§. 1.

Vorläufige Bemerkungen über entgegengesetzte Grössen.

In bestimmten entgegengesetzten Grössen denke ich mir nothwendig

1) ein Gleichartiges, das zur Einheit verbunden ist;

2) wie viel davon verbunden ist, und

3) wie es verbunden ist.

Das Gleichartige ist entweder Positives oder Negatives, und es fragt sich, woher diese Bestimmung komme?

Das Gleichartige an sich ist weder positiv noch negativ. Denn Thaler können Schulden oder Vermögen; Bewegung kann Bewegung abwärts und aufwärts, rückwärts und vorwärts ꝛc. werden.

In

In dem: wie viel an sich liegt nichts Positives und nichts Negatives, folglich kein Entgegengesetztseyn. Denn es kann positiv und negativ werden. Drey Thaler können Schulden oder Vermögen; drey Fuß Bewegung kann drey Fuß Bewegung abwärts und aufwärts ꝛc. werden.

Aber in dem wie des Verbindens des Gleichartigen liegt ein Entgegengesetztseyn. Denn wenn wir drey Thaler in folgenden Punkten

b
A—+—B

denken, so können wir sie entweder von A nach B, oder von B nach A verbinden. Und dann ist im ersten Falle A der erste und B der letzte, und im zweyten Falle ist B der erste und A der letzte. Im ersten Falle ist b der unmittelbar nacherste, und im zweyten der unmittelbar vorletzte.

§. 2.

Ich kann das Gleichartige jeder arithmetischen Grösse unter einer geraden Linie denken; ihr wie viel wird bestimmt, wenn ich sie in gleiche Theile theile, und das Wie des Aufnehmens dieser Theile kann durch Zeichen an den Endpunkten dieser geraden Linie angedeutet werden. Also sind gerade

Linien

Linien mit bezeichneten Endpunkten natürliche Bilder entgegengeſetzter Grössen.

§. 3.

Wenn ich mir zwey Linien als entgegengeſetzte Grössen denken soll, ſo müſſen ſie wenigſtens einen Punkt gemeinſchaftlich haben, der von der einen der Endpunkt, und von der andern der Anfangspunkt, oder der in beyden entgegengeſetzt iſt. Denn man gehe in der Linie A B

```
            r   C   n
A———|—|—|———B
```

1) von A nach C, und ſtehe in C ſtille, ſo iſt A der erſte und C der letzte Punkt der Linie AC. Dieſe Punkte ſind ſich alſo zwar entgegengeſetzt; aber die Linie AC iſt keine entgegengeſetzte Gröſſe.

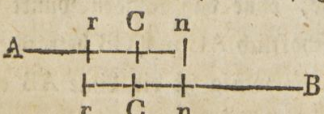
2) Man gehe von C nach B, ſo iſt C der erſte und B der letzte Punkt der Linie CB. Die Punkte C und B ſind ſich alſo zwar entgegengeſetzt; aber CB iſt keine entgegengeſetzte Gröſſe, ohne daß ich den Punkt C als gemeinſchaftlich AC und CB betrachte.

3) Eben ſo wenig iſt die Linie AB eine entgegengeſetzte Gröſſe.

4) Fasse ich aber die Linien AC und CB mit ihrem gemeinschaftlichen Punkte C in ein Bewußtseyn, so sind sie entgegengesetzte Grössen; denn der Punkt C giebt eine entgegengesetzte Construction derselben an; ich muß von dem Punkte C rückwärts nach A gehen, um AC zu bekommen, und von dem nemlichen Punkte C vorwärts, um CB zu bekommen. C ist in der Linie AC der letzte, und in der Linie CB der erste, und so bestimmen sich die folgenden; r ist der unmittelbar vorletzte und n der unmittelbar nacherste ꝛc.

§. 4.

AC §. 3. sey positiv und CB negativ, AC = CB und man gehe noch einmal von A nach C bis n, so ist Cn in Beziehung auf A zwar positiv; aber das Negative, Cn, verschwand deswegen nicht. Eben so gehe man von B nach C bis r, so ist Cr in Beziehung auf B zwar negativ; aber das Positive rC verschwand deswegen nicht, sondern die Figur verwandelt sich in die folgende



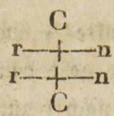
Gehe ich vom Punkte A nach n, bleibe im Punkte n stehen, und gehe dann aus demselben auf der Linie An bis nach r zurück, so entstehen die beyden Linien An und rn, und sie sind entgegengesetzt; denn sie haben den Punkt n gemeinschaftlich, der von An der Endpunkt und von nr der Anfangspunkt ist. Ar ist ein Rest, aber positiv und zwar deswegen, weil die ganze Linie An den Punkt n mit nr gemeinschaftlich hat, der die entgegengesetzte Construction beider Linien anzeigt.

Eben so, wenn ich von dem Punkte B nach r gehe, in ihm stehen bleibe, und dann von ihm wieder auf der Linie Br nach n zurückgehe, entstehen die beiden Linien Br und rn, und sie sind entgegengesetzt; denn sie haben den Punkt r gemeinschaftlich, der der Endpunkt von Br und der Anfangspunkt von rn ist. Bn ist ein Rest und negativ, und zwar deswegen, weil die ganze Br den Punkt r mit rn gemeinschaftlich hat, der die entgegengesetzte Construktion beider Linien anzeigt.

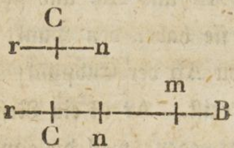
§. 5.

Aus dem nächst vorhergehenden §. folget

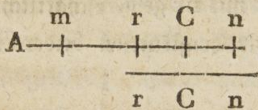
1) Gleiche entgegengesetzte Grössen können in zwey gleichen Linien, wie



und 2) Reste in zwey ungleichen Linien, wie

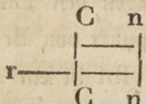


oder



dargestellt werden.

3) Nehme ich Nr. 1. aus einer der beiden gleichen Grössen rC weg, so bleibt der Rest rC von der andern



oder

Nehme ich auch Cn weg, so verschwindet die Entgegensetzung mit dem gemeinschaftlichen Punkte.

§. 6.

Ich kann nun die Linien durch Reihen von Buchstaben bezeichnen. a soll die positive, und c die negative Einheit bedeuten, so sind §. 5.

1)

1) die beiden gleichen Grössen $= \frac{aa}{cc}$

2) die beiden Reste, wenn $Bn = Ar = 3$ genommen wird

$$\frac{aa}{ccccc} \text{ und } \frac{aaaaa}{cc}$$

3) aus einer der beiden Grössen a oder c herausgenommen, ist $\frac{aa}{c}$ oder $\frac{a}{cc}$

§. 7.

Man bemerke nun, welche Veränderungen hier möglich sind.

1) Setze ich zu $\frac{aa}{ccccc}$ noch ein c, und zu $\frac{aaaaa}{cc}$ ein a hinzu, so werden die Reste um eine Einheit vergrössert = cccc, aaaa.

2) Das nemliche erfolget, wenn ich im ersten Falle ein a, und im zweyten ein c herausnehme. Die Reste werden wieder = cccc, aaaa.

3) Ich kann die Reste verkleinern, wenn ich von $\frac{aa}{ccccc}$ ein c und von $\frac{aaaaa}{cc}$ ein a wegnehme $= \frac{aaaa}{cc}, \frac{aa}{cccc}$.

4) Das nemliche erfolgt, wenn ich die Reste unverändert lasse; aber im ersten Falle zu aa ein

ein a und im zweyten zu cc ein c hinzuthue =

aaa aaaaa

ccccc, ccc

Es sind also hier drey Arten zu verbinden.

1) Ich kann mit einem positiven Reste andere positive Einheiten,

2) mit einem negativen Reste andere negative Einheiten verbinden.

3) Ich kann zu positiven Einheiten negative, und zu diesen positive herübernehmen; und zwar entweder in gleicher oder in ungleicher Anzahl.

Eben so sind drey Arten von Trennung.

1) Kann ich positive Einheiten von einem positiven Reste,

2) negative Einheiten von einem negativen Reste trennen, und

3) kann ich die gegenseitige Verbindung des Positiven und Negativen wieder aufheben, dadurch, daß ich eines von beiden wegnehme.

§. 8.

§. 8.
Von der Addition entgegengesetzter Grössen.

Zur Addition ist eine gesetzte und eine hinzuzuthuende Grösse nöthig.

Die gesetzte Grösse muß entweder positiv oder negativ, oder beides zugleich seyn; denn $\frac{aa}{ccccc}$ und $\frac{aaaaa}{cc}$ und $\frac{aa}{cc}$ sind die drey möglichen Formen entgegengesetzter Grössen.

Wie gewöhnlich ausgedrückt sind sie

$$\frac{+2}{-5} \quad \text{und} \quad \frac{+5}{-2} \quad \text{und} \quad \frac{+2}{-2}$$

$\frac{aa}{cc}$ kann eigentlich keine zur Addition gesetzte Grösse seyn; denn sie ist $= 0$ und zu $\frac{aa}{cc}$, cc hinzuthun, würde blos heissen cc setzen. Zu 0 addirt $2 = 2$.

Wir werden also die gesetzte Zahl der Addition immer als einen Rest zu denken haben, weil $\frac{aa}{cc} = 0$, und weil ich mir eine Grösse nicht als entgegengesetzte vorstellen kann, ohne daß sie wenigstens ein Theil einer andern sey, deren anderem Theile sein gleiches Entgegengesetztes gegenüber steht. s. §. 4.

Anmerk. Ich kann mir zwar in dem Ausdruck $\begin{matrix}+2\\-2\end{matrix}$, $+2$ als eine positive Grösse denken; aber sie ist nicht für sich selbst und allein gesetzt $= +2$, und eben so kann ich mir -2 als negative Grösse denken; aber sie ist nicht für sich selbst und allein gesetzt $= -2$. Wollte ich eine oder die andere von diesen Grössen von ihrem Entgegengesetzten wegnehmen, so fiele zugleich Positives und Negatives weg, und es bliebe nur blos $= 2$. Wollte ich sie dennoch als Positive oder Negative denken, so hiesse das, sie in Verbindung mit ihrem Entgegengesetzten denken, und da ist ihre Summe allemal $= 0$. Es bleibt also nur der Fall übrig, daß ich mir $+2$ als durch Addition etwa von $\begin{matrix}+3\\-1\end{matrix}$ entstanden denke, und -2 als entstanden aus $\begin{matrix}-3\\+1.\end{matrix}$

Von der hinzuzuthuenden Grösse gilt alles, was von der gesetzten gesagt wurde. Auch sie muß als ein Rest gedacht werden.

§. 9.

§. 9.

Nach §. 8. wäre also

I. 1) + 1 addirt zu + 2 darstellbar in dieser Form

$$+\,2 = \frac{a,aa}{c}$$

$$+\,1 = \frac{a,a}{c}$$

$$+\,3 = \frac{aa,aaa}{cc}$$

2) — 1 addirt zu — 2:

$$-\,2 = \frac{a,}{c,cc}$$

$$-\,1 = \frac{a,}{c,c}$$

$$-\,3 = \frac{aa,}{cc,ccc}$$

3) — 1 addirt zu + 2:

$$+\,2 = \frac{a,aa}{c,}$$

$$+\,1 = \frac{a.}{c,c}$$

$$+\,1 = \frac{aaa,a}{ccc}$$

4) + 1 addirt zu − 2:
− 2 = a,
c,cc
+ 1 = a,a
c

− 1 = aaa,
ccc,c

II. 1) + 2 addirt zu + 1:
+ 1 = a,a
c
+ 2 = a,aa
c

+ 3 = aa,aaa
cc

2) − 2 addirt zu − 1:
− 1 = a,
c,c
− 2 = a,
c,cc

− 3 = aa,
cc,ccc

3) + 2 addirt zu − 1:
− 1 = a,
c,c
+ 2 = a,aa
c

+ 1 = aaa,a
ccc

4) − 2 addirt zu + 1:

+ 1 = a,a
c
− 2 = a,
c,cc

− 1 = aaa
ccc,c

III. 1) zu + 3 addirt − 3:

+ 3 = a,aaa
c
− 3 = a
c,ccc

0 = aa,aaa
cc,ccc

2) zu − 3 addirt + 3

− 3 = a,
c,ccc
+ 3 = a,aaa
c

0 = aa,aaa
cc,ccc

§. 10.

Man bemerke in diesen Beispielen, daß wir theils blos Grössen von den nemlichen, theils Grössen von verschiedenen Zeichen addirten; und im letzten Falle konnte die gesetzte Grösse entweder der hinzuzuthuenden gleich seyn oder nicht. Im ersten

Fall durften wir nur entweder die a addiren oder die c. Im zweiten Fall nahmen wir entweder blos die a mit c und die c mit a zusammen, oder wir nahmen

1) die a mit c oder die c mit a zusammen, so oft es sich thun ließ,
2) addirten wir die a oder c noch, die sich mit ihrem Entgegengesetzten nicht zusammennehmen liessen, und setzten sie als Rest an.

Ich werde in der Folge der Kürze halber diejenige Addition, wo blos Grössen von dem nemlichen Zeichen addiret werden, die blosse Addition, die, wo gleiche Grössen von verschiedenen Zeichen addiret werden, entgegengesetzte, und die wo ungleiche Grössen von verschiedenen Zeichen addiret werden, vermischt entgegengesetzte Addition nennen.

§. 11.

In der blossen Addition muß nothwendig die Summe das Zeichen der Grössen bekommen, die addirt wurden.

In der entgegengesetzten Addition ist die Summe allemal = 0.

In der vermischt entgegengesetzten Addition muß die Summe allemal entweder o, a... oder o, c... seyn. Also bekommt sie das Zeichen der grössern Grösse; denn nur der Rest dieser läßt sich als Summe ausdrücken.

§. 12. Von der Subtraction entgegengesetzter Grössen.

Die Subtraction ist die der Addition entgegengesetzte Operation. Was diese zu der gesetzten Grösse hinzunahm *), soll jene wieder wegnehmen. Es folget daraus,

1) daß jeder Art Addition auch eine Subtraction entsprechen müsse.
2) Daß wir den Minuendus allemal als eine Summe zu betrachten haben, und daß folglich der Subtrahendus bei der Addition die hinzuzuthuende und die Differenz die gesetzte Grösse gewesen sey.

*) Anm. So wie eine Grösse setzen, nicht eigentlich addiren heissen kann; so kann, diese Grösse wieder wegnehmen, auch nicht subtrahiren heissen, wie z. B. der Fall ist: 2 von 2 abgezogen; denn dieses heisset nur die gesetzte Grösse wieder aufheben, aber nicht von der gesetzten Grösse wegnehmen.

§. 13.

Wenn wir nun in unsern §. 9. angeführten Beispielen die Verbindung wieder auflösen, d. h. die Summe zum Minuendus, die hinzuzuthuende Grösse zum Subtrahendus nehmen, so wird die Differenz die gesetzte Grösse seyn.

Die Beispiele waren

I. 1) + 1 addirt zu + 2:

+ 2 = a,aa
c

+ 1 = a,a
c

+ 3 = aa,aaa
cc

Man nehme nun:

Min. + 3 = aa,aaa
cc

Subtr. + 1 = a,a
c

Diff. + 2 = a,aa
c

2) — 1 addirt zu — 2:

— 2 = a
c,cc

— 1 = a,
c,c

— 3 = aa,
cc,cce

Man

Man nehme nun:

Min. — 3 = aa,
cc,cce

Subtr. — 1 = a,
c,c

Diff. — 2 = a,
c,cc

Man sieht, daß diese beiden Beispiele von Subtraction der blossen Addition entsprechen. So wie wir dort blos die a zu a oder c zu c zu addiren hatten, so haben wir hier wieder die a von a oder die c von c wegzunehmen.

§. 14.

5) — 1 addirt zu + 2:

+ 2 = a,aa
c

— 1 = a,
c,c

+ 1 = aaa,a
ccc

Man nehme nun:

Min. + 1 = aaa,a
ccc

Subtr. — 1 = a
c,c

Diff. + 2 = a,aa
c

4) + 1 addirt zu — 2:

— 2	=	a,
		c,cc
+ 1	=	a,a
		c
— 1	=	aaa,
		ccc,c

Man nehme nun:

Min.	— 1	=	aaa
			ccc,c
Subtr.	+ 1	=	a,a
			c
Diff.	— 2	=	a,
			c,cc

Diese beiden Beispiele der Subtraction entsprechen der gemischt entgegengesetzten Addition. In dieser Addition war eine doppelte Handlung. Es wurde nemlich

1) a mit c oder c mit a zusammengenommen und denn

2) a oder c als Rest angemerket.

Soll ihr also eine Subtraction entsprechen, so muß auch in dieser eine doppelte Handlung vorgenommen werden.

1) muß gemacht werden, daß das a oder c nicht mehr als Rest erscheine, sondern mit der Grösse, von der es Rest in der Addition wurde, wieder verbunden werde;

2) muß das a von c oder das c von a wieder getrennt werden.

§. 15.

II. 1) + 2 addirt zu + 1:

$$+1 = \frac{a,a}{c}$$

$$+2 = \frac{a,aa}{c}$$

$$+3 = \frac{aa,aaa}{cc}$$

Subtrahirt:

$$\text{Min.}\ +3 = \frac{aa,aaa}{cc}$$

$$\text{Subtr.}\ +2 = \frac{a,aa}{c}$$

$$+1 = \frac{a,a}{c}$$

2) — 2 addirt zu — 1:

$$-1 = \frac{a,}{c,c}$$

$$-2 = \frac{a,}{c,cc}$$

$$-3 = \frac{aa}{cc,ccc}$$

Sub-

Subtrahirt:

Min. — 3 = aa,
cc,cc

Subtr. — 2 = a
c,cc

— 1 = a
c,c

Diese beiden Beispiele entsprechen wieder einer blossen Addition. So wie ich in dieser blos die a zu a, oder die c zu c hinzuzuthun hatte, so habe ich auch in der Subtraction nur die a von den a, oder die c von den c wegzunehmen.

§. 16.

3) + 2 addirt zu — 1:

— 1 = a
c,c

+ 2 = a,aa
c

+ 1 = aaa,a
ccc

Subtrahirt:

Min. + 1 = aaa,a
ccc

Subtr. + 2 = a,aa
c

— 1 = a
c,c

4) — 2 addirt zu + 1:

+ 1 = a,a
        c
— 2 = a,
        c,cc
―――――――
— 1 = aaa
        ccc,c

Subtrahirt:

Min. — 1 = aaa
        ccc,c
Subtr. — 2 = a,
        ccc
―――――――
+ 1 = a,a
        c

Diese beiden Beispiele entsprechen wieder der vermischt entgegengesetzten Addition, und ich berufe mich auf das, was ich §. 14. augemerkt habe.

§. 17.

Wenn wir in den angeführten Beispielen die jedesmalige Addition mit der ihr entsprechenden Subtraction vergleichen, so finden wir, daß

1) der blossen Addition eine Subtraction entspreche, wo Minuendus und Subtrahendus die nemlichen Zeichen haben;

2) daß der gemischt entgegengesetzten Addition, wo die gesetzte Grösse grösser war, als die hinzuzuthuende, eine Subtraction entspreche, wo Minuendus und Subtrahendus verschiedene Zeichen haben, und

3) daß der vermischt entgegengesetzten Addition, wo die gesetzte Zahl kleiner war als die hinzuzuthuende, eine Subtraction entspreche, wo Minuendus und Subtrahendus die nemlichen Zeichen haben.

Wenn wir weiter bedenken, daß z. B. + 3, als Minuendus gegeben, sich betrachten läßt, als entstanden aus + 2 und + 1, oder aus + 5 und — 2, so ist es klar, daß das Zeichen des Subtrahendus bestimme, aus welcher Art von Addition der Minuendus hervorgieng. Sind die Zeichen die nemlichen, und der Minuendus grösser als der Subtrahendus, so ist der Minuendus, als aus einer blossen Addition entstanden, zu denken; sind die Zeichen die nemlichen, aber der Minuendus kleiner, als der Subtrahendus, so muß der Minuendus als aus einer entgegengesetzt gemischten Addition entstanden gedacht werden, und sind die Zeichen verschieden, so ist der Minuendus allemal aus der letzten Addition hervorgegangen.

§. 18.

§. 18.

Die Folge des §. 17. ist diese: Sind mir

1) zwei Grössen von den nemlichen Zeichen und der Minuendus grösser als der Subtrahendus zur Subtraction gegeben, so habe ich den Subtrahendus nur geradezu von dem gegebenen Minuendus wegzunehmen, und der Minuendus wird natürlich um so viel verkleinert, als der Subtrahendus groß ist. Sind mir hingegen

2) zwei Grössen von verschiedenen Zeichen zur Subtraction gegeben, so heisset dieses nicht: Ich soll den Subtrahendus geradezu von dem gegebenen Minuendus wegnehmen (denn von aaa kann ich keine cc wegnehmen); sondern es heisset: betrachte deinen Minuendus als eine Summe einer vermischtentgegengesetzten Addition, wo die gesetzte Grösse, die grössere war. Mit ihr wurden genau so viele entgegengesetzte Einheiten verbunden, als dein Subtrahendus anzeigt; diese mit ihr in der Addition verbundenen entgegengesetzten Einheiten nimm nun in der Subtraction wieder weg, so wird der Minuendus nothwendig vergrössert. Ist dir nun aufgegeben z. B. von

— 3, + 2 wegzunehmen, so ist — 3 eine Summe einer vermischt entgegengesetzten Addition, wo mit — 5, + 2 verbunden, und — 3 als Rest angesetzt wurde; + 2 soll nun wieder von — 2 getrennt, und der Rest — 3 damit verbunden werden, so hast du — 5.

3) Sind mir zwei Grössen von den nemlichen Zeichen zur Subtraction gegeben, von denen der Minuendus die kleinere ist, so kann ich den Subtrahendus nicht geradezu wegnehmen (denn im a an sich ist aa nicht enthalten); sondern die Aufgabe ist diese: Betrachte den Minuendus als aus einer gemischt entgegengesetzten Addition entsprungen, in welcher die gesetzte Grösse kleiner, als die hinzuzuthuende war. Die gesetzte Grösse war gerade um so viel kleiner, als der Subtrahendus grösser als der Minuendus ist. Es wurden also mit der gesetzten Grösse so viele Einheiten von der hinzuzuthuenden verbunden, als jene Einheiten hatte, und die übrigen Einheiten der hinzuzuthuenden Grösse wurden als Rest angesetzt. Diesen Rest ziehe ab, d. h. hebe ihn

auf,

auf, und seine übrigen mit der gesetzten Grösse verbundenen Einheiten nimm wieder hinweg, so erscheinet die gesetzte Grösse wieder. Z. B. von — 2, — 5 abgezogen heisset — 2 ist entstanden aus der Addition von

a,aaa
c
a,
c,ccccc

cc = aaaaa
ccccccc

Nun nimm a / c,ccccc wieder heraus, so erscheinet a,aaa. / c

§. 19.

Zur Subtraction entgegengesetzter Grössen sind allemal vier gegebene Stücke nöthig.

1) Wie groß ist der Minuendus, und
2) welches ist sein Zeichen?
3) Wie groß ist der Subtrahendus, und
4) welches ist sein Zeichen?

Aber wir haben einen Fall, wo nur zwei dieser Stücke gegeben sind. Wenn man nemlich die Regel gegeben hat: Verwandle die Zeichen der

Sub-

Subtrahenden in ihre entgegengesetzten und addire, so tritt der Fall ein, daß z. B.

$$\begin{array}{cc} +5 & \\ (+)2 & (-)4 \\ - & + \\ \hline +3 & +4 \end{array} \quad \text{giebt}$$

Wie komme ich hier dazu zu behaupten, daß die Differenz gerade so viel, als der Subtrahendus, aber die entgegengesetzte Grösse von ihm sey? Ich kann diese Subtraction nicht rechtfertigen, wenn ich nicht zeigen kann, daß durch — 4 wirklich alle vier zur Subtraction nöthigen Stücke gegeben sind.

§. 20.

Wenn die Regel: Verwandle die Zeichen der Subtrahenden ꝛc. hier gültig seyn soll, so müßte das Zeichen des Minuendus allemal von dem des Subtrahendus verschieden seyn; denn die Differenz bekommt das Zeichen des Minuendus; ein Satz, der so einleuchtend ist, daß man sich durch Fälle, wo dieses anders zu seyn scheint, nicht irre machen lassen sollte.

Es konnte uns nach §. 8. die Grösse $\frac{aa}{cc}$ nicht zur Addition gegeben seyn. Es kann uns aber wohl aufgegeben werden aaa zu ccc, und umgekehrt, zu addiren §. 9. III. Dieses giebt $\frac{aaa}{ccc}$, und ist eine wahre Verbindung. Ich habe a zu c oder c zu a dreimal zu einander hinzugethan. Dieser Addition muß ebenfalls eine Subtraction entsprechen. Und in dieser Subtraction allein können uns im Subtrahendus alle vier oben angegebenen Stücke gegeben seyn. Denn der Minuendus ist in ihr so groß, als der Subtrahendus, und das Zeichen des einen ist allemal das dem des andern entgegengesetzte.

Es wäre freilich kein Fehler, wenn der Minuendus durch $\frac{aaa}{ccc}$ z. B. oder $\frac{+3}{-3}$, und der Subtrahendus durch ccc oder — 3, oder durch aaa, oder + 3 bezeichnet würde; aber die Abkürzung ist hier am rechten Orte, da es einmal Gesetz ist: der Minuendus ist so groß als der Subtrahendus und, sie haben verschiedene Zeichen.

§. 21.

Wir hätten also §. 20. die Subtraction, die der entgegengesetzten Addition entspricht.

Ist mir der Subtrahendus allein gegeben, so habe ich allemal sein gleiches Entgegengesetztes mit ihm in einer Addition verbunden zu denken, und ich soll den Subtrahendus wegnehmen, d. h. sein gleiches Entgegengesetztes setzen.

Und man hatte Grund, diese Subtraction so zu bezeichnen; denn — 3 abgezogen von + 4, und + 4 abgezogen von — 4 würde der §. 18. 2. angegebene Fall gewesen seyn.

§. 22.

Es wird nun die Regel einleuchtend: Verwandle die Zeichen des Subtrahendus in ihre entgegengesetzten, und addire. Denn

1) §. 13. 1. ist es in Absicht des Erfolges das nemliche, ob ich + 1 von + 3 geradezu wegnehme, oder ob ich zu + 3, — 1 herübernehme; beides giebt + 2.

2) §. 13. 2. ist es wieder in Absicht des Erfolges einerlei, ob ich — 1 von — 3 geradezu

weg-

wegnehmen, oder ob ich zu — 3, + 1 herübernehme. Beides giebt — 2.

3) §. 14. 1. kommt + 2 als Rest, ich mag + 1 als $\frac{a,a}{c}$ betrachten, und denn c herausnehmen, oder ich mag zu $\frac{a,a}{c}$ addiren a.

4) §. 14. 2. kommt — 2 als Rest, ich mag — 1 als $\frac{a,}{c,c}$ betrachten, und denn a herausnehmen, oder zu $\frac{a,}{c,c}$ addiren c.

5) §. 15. 1. ist es in Absicht des Erfolges einerlei, ob ich + 2 geradezu von + 3 wegnehme, oder ob ich + 3 mit — 2 verbinde.

6) §. 15. 2. ist es in Absicht des Erfolges einerlei, ob ich — 2 von — 3 geradezu wegnehme, oder ob ich mit — 3 + 2 verbinde.

7) §. 16. 1. kommt der nemliche Rest, ob ich setze $\begin{array}{c} +\ 1 \\ (+)\ 2 \\ - \\ \hline +\ 1 \end{array}$ und addire + 1 zu — 2, oder ob ich setze $\begin{array}{l} +\ 1 \\ -\ 1\ +\ 1 \end{array}$ und subtrahire geradezu; denn + 1 von + 1 abziehen, heisset die gesetzte Grösse aufheben, und den blossen Subtrahendus + 1 wegnehmen, heisset — 1 setzen §. 21.

8) §. 16. 2. kommt der nemliche Rest, ob ich

setze $\begin{array}{c} -\ 1 \\ (-)\ 2 \\ + \\ \hline -\ 1 \end{array}$ und addire — 1 zu + 2, oder

ob ich setze $\overset{-1}{-\ 1} - 1$ und subtrahire geradezu; denn — 1 von — 1 abziehen, heisset die gesetzte Grösse aufheben, und den blossen Subtrahendus — 1 wegnehmen, heisset + 1 setzen §. 21.

9) §. 20. und 21. ist es in Absicht des Erfolgs einerlei, ob ich aus $\frac{aaa}{ccc}$ herausnehme ccc, oder dafür sogleich setze aaa, und eben so einerlei, ob ich aaa herausnehme, oder sogleich setze ccc.

§. 23.

Von der Multiplication entgegengesetzter Grössen.

Multiplication ist eine wiederholte Addition des Gleichen.

In der Addition war durch die gesetzte Grösse die hinzuzuthuende noch nicht bestimmt; diese mußte erst besonders gegeben seyn. In der Multiplication ist durch die gesetzte Grösse auch die hinzuzuthuende gegeben. Es folget daraus,

1) daß das Produkt aus Grössen der nemlichen Art, entweder positiven oder negativen, erzeugt werde;

2) daß der Multiplicator als Grösse blos bezeichne, wie oft die gesetzte Grösse genommen werden soll, daß er nicht als Bestandtheil ins Produkt komme, und daß sein Zeichen etwas anderes bedeute, als es vor andern entgegengesetzten Grössen bedeutet.

§. 24.

Zwei Arten der wiederholten Addition des Gleichen entgegengesetzter Grössen fallen sogleich in die Augen, die nemlich, welche der blossen Addition entsprechen. Wenn ich cc, cc, cc habe, so ist dieses = cccccc = − 6, und eben so ist aa, aa, aa, = aaaaaa = + 6.

$\frac{aa}{cc}$ noch so oft genommen, giebt allemal zum Produkte = 0.

§. 25.

Wir sahen oben, daß mit der Subtraction, welche der entgegengesetzten und vermischt entgegengesetzten Addition entspricht, allemal eine Addition verbunden war. Ich konnte die positive Grösse nicht aufheben, ohne die negative zu setzen, und diese nicht aufheben, ohne die positive zu setzen. Es ist also einleuchtend, daß ein wiederholtes Setzen des Gleichen vermittelst der Subtraction, d. h. eine mittelbar wiederholte Addition möglich sey. Denn wenn gefordert wird, daß ich von — 2 + 6 abziehe, so bleibt — 8. Eben das erfolgt aber auch, wenn ich von — 2 + 3 zweimal abziehe; denn von — 2 + 3 abgezogen = — 5, und von — 5 + 3 abgezogen = — 8. So wie ich im ersten Falle durch Subtraction der + 6, — 6 gesetzt habe, so habe ich im zweiten Falle durch zweimaliges Subtrahiren der + 3 auch zweimal — 3 gesetzt.

§. 26.

Nach §. 17. bestimmt der Subtrahendus, wie ich den Minuendus zu betrachten habe, und im Beispiele des §. 19. bestimmte er zugleich den Minuendus der Grösse nach; und wir drückten dort

die

die Grösse $\frac{+4}{-4}$ wirklich durch -4 aus, und eben so drücken wir sie $+4$ aus.

Wenn mir nun zum Multiplicandus $+2$ gegeben ist, so kann dieses heissen: denke dir ihn als $\frac{a,aa}{c}$, oder denke dir ihn als $\frac{aa}{cc}$. In beiden Fällen würde das Setzen, welches in der Multiplication gefordert wird, verschieden seyn; denn im ersten Falle würde ich unmittelbar, im zweiten erst vermittelst der Subtraction der cc setzen.

Wenn man also auf diese Verschiedenheit der Handlung bei der Multiplication Rücksicht nehmen will, so ist die Multiplication genau zu bezeichnen, durchaus nöthig.

1) Der Multiplicandus mit seinem Zeichen;
2) der Multiplicator, welcher anzeigt, wie oft jener gesetzt werden soll, und
3) ein Zeichen, welches die Art angiebt, wie gesetzt werden soll?

Dieses Zeichen fand man nun in dem + und − vor dem Multiplicator. + nemlich bezeichnet vor dem Multiplicator ein unmittelbares, — hingegen ein mittelbares Setzen des Multiplicandus.

§. 27.

Auf diese Art heisset:

1) + 3. + 2: der Multiplicandus ist $\genfrac{}{}{0pt}{}{a,aaa}{c,}$ und soll unmittelbar zweimal gesetzt werden = $\genfrac{}{}{0pt}{}{aa,aaaaaa}{cc,} = +6.$

2) — 3. + 2: Der Multiplicandus ist $\genfrac{}{}{0pt}{}{a,}{c,ccc}$ und er soll zweimal unmittelbar gesetzt werden $= \genfrac{}{}{0pt}{}{aa}{cc,cccccc} = -6.$

3) + 3. — 2 heisset: Der Multiplicandus ist $\genfrac{}{}{0pt}{}{aaa}{ccc}$ und ccc soll zweimal gesetzt werden vermittelst einer Subtraction der aaa, $= -6.$

4) — 3. — 2: Der Minuendus ist $\genfrac{}{}{0pt}{}{aaa}{ccc}$ und aaa soll zweimal gesetzt werden, vermittelst einer Subtraction der ccc, $= +6.$

Wenn also der Multiplicator das Zeichen — hat, so muß ich mir den Multiplicandus

1) als einen Subtrahendus denken, dem sein Gleiches gegenüber,

2) so oft gegenüber steht, als der Multiplicator Einheiten hat, und ihn so oft wegnehmen.

Wenn hingegen der Multiplicator das Zeichen $+$ hat, so muß ich mir den Multiplicandus als eine geradezu zur Addition gegebene Grösse denken, und so oft addiren, als der Multiplicator vorschreibt.

§. 28.

Die Regel: wenn beide Factores positiv oder beide negativ sind, so gebe man dem Produkte das Zeichen $+$; und wenn der eine der Factoren positiv, der andere negativ ist, so gebe man dem Produkte das Zeichen $-$, leuchtet nun sammt ihrer Nothwendigkeit ein. Denn es ist in Absicht des Erfolges das nemliche, ob ich $+3$ geradezu zweimal setze, oder ob ich aus $\begin{matrix}+3\\-3,\end{matrix}\ \begin{matrix}+3\\-3,\end{matrix}\ -3$ zweimal wegnehme; ob ich -3 geradezu zweimal setze, oder ob ich aus $\begin{matrix}+3\\-3,\end{matrix}\ \begin{matrix}+3\\-3,\end{matrix}\ +3$ zweimal wegnehme.

§. 29.

Von der Division entgegengesetzter Grössen.

Dividiren kann heissen: die in der Multiplication gesetzte Grösse vermittelst des Produkts und des Multiplicators wieder herstellen.

Das Produkt ist entstanden entweder aus einem unmittelbaren, und dieses zeigt das Zeichen + vor dem Divisor an; oder es ist entstanden aus einem mittelbaren Setzen, und dieses zeigt das Zeichen — vor dem Divisor an.

Der Quotient ist die Grösse wieder, welche gesetzt wurde.

§. 30.

Es sey durch alle vier Fälle 3 der Multiplicandus, und 2 der Multiplicator, so sind

I.	1) + 3	2) — 3	3) + 3	4) — 3
	+ 2	+ 2	— 2	— 2
die Produkte	+ 6	— 6	— 6	+ 6

Diese

Diese Produkte als Dividenden und den Multiplicator als Divisor betrachtet, giebt

II.	1) $+6$	2) -6	3) -6	4) $+6$
	$+2$	$+2$	-2	-2
	$+3$	-3	$+3$	-3

d. h. 1) war $+3$ zweimal unmittelbar gesetzt;
2) war -3 zweimal unmittelbar gesetzt;
3) war $+3$ mittelbar gesetzt, und
4) war -3 ebenfalls mittelbar gesetzt.

Der Grund der bei der Division entgegengesetzter Grössen gewöhnlichen Regel ist der nemliche mit dem, der bei der Regel der Multiplication statt fand. Divisor und Quotient sind Factores.

A n h a n g.

Vermögen und Schulden sind das gewöhnliche Beispiel, wodurch man den Begriff entgegengesetzter Grössen erläutert, und wir wollen also ein paar Worte davon sagen.

Vermögen und Schulden lassen sich nur unter Voraussetzung von Wesen denken, welche im Verhältnisse der Freiheit gegeneinander stehen.

Man nehme zwei solcher Wesen A und B, und ihr Vermögen sey

```
               g    a
A──────────────┼────┼───c   d──────────B
```

A habe nemlich Ac und B, Bd; und Bd sey = Ag, so hat A zwar mehr Vermögen als B, aber beides ist doch Vermögen, und B ist mit seinem kleinern Vermögen in Absicht auf A eben so frei, als es A mit seinem grössern in Absicht auf B ist.

Nun sehe sich B genöthiget, sich von A, ac = ga geben zu lassen, unter der Bedingung, es wieder zurückzugeben, so hat B mit A in diesem Augenblick gleiches Vermögen zu seinem Gebrauch; aber das Vermögen des A ist ganz rein, und kann durch die einzige Linie

A————————a

dargestellt werden, während das Vermögen des B gemischt ist, und eigentlich unter drei Linien dargestellt werden muß, nemlich

```
      d     h
e-----+-----+-----B
a-----c
```

Bd ist reines Vermögen; de ist zwar auch Vermögen, aber es ist durch ac bedinget.

ed und ac sind die nemliche Grösse, und ac muß auch in ed gedacht werden; aber ed ist ein genommenes, und ac ein zurückzugebendes.

Hat B das Vermögen ed so gebraucht, daß es aufhört für ihn Vermögen zu seyn, z. B. es verspielt, so rückt ac nach d bis h, und sein reines Vermögen ist um so viel, als ac beträgt, gemischtes geworden.

Erhält B hingegen ed, und vergrössert noch überdies sein reines Vermögen um ed, so kann er ed von der Bedingung ac befreien, und bekommt reines Vermögen Be.

Das bedingte Vermögen, oder Vermögen, dem Schulden entgegenstehen, muß also allemal unter zwei Linien gedacht werden, die einen Punkt wenigstens gemeinschaftlich haben, der der Endpunkt der einen und der Anfangspunkt der andern ist.

Mit Gewicht und Gegengewicht ist es eben so beschaffen. Ich kann mir Gewicht im Gegensatze mit Gegengewicht nur unter der Bedingung denken, daß in der nemlichen Linie das Gewicht abwärts wirke, und etwas anderes es wieder aufwärts ziehe. Die Bewegungslinie einer jeden von den beiden beschwerten Wagschaalen muß als entgegengesetzte Grösse betrachtet werden, und wenn wir die eine etwa positiv und die andere negativ nennen, so geschiehet dieses durch Abstraction, welches daher klar ist, daß es mir freisteht, ob ich eine von beiden als Gewicht oder als Gegengewicht betrachten will.

„Verbindet man, sagt man, mit einer verneinenden Grösse die ihr gleiche bejahende, so heben sie einander auf, und geben zusammen 0. Es ist z. B. $-4 + 4 = 0$, oder wer 4 Thaler schuldig war, und 4 Thaler baar Geld bekommt, muß seine Schulden bezahlen, und hat alsdenn nichts. Man kann also von ihm sagen, er habe vorher weniger als Nichts gehabt, weil er nun erst nichts hat, nachdem er etwas bekommen hat.“

Was kann dieser Ausdruck: weniger als Nichts heissen?

Man setzet hier ein Wesen, das weder äusseres Vermögen noch Schulden hat, und sagt von ihm, es habe Nichts. Dieses Wesen hat seine äussere Freiheit. Es kann andere zwar verbinden, d. h.

von

von ihnen fordern, keinen Eingriff in seine Freiheit zu thun; aber es kann auch von jedem andern eben so weit verbunden werden. Also sein Recht ist seiner Verbindlichkeit gleich. Vorher aber, als es Schulden hatte, war das anders, da war seine Verbindlichkeit grösser als sein Recht. Es hatte weniger als Nichts, d. h. weniger Recht als Verbindlichkeit.

Ich habe Nichts, heisset also: ich habe mit andern gleiches Recht und gleiche Verbindlichkeit; ich habe weniger als Nichts: ich habe mehr Verbindlichkeit als Recht; ich habe mehr als Nichts (Vermögen): ich habe mehr Recht als Verbindlichkeit, oder kann wenigstens andere mehr verbinden, als sie mich verbinden können.

Also das Nichts ist hier etwa nicht das, was sich nicht denken läßt, sondern es ist vielmehr eine Grösse, die sich der Anschauung darstellen läßt. Bist du im Verhältnisse der natürlichen Freiheit Verbindendes oder Vermögendes, so bist du auch in dem nemlichen Maße Verbundenes oder Schuldiges. Nenne dein Vermögen $+ 4$ und deine Schuld $- 4$, und verbinde sie mit einander, so hast du $\begin{matrix}+4\\-4\end{matrix} = 0$ d. h. es bleibt von der Grösse gegenseitig betrachtet nichts abzuziehen oder kein Rest übrig. Du bist ein äusserlich freier Mann nur unter Voraussetzung der Verbindlichkeit, und bist verbunden nur unter Voraussetzung der Freiheit.

Zu jeder bestimmten Linie sind zwei Thätigkeiten nöthig, deren eine durchaus für die andere nicht gesetzt werden kann, von denen aber auch keine mangeln darf, wenn etwas Bestimmtes gedacht werden soll.

Jeder meiner Leser kann willkührlich eine Linie ziehen, und sich selbst dabei bemerken. Ein Beispiel sey hier die Linie

A————B

Ziehen wir diese Linie von A nach B, so ist dieses ohne Zweifel, bis wir im Punkte B (den wir in jedem Punkt in der Linie annehmen können) stille stehen, ein Setzen, ein Produciren mit Freiheit; denn wir schaffen, wir nehmen nicht auf, und unsere Handlung ist nicht durch eine vorgeschriebene Form eingeschränkt. Die Linie **wird**. Aber so lange wir **diese** Handlung fortsetzen, so **erkennen** wir nichts **Bestimmtes**; denn vor uns liegt nichts, das unserer Thätigkeit vorausgienge. Wir sind vielmehr **bestimmend**, und bestimmend seyn, und zugleich etwas Bestimmtes erkennen,

d.

d. h. bestimmt werden, widerspricht sich. Wollen wir eine bestimmte Linie, ein Vollendetes haben, so muß unsere Thätigkeit im Punkte B stille stehen und nach A zurückgehen. Mit diesem Zurückgehen ist das Werden verschwunden, und es beginnt das Seyn der Linie. Das Zurückgehen selbst ist zwar Thätigkeit, aber nicht freie Thätigkeit. Sie ist blos schauend, und muß nehmen, was und wie es ihr dargestellt ist. Sind nun beide Handlungen geendigt, so daß AB = BA ist, so ist die bestimmte Linie AB als bestimmtes Object samt der Vorstellung desselben BA da, und die Vorstellung ist im Grunde nichts anders, als die zurückgehende Thätigkeit auf das Produkt der producirenden, und das Object nichts anders, als dieses Produkt, ein Werden, das nun fertig und ruhend daliegt. Gehe ich wieder auf die vorherige zurückgehende Thätigkeit von A nach B zurück, so wird meine Vorstellung das nächste Object, und ich habe Vorstellung der Vorstellung ꝛc.

Es ist ein Widerspruch, eine positive Grösse, aber ohne Beziehung auf eine negative, und umgekehrt, setzen; die eine ist nur unter der Bedingung, daß die andere sey.

Eben so ist es ein Widerspruch, ein Object an sich, d. h. ohne Beziehung auf eine Anschauung, und umgekehrt, eine Anschauung an sich und ohne Beziehung auf ein Object setzen. Denn es heißt nicht mehr und nicht weniger, als eine positive Grösse ohne Beziehung auf eine negative und umgekehrt setzen.

Ich kann mir z. B. + 4 als solches, nur unter der Bedingung denken, daß ich mir noch etwa hinzudenke $\begin{matrix}+2\\-2\end{matrix}+4$; denn nun wurde das *ist*, welches von dem + 4 prädiciret wurde, begründet durch — 2. Und eben so ist es mit den reinen Verstandesbegriffen. Sie *sind*, in wie fern Anschauung hinzukömmt.

Ich kann mir — 4 als solches nur unter der Bedingung denken, daß ich mir etwa noch hinzudenke $\begin{matrix}+2\\-2\end{matrix}-4$; denn nun wurde das *ist*, das von — 4 prädiciret wird, begründet durch + 2. Eben so ist es mit Raum und Zeit. Sie *sind* nur in so ferne, als eine freie Thätigkeit sich äussert.

Beiden, dem + 4 und — 4, einzeln genommen, kommt gleichsam nur ein *präsumirtes Seyn* zu. Werden hingegen beide miteinander verbunden, so ist das Seyn wirklich vollendet. Denn der eigentliche Ausdruck für die bestimmte Linie AB ist $= \begin{matrix}+4\\-4.\end{matrix}$

S. 15 in der vorletzten Zeile l. statt +, —.

oder kein
er Mann
eit, und
Freiheit
Thätigkei
ie ander
ber auch
mtes ge-

ine Linie
Ein Bei-

B, so ist
te B (der
n können)
mit Frei
nicht auf
ine vorge
inie wird
rtsetzen,
enn vor un
rausgienge
bestimmen
s erkennen
b.