehr sinnreiche Construction, die Cissoide durch eine stetige Bewegung zu beschreiben, hat Newton angegeben in dem Werke Arithm. univ. de aequationum constructione lineari p. 231. Es sei AB der Durchmesser und O der Mittelpunkt des Leitkreises; auf der negativen Abscissenaxe

[1]) Näheres über die Geschichte des delischen Problems findet man in der Schrift: Historia problematis de cubi duplicatione sive de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas, auct. N. Th. Reimer. Goettingae. 1798.

liege C so, daß $CA=a$ sei; ferner sei in O auf AB die Senkrechte OQ errichtet. Läßt man nun den Scheitel eines rechten Winkels CED sich so bewegen, daß der eine Schenkel stets durch den festen Punkt C geht, während der andere Schenkel von OQ so geschnitten wird, daß das zwischen den Scheitel E und die OQ fallende Stück ED beständig gleich $2a$ ist, so beschreibt der Mittelpunkt F von ED die Cissoide.

Zum Beweise ziehe man noch $FG \perp OQ$ und $FL \perp AB$, und bezeichnen den Durchschnitt der CE und der FL mit H. Es ist nun $GF=OL=x-a$; $DF=\frac{1}{2}DE=a$; also $GD=\sqrt{a^2-(x-a)^2}=\sqrt{x(2a-x)}$. Ist nun $\sphericalangle ECA=\alpha$, so ist auch $\sphericalangle EDO=EFL=\alpha$. Im Dreiecke DFG ist nun $\sin\alpha=\frac{x-a}{a}$ und $\cos\alpha=\frac{\sqrt{x(2a-x)}}{a}$. Ferner ist im Dreiecke FHE $FH=\frac{a}{\cos\alpha}$ und im Dreiecke HLC $HL=CL\tang\alpha=(a+x)\tang\alpha$. Folglich wird $y=FH+HL=\frac{a}{\cos\alpha}+(a+x)\tang\alpha=\frac{a+(a+x)\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Setzen wir hierin für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ ihre Werthe ein, so wird $y=\frac{a^2+(a+x)(x-a)}{\sqrt{x(2a-x)}}=\frac{x^2}{\sqrt{x(2a-x)}}$, also $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$. Wir erhalten also als Ort des Punktes F eine Cissoide. Wie übrigens das Instrument einzurichten sei, ist aus dem Obigen leicht zu ersehen, so daß wir die Beschreibung unterlassen

Zweiter Abschnitt.

Tangenten, Normalen und Krümmungskreis der Cissoide. Ihre Rectification und Quadratur; Cubatur des Umdrehungskörpers.

§. 1. Tangente und Normale.

1. Eine in einem Punkte $x_1\, y_1$ an eine Curve gezogene Tangente hat die Gleichung $(y-y_1)\frac{\partial F}{\partial y_1}+(x-x_1)\frac{\partial F}{\partial x_1}=0$. Für die Cissoide ist $F=y^2(2a-x)-x^3=0$. Darnach wird nun $\frac{\partial F}{\partial x_1}=-(y_1{}^2+3x_1{}^2)$ und $\frac{\partial F}{\partial y_1}=2y_1\,(2a-x_1)$; folglich wird die Gleichung der Cissoidentangente im Punkte $x_1\, y_1$:

$$2y_1(y-y_1)(2a-x_1)-(x-x_1)(y_1{}^2+3x_1{}^2)=0,$$

oder

$$y=\frac{y_1{}^2+3x_1{}^2}{2y_1(2a-x_1)}\,x+\frac{y_1{}^2(4a-3x_1)-3x_1{}^3}{2y_1(2a-x_1)}.$$

Mit Hülfe der Cissoidengleichung ist nun:

$$y_1{}^2+3x_1{}^2=\frac{2x_1{}^2(3a-x_1)}{2a-x_1},\quad 2y_1\,(2a-x_1)=2x_1\sqrt{x_1\,(2a-x_1)}$$

$$y_1{}^2(4a-3x_1)-3x_1{}^3=-\frac{2a\,x_1{}^3}{2a-x_1}.$$

Setzen wir dieses ein, so erhalten wir nach einiger Umformung:

$$y=\frac{[3a-x_1]\sqrt{x_1}}{[2a-x_1]^{3/2}}\,x-\frac{a\,.\,x_1{}^{3/2}}{[2a-x]^{3/2}}.$$

Geben wir endlich dieser Gleichung noch die Form der Plückerschen Gleichung für die gerade Linie, so wird:

$$\frac{x}{\frac{a\,x_1}{3a-x_1}}-\frac{y}{\frac{a\,x_1{}^{3/2}}{(2a-x)^{3/2}}}=1 \text{ oder } \frac{x}{\frac{a\,x_1}{3a-x_1}}-\frac{y}{\frac{a\,y_1}{2a-x_1}}=1.$$

Bemerkung. Die Tangente schneidet also hiernach auf der Abscissenaxe das Stück $\frac{a x_1}{3a - x_1}$ und auf der Ordinatenaxe das Stück $-\frac{a y_1}{2a - x_1}$ ab; sie schneidet also stets die positive Abscissenaxe, dagegen die negative Ordinatenaxe, wenn der Punkt im ersten, die positive, wenn er im vierten Quadranten liegt. — Sind Y_1 und Y_2 die beiden Stücke, welche zwei in zwei opponirten Punkten gezogene Tangenten auf der Ordinatenaxe abschneiden, so ist $Y_1 Y_2 = \frac{a^2 y_1 y_2}{x_1 x_2}$. Nun haben wir aber früher gezeigt, daß $y_1 y_2 = x_1 x_2$ ist; also wird $Y_1 Y_2 = a^2$. Schneiden also (Fig 2) die in den opponirten Punkten P und P_1 gezogenen Tangenten die Ordinatenaxe in M und M_1, so ist $AM.AM_1 = AO^2$, folglich $\sphericalangle MOM_1 = R$.

2. Die Gleichung der im Punkte $x_1 y_1$ an eine Curve gezogenen Normale hat die Form:

$$(y - y_1)\frac{\partial F}{\partial x_1} - (x - x_1)\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0.$$

Hieraus wird:

$$y = -\frac{2 y_1 (2a - x_1)}{y_1^2 + 3 x_1^2}\, x + \frac{x_1^2 + x_1^2 + 4 a x_1}{y_1^2 + 3 x_1^2}\, y_1$$

$$= -\frac{[2a - x_1]^{3/2}}{(3a - x_1)\sqrt{x_1}}\, x + \frac{a[4a - x_1]\sqrt{x_1}}{[3a - x_1]\sqrt{2a - x_1}}$$

In der Plücker'schen Form lautet die Gleichung:

$$\frac{x}{\frac{a x_1 (4a - x_1)}{(2a - x_1)^2}} + \frac{y}{\frac{a(4a - x_1)\sqrt{x_1}}{(3a - x_1)\sqrt{2a - x_1}}} = 1 \text{ oder } \frac{x}{\frac{a x_1 (4a - x_1)}{(2a - x_1)^2}} + \frac{y}{\frac{a y_1 (4a - x_1)}{x_1 (3a - x_1)}} = 1.$$

Bemerkung. Die Normale schneidet also auf der Abscissenaxe das Stück $\frac{a x_1 (4a - x_1)}{(2a - x_1)^2}$ auf der Ordinatenaxe das Stück $\frac{a y_1 (4a - x_1)}{x_1 (3a - x_1)}$ ab Die erstere wird immer auf der positiven Seite geschnitten, die letztere auf der positiven oder negativen Seite, je nachdem der Punkt im ersten oder letzten Quadranten liegt.

3. Bezeichnen wir mit T und N die Länge der Tangente und Normale vom Tangirpunkte bis zur Abscissenaxe, bedeuten ferner St und Sn die Subtangente und Subnormale so ist:

$$T = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2},\quad N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},\quad St = -y\frac{dx}{dy},\quad Sn = y\frac{dy}{dx}.$$

Nun ist aber, wie wir vorhin zeigten, $\frac{\partial F}{\partial x} = -(y^2+3x^2) = -\frac{2x^2(3a-x)}{2a-x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$ $(2a-x) = 2x\sqrt{x(2a-x)}$. Folglich wird

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{(3a-x)\sqrt{x}}{(2a-x)^{3/2}} \text{ und } \frac{dx}{dy} = \frac{(2a-x)^{3/2}}{(3a-x)\sqrt{x}}$$

Also wird $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(2a-x)^3+(3a-x)^2x}{(2a-x)^3} = \frac{a^2(8a-3x)}{2a-x)^2x}$

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{(3a-x)^2x+(2a-x)^3}{(3a-x)^2x} = \frac{a^2(8a-3x)}{(3a-x)^2x}$$

Mit Hülfe dieser Werthe wird also:

$$T = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2a-x}} \cdot \frac{a\sqrt{8a-3x}}{(3a-x)\sqrt{x}} = \frac{ax\sqrt{8a-3x}}{(3a-x)\sqrt{2a-x}}$$

$$N = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2a-x}} \cdot \frac{a\sqrt{8a-3x}}{(2a-x)^{3/2}} = \frac{ax\sqrt{x(8a-3x)}}{(2a-x)^2},$$

$$St = -\frac{\sqrt{2a-x}}{x\sqrt{x}} \cdot \frac{(2a-x)^{3/2}}{(3a-x)\sqrt{x}} = -\frac{x(2a-x)}{3a-x},$$

$$Sn = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2a-x}} \cdot \frac{(3a-x)\sqrt{x}}{(2a-x)^{3/2}} = \frac{x^2(3a-x)}{(2a-x)^2}$$

4. Die Aufgabe, in einem Punkte $x_1 y_1$ der Cissoide eine Tangente an dieselbe zu ziehen, wird am elegantesten mit Hülfe der Subtangente gelöst. Für den betreffenden Punkt ist nämlich $St = -\frac{x_1(2a-x_1)}{3a-x_1}$, und die Construction wird hiernach folgende. Es sei (Fig 2.) PD die Ordinate und AD die Abscisse des betreffenden Cissoidenpunktes P; PD werde in F vom Leitkreise geschnitten, und es sei $AC = 3a$. Nun ist $FD^2 = AD.BD = x_1(2a-x_1)$; ferner ist $DC = AC - AD = 3a - x_1$. Errichtet man also in F auf FC eine Senkrechte, welche die Abscissenaxe in E schneidet, so ist DE die Subtangente, folglich ist EP die Tangente der Cissoide im Punkte P.

5. Satz. Parallel zu einer Geraden läßt sich stets eine, aber auch nur eine Tangente an die Cissoide ziehen — Ist die Gleichung der Geraden $y = px+q$, so muß, wenn die Tangente der Cissoide im Punkte $x_1 y_1$ ihr parallel sein soll, $\frac{dy_1}{dx_1} = p$ sein, oder $\frac{(3a-x_1)\sqrt{x_1}}{(2a-x_1)^{3/2}} = p$. Quadriren wir diese Gleichung und ordnen sie nach Potenzen von x_1, so wird:

$$x_1^3 - 6ax_1^2 + 3a^2\frac{3+4p^2}{1+p^2}.x_1 - \frac{8a^3p^2}{1+p^2} = 0.$$

Setzen wir hierin $x_1 = z + 2a$, so erhalten wir

$$z^3 - \frac{3a^2}{1+p^2} z + \frac{2a^2}{1+p^2} = 0.$$

Da der Coefficient von z das negative Vorzeichen hat, so kann die Gleichung drei, aber auch nur eine reelle Wurzel haben. Die Gleichung $z^3 - \alpha z + \beta = 0$ hat aber drei reelle Wurzeln, oder nur eine, je nachdem $27\beta^2 \lesseqgtr 4\alpha^3$ ist. Wenden wir dieses auf unsere Gleichung an, so finden wir, daß sie stets eine, aber auch nur eine Wurzel hat. Wir erhalten also für jedes p eine, aber auch nur eine Tangente.

§. 2. Krümmungskreis und Evolute.

1. Ist ϱ der Radius des Krümmungskreises im Punkte $x_1 y_1$ einer Curve so ist:

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}}$$

Nun haben wir im vorigen §. gezeigt, daß

$$1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 = \frac{a^2[8a - 3x_1]}{[2a - x_1]^3}$$

ist. Da nun, wie wir schon früher sahen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3a - x)\sqrt{x}}{(2a - x)^{3/2}}$$

ist, so erhalten wir, wenn wir diesen Ausdruck nochmals differentiiren, nach einiger Umformung:

$$\frac{d^2 y}{dx} = \frac{3a^2\sqrt{x(2a - x)}}{x(2a - x)^3}.$$

Setzen wir diese Werthe ein, so erhalten wir:

$$\varrho = \frac{\left[\frac{a^2(8a - 3x_1)}{(2a - x_1)}\right]^{3/2}}{\frac{3a^2\sqrt{x_1(2a - x_1)}}{x_1(2a - x_1)^3}} = \frac{a^3[8a - 3x_1]^{3/2} \cdot x_1[2a - x_1]^3}{[2a - x_1]^{9/2} \cdot 3a^2\sqrt{x_1(2a - x_1)}}$$

$$= \frac{a\sqrt{x_1}[8a - x_1]^{3/2}}{3(3a - x_1)^2}.$$

Bemerkung. Eine einfache Relation verknüpft noch die Länge der Normalen mit dem Radius des Krümmungskreises; es ist nämlich:

$$N : \varrho = \frac{ax\sqrt{x(8a - 3x)}}{(2a - x)^2} : \frac{a\sqrt{x}[8a - 3x]^{3/2}}{3(2a - x)^2} = 3x : 8a - 3x.$$

Hiernach ist die Construction des Krümmungsradius leicht.

2. Sind α und β die Coordinaten der Evolute, so ist

$$\alpha = x - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ und } \beta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Setzen wir hierin die schon öfter benutzten Werthe ein, so wird zunächst:

$$\alpha = x - \frac{x^3(3a - x)(8a - 3x)}{3x^2(2a - x)^2} = -\frac{ax(12 - 5x)}{3(2a - x)^2}.$$

Ferner wird

$$\beta = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2a - x}} + \frac{(8a - 3x)\sqrt{x}}{3\sqrt{2a - x}} = \frac{8a\sqrt{x}}{3\sqrt{2a - x}}.$$

Diese beiden Gleichungen stellen uns die Evolute der Cissoide dar, und zwar sind die Coordinaten der Evolute als Veränderliche der Cissoidenabscisse dargestellt. Wollen wir nur eine einzige Gleichung zwischen α und β haben, so setzen wir zunächst $\beta^4 = \frac{4096a^4x}{81(2a - x)^2}$. Folglich wird $\frac{\beta^4}{\alpha} = -\frac{4096a^3x}{27(12a - 5x)}$; hieraus wird $x = \frac{324a\beta^4}{135\beta^4 - 4096a^3\alpha}$, also $2a - x = -\frac{54a\beta^4 - 8192a^4\alpha}{135\beta^4 4096a^3\alpha}$.

Setzen wir diese Werthe in die quadrirte Gleichung für β ein, so wird

$$\beta^2 = -\frac{64a^2 \frac{324a\beta^4}{135\beta^4 - 4086a^3\alpha}}{9 \cdot \frac{54a\beta^4 + 8192a^4\alpha}{135\beta^4 - 4096a^3\alpha}} = -\frac{1152a^2\beta^4}{27\beta^4 + 4096a^3\alpha}.$$

Folglich wird die Gleichung der Evolute:

$$27\beta^4 + 1152a^2\beta^2 + 4096a^2\alpha = 0.$$

§. 3. Länge und Schwerpunkt des Bogens.

1. Der Bogen s wird aufgefunden durch die Gleichung:

$$s = \int\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2}\, dx.$$

Setzen wir hierin die schon mehrfach gebrauchten Werthe ein, so wird

$$s = a\int\sqrt{\frac{8a - 3x}{2a - x}} \cdot \frac{dx}{2a - x}.$$

Um dieses Integral rational zu machen, setzen wir die Größe unter dem Wurzelzeichen gleich v^2 und erhalten so:

$$x=2a\frac{v^2-4}{v^2-3},\quad 2a-x=\frac{2a}{v^2-3},\quad dx=\frac{4av}{(v^2-3)^2}dv.$$

Setzen wir dieses ein, so wird:

$$s=2a\int\frac{v^2\,dv}{v^2-3}=2a\int dv+6a\int\frac{dv}{v^2-3}.$$

Wir haben nun diese beiden Integrale zu bestimmen; es ist

$$1)\quad 2a\int dv=2av,$$

$$2)\quad 6a\int\frac{dv}{v^2-3}=a\sqrt{3}\int\frac{dv}{v-\sqrt{3}}-a\sqrt{3}\int\frac{dv}{v+\sqrt{3}}=a\sqrt{3}\,l\frac{v-\sqrt{3}}{v+\sqrt{3}}.$$

Bezeichnen wir mit c die Constante der Integration, so wird also

$$s=2av+a\sqrt{3}\,l\frac{v-\sqrt{3}}{v+\sqrt{3}}+c,$$

und setzen wir v seinen Werth ein, so erhalten wir:

$$s=2\sqrt{\frac{8a-3x}{2a-x}}+a\sqrt{3}\,l\frac{\sqrt{8a-3x}-\sqrt{6a-3x}}{\sqrt{8a-3x}+\sqrt{6a-3x}}+c.$$

Um die Constante zu bestimmen, beachten wir, daß $s=0$ wird für $x=0$; wir erhalten also:

$$0=4a+a\sqrt{3}\,l(7-4\sqrt{x})+c$$

$$c=-4a-a\sqrt{3}\,l(7-4\sqrt{3}).$$

Setzen wir dieses ein und beachten, daß $7-4\sqrt{3}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, so wird

$$s=2a\frac{\sqrt{8a-3x}}{\sqrt{2a-x}}-4a+\sqrt{3}\,l\frac{[2+\sqrt{3}][\sqrt{8a-3x}-\sqrt{6a-3x}]}{[2-\sqrt{3}][\sqrt{8a-3x}+\sqrt{6a-3x}]}.$$

2. Ist x_1 die Abscisse des Schwerpunkts des Bogens, so ist

$$sx_1=a\int x\,ds=\int x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx,$$

und setzen wir hierin die betreffenden Werthe ein, so wird

$$sx_1=\int\sqrt{\frac{8a-3x}{2a-x}}\cdot\frac{x\,dx}{2a-x}.$$

Wir benutzen hier wieder dieselbe Substitution, wie vorhin, und erhalten:

$$sx_1=4a^2\int\frac{v^4-2v^2}{(v^2-3)^2}dv=4a^2\int dv+4a^2\int\frac{2v^2-9}{(v^2-3)^2}dv.$$

Das erste Integral gibt $4a^2v$; dem zweiten geben wir folgende Gestalt:

$$\int\frac{2v^2-9}{(v^2-3)^2}dv=\frac{5\sqrt{3}}{12}\int\frac{dv}{v-\sqrt{3}}-\frac{5\sqrt{3}}{12}\int\frac{dv}{v+\sqrt{3}}-\frac{1}{4}\int\frac{dv}{(v-\sqrt{2})^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dv}{(v-\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{12}\,l(v-)-\frac{5\sqrt{3}}{12}\,l(v+\sqrt{3})+\frac{1}{4}\frac{1}{v-\sqrt{3}}+\frac{1}{4}\frac{1}{v+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{12}\,l\frac{v-\sqrt{3}}{v+\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{v}{v^2-3}.$$

Setzen wir dieses ein, so wird

$$s x_1=4a^2v+\frac{2a^2v}{v^2-3}+\frac{5\sqrt{3}}{3}a^2l\frac{v-\sqrt{3}}{v+\sqrt{3}}+c,$$

$$=2a^2v\frac{2v^2-5}{v^2-3}+\frac{5\sqrt{3}}{3}a^2l\frac{v-\sqrt{3}}{v+\sqrt{3}}+c,$$

$$=a(6a-x)\frac{\sqrt{8a-3x}}{\sqrt{2a-x}}+\frac{5\sqrt{3}}{3}a^2l\frac{\sqrt{8a-3x}-\sqrt{6a-3x}}{\sqrt{8a-3x}+\sqrt{6a-3x}}+c,$$

wo c die Integrationsconstante ist; bestimmen wir diese, indem wir beachten, daß $s x_1=0$ ist für $x=0$, so wird:

$$c=-12a^2-\frac{5\sqrt{3}}{3}a^2l\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}},$$

und wir erhalten also:

$$s x_1=a(6a-x)\frac{\sqrt{8a-3x}}{\sqrt{2a-x}}-12a^2+\frac{5\sqrt{3}}{3}a^2l\frac{[2+\sqrt{3}][\sqrt{8a-3x}-\sqrt{2a-x}]}{[2-\sqrt{3}][\sqrt{8a-3x}+\sqrt{2a-x}]}.$$

Dividiren wir diesen Ausdruck durch den vorhin für s entwickelten, so erhalten wir die Abscisse x_1 des Schwerpunktes des Bogens.

3. Die Ordinate des Schwerpunktes erhalten wir aus der Relation:

$$s y_1=\int y\,ds=a\int\frac{x\sqrt{x(8a-3x)}}{(2a-x)^2}dx.$$

Um dieses Integral rational zu machen, setzen wir $\sqrt{\frac{8a-3x}{3x}}=v$, und erhalten so:

$$s y_1=-\frac{256a^2}{\sqrt{3}}\int\frac{v^2dv}{(1+v^2)^2(3v^2-1)^2}.$$

Zerlegen wir den Bruch unter dem Integralzeichen in Partialbrüche, so wird:

$$s y_1=\frac{16a^2}{\sqrt{3}}\int\frac{dv}{(1+v^2)^2}+\frac{8a^2}{\sqrt{3}}\int\frac{dv}{1+v^2}-\frac{48a^2}{\sqrt{3}}\int\frac{dv}{(3v^2-1)^2}-\frac{24a}{\sqrt{3}}\int\frac{dv}{3v^2-1}.$$

Um das erste Integral zu lösen, entwickeln wir durch partielle Integration folgende Formel:

$$\int\frac{dv}{(1+v^2)^p}=\frac{v}{(1+v^2)^p}+2p\int\frac{dv}{(1+v^2)^{p+1}}.$$

Setzen wir im Zähler des letzten Integrals $v^2=1+v^2-1$, so wird

$$\int\frac{dv}{(1+v^2)^p}=\frac{v}{2(1+v^2)^p}+2p\int\frac{dv}{(1+v^2)^p}-2p\int\frac{v^2dv}{(1+v^2)^{p+1}},$$

woraus wir die Reductionsformel erhalten:

$$\int\frac{dv}{(1+v^2)^{p+1}}=\frac{v}{2p(1+v^2)^p}+\frac{2p-1}{2p}\int\frac{dv}{(1+v^2)^p}.$$

Setzen wir hierin $p=1$, so erhalten wir das erste Integral:

$$\int\frac{dv}{(1+v^2)^2}=\frac{v}{2(1+v^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dv}{1+v^2}=\frac{v}{2(1+v^2)p}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} v.$$

Das zweite Integral entspricht einer bekannten Formel; es ist $\int\frac{dv}{1+v^2}=\operatorname{arc\,tang} v.$

Das dritte und vierte Integral fassen wir zusammen, indem wir $-\frac{24a^2}{\sqrt{3}}$ ausklammern, und es bleibt also, indem wir jenen Factor verläufig unberücksichtigt lassen:

$$2\int\frac{dv}{(3v^2-1)^2}+\int\frac{dv}{3v^2-1}=\int\frac{3v^2+1}{(3v^2-1)^2}dv=\frac{1}{2}\int\frac{dv}{(v\sqrt{3}-1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dv}{(v\sqrt{3}+1)^2}.$$

Führen wir jetzt die Integration aus, so erhalten wir:

$$\int\frac{3v^2+1}{(3v^2-1)^2}dv=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\frac{1}{v\sqrt{3}-1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\frac{1}{v\sqrt{3}+1}=-\frac{v}{3v^2-1}.$$

Setzen wir diese Werthe in die Formel für sy_1 ein, so erhalten wir, wenn wieder c die Integrationsconstante ist:

$$sy_1=\frac{16a^2}{\sqrt{3}}\left[\frac{v}{2(1+v^2)}+\tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} v\right]+\frac{8a^2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang} v+\frac{24a^2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{v}{3v^2-1}+c,$$

oder, wenn wir die algebraischen und transscendenten Ausdrücke zusammenfassen,

$$sy_1=\frac{16a^2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{v[3v^2+1]}{[1+v^2][3v^2-1]}+\frac{16a^2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang} v+c.$$

Setzen wir wieder $v=\sqrt{\frac{8a-3x}{3x}}$, so erhalten wir hieraus nach einiger Umformung

$$sy_1=a\frac{4a-x}{2a-x}\sqrt{x(8a-3x)}+\frac{16a^2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{8a-3x}{3x}}+c.$$

Um die Constante zu bestimmen, beachten wir, daß $sy_1=0$ wird, für $x=0$; darnach wird also $c=-\frac{8}{\sqrt{3}}a^2\pi$. Es ist also:

$$sy_1=a\frac{4a-x}{2a-x}\sqrt{(x8a-3x)}+\frac{16a^2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{8a-3x}{3x}}-\frac{8}{\sqrt{3}}a^2\pi.$$

Dividiren wir diesen Ausdruck durch den vorhin für s entwickelten, so erhalten wir die Ordinate y_1 des Schwerpunkts des Bogens.

§. 4. Inhalt und Schwerpunct der Cissoidenfläche.

1. Bezeichnet λ den Inhalt der von der Abscissenaxe, einer Ordinate und dem zugehörigen Cissoidenbogen begränzten Fläche, so ist $\lambda = \int y\,dx = \int \sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,.\,x\,dx.$

Um dieses Integral rational zu machen, setzen wir die Wurzelgröße gleich v, und erhalten so:

$$\lambda = 8a^2\int\frac{v^4\,dx}{(1+v^2)^2} = 8a^2\int\frac{dv}{(1+v^2)^3} - 16\,a^2\int\frac{dv}{(1+v^2)^2} + 8a^2\int\frac{dv}{1+v^2}.$$

Wenden wir die im vorigen §. gefundene Reductionsformel:

$$\int\frac{dv}{(1+v^2)^{p+1}} = \frac{v}{2p(1+v^2)^p} + \frac{2p-1}{2p}\int\frac{dv}{(1+v^2)^p}$$

zunächst auf das erste Integral an, so wird

$$8a^2\int\frac{dv}{(1+v^2)^3} = \frac{2a^2v}{(1+v^2)^2} + 6\,a^2\int\frac{dv}{(1+v^2)^2}.$$

Folglich wird $\lambda = \frac{2a^2v}{(1+v^2)^2} - 10\,a^2\int\frac{dv}{(1+v^2)^2} + 8a^2\int\frac{dv}{1+v^2}.$

Durch nochmalige Anwendung jener Formel wird

$$\lambda = \frac{2a^2v}{(1+v^2)^2} - \frac{5a^2v}{1+v^2} + 3\,a^2\int\frac{dv}{1+v^2} \quad \text{also } \lambda = -\frac{a^2v\,(3+5\,v^2)}{(1+v^2)^2} + 3a^2\,\mathrm{arc\,tang}\,v + c.$$

Setzen wir statt v seinen Werth wieder ein, so erhalten wir

$$\lambda = -\frac{1}{2}(3a+x)\sqrt{x(2a-x)} + 3a^2\,\mathrm{arc\,tang}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}.$$

Die Constante wird Null, da $\lambda = 0$ wird für $x = 0$. Für $x = a$ erhalten wir $\lambda = \frac{3}{2}a^2\pi$, so daß also die ganze unendliche von der Cissoide und ihrer Asymptote eingeschlossene Fläche $3\,a^2\pi$ wird, d. h. gleich dem dreifachen Inhalte des Leitkreises.

Für $x = a$ wird $\lambda = -2\,a^2 + 3\,a^2.\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}a^2\,[3\,\pi - 8]$; verbindet man also die beiden Durchschnittspunkte der Cissoide und des Leitkreises mit einander, so ist die von dieser Geraden und der Geraden eingeschlossene Fläche $\frac{1}{2}a^3[3\,\pi - 8]$.

Da der Inhalt des Kreisquadranten gleich $\frac{1}{4}a^2\pi$ ist, so ist die vom Kreisquadranten und und der Cissoide begränzte Fläche $\frac{1}{4}a^2\pi - \frac{1}{4}a^2(3\,\pi - 8) = \frac{1}{2}a^2(4 - \pi)$; also der Inhalt der beiden Flächen $a^2(4 - \pi)$.

2. Für die Abscisse des Schwerpunkts der Cissoidenfläche ist $\lambda\,x_1 = \int x\,y\,dx = \int\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,x^2\,dx.$

Mit Hülfe derselben Substitution wie vorhin wird auch dieses Integral rational, und wir erhalten:

$$\lambda x_1 = -16a^3\int\frac{dv}{(1+v^2)^4} + 48a^3\int\frac{dv}{(1+v^2)^3} - 48a^3\int\frac{dv}{(1+v^2)^3} + 16a^3\int\frac{dv}{1+v^2}$$

Mit Hülfe der schon mehrfach benutzten Reductionsformel wird:

$$1)\ 16a^3\int\frac{dv}{(1+v^2)^4} = \frac{8a^3v}{3(1+v^2)^3} + \frac{40a^3}{3}\int\frac{dv}{(1+v^2)^3} = \frac{8a^3v}{3(1+v^2)^3} + \frac{10a^3v}{3(1+v^2)^2} + 10a^3\int\frac{dv}{(1+v^2)^2};$$

$$= \frac{8a^3v}{3(1+v^2)^3} + \frac{10a^3v}{3(1+v^2)^2} + \frac{5a^3v}{1+v^2} + 5a\,\mathrm{arc\,tang}\,v;$$

$$2)\ 48a^3\int\frac{dv}{(1+v^2)^3} = \frac{12a^3v}{(1+v^2)^2} + 36a^3\int\frac{dv}{(1+v^2)^2} = \frac{12a^3v}{(1+v^2)^2} + \frac{18a^3v}{1+v^2} + 18a^3\,\mathrm{arc\,tang}\,v:$$

$$3)\ 48a^3\int\frac{dv}{(1+v^2)^2} = \frac{24a^3v}{1+v^2} + 24a^3\,\mathrm{arc\,tang}\,v:$$

$$4)\ 16a^3\int\frac{dv}{1+v^2} = 16a^3\,\mathrm{arc\,tang}\,v.$$

Setzen wir diese Werthe ein und fassen zugleich die algebraischen und die transscendenten Ausdrücke zusammen, so wird: $\lambda x_1 = -\frac{15+40v^2+33v^4}{3(1+v^2)^3}a^3v + 5a^3\,\mathrm{arc\,tang}\,v.$

Setzen wir zugleich für v wieder seinen Werth ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen:

$$\lambda x_1 = -\frac{1}{6}[15a^2+5ax+2x^2]\sqrt{x(2a-x}+5a^3\,\mathrm{arc\,tang}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}.$$

Eine Constante braucht nicht hinzugefügt zu werden, da $\lambda x_1 = 0$ werden muß für $x=0$.

3. Die Ordinate des Schwerpunktes der Fläche gibt uns die Formel:

$$\lambda y_1 = \frac{1}{2}\int y^2dx = \frac{1}{2}\int\frac{x^3}{2a-x}dx.$$

Um dieses Integral zu bestimmen, verwandeln wir es durch Division in eine Reihe, und setzen also:

$$\frac{x^3}{2a-x} = \frac{8a^3-8a^3+x^3}{2a-x} = \frac{8a^3}{2a-x} - 4a^2 - 2ax - x^2.$$

darnach erhalten wir:

$$\lambda y_1 = \frac{1}{2}\int\left[\frac{8a^3}{2a-x} - 4a^2 - 2ax - x^2\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}[c - 8^3 l(2a-x) - 4a^2x - ax^2 - \frac{1}{3}x^3].$$

Um die Constante zu bestimmen, beachte man wieder, daß beide Seiten für $x=0$ verschwinden müssen. Folglich wird $c = 8a^3 l(2a)$ und wir erhalten somit:

$$\lambda y_1 = \frac{1}{2}[8a^3 l\frac{2a}{a-2x} - 4a^2x - ax^2 - \frac{1}{3}x^3]$$

§. 5. Inhalt und Schwerpunkt des Rotationskörpers.

1. Bezeichnet V den Inhalt eines Körpers, der durch Rotation der Cissoide um die Abscissenaxe entsteht, so ist bekanntlich:

$$V = \pi \int y^2 dx = \pi \int \frac{x^3}{2a - x} dx.$$

Wir erhalten hier dieselbe Integrale, wie bei der Berechnung der Ordinate des Schwerpunkts der Fläche; es wird also:

$$V = \pi \left[8a^3 l \frac{2a}{2a - x} - 4a^2 x - a x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right].$$

2. Da der Rotationskörper symmetrisch um die Rotationsaxe, also um die Abscissenaxe vertheilt ist, so liegt auch der Schwerpunkt in derselben und es braucht also nur die Abscisse desselben berechnet zu werden. Diese wird erhalten durch die Formel:

$$V x_1 = \pi \int x y^2 dx = \pi \int \frac{x^4 dx}{2a - x}$$

$$= \pi \int \left[\frac{16a^4}{2a - x} - 8a^3 - 4a^2 x - 2a x^2 - x^3 \right] dx$$

$$= \pi \left[c - 16a^4 l (2a - x) - 8a^3 x - 2a^2 x^2 - \frac{2}{3} a x^3 - \frac{x^4}{4} \right].$$

Da die Constante $c = \pi . 16 a^4 l (2a)$ ist, so ist also:

$$V x_1 = \pi \left[16a^4 l \frac{2a}{2a - x} - 8a^3 x - 2a^2 x^2 - \frac{2}{3} a x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right].$$

Berichtigung. Auf Seite 12 am Schluß hinzuzufügen:

Durchschnittspunktes mit der Ordinatenaxe, so ist $x_0 = \frac{x_1 x_2}{2a}$ und $y_0 = -\sqrt{x_1 x_2}$. Hieraus folgt $y_0 = -\eta$, wo η die vorige Bedeutung hat.

F

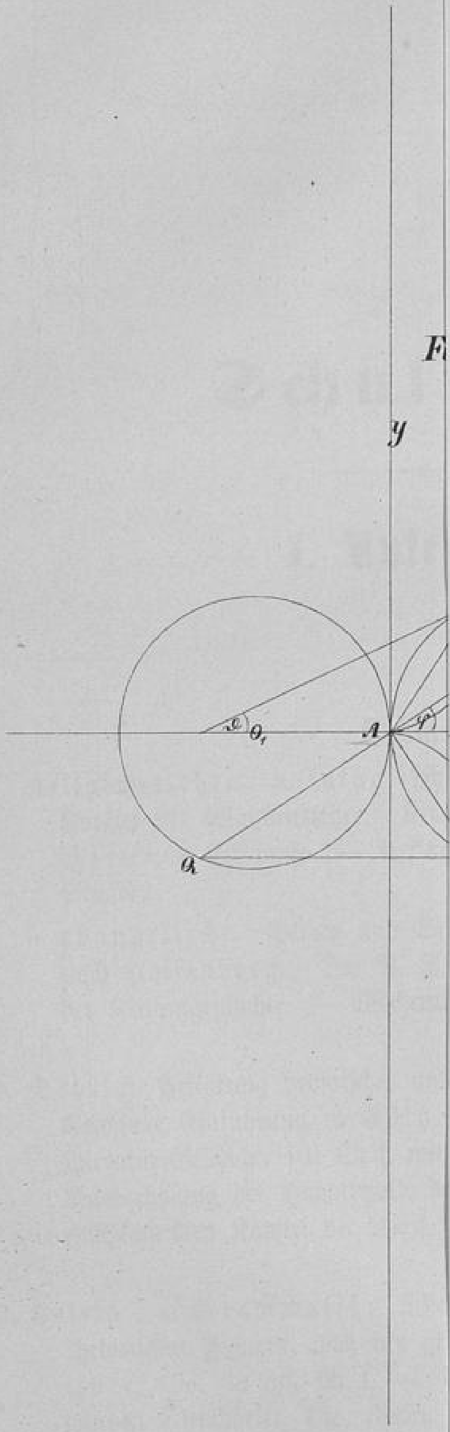


Fig. III.

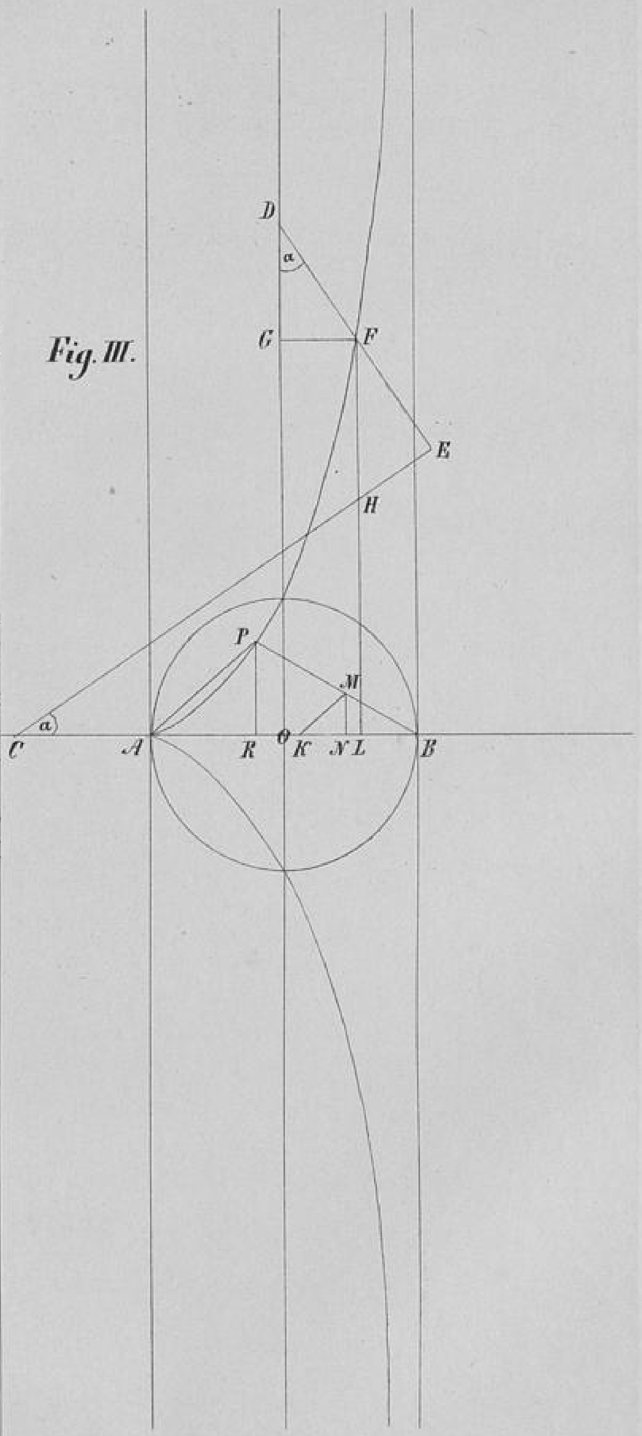


Fig. I.

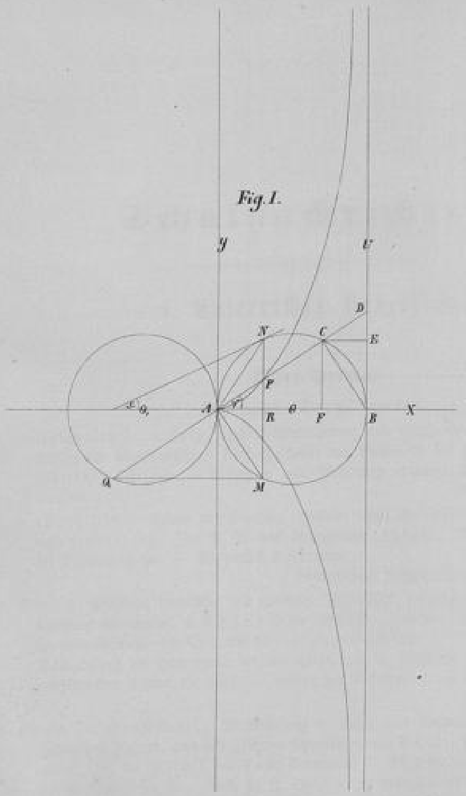


Fig. II.

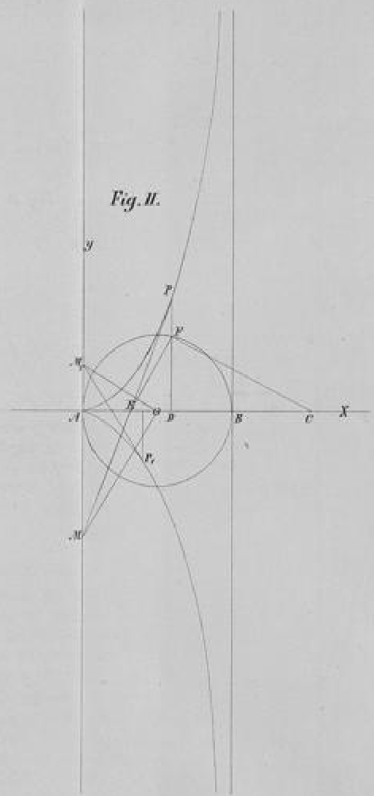
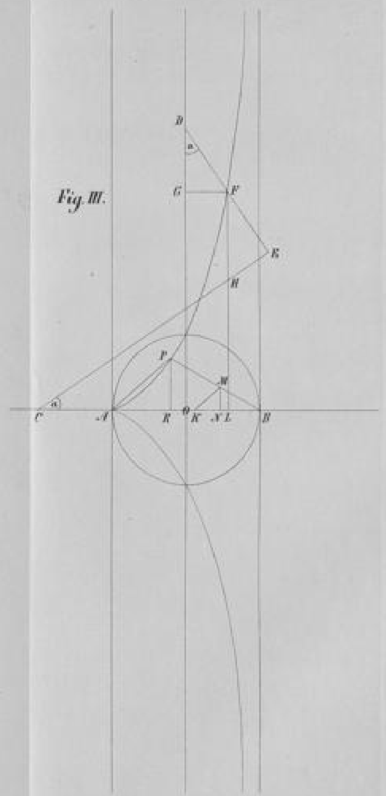


Fig. III.



Schulnachrichten.

I. Unterrichts-Uebersicht.

Ober-Prima.

Ordinarius: Der Director.

1. Religionslehre. a. katholische: Wiederholung und eingehendere Begründung wichtigerer Kapitel der Glaubenslehre. Kirchengeschichte von Bonifacius bis auf die Gegenwart. Nach Martin's Lehrbuche. — Erklärung und Memoriren einzelner Psalmen. — Wöchentlich 2 Stunden. Der Ordinarius.

   b evangelische. Prima und Secunda combinirt: Biblische Geschichte des A. T. übersichtlich nach Hollenberg. Im N. T. das Evangelium Johannis. Die ersten 6 Jahrhunderte der Kirchengeschichte. — Wöchentlich 2 Stunden.
   Evangelischer Religionslehrer Pfarrer Bruns.

2. Deutsch. Erklärung prosaischer und poetischer Musterstücke aus Bone's Lesebuch, Th. II. — Genauere Einführung in Göthe's Leben und Werke. Lectüre und Erklärung der Iphigenie. Literatur-Geschichte seit Opitz mit Proben aus dem Lesebuche. — Uebungen im Vortrage. — Wiederholung der Hauptpunkte der Aufsatzlehre und im Anschlusse an dieselbe Erörterung der einschlagenden Kapitel der Logik. — Censur des Aufsatzes. (s. u.) Wöchentlich 3 Stunden.
   Der Ordinarius.

3. Latein a. Grammatik: Wiederholung der Lehre vom Satzbau; die grammatischen und rhetorischen Figuren, nach der größeren Sprachlehre von Schulz, Kap. 67—69. — b. Lectüre: Cic. de off. lib I. — Tacit. Germania. — Abschnitte aus Liv. lib. VII. und XI wurden extemporirt, Cic. divin. in Q. Caec. u. de amicitia als Privatlectüre der Schüler größtentheils kursorisch in der Klasse übersetzt. — 24 ausgewählte Oden aus Hor. Carm

lib. I.—IV., von denen auch mehrere memorirt wurden, nebst einigen Epoden, Satiren und Episteln. Interpretation theilweise lateinisch. — c. Wöchentlich ein Extemporale, zuweilen Exercitium nebst metrischen Uebungen — d. Leitung und Censur des Aufsatzes (s. u.) Wöchentlich 8 Stunden. Oberlehrer Ferrari.

4. Griechisch. Cyr. lib. IV.; außerdem Extemporiren ausgewählter Abschnitte. Platon. Eutyphro. Thuc. lib. II. (mit Auswahl). Hom. Il. lib. VIII., IX., XII., XIII., XX. Soph. Electra. Memoriren ausgewählter Abschnitte; Interpretation größtentheils lateinisch.*— Vervollständigung der Syntax nach Schnorbusch und Scherer. — Wöchentlich 1 Extemporale, zuweilen Exercitium. — Wöchentlich 6 Stunden. Der Ordinarius.

5. Hebräisch. Repetition und Vervollständigung der Formenlehre; die wichtigsten Partien der Syntax. Nach der Grammatik von Vosen. — Gelesen wurden Abschnitte aus den historischen Büchern des Alten Testaments und einige leichtere Psalmen. — Schriftliche Arbeiten. — Wöchentlich 2 Stunden. Gymnasiallehrer Dreisbusch.

6. Französisch. a. Lectüre: Montesquieu Considerations etc. und Athalie par Racine. — Wöchentlich ein Extemporale, zuweilen Exercitium im Anschluß an grammatische Repetitionen. Wöchentlich 2 Stunden. Oberlehrer Franke.

7. Geschichte und Geographie. a. Preußische Geschichte. — b. Allgemeine Geschichte der neueren Zeit. — c. Eingehendere Beschreibung des deutschen Reiches und einiger Nachbarländer. — d. Allgemeine geschichtlich-geographische Repetitionen. — Wöchentlich 3 Stunden. Ferrari.

8. Mathematik. Progressionen. Zinseszinsrechnung, Kettenbrüche, diophantische Gleichungen, binomischer Lehrsatz, nach Feaux. Repetitionen des gesammten mathematischen Lehrpensums. Mündliche und schriftliche Uebungen. — Wöchentlich 4 Stunden. Oberlehrer Harnischmacher.

9. Physik. Die Lehre vom Schalle und Lichte, nach Koppe. Wöchentlich 2 Stunden. Harnischmacher.

10. Gesang. Uebung des Kirchengesanges und des ausgewählten Männerchors. Wöchentlich 1 Stunde. Gesanglehrer Peters.

11. Turnen. (s. u.)

Unter-Prima.

Ordinarius: Oberlehrer Harnischmacher.

1. Religionslehre. Die Sittenlehre. Die Kirchengeschichte bis auf Bonifacius. Nach Martin's Lehrbuch. Wöchentlich 2 Stunden. Der Ordinarius.

2. Deutsch. a. Lectüre: Prosaische Musterstücke und Proben der älteren deutschen Literatur bis Opitz (mit besonderer Berücksichtigung des Nibelungenliedes) aus Bone's Lesebuch Th. II

Wallenstein's Tod. Auswahl aus den Gedichten Schiller's. b. Uebersicht über den Entwickelungsgang der deutschen Literatur bis zum 16. Jahrhundert. Genauere Einführung in Schiller's Leben und Werke. c. Elemente der Logik. d. Aufsatzlehre mit Uebungen; Kritik des Aufsatzes (s. u.). Wöchentlich 3 Stunden. Gymnasiallehrer Funke.

3. Latein. Cic. de amic., orat. pro lege Man., divin. in Q. Caecil., de off. lib. I. Abschnitte aus Liv. lib. XXI., meistentheils extemporirt. — Horat. carm. l. I., nebst einer Auswahl von Epoden und von Oden des III. und IV. Buches. Interpretation größtentheils lateinisch; Memoriren eines großen Theiles der erklärten Oden. — Lehre vom Satzbau und von den Figuren, nach Schultz' größerer Grammatik, Kap. 67—69. — Leitung und Censur des Aufsatzes (s. u.), einzelne Exercitien. — Wöchentlich 8 St. Der Director.

4. Griechisch. a. Grammatik: Syntax des Verbums nach Schnorbusch und Scherer. — b. Prosaische Lectüre: Xenoph. Cyr. lib. II. 4 und lib. III. — Plat. Eutyphro. — Abschnitte aus Thuc. lib. I. — c. Wöchentlich ein Extemporale im Anschlusse an die Lectüre, zuweilen häusliche Exercitien. — Wöchentlich 4 Stunden. Gymnasiallehrer Dr. Mette.

   d. Poetische Lectüre: Hom. II. lib. I.—VI. incl. (lib. IV. privatim). I. 1—53 und manche aus den folgenden Büchern ausgewählte Abschnitte wurden memorirt. — Wöchentlich 2 Stunden. Funke.

5. Hebräisch, combinirt mit Ober-Prima.

6. Französisch. a. Lectüre: Montesquieu Considerations etc. — b. Grammatik nach Knebel, §. 100 bis zum Ende. — Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. — Wöchentlich 2 Stunden. Franke.

7. Geschichte und Geographie. Geschichte der Deutschen im Mittelalter, nach Pütz. — Geographie Europa's, insbesondere Deutschlands. Wöchentlich 3 Stunden. Wissenschaftlicher Hülfslehrer Dr. Stiene.

8. Mathematik. Trigonometrie und Stereometrie nach Feaux. Mündliche und schriftliche Uebungen. Wöchentlich 4 Stunden. Der Ordinarius.

9. Physik. Mechanik nach Koppe. — Mathematische Geographie. Wöchentlich 2 Stunden. Der Ordinarius.

10. Gesang, combinirt mit Ober-Prima.

Ober-Secunda.

Ordinarius: Oberlehrer Franke.

1. Religionslehre. Das Werk unserer Heiligung und Vollendung. Nach Martins Lehrbuche. — Erklärung und Memoriren kirchlicher Hymnen. — Wöchentlich 2 Stunden. Dreisbusch.

2. Deutsch. Lectüre von poetischen und prosaischen Musterstücken aus Bone II., vorzüglich

Klopstock's Oden und Messiade, Lessing's Minna von Barnhelm; genauere Einführung in Klopstock's und Lessing's Leben und Werke. — Grundzüge der Poetik. — Aufsatzlehre, besonders Lehre von der Einleitung und vom Schluß. Censur der schriftlichen Arbeiten (s. u.). — Wöchentlich 2 Stunden. Funke.

3. Latein. a. Grammatik: Bedeutung und Gebrauch der Verbalformen, nach der latein. Sprachlehre von Schultz, Kap. 55—67. b. Prosaische Lectüre: Livius lib. VII und XXI; Cicero orat. in Catil. I. und IV. privatim: Sallust. bell. Jug. c. Mündliches Uebersetzen ins Lateinische aus Süpfle's Aufgaben. Wöchentlich ein Extemporale; Exercitien aus Süpfle; Correctur der Aufsätze (s. u). — Wöchentlich 8 Stunden. Der Ordinarius.
d. Poesie: Verg. Aen. III. Ecl. 1. 4. 5. 7. Georg. I. und IV. (theilweise). Metrische Uebungen. Memorirt wurden Aen. III., 1—48 und Ecl. 7. Wöchentlich 2 Stunden. Funke.

4. Griechisch. a. Grammatik: Nach Wiederholung der Casuslehre die Syntax des Verbums; Repetition der Verba anomala. Nach der Grammatik von Schnorbusch und Scherer. b. Prosaische Lectüre: Xenoph. Cyr. lib. I., II. (zum Theil), 40 Kapitel ausgewählter Partien aus Herodot. lib. I. c. Wöchentlich 1 schriftliche Arbeit, im Sommer-Semester meistens Extemporalien. — Wöchentlich 4 Stunden. Dreisbusch.
d. Poetische Lectüre: Hom. Odyss. I. IX XIII.,—XVI. Memorirt wurden 100 Verse. Wöchentlich 2 Stunden. Der Ordinarius.

5. Hebräisch. Die Formenlehre bis an die Segolatformen mit Ausschluß der Verba Ajin-Ajin und Ajin-Vav. Nach der Grammatik von Vosen. — Uebersetzt und analysirt wurden einige von den der Grammatik beigefügten Uebungsstücken. — Schriftliche Arbeiten. — Wöchentlich 1 Stunde. Dreisbusch.

6. Französisch. a. Lectüre: Mort de Louis XVI., par Lamartine. — b. Grammatik, nach Ploetz, Lect. 39—65. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. Wöchentlich 2 Stunden. Der Ordinarius.

7. Geschichte und Geographie. Geschichte der asiatischen Kulturvölker und der Griechen bis zum Tode Alexanders. — Geographie von Asien und Amerika. Wöchentlich 3 Stunden. Herz.

8. Mathematik. Die Aehnlichkeit der Figuren; die Verwandlung und Theilung der Figuren; die regulären Polygone; die Kreisrechnung; harmonische Punkte und Strahlen. Constructions-Aufgaben. — Wiederholung und Erweiterung der Lehre von den Potenzen und Wurzeln u. den quadratischen Gleichungen. Die Logarithmen. Nach Feaux. Mündliche und schriftliche Uebungen. Wöchentlich 4 Stunden. Harnischmacher.

9. Physik. Magnetismus und Electricität nach Koppe. Wöchentlich 1 Stunde. Harnischmacher.

10. Gesang, combinirt mit Prima.

Unter-Secunda.

Ordinarius: Oberlehrer Ferrari.

1. Religionslehre. Combinirt mit Ober-Secunda.
2. Deutsch. a. Lectüre: Schiller's Gedichte, besonders Balladen; prosaische Musterstücke aus Bone's Lesebuche II. b. Rhetorik und Poetik nach Bone. c. Dispositionsübungen, Leitung und Censur der Aufsätze. Wöchentlich 2 Stunden. Dr. Stiene.
3. Latein. a. Grammatik: Wiederholung der unregelmäßigen Verba. — Von der Uebereinstimmung der Satztheile und von der Bedeutung und dem Gebrauche des Casus. Nach der größeren Sprachlehre von Schultz. — b. Prosaische Lectüre: Liv. lib. II. Privatim mit Besprechung und kursorischer Uebersetzung in der Klasse: Nepos, 1—5, 7, 15—17, 23. — c. Mündliches Uebersetzen aus dem Deutschen in's Lateinische. — d. Wöchentlich ein Extemporale und ein Exercitium. — Wöchentlich 8 Stunden. Der Ordinarius.

   e. Poetische Lectüre: Verg. Aen. I. und II. (theilweise). Memorirt wurden 100 Verse. — Wöchentlich 2 Stunden. Dr. Mette.
4. Griechisch. a. Grammatik: Wiederholung der Formenlehre bis zu den Verben; aus der Syntax die Congruenz der Satztheile, die Lehre von dem Artikel und den Casus, nach der Grammatik von Schnorbusch und Scherer. — b. Prosaische Lectüre: Xenoph. Anab. lib II. und III. — c. Wöchentlich 1 Pensum, zuweilen Extemporalien. — Wöchentlich 4 Stunden. Funke.

   d. Poetische Lectüre: Hom. Od. l. I. und IV. Memorirt wurden 110 Verse. — Homerische Formenlehre. — Wöchentlich 2 Stunden. Der Ordinarius.
5. Hebräisch. Die Formenlehre bis an die Verba mediae geminatae und die Grundregeln der Declination. Nach der Grammatik von Vosen. — Uebersetzt wurden einige von den der Grammatik beigefügten Uebungsstücken. — Schriftliche Arbeiten. — Wöchentlich 1 Stunde. Dreisbusch.
6. Französisch. a. Lectüre: Michaud première croisade. — b. Schulgrammatik von Ploetz bis zum 5. Abschnitt. — c. Exercitien. Wöchentlich 2 Stunden. Franke.
7. Geschichte und Geographie. a. Die Geschichte der asiatischen Kulturvölker; die Geschichte der Griechen bis zum Tode Alexanders. b. Geographie von Asien und Amerika. — Wöchentlich 3 Stunden. Herz.
8. Mathematik. a. Geometrie: Die Lehre vom Kreise, von der Gleichheit und Ausmessung der Figuren nach Feaux; zahlreiche Constructionsaufgaben. b. Arithmetik: Gleichungen ersten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten; eingekleidete Gleichungen. Die Lehre von den Potenzen, Quadrat und Quadratwurzel. Schriftliche Arbeiten. Wöchentlich 4 Stunden. Gymnasiallehrer Dr. Böhmer.

9. Physik. Die allgemeinen Eigenschaften der Körper und einiges aus der Lehre von der Wärme und von den chemischen Eigenschaften der Körper nach Koppe. Wöchentlich 1 Stunde.
Harnischmacher.

10. Gesang. Combinirt mit Prima.

Ober-Tertia.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Mette.

1. Religionslehre. a. katholische: Drittes Hauptstück des Diöcesan-Katechismus (Gnadenmittel). — Erklärung der Zeiten und Feste im Kirchenjahre und der vornehmsten Ceremonien und Gebräuche der katholischen Kirche. — Wöchentlich 2 Stunden. Der Ordinarius.

   b. evangelische: Ober-Tertia bis Sexta incl. combinirt. Biblische Geschichte nach Zahn. Die fünf Hauptstücke nach Luther. Einige Psalmen und Kirchenlieder. Wöchentlich 2 Stunden. Bruns.

2. Deutsch. a. Prosodie und einfache Metra, Interpunktions- und einfache Satzlehre. b. Erklärung ausgewählter Stücke aus Bone's Lesebuch I. c. Declamation. d. Leichte Abhandlungen. Wöchentlich 2 Stunden. Herz.

3. Latein. a. Grammatik: Repetitionen aus der anomalen Formenlehre; Wortbildungslehre. — Aus der Syntax die Lehre von der Congruenz des Verbums, nach der kleineren Grammatik von F. Schulz. Mündliche und schriftliche Uebersetzungen aus dem Deutschen in das Lateinische zur Einübung der gramm. Regeln. — b. Prosaische Lectüre: Caes. bell. gall. lib. III, IV, V. — c. Wöchentlich 2 Pensa aus der Aufgabensammlung von F. Schulz. und 1 Extemporale im Anschluß an die Grammatik. — Wöchentlich 8 Stunden.
Der Ordinarius.

   d. Poetische Lectüre: Ovid. Metam. lib. IV, V und VII. Wöchentlich 2 Stunden. Herz.

4. Griechisch. a. Grammatik: Nach Wiederholung der regelmäßigen Formenlehre die verba anomala, die Präpositionen, und die Wortbildungslehre. — Aus der Syntax die wichtigsten Regeln über den Gebrauch der Casus, nach der Grammatik von Schnorbusch und Scherer. — b. Lectüre: Xenoph. Anab. lib. I. cap. I., II., VI. sqq. — c. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit aus Dominikus. Extemporalien. — Wöchentlich 6 Stunden.
Der Ordinarius.

5. Französisch. a. Grammatik: Aus dem systematischen Theile der Schul-Grammatik von Ploetz: A bis F, aus dem methodischen Theile der 3. und 4. Abschnitt. Gelesen wurde aus Rollin Homm. ill. — Exercitien. Wöchentlich 2 Stunden. Franke.

6. Geschichte und Geographie. Geschichte der Deutschen bis zum Ende des vorigen Jahrhunderts mit besonderer Berücksichtigung der Geschichte Brandenburgs und Preußens, nach Welter, Bd. 2. und 3. — Geographie von Asien, Amerika und Australien Wöchentlich 3 Stunden. Funke.

7. Mathematik. a. Geometrie: Nach Repetition des vorigjährigen Pensums die Lehre von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks und die Kreislehre. b. Arithmetik: Die vier Species in allgemeinen Zahlengrößen; Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Alle 14 Tage schriftliche Arbeiten. Wöchentlich 3 Stunden. Dr. Böhmer

8. Naturgeschichte. Im Winter Mineralogie; im Sommer Botanik. Wöchentlich 3 Stunden. Dr. Böhmer.

9. Gesang. Einübung der Kirchenlieder; Uebungen im ein- und mehrstimmigen Knabengesange. Peters.

Unter-Tertia.

Ordinarius: Wissenschaftlicher Hülfslehrer Dr. Stiene.

1. Religionslehre: Combinirt mit Ober-Tertia.

2. Deutsch Combinirt mit Ober-Tertia.

3. Latein. a. Grammatik: Die Lehre von der Wortbildung, vom Gebrauche des Indikativs, Konjunktivs, Imperativs und Infinitivs; Repetitionen aus der Kasuslehre, nach der kleinen lateinischen Sprachlehre von F. Schultz. b. Mündliches Uebersetzen aus der Aufgabensammlung von F. Schulz. Wöchentlich zwei schriftliche Arbeiten. c. Lectüre: Caesar de bello Gall. lib. I. II. Ovid Metam. lib. I. II. Einige Abschnitte wurden memorirt. Wöchentlich 10 Stunden. Der Ordinarius.

4. Griechisch Nach Repetition des vorigjährigen Pensums Fortsetzung der Formenlehre bis zu den unregelmäßigen Verben, nach der griech. Sprachlehre von Schnorbusch und Scherer. — Mündliche Uebersetzungen aus dem Uebungsbuche von Dominicus. Alle 8 Tage ein Pensum, zuweilen Extemporalien. — Wöchentlich 6 Stunden. Funke.

5. Französisch. Die unregelmäßigen Verba und im Anschlusse daran mündliches Uebersetzen aus Ploetz Schulgrammatik. Lectüre: Rollin Homm. ill. Pyrrhus. — Alle 14 Tage ein Pensum. Wöchentlich 2 Stunden. Der Ordinarius.

6. Geschichte und Geographie. Geschichte der Römer. Geographie der europäischen Staaten mit Ausschluß Deutschlands und Oesterreichs. Wöchentlich 3 Stunden. Der Ordinarius.

7. Mathematik. a. Geometrie: Die Lehre von den Winkeln, von den Parallelen, vom Dreieck und vom Parallelogramm. — b. Arithmetik: Einleitung in die Buchstabenrechnung; die vier Species in allgemeinen Zahlengrößen. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. Wöchentlich 3 Stunden. Dr. Böhmer.

8. Naturgeschichte. Combinirt mit Ober-Tertia.

9. Gesang. Combinirt mit Ober-Tertia.

Quarta.

Ordinarius: Wissenschaftlicher Hülfslehrer Herz.

1. Religionslehre. a. Erstes und drittes Hauptstück des Diöcesan-Katechismus. b. Die Geschichte der Apostel. Nach Schumacher. Wöchentlich 2 Stunden. Dreisbusch.
2. Deutsch: Lehre vom einfachen und zusammengezogenen Satz im Anschluß an Schulz's Lesebuch. b. Lesung und Erklärung ausgewählter Stücke. c. Declamation. d. Schriftliche Arbeiten. Wöchentlich 2 Stunden. Der Ordinarius.
3. Latein. a. Grammatik: Repetition des Quintapensums; die Lehre von den Casus; die Hauptregeln aus dem übrigen Theile der Syntax nach Schulz. b. Lectüre: Cornel. Nepos, 11 vitae; ausgewählte Fabeln aus Phaedrus. Mündliches Uebersetzen der Aufgaben Nro. 1–95 und 254–280 der Aufgabensammlung von Schulz, und der Sätze des Uebungsbuches im Anschluß an die Grammatik. Wöchentlich drei schriftliche Arbeiten. Wöchentlich 10 Stunden. Der Ordinarius.
4. Griechisch. Die Formenlehre bis zum verbum purum non contractum incl. nach der Grammatik von Schnorbusch und Scherer. Uebersetzung der betreffenden Uebungssätze aus Dominicus. Wöchentlich 1 schriftliche Arbeit. Wöchentlich 4 Stunden. Der Ordinarius.
5. Französisch. Ploetz, Elementarbuch: Lection 60–91. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. Wöchentlich 2 Stunden. Franke.
6. Geschichte und Geographie. Combinirt mit Untertertia.
7. Mathematik. Die Decimalbrüche und die zusammengesetzte Schlußrechnung nach Feaux's Rechenbuch. Geometrische Anschauungsübungen. Alle acht Tage 1 Pensum. Wöchentlich 3 Stunden. Dr. Böhmer.
8. Naturbeschreibung. Im Winter Säugethiere und Vögel, im Sommer Botanik. Wöchentlich 2 Stunden. Dr. Böhmer.
9. Zeichnen. Wöchentlich 2 Stunden. Zeichenlehrer Trautmann.
10. Gesang. Uebung der Kirchenlieder; fortgesetzte Treffübungen; mehrstimmiger Knabenchor. Wöchentlich 2 Stunden. Peters.

Quinta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dreisbusch.

1. Religionslehre. Combinirt mit Quarta. Außerdem in einer besonderen Stunde die Wunderwerke und Gleichnißreden Jesu. Nach Schuhmacher. — Wöchentlich 3 Stunden. Der Ordinarius.
2. Deutsch. Combinirt mit Quarta.

3. Latein. Wiederholung und Fortsetzung der Formenlehre bis an die Conjunktionen. Aus der Syntax die Uebereinstimmung der Satztheile und die Lehre vom Gebrauche des Nominativs, Akkusativs und Dativs. Nach der kleineren Grammatik von F. Schultz. — Mündliche Uebersetzungen und wöchentlich 3 Pensa aus dem Uebungsbuche von F. Schultz. — Wöchentlich 10 Stunden. Der Ordinarius.
4. Französisch. Formenlehre und mündliches Uebersetzen aus Ploetz Elementarbuch, Lect. 1—60. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. Wöchentlich 3 Stunden. Dr. Stienen.
5. Geographie. Die Geographie Europas mit Ausschluß von Deutschland. Wöchentlich 2 Stunden. Dr. Böhmer.
6. Rechnen. Fortgesetzte Uebungen in den 4 Species mit ganzen Zahlen und mit Brüchen, auch mit Decimalbrüchen. Einfache Schlußrechnungen. Alle acht Tage eine schriftliche Arbeit. — Wöchentlich 3 Stunden. Gymnasiallehrer Parensen.
7. Naturgeschichte. Combinirt mit Quarta.
8. Schreiben. Wöchentlich 3 Stunden. Trautmann.
9. Zeichnen. Wöchentlich 2 Stunden. Trautmann.
10. Gesang. Combinirt mit Quarta.

Sexta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Parensen.

1. Religionslehre. Das Wichtigste aus der Glaubens- und Sittenlehre im Anschluß an die Grundformeln und täglichen Gebete. Biblische Geschichte des alten Testaments, nach Schumacher. Wöchentlich 3 Stunden Der Ordinarius.
2. Deutsche Sprache. Leseübungen nebst Erklärung einzelner Lesestücke aus dem Lesebuche von B. Schulz. Daran wurde geknüpft die Unterscheidung der Wortarten, der Gebrauch der Präpositionen und die Lehre vom einfachen Satze. Orthographische Uebungen. Deklamation. Wöchentlich 2 Stunden. Der Ordinarius.
3. Latein. Regelmäßige Formenlehre incl. der verba deponentia nach der kleinen Sprachlehre von F. Schultz. Mündliches und zum Theil schriftliches Uebersetzen der betreffenden Uebungsstücke (Cap, I—XVII) aus dem Uebungsbuche von Schultz. Auswendiglernen der darin vorkommenden Vokabeln. Wöchentlich 4 schriftliche Arbeiten. Wöchentlich 10 Stunden. Der Ordinarius.
4. Geographie. Bewegung der Erde und des Mondes. Eintheilung der Erdkugel. Uebersichtliche Beschreibung der Meere und Europas, Asiens, Afrika's und Amerikas. Wöchentlich 2 Stunden. Der Ordinarius.
5. Rechnen. Das Einmaleins, Einübung der vier Species in benannten und unbenannten Zahlen, die gemeinen Brüche, nach dem Uebungsbuche von Feaux. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. Wöchentlich 4 Stunden. Dr. Böhmer.

6. Naturgeschichte. Im Winter Zoologie, im Sommer Botanik. Wöchentlich 2 Stunden. Der Ordinarius.

7. Schreiben. Combinirt mit Quinta.

8. Zeichnen. Combinirt mit Quinta.

9. Gesang, wie in Quarta; außerdem wöchentlich 1 Stunde: Vorkenntnisse, Treffübungen, einstimmige Lieder. Peters.

Die Turnübungen unter Leitung des Gesang- und Turnlehrers Herrn Peters wurden während des Sommer-Semesters Dinstags und Freitags Abends in zwei Abtheilungen, für die untere von 5—6, für die obere von 6—7 gehalten.

Themata der Aufsätze in den oberen Klassen.

A. der deutschen:

1. Ober-Prima.

1. Gefahren des Reichthums. — 2. Willst du dich deines Werthes freuen, — So mußt der Welt du Werth verleihen. Goethe. — 3. Ursprung und Bedeutung der griechischen Kolonien. — 4. Warum gehören die Kreuzzüge zu den bedeutendsten Begebenheiten der Geschichte? — 5. Wodurch ist es zu erklären, daß den Griechen die Abwehr der persischen Angriffe gelang? — 6. Welche Warnungen ruft das *Μηδὲν ἄγαν* des griechischen Weisen insbesondere dem studirenden Jünglinge zu? Klassenarbeit. — 7. Themistokles. Charakteristik. — 8. Hoffnung — eine der schönsten Gaben der Vorsehung für das Leben des Menschen. — 9. Bewahren ist oft schwerer, als Erringen. — 10. Früchte bietet das Leben dem Manne. Schiller. Klassenarbeit.

2. Unter-Prima.

1. „Dem Unglück ist die Hoffnung zugesendet; Furcht soll das Haupt des Glücklichen umschweben; Denn ewig wanket des Geschickes Wage. (Wallensteins Tod V, 4). — 2. Achill's erstes Auftreten in der Ilias. — 3 In welche Stimmung der Winter, hauptsächlich in Norddeutschland, das Gemüth zu versetzen pflegt. — 4. Die Zukunft ist nicht ungewiß. — 5. Lerne die Menschen ertragen! — 6. „Seit das Paradies verloren, Ist die Arbeit Menschenloos, Und die Ruhe wird geboren Nur aus der Beschäft'gung Schooß." (Rückert.) Klassenarbeit. — 7. Welche äußeren Umstände waren es vornehmlich, durch welche die geistige Bildung der Griechen so früh befördert wurde? — 8. „Nicht der ist auf der Welt verwaist, Dem Vater und Mutter gestorben, Sondern der für Herz und Geist Keine Lieb' und kein Wissen erworben." — 9. Alles, was den Geist befreit, ohne ihm die Herschaft über sich selbst zu geben, ist verderblich." (Goethe.) — 10. Stürme erneuen die Luft, aus dunkelm Gewölk steigt des Himmels Segen hernieder; — den Sohn der Erde bilden Leiden und Kampf." (Krummacher.) Klassenarbeit.

3. Ober-Secunda.

1. Ueber die böse Sitte des Aufschiebens. — 2. In welcher Hinsicht kann der Baum den Menschen beschämen? — 3. Die Kunst des Schweigens. — 4. Gutta cavat lapidem, non vi sed saepe cadendo. (Chrie) — 5. Ferro nocentius aurum. (Chrie) — 6. Die Arbeit hat bittere Wurzeln, aber süße Früchte. (Klassenarb.) — 7. Hochmuth kommt vor dem Fall. — 8. Der Mensch im Kampfe mit der Natur. — 9. Bildungsmittel sind die Widerwärtigkeiten des Lebens. — 10. Kenntnisse und ein gutes Gewissen — zwei nothwendige Anker des Lebens. (Klassenarbeit.)

4. Unter-Secunda.

1. Wir sind dem Alter Achtung schuldig. — 2. Die Unkenntniß der Zukunft ist ersprießlicher als die Kenntniß derselben. — 3. Der Strom ein Bild des menschlichen Lebens. — 4. Folgen der griechischen Nationalspiele. — 5. Welche Gründe bewogen Tell, den Geßler zu erschießen? (Nach Tells Monolog von Schiller.) — 6. Inwiefern ist die Zunge das wohlthätigste und das verderblichste Glied des Menschen? (Klassenarbeit.) — 7. Des Lebens ungetrübte Freude ward keinem Sterblichen zu Theil. — 8. Nichts ist unbeständiger als das Glück. — 9. Jeder ist seines Glückes Schmied. — 10. Werth der Zeit. (Klassenarbeit.)

B. der lateinischen:

1. Ober-Prima.

1. Bis per virum Arpinatem respublica Romana ab ipso interitu est retracta. — 2. Bella Samnitica, quos animos tum gererent Romani, singulari fuere indicio. — 3. Quaeritur, num Alexander cognomine Magni omnino sit dignus (Ext.). — 4. Quotiens populus Romanus „clades exercituum, interitum ducum, funditus amissas nobiles familias constanter tulerit". — 5. Graecorum civitatibus non magis gloriosa atque utilia fuere bella Persica, quam perniciosum ac turpe bellum Peloponnesiacum. — 6. Paucis laudentur egregii illi duces, quos bello Punico secundo fortuna civitatis Romanae habuit munimenta. — 7. Ciceronis, quod est in libro de Officiis de Philippo, Macedonum rege, filioque Alexandro iudicium, cur non omniuo verum nec aequum esse videatur. — 8. Fortitudine Miltiades, prudentia Themistocles, iustitia Aristides res Atheniensium maxime firmarunt atque auxerunt (Ext.).

2. Unter-Prima.

1. Quam incerta sit fortuna humana, et Pompeius et Caesar singulari sunt exemplo. — 2. Suis vitiis magis, quam vi externa res publicas interire, rerum historia comprobatur. — 3. Jure singulari laude celebrari nomen Solonis. — 4. Non frustra Leonidas cum suis in Thermopylis interiit. — 5. Miltiades triste ingrati Atheniensium animi exemplum (Klassenarbeit). — 6 M. Furius Camillus virtutis romanae exemplar. — 7. Jpsam victoriam interdum cladis causam fuisse. — 8. Bellorum civilium inter Marium et Sullam gestorum causæ et origo. — 9. Comparentur inter se Themistocles et M. Furius Camillus. Klassenarbeit.

3. Ober-Secunda.

1. Polycrates est documento, ne fortunae stabilitate confidamus. — 2. Brennus Romanos devincit et urbem incendio delet. — 3. Quibus difficultatibus Hannibali conflictandum fuerit in transitu Alpium. — 4. De Pyrrhi Romanorumque bello. — 5. Breviter exponatur bellum, quod Xerxes cum Graecis gessit, — 6. Alexander Magnus expugnat regnum Persarum. — 7. Argumentum primae Ciceronis in Catilinam orationis.

II. Vertheilung der Lehrgegenstände nach den Classen.

Lehrgegenstände.	Ia	Ib.	IIa.	IIb.	IIIa.	IIIb.	IV.	V.	VI.
Deutsch	3	3	2	2	2	2	2	2	2
Latein	8	8	10	10	10	10	10	10	10
Griechisch	6	6	6	6	6	6	4		
Hebräisch	2	2	1	1					
Französisch	2	2	2	2	2	2	2	3	
Religionslehre	2	2	2	2	2	2	2	3	3
Mathematik	4	4	4	4	3	3	3	3	4
Naturwissenschaften	2	2	1	1	2	2	2	2	2
Geschichte und Geographie	3	3	3	3	3	3	3	2	2
Schreiben								2	3
Zeichnen							2	2	2
Gesang	1	1	1	1	1	1	2	2	3
Turnen im Sommer	2	2	2	2	2	2	2	2	2

III. Vertheilung des Unterrichts unter die Lehrer.

	Ia.	Ib.	IIa.	IIb.	IIIa.	IIIb.	IV.	V.	VI.	Insges.
Roeren, Director, Ordinarius der Ia.	2 Religion. 3 Deutsch. 6 Griechisch.	8 Latein.								19
Harnischmacher, 1. Oberlehrer. Ordinarius der Ib.	4 Mathem. 2 Physik.	2 Religion. 4 Mathem. 2 Physik.	4 Mathem. 1 Physik.	1 Physik.						20
Ferrari, 2. Oberlehrer, Ordinarius der IIb.	8 Latein. 3 Geschicht.			8 Latein. 2 Homer.						21
Franke, 3. Oberlehrer. Ordinarius der IIa.	2 Französ.	2 Französ.	8 Latein. 2 Homer. 2 Französ.	2 Französ.	2 Französ.		2 Französ.			22
Dr. Mette, 1. ordentlicher Lehrer. Ordinarius der IIIa.		4 Griechisch.	2 Vergil.	2 Religion. (IIb.–IIIa.) 8 Latein. 6 Griechisch.						22
Dreisbusch, 2. ordentlicher Lehrer, Ordinarius der V.	2 Hebräisch. (Ia.–Ib.)		2 Religion. (IIa.–IIb.) 4 Griechisch. 1 Hebräisch.	1 Hebräisch.			2 Religion. (IV.–V.)	1 Religion. 10 Latein.		23*
Dr. Böhmer, 4. ordentlicher Lehrer.				4 Mathem.	3 Mathem. 2 Naturgeschichte. (IIIa.–IIIb.)	3 Mathem.	3 Mathem. 2 Naturgeschichte. (IV.–V.)	2 Geogr.	4 Rechnen.	23
Parensen, Gymn.-Lehrer, Ordinarius der VI.								3 Rechnen.	3 Religion. 10 Latein. 2 Deutsch. 2 Naturgesch. 2 Geogr.	22
Funke, Provisorischer Lehrer.		3 Deutsch. 2 Homer.	2 Vergil. 2 Deutsch.	4 Griechisch.	3 Geschichte.	6 Griechisch.				22
Bruns, Pfarrer, ev. Relig.-Lehrer.	2 Religion. (Ia.–IIb.)				2 Religion. (IIIa.–VI.)					4
Herz, wiss. Hülfslehrer, Ordinarius der IV.			3 Geschichte.	3 Geschichte.	2 Deutsch. (IIIa.–IIIb.) 2 Ovid.		2 Deutsch. (IV.–V.) 10 Latein. 4 Griechisch.			26
Dr. Stienen, wiss. Hülfslehrer, Ordinarius der IIIb.		3 Geschichte.		2 Deutsch.		3 Geschichte. (IIIb.–IV.) 10 Latein 2 Französ.		3 Französ.		23
Peters, Gesang- u. Turnlehrer.	1 Gesang. 2 Turnen (im Sommer.) (Ia.–IIb.)				1 Gesang. 2 Turnen (im Sommer.) (IIIa.–IIIb.)		2 Gesang. (IV.–V.)		1 Gesang.	9**
Trautmann, Zeichenlehrer.							2 Zeichnen.	2 Schreiben.	2 Zeichnen. 1 Schreiben.	7

* Außerdem bereitete derselbe durch mehrmonatlichen außerordentlichen Unterricht eine Anzahl von Schülern der unteren und mittleren Klassen zur ersten h. Communion vor. — ** Außerdem 1 Stunde für den gemischten Chor zur Uebung des mehrstimmigen Kirchengesanges.

IV. Abiturienten-Prüfung.

Von den Ober-Primanern meldeten sich 9, von denen jedoch 4 zurücktraten, zu Ostern, 22, von denen 1 zurücktrat, im Herbste zur Abiturienten-Prüfung. In der schriftlichen Prüfung hatten sie, abgesehen von dem vorgeschriebenen lateinischen, griechischen und französischen Scriptum folgende Aufgaben zu bearbeiten:

1. Religions-Arbeit. a. zu Ostern: Darlegung der thatsächlichen Beweise der Gottheit Jesu. — Die Verabscheuungswürdigkeit der Sünde. b im Herbste: Ueber die guten Werke des Gerechtfertigten. — Ueber das menschliche Gesetz und seine Verbindlichkeit.

   Evang. Abiturienten nahmen an der österlichen Prüfung nicht Theil; im Herbste war die Aufgabe gestellt: Die Bibel eine untrügliche Quelle und Richtschnur des Glaubens und Lebens.

2. Deutscher Aufsatz. a. zu Ostern: Non nobis solum nati sumus. Cic. — b. im Herbste: Wer steht, sehe zu, daß er nicht falle.

3. Lateinischer Aufsatz: a. zu Ostern: Inconstantia rerum humanarum vita Pompeii et Caesaris demonstratur. — b. im Herbste: Romanam gentem „per damna, per caedes ab ipso ferro opes animumque duxisse“.

4. Hebräisch. a. zu Ostern: I. Sam. 19, 1—6. — b im Herbste: Judic. 2, 1—6.

5. Mathematik: a. zu Ostern: 1. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben sind eine Seite, die Summe der beiden andern Seiten und die Summe der zu denselben gehörigen Höhen. — 2. Ein Capitalist besitzt ein Vermögen von 60,000 Thalern, welches sich zu 4 % verzinset. Er verbraucht jährlich eine gewisse Summe von den Zinsen zu seinem Unterhalte und schlägt den Rest zum Capitale; nach zehn Jahren sieht er sich im Besitze von 72,000 Thalern: wie viel hat er jährlich verbraucht? — 3. In einen Kreis mit dem Radius $r =$ 18,5 decim. ist ein Dreieck gezeichnet, wovon eine Seite $=$ 24,3 decim. und ein anliegender Winkel $54^0\ 24'\ 18''$ ist: man berechne die andern Seiten und Winkel. — 4. In eine kegelförmige Höhlung, deren Winkel an der Spitze des Achsenschnittes $36^0\ 12'$ beträgt, wird 28 centim. hoch Blei eingegossen: wie schwer ist dieses Blei, wenn sein spezifisches Gewicht 11,38 ist? — b. im Herbste: 1. Ein Dreieck zu zeichnen, von dem der Radius des inneren Berührungskreises, ein Winkel und das Verhältniß der denselben einschließenden Seiten gegeben sind. — 2. Eine Gemeinde nimmt ein zu 5 % verzinsliches Kapital von 12,500 Thlr. auf und will dasselbe durch jährliche Abzahlungen im Betrage von 800 Thlrn. amortisiren: in wie viel Jahren wird das geschehen können? — 3. Die Seiten und die Fläche eines Dreiecks zu berechnen, dessen Umfang 100 m., ein Winkel $47^0\ 48'\ 12''$, ein anderer $76^0\ 4'$ beträgt. — 4. Der Durchmesser einer Kugel, der 4 decm. groß ist, ist im Verhältniß von 2 zu 3 getheilt; durch den Theilpunkt ist senkrecht auf ihn eine Ebene gelegt und auf dieser in dem kleineren Kugelabschnitte ein gerader Kegel errichtet, dessen Spitze in die Oberfläche der Kugel fällt: wie groß ist der Kegel und der Kugelabschnitt?

Die mündliche Prüfung fand für den ersten Termin am 18. März, für den zweiten am 13. und 14. Juli unter dem Vorsitze des Herrn Provinzial-Schulrathes Dr. Schultz statt, und erhielten im ersten Termin 4, im zweiten 19 der Geprüften das Zeugniß der Reife. Von den Letzteren wurden Meckel, Reinstadler und Schoof auf Grund ihres Betragens und ihres Fleißes, sowie ihrer Leistungen im Laufe des Schuljahres und in der schriftlichen Prüfung von der mündlichen Prüfuug dispensirt.

Die für reif Erklärten sind:

Nro.	Name	Confession.	Geburtsort.	Alter.	Auf Prima.	Berufsfach.	Universität.
1	Biederbeck Philipp.	kathol.	Stadtberge.	23	2½	Medizin.	Würzburg.
2	Dinslage, Anton	"	Gesecke.	21	2½	Baufach.	Berlin.
3	Hüpper, Peter.	"	Olpe.	19½	2	Philologie.	Münster.
4	Schmücker Anton	"	Ostereiden.	22½	2½	Jura	Göttingen.
1	Bestian, Joseph.	kathol.	Scherfede.	19	2	Forstfach.	Neust.-Ebersw
2	Blecher, Karl.	evang.	Rüthen.	20	2	Theologie	Marburg.
3	Boeddiker, Joseph.	kathol.	Brilon.	21	2	Theologie.	Münster.
4	Dumont, Karl.	"	Rheinbach.	20	2	Jura.	Bonn.
5	Fleuster, Hermann.	"	Bonn.	20½	2	Jura.	Bonu.
6	Gerhartz Peter.	"	Wormersdorf	20	2	Jura.	Bonn.
7	Gerlach, Friedrich.	"	Siders(Schweiz)	18	2	Bergfach.	Freiberg.
8	Hilsmann, Joseph.	"	Rüthen	19	2	Jura.	Heidelberg.
9	Hockenbeck, Aloys.	"	Alverskirchen.	22	2	Jura.	Göttingen.
10	Hockertz, Michael.	"	Hollnich	23½	3	Verwaltung.	—
11	Hüser, Karl.	"	Brilon.	19½	2	Bergfach.	Berlin.
12	Kiesgen, Wilhelm.	"	Wittlich.	21½	3	Jura.	Göttingen.
13	Killing, Karl.	"	Medebach.	22	3	Baufach.	Hannover.
14	Meckel, Theodor.	"	Iserlohn.	20	2	Theologie.	Münster
15	Menn, August	"	Koblenz.	20	2	Jura.	Berlin.
16	Reinstadler, Albert.	"	Longcamp.	20½	2	Medizin.	Greifswalde.
17	Schoof, Heinrich.	"	Halingen.	21½	2	Philologie.	Münster.
18	Schulte, Johann.	"	Allendorf.	20½	3	Medizin.	Würzburg.
19	Wiemer, Franz.	"	Nuttlar.	21½	2	Theologie.	Münster.

V. Verordnungen der vorgesetzten Behörden.

1. Münster, den 20. November 1873. Das Königliche Provinzial-Schulcollegium genehmigt, daß die allgemeine Ferien-Ordnung — unter Aufhebung des früher gestatteten Wegfalles der Weihnachts- und Pfingstferien — forthin auch am hiesigen Gymnasium durchgeführt werde.
2. Münster, den 23. Juni 1874. Mittheilung eines Ministerial-Erlasses vom 11. Juni, wonach die deutschen Staats-Regierungen behufs gegenseitiger Anerkennung der von deutschen Gymnasien ausgestellten Maturitäts-Zeugnisse überein-

gekommen sind, bei den Gymnasien gewisse Grundsätze gemeinsam zu befolgen. Unter Anderem soll danach die Cursusdauer des vollständigen Gymnasiums 9 Jahre betragen und die Aufnahme in die unterste Klasse in der Regel nicht vor dem vollendeten 9. Lebensjahre erfolgen. Bei einem Anstaltswechsel soll die Aufnahme eines Schülers nur nach Beibringung eines Entlassungs-Zeugnisses von der vorher besuchten Anstalt und nicht in eine höhere Klasse oder Abtheilung, als wofür dieses ihm die Reife beilegt, erfolgen, der Wechsel dem Schüler auch keinen Zeitgewinn rücksichtlich der ordnungsmäßigen Cursusdauer einbringen. Als Maßstab für die Ertheilung des Zeugnisses der Reife sollen im Allgemeinen diejenigen Anforderungen gelten, welche das preußische Prüfungs-Reglement dafür aufstellt. Die Zuerkennung des Zeugnisses der Reife soll nicht durch den vom Schüler gewählten Beruf motivirt werden dürfen. Bei der mündlichen Prüfung soll ein Regierungs-Commissarius zugegen sein. Junge Leute, welche die Prüfung als Externe ablegen, sollen dies in der Regel nur in dem Staate können, dem sie angehören, und Ausnahmen von dieser Regel nur bei zureichenden Gründen statthaft sein; auch sollen dieselben das Gymnasium, an welchem sie die Prüfung ablegen, nicht selbst wählen können, sondern gehalten sein, darüber die Bestimmung der betreffenden Schulaufsichts-Behörde einzuholen,

3. Münster, den 25. Juli 1874. Das Königliche Provinzial-Schulcollegium verfügt, daß forthin der 2. September in allen Lehranstalten seines Ressorts durch einen feierlichen Schulact ausgezeichnet werde. Unmittelbar im Anschlusse an denselben kann die Entlassung der Abiturienten, die der übrigen Schüler jedoch frühestens am 3. September stattfinden. Die Herbstferien sollen dann vom 4. September ab 37 Tage dauern.

VI. Chronik.

A. Das Schuljahr begann Donnerstag, den 2. October, mit den Prüfungen der neu aufzunehmenden und den Nachprüfungen früherer Schüler und wurde nach deren Beendigung am folgenden Samstage mit feierlichem Gottesdienste eröffnet.

Am 22. März beging die Anstalt das Geburtsfest Sr. Majestät des Kaisers und Königs in üblicher festlicher Weise.

Am 26. März wurde von der Anstalt das feierliche Jahrgedächtniß für den verstorbenen Wohlthäter des Gymnasiums Landdechanten und Ehrendomherrn Johann Schlüter, am 28. ej. das für die verstorbene Schwester desselben und Wohlthäterin der Gymnasialkirche Cath. Elis. Siebert, geb. Schlüter gehalten.

Kurz vor und nach Ostern fanden die vorschriftsmäßigen Klassenprüfungen statt.

Am Feste Mariä Heimsuchung, Sonntag den 5. Juli, feierten 20 Schüler der unteren und mittleren Klassen, durch Herrn Dreisbusch mit Sorgfalt und Aufopferung zu diesem Tage vorbereitet, ihre erste h. Communion.

Dinstag, den 25. August, wurden die Turnübungen durch ein Probeturnen sämmtlicher Klassen in Gegenwart des Lehrer-Collegiums geschlossen.

Noch in den letzten Tagen des Schuljahrs wurde die Anstalt von dem Schmerze betroffen, einen durchaus braven Schüler, den sie eben in das Leben entlassen sollte, durch den Tod zu verlieren. Der Abiturient Franz Wiemer wurde, als er nach wohlbestandener Prüfung für einige Zeit nach Nuttlar zu seinen Eltern beurlaubt war, daselbst von einem heftigen Nervenfieber ergriffen und verschied am Abend des 25. August. Mit den braven Eltern, die vor einigen Monaten einen jüngeren Sohn an der nemlichen Krankheit verloren, betrauert die Anstalt den hoffnungsvollen Jüngling, der ihr bei musterhaftem Fleiße und Betragen nie den geringsten Anlaß zu irgend einer Ausstellung gegeben hatte. Nachdem am 28. in seiner Heimath die Exequien stattgefunden hatten, hielt die Anstalt Samstag, den 29., für ihn ein feierliches Seelenamt in der Gymnasial-Kirche.

B. Mit dem Schlusse des vorigen Schuljahrs traten die Candidaten Anton Hochstein aus Bremscheid und Joseph Pietz von hier, nachdem sie ihr Probejahr gehalten und zugleich als wissenschaftliche Hülfslehrer fungirt hatten, von der Anstalt aus, Ersterer, um eine Hülfslehrerstelle am Friedrich-Wilhelms-Gymnasium zu Köln zu übernehmen, Letzterer, um sein freiwilliges Dienstjahr zu halten.

Mit dem Beginne des neuen Schuljahres traten dagegen die Candidaten Dr. Stienen aus Peckelsheim und Dr. Böhmer aus Essen als wissenschaftliche Hülfslehrer, Letzterer zugleich zur Vollendung seines Probejahrs, bei der Anstalt ein.

Unter dem 4. Mai d. J. wurde Herr Dr. Böhmer, nachdem sein Probejahr abgelaufen war, mit Genehmigung des Königlichen Provinzial-Schulcollegiums zum 4. ordentlichen Lehrer berufen, um vorzugsweise als zweiter Mathematikus zu fungiren.

C. Die Gesammtzahl der Schüler im Laufe des Schuljahrs belief sich auf 236, von denen 212 katholischer, 20 evangelischer, 4 mosaischer Confession, den Heimats-Verhältnissen nach 76 Einheimische, 160 Auswärtige waren. Auf die Klassen vertheilten sie sich in folgender Weise: Ia 27 Ib 34, IIa 32, IIb 44, IIIa 35, IIIb 20, IV 18, V 20, VI 6.

VII. Verzeichniß der Schüler

während des Schuljahrs 1873–74.

Ia.

1, Bastian, Joseph, a. Scherfede.
2, Biederbeck, Philipp a. Stadtberge.
3, Blecher, Karl, aus Rüthen.
4, Boeddiker, Jos., aus Brilon.
5, Bremm, Franz, aus Zell.
6, Dinslage, Anton, a. Gesecke.
7, Dumont, Karl, a. Rheinbach.
8, Fleuster, Hermann, a. Bonn.
9, Gerhartz, Peter, aus Wormersdorf.
10, Gerlach, Friedr., a. Siders.
11, Hilsmann, Franz, a. Rüthen.
12, Hockenbeck, Aloys, aus Alverskirchen.
13, Hockertz, Michael, a. Hollnich.
14, Hüpper, Peter, aus Olpe.
15, Hüser, Karl, aus Brilon.
16, Kiesgen, Wilhelm, aus Wittlich.

17, Killing, Karl, a. Medebach.
18, Meckel, Theodor, aus Iserlohn.
19, Menn, August, aus Koblenz.
20, Reinstadler, Albert, aus Longcamp,
21, Schaveaux, Heinrich, aus Kaimt.
22, Schmücker, Anton, aus Ostereiden.
23, Schoof, Heinr., a. Halingen.
24, Schutte, Johann, aus Allendorf.
25, Sicken, Karl, a. Lichtenau.
26, Soreth, Leonard, a. Olpe.
27, Wiemer, Franz, a. Nuttlar.

Ib.

1, Beckers, Richard, aus Haus Traar.
2, Busch, Herm, a. Stolberg.
3, Cramer, Aug., a. Paderborn.
4, Cremer, Simon, a. Lontzen.
5, Dahm, Heinr., aus Affeln.
6, Evers, Herm., aus Büren.
7, Feldmann, Franz, a. Wallen.
8, Feuring, Karl, a. Finnentrop.
9, Fickermann, Egon, a. Werl
10, Gierden, Joseph, a. Großlittgen.
11, Guischard, Friedrich, aus Prüm.
12, Habbel, Franz, a. Affeln.
13, Heinzen, Valentin, aus Neidenbach.
14, Henry, Louis, aus Bonn.
15, Hesse, Otto, aus Metze.
16, Hundt, Friedr., aus Attendorn.
17, Kleffner, Johann, aus Niedermarsberg.
18, Laufenberg, Hubert, aus Stieldorf.
19, Louwens, Jos., a. Walhorn.
20, v. Lüninck, Karl, a. Ostwig.
21, Maas, Franz, a. Lindhövel
22, Meßler, Jos., aus Langenholthausen.
23, Orbach, Hermann, aus Wipperfürth.
24, Quinke, Ernst, aus Kirchhundem.
25, Schmitz, Franz, aus Grevenstein.
26, Schmücker, Aug., a. Oestereiden.
27, Schröder, Wilhelm, aus Rösenbeck.
28, Schwickardi, Joh. a. Brilon.
29, Schwubbe, Aug., a Nieheim,
30, Wackermann, Rudolph, aus Asbach.
31, Wenzel, Leonhard, aus Rüstungen.
32, Wrede, Wilh., a. Dortmund.
33, Wüllner, Ludw, a. Bruchhausen.
34, Wulff, Heinr., a. Wickede.

IIa.

1, Adam, Otto, a. Königsfeld.
2, Baltes, Michael, a. Roschberg.
3, Becker, Franz, a. Bredenborn.
4, Birkenfeld, Hubert, aus Ober-Alme.
5, Buff, August, aus Burbach.
6, Cruismann, Wilhelm, aus Riemke.
7, Evers, Gustav, aus Büren
8, Falke Franz, aus Brilon.
9, Feind, Carl, aus Celle.
10, Feldmann, Joseph, aus Warstein.
11, Hüser, Franz, aus Brilon.
12, Josten, Ludwig, a. Hinsbeck.
13, Kayser, Anton, aus Ober-Salwey.
14, Klein, Jakob, a Eludenbach.
15, v. Lilien, Aloys, a. Werl.
16, Meschede, Joseph, aus Uppsprunge
17, Meßler, Franz, aus Langenholthausen.
18, v. Michels, Emil, a. Soest.
19, Niederquell, Franz, aus Stadtberge.
20, Potthast, Joh., a. Löwendorf.
21, Roeren, Carl, aus Castrop.
22, Schaefer, Jos., a. Mayen.
23, Schlinkert, Franz a. Warstein.
24, Schlinkert, Jos. a. Ramsbeck.
25, Schlüter, Jos., aus Menzel.
26, Schoene, Franz, aus Warstein.
27, Scholl, Wlh., a Kotzenroth.
28, Seibertz, Engelbert, aus Brilon.
29, Struif, Herm., a. Warstein.
30, Thomé, Joh., a. Baustert.
31, Waldecker, Johann, aus Rübenach.
32, Wietmann, Andreas, aus Bremen.

IIb.

1, Alterauge, Bernhard, aus Drolshagen.
2, Bastian, Gustav, a. Warburg.
3, Berghoff, Franz, a. Menzel.
4, Boden, Constant., a. Lövenich.
5, „ Franz „ „
6, Buhr, Jos., a. Niederbreitbach.
7, Claude, Joh., aus Asbach
8, Dalberg, Sally, aus Brilon.
9, Fidler, Andreas, aus Werl.
10, Geilen, Jos., a. Niedersfeld.
11, Gellhorn, Hugo, a Meschede.
12, Gerlach, Heinr., a. Sitten.
13, Gierse, Anton, a. Boedefeld.
14, Gombert, Carl, a. Kirchhain.
15, Gruß, Wilhelm, a. Brilon.
16, Haßbach, Peter, a. Roßbach.
17, Holzapfel, Wilhelm, aus Wilhelmsruhe.
18, Hoppe, Jos., aus Hagen.
19, Kemna, Carl, aus Leithe.
20, Kiesler, Franz, aus Grönebach.
21, Klöckner, Jos., a. Asbach.

22, Kraft, Joseph, a. Brilon.
23, Lorsbach, Carl, aus Gebhardshain.
24, Möller, Herm., a. Brilon.
25, Oppenheim, Carl, aus Kirchhundem.
26, Oppenheim, Joseph, aus Kirchhundem.
27, Pellio, Leonh, a. Ediger.
28, Plattfaut, Eberhard, aus Westönnen.
29, Quick, Joseph aus Brilon.
30, Reimann, Aug „ „
31, Rottgeri, Louis, a. Gesecke.
32, Schoenenberger, Jos., aus Gennweiler.
33, Stockschläder, Peter, aus Gebhardshain.
34, Struif Jos., a. Meschede.
35, Tebbe, Joseph, aus Dörnholthausen.
36, Tersteffe, Albert, a. Büren.
37, Vogel, Caspar, a. Mawicke.
38, Wacker, Carl, aus Neuenkleusheim.
39, Weckbecker, Jac., a Moselfürsch.
40, Wilden, Joh., a. Lützerath.
41, „ Jos., „ „
42. Wisser, Peter, a. Mudersbach.
43, Walloth, Fritz, a. Manderscheid.
44, Wrede, Fritz, aus Rüthen.

IIIa.

1, Alberts, Rud., a. Raffenberg.
2, Aust, Alex, aus Brilon.
4, Becker, Anton, aus Brilon,
4, Cosack, Felix, aus Neheim.
5, Cramer, Gust., a Niedersfeld.
6, Dettmer, Johann, aus Neuenkleusheim.
7, Funke, Jos., a. Scharfenberg.
8, Heers, Franz, aus Brilon.
9, Heimer, Caspar, aus Estinghausen.
10, Hüser, Fritz, aus Brilon.
11, Junk, Heinrich, aus Lieser.
12, Klemann, Carl, aus Empel.
13, Köster, Arnold, aus Brilon.
14, Köster, Matth., „ „
15, Koch, Wilhelm, „ „
16, Laue, Alwin, aus Mainz.
17, Leiße, Eduard, aus Brilon.
18, Lingenauber, Anton, aus Siedlinghausen.
19, Lingenauber, Johann, aus Siedlinghausen.
20, Meyer, Aug., a. Callenhardt.
21, Meyer, Joseph, aus Brilon.
22, Mott, Wilhelm aus Elberfeld.
23, Müller, Fr a. Gebhardshain.
24, Müller, H., „ „
25, Neveling, Peter, aus Hövel.
26, Ostermann, Joseph, a. Flerke.
27, Pietz, Carl, aus Laasphe.
28, Ramrath, Albert, a. Brilon.
29, Rhode, Anton, aus Hagen.
30, Röcher, Anton, aus Altenkleusheim.
31, Schmelter, Ferdinand, aus Möhneburg.
32, Schmidt, Jos., a. Allendorf.
33, Schmitz, Aloys, a. Garzweiler.
34, Vogel, Ferdinand, a. Brilon.
35, Wiepen, Franz, „ „

IIIb.

1, Brach, Johann, aus Bonn.
2, Bringschulte, Theodor, aus Andreasberg.
3, Götte, Franz, aus Brilon.
4, Grüneberg, Alb., „ „
5, Hegener, Engelb., a. Bestwig.
6, Hillebrand, Anton aus Brilon.
7, Körting, Anton, aus Lippstadt.
8, Meier, Heinrich a. Bredenborn.
9, Ramroth, Carl, aus Brilon.
10, Rüther, Matth, „ „
11, Scheid, Hermann, aus Dringenberg.
12, Schindler, Carl, a. Arnsberg.
13, Schulte im Hofe, August, aus Uekendorf.
14, Schumacher, Heinrich, aus Corbach.
15, Simonis, Nicolaus, a. Treis.
16, Stich, Fritz, aus Fürstenberg.
17, Urban, Max aus Hoherlehme.
18, Wedemann, Joseph a. Brilon.
19, von Wrede, Carl, aus Melschede.
20, Zimmermann, Wilhelm, aus Westenfeld

IV.

1, Abel, Anton, aus Brilon.
2, Buff, Emil, aus Meschede.
3, Falke, Wilhelm, aus Brilon.
4, Hillebrand, Rob., „ „
5, Jacobs, Wilh., a. Paderborn.
6, von der Nahmer, Wilhelm, aus Brilon.
7, Quinke, Jos., a. Kirchhundem.
8, Richter, Fritz, aus Brilon.
9, Schiff, Bernh., a. Volkmarsen.
10, Schlaucher, Johann, aus Merschweiler.
11, Schluter, Egon, aus Brilon.
12, Schwickardi, August, aus Brilon.
13, Struif, Franz, aus Brilon.
14, Suchan, Friedrich, a. Oeding.
15, Terburg, Joseph, aus Brilon.
16, Vondereck, Ludwig, aus Brilon.
17, Scheid, Otto, aus Dringenberg.
18, Weber, Joseph, aus Brilon.

V.

1, Friedländer, Siegbert, aus Brilon.
2, Geyso, Paul, aus Arnsberg.
3, Gieffers, Franz, aus Brakel.
4, Göckeler, Johann, aus Brilon.
5, Haupt, Joseph, „ „
6, Henne, Johann, „ „
7, Hillebrand, Franz, „ „
8, Hovestadt, Franz, „ „

9, Hütten, Hermann, a. Viersen.
10, König, Joseph, aus Brilon.
11, Kowalsky, Leo, aus Filehne.
12, Martini, August, aus Brilon.
13, Meyer, Wilhelm, „ „
14, Möller, Wilh, „ „
15, Pfeiffer, Justus, aus Römersberg.
16, Prior, Joseph, aus Brilon.
17, Sonnenschein, Joseph, aus Brilon.
18, Spieker, Carl, aus Enger.
19, Urban, Erich, a. Hoherlehme.
20, Wigge, Joseph, aus Brilon.

VI.

1, Böddicker, Franz, aus Brilon.
2, Köster, Moriz, aus Brilon.
3, Ramroth, Magn., „ „
4, Schulte, Joseph, „ „
5, Spieker, Franz, aus Enger.
6, Wenzel, Peter, aus Rüstungen.

Für die mehreren Schülern zu Theil gewordene Unterstützung durch Freitische sage ich den geehrten Wohlthätern den wärmsten Dank.

Zur Nachricht.

1. Die Schlußprüfungen werden **Montag, den 31. August** und **Dinstag, den 1. September,** auf der Aula in folgender Ordnung gehalten werden:

   Montag:

   8—9 Sexta, Religion und Latein.
   9—10 Quinta, Latein und Geographie.
   $10^1/_2$—12 Quarta, Griechisch, Naturgeschichte, Französisch.
   2—$3^1/_2$ Unter-Tertia, Latein, Mathematik, Geographie.
   $3^1/_2$—5 Ober-Tertia, Griechisch, Geschichte, Französisch.

   Dinstag:

   8—$9^1/_2$ Unter-Secunda, Religion, Livius, Mathematik.
   10—$11^1/_2$ Ober-Secunda, Homer, Virgil, Physik.
   2—$3^1/_2$ Unter-Prima, Mathematik, Geschichte, Plato.

2. Mittwoch, den 2. September, Nachmittags 4 Uhr, Sedansfeier und im Anschlusse an dieselbe Entlassung der Abiturienten, mit Gesang und Declamation der Schüler und Abschiedsrede des Abiturienten Theodor Meckel.

☞ **Zu dieser Festlichkeit, wie zu den Prüfungen, beehrt sich das Lehrercollegium die Mitglieder des Curatoriums, die städtischen Behörden, die Eltern der der Schüler und alle Freunde der Anstalt und des Unterrichtswesens ergebenst einzuladen**

3. Donnerstag, den 3. September wird das Schuljahr mit feierlichem, um ½6 Uhr beginnendem Danksagungs-Amte und nach demselben erfolgender Vertheilung der Censuren geschlossen.

4. **Das neue Schuljahr beginnt Sonntag, den 11. October.** An den beiden folgenden Tagen werden die Prüfungen der neu eintretenden Schüler und die Nachprüfungen früherer Schüler, soweit solche angeordnet, vorgenommen werden.

Neu aufzunehmende Schüler sind spätestens Samstag, den 10. October, Morgens von 9—12 und Nachmittags von 4 – 7 Uhr, bei Unterzeichnetem anzumelden, wobei zugleich die vorschriftsmäßigen Zeugnisse, zu denen auch ein Zeugniß über die Impfung, und zwar bei den über 12 Jahr alten über die erfolgte Wiederimpfung gehört, einzureichen sind.

Um noch immer vorkommenden Irrungen vorzubeugen, mache ich wiederholt und dringend darauf aufmerksam, daß neu eintretende Schüler gesetzlich nur im Anfange des Schuljahrs, zu jeder andern Zeit aber, namentlich auch zu Ostern nur mit specieller, vorher einzuholender Genehmigung des Königlichen Provinzial-Schulcollegiums aufgenommen werden dürfen, und daß diese Genehmigung nur aus triftigen, genügend beglaubigten Gründen ertheilt wird.

C. Roeren,
Director.