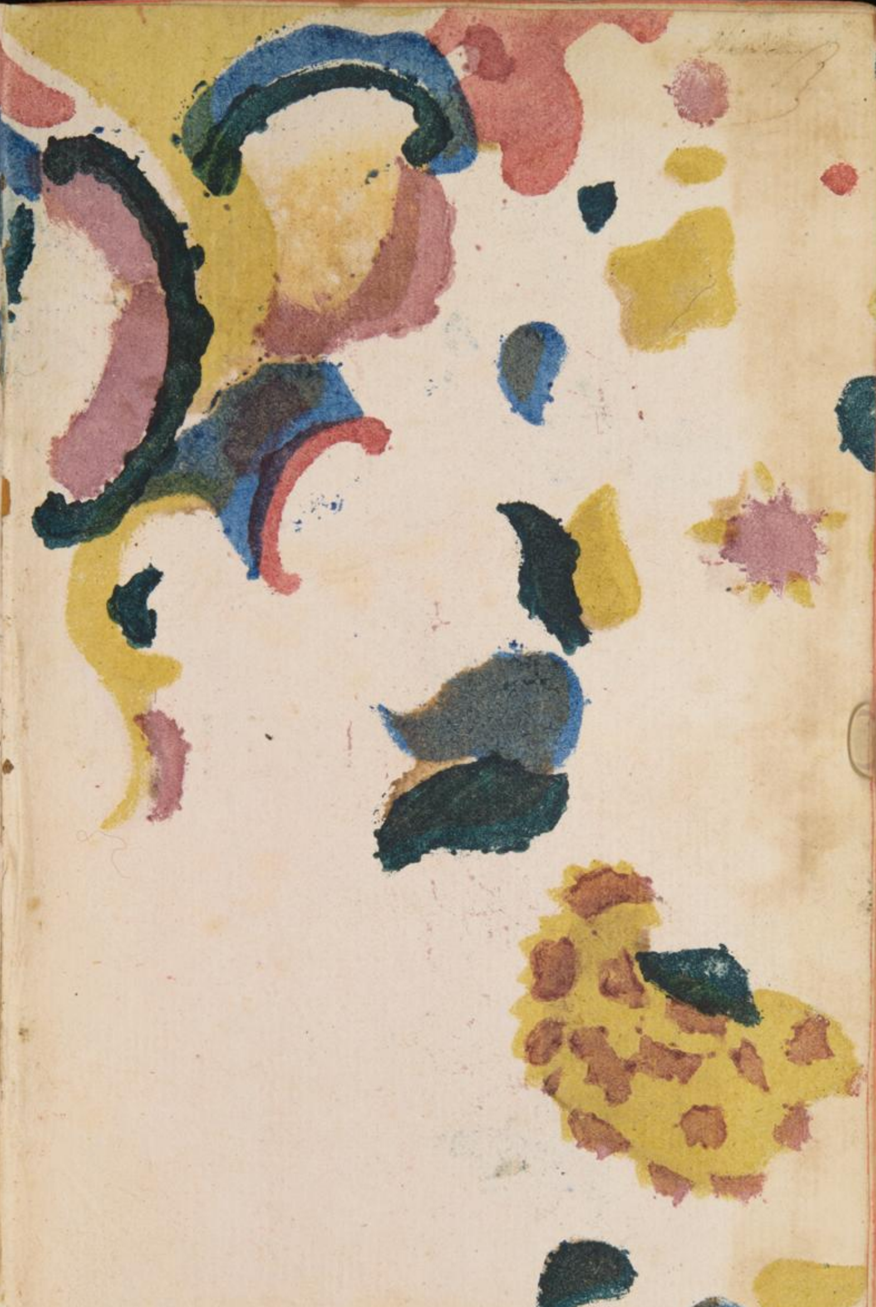


COMPENDIARIA MATHESEOS INSTITVTIO

QVAM IN VSVM

AVDITORVM PHILOSOPHIAE

ELVCVBRATVS EST

PAVLVS MAKO e S. I.

In Coll. Reg. Thereſ Prof. Math. et Phyſ. Experim.

EDITIO TERTIA

ab Autore emendata.

VINDOBONAE,
TYPIS IOAN. THOMAE DE TRATTNERN,
CAES. REG. AVLAE TYPOGR. ET BIBLIOP.
MDCCLXXI.

MONITVM
AD LECTOREM.

Quanquam in hoc libro ea duntaxat contineantur, quae proprie ad Elementa pertinent; tamen in his ipsis occurrent fortasse quaedam, in quibus tirones aliis praeterea studiis occupati adhaerescant. Ea, quae huiusmodi esse nobis visa sunt, ita pertractauimus, vt iis praetermissis ceterorum connexiones non omnino turbentur. Praetermitti igitur poterunt numeri sequentes: 89, 127, 132, 133, etc. vsque ad finem cap. IV. Item 229, 230, 235, 236, 634, 665, et qui consequuntur *vsque ad finem secundi capitis. Denique 684., et reliqui omnes vsque ad finem capitis tertii. Quod ad partitionem libri attinet, curauimus equidem, vt naturae ordinem sequeremur: sicubi tamen demonstrationum forma simplicior aliud postulare visa est, ab eodem nonnihil deflectere religioni nequaquam duximus, praesertim cum hac ipsa in re primi subsellii Mathematicos autores haberemus.*

ELEMENTA ALGEBRAE.

PROLEGOMENON.

I.

Quantitas adpellatur quaeuis magnitudo, quae additione augeri, vel ablatione minui poteſt. E. g. numeri, lineae, pondera, velocitates etc. cum augeri, ac minui poſſint, quantitates ſunt.

2. Scientia, quae de quantitatibus abſtracte, ac generatim agit, *Algebra* dicitur.

3. Quantitates ab omni ſubiecta materia abſtractae minoribus alphabeti literis *a*, *b*, *c*, etc. ſolent deſignari; et cognitae quidem primori-

bus a, b, c, d: incognitae poſtremis x, y, z. Saepe tamen memoriae adiuuandae cauſſa adhibentur primae literae earum vocum, quibus quantitates ipſae deſignantur; e. g. tempus repraeſentatur litera t, ſpatium litera s, celeritas litera c, et ita porro.

4. Coroll. 1. Cum ergo quantitas generatim ſumta exprimat omnem magnitudinem, quae augeri, vel minui poteſt (1) literae alphabeti omnem magnitudinem, e. g. numeros, lineas pondera etc. deſignare poſſunt: vt adeo, quae in Algebra de literis hisce demonſtrantur, ea in quauis quantitatum ſpecie locum habeant.

5. Coroll. 2. Vnde adparet Algebram eſſe ſcientiam quamdam vniuerſalem, quae praeclaros habeat vſus in omnibus iis diſciplinis, in quibus certae quantitatum ſpecies, e. g. numeri, lineae, ſpatia, tempora, celeritates, vires, pondera etc. pertractantur.

Scholion. Perſaepe animaduerti Algebrae tirones in ipſa quantitatum abſtractarum notatione adhaereſcere, neque ſatis intelligere, quid literae a, b, c, x, y ſibi velint. Nimirum quemadmodum notae 1, 2, 3 ſignificant quamcumque vnitatem, binarium, ternarium; ita literae illae denotant quamlibet quantitatem: et ſicuti in Arithmetica, ſeu in numerorum tractatione nihil determinati, non ſtellas, non pecunias, non homines intelligimus, ſed numeros ab omni ſubiecta materia abſtrahimus; ita quum literis in calculo vtimur per has nullam quantitatem determinate, non numeros, non lineas, non ſpatia, ſed quamuis generatim magnitudinem incrementi, ac decrementi capacem designamus. Quemadmodum ergo notae numerorum, priusquam ad certam materiam determinentur, significant quasuis res numerabiles; ita plane literae, antequam ad certum aliquod quantitatum genus, e. g. ad numeros, lineas, pondera, celeritates etc. adplicentur, vniuerse denotant omnes quantitates.

6. Quantitas quaelibet vel est *positiua*, seu maior nihilo; vel est *negatiua*, seu minor nihilo: vt adeo nihilum sit quasi limes quidam quantitatum positiuarum, et negatiuarum. Positiuae designantur signo + praefixo, quod initio fere omissum semper subauditur; negatiuae signo —, quod semper expresse ponitur. Signa vero ista hunc in modum enunciantur: $a + b$, *a plus b*; $c - d$, *c minus d*.

Scholion. Sedulo curandum est, vt tironum animis clara, ac distincta quantitatis negatiuae notio ingeneretur. Qui aureos centum possidet, nec quidquam debet, aurei hi comparate ad illum sunt quantitas positiua, cum eos possidendo plus nihilo habeat: at si alteri tantundem debeat, dicetur habere nihil, cum debitum omnem illam pecuniam velut exstinguat. Sin autem non modo nihil habeat, sed insuper creditori debeat aureos centum, hi comparate ad illum sunt quantitas negatiua, cum totidem aurei desiderentur ad hoc vt nihil habeat, seu vt exsoluto creditore nihil habere censeatur. Vnde quidquid supra nihilum est, positiuum dicitur: quidquid ad nihilum desideratur, negatiuum adpellatur. Similiter si motus cuiuspiam hominis versus orientem referatur, paſſus, quos in eandem plagam facit, poſitiui ſunt, quia verſus ortum re vera progreditur: at ſi volens ad orientem progredi, verſus occaſum regrediatur, motus contrarius, ſeu regreſſus in occaſum comparate ad orientem negatiuus eſt; vt enim homo ille regrediens in quiete, ſeu nullo verſus orientem motu perſtare intelligatur, neceſſe eſt, vt viam relegendo tantundem motum poſitiuum verſus orientem faciat, quantum antea verſus occidentem fecit. Sicuti autem debitum illud eſt reapſe aliquid, et regreſſus iſte in occaſum eſt verus motus, ita quantitas negatiua re vera eſt quantitas, non merum nihil, ſed quae comparate ad certam hypotheſim negatiua ſit. Hinc generatim ſigna $+$ et $-$ ſemper contrario ſenſu ſunt accipienda: vt ſi $+$ ſignificet

Surſum, prorſum, lucrum, incrementum, ſupra, ante, acceſſum etc. — deſignet

Deorſum, retrorſum, damnum, decrementum, infra, poſt, receſſum etc. et ſi $+$ poſtrema haec denotet, — priora illa ſignificet.

7. Signum $=$ deſignat aequalitatem earum quantitatum, inter quas inſeritur: vt ſi ſit $a = b$, ſignificat quantitatem a aequalem eſſe quantitati b. Signum $>$ oſtendit quantitatem anteriorem maiorem eſſe poſteriore; at ſignum $<$ denotat eandem minorem eſſe ſequente. Sic $a > b$ ſignificat quantitatem a maiorem eſſe, quam b: $3 < 5$ oſtendit numerum tertium minorem eſſe quinto. Signum ∞ exprimit infinitatem; hinc ſicubi occurrat $a = \infty$, argumento eſt quantitatem a infinitae eſſe magnitudinis.

8. Dum quantitas quaepiam ſigno $+$ interiecto alteri adiungitur, id ſignum denotat illam alteri addi, quum vero quantitas alteri cum ſigno $-$ adnectitur, ſignum illud ablationem indicat. E. g. $a + b$ ſignificat quantitatem b ad a adiungi; $a - b$ eandem ab a tolli, ſeu quantitatem a quantitate b multari

9. Coroll. 1. Quoniam addere, ac demere contraria ſunt, patet quantitatem poſitiuam adiuncta aequali negatiua aequari nihilo. E. g. $a - a$, $- a + a$, $3 - 3$, $- 3 + 3$ aequantur nihilo.

10. Coroll. 2. Hinc ſi quantitas alterutra maior fuerit, minor e maiore ſemper tantum deſtruit, quanta eſt ipſa minor. Sic $5 - 3 = 2$; $3 - 8 = - 5$.

11. Quantitas, quae e pluribus ſigno $+$ vel $-$ iunctis conſurgit, *complexa* dicitur, vel *polynomia*, ipſae vero illae quantitates ſigno coniunctae *termini* adpellantur: e. g. $ab - c + 2d$ eſt quantitas complexa trium terminorum: quae autem non conſtat quantitatibus eiusmodi ſigno connexis *incomplexa*, aut *monomia* vocatur, vt a, vel $3ab$, vel $- 2cd$. Speciatim vero quantitas polynomia duorum terminorum *binomia*, trium *trinomia* etc. nuncupatur. E. g. $ab + cd$ eſt quantitas binomia, $a + b - 2cd$ trinomia.

12. Coroll. Valor quantitatis complexae non mutatur, quo demum cunque ordine ſcribantur termini eandem componentes. Neque enim mutatur valor totius, niſi mutato valore partium, quem ſola ordinis permutatione non mutari perſpicuum eſt. Hinc $a + b - c = a -$

$c + b = b + a - c = - c + a + b = - c + b + a$.

13. Numeri, de quibus iam tractabimus, tribus modis possunt literis adiungi. Nam vel 1) iunguntur iis interiecto signo $+$ aut $-$, vt $a - b + 5$: vel 2) praefiguntur literis nullo signo interposito, vt $4ab$: vel 3) a dextris sursum versus iisdem adscribuntur, vt a^3.

14. Numeri literis nullo interiecto signo praefixi adpellantur earum *coefficientes*, afficiuntque totum terminum, cui praefiguntur, ac indicant, quoties ille terminus cum suo signo positus sit: e. g. $3ab$ significat terminum ab ter esse positum. Sicubi autem desit coefficiens, illic vnitas praefixa intelligitur, cum eiusmodi terminus semel tantum positus sit.

15. Coroll. Est ergo $3ab = ab + ab + ab$; et $-5a = -a - a - a - a - a$. Vnde adparet expressionem per coefficientes esse methodum compendiariam scribendi easdem quantitates aliquoties cum suo signo positas.

16. Numeri a dextris sursum versus literis adiecti sunt earum literarum, quibus adiiciuntur, *exponentes*, afficiuntque eam solum literam, cui a dextris iunguntur, ac indicant, quoties vnitas per eam literam sit multiplicata, seu quoties ea litera multiplicatione sit posita. E. g. a^3 significat vnitatem per a ter esse multiplicatam, seu quantitatem a ter esse multiplicatione positam. Sicubi vero desit exponens, illic vnitas adiecta intelligitur, cum per talem quantitatem vnitas semel duntaxat sit multiplicata.

17. COROLL. Interdum in exponentibus numerorum loco literae minuſculae adhibentur, aut literae numeris permiſtae, vt in his ab^m, $a^{-n}b$, a^{m+2}, ab^{n-1}.

SCHOLION. Caueat diligenter tiro, ne exponentes confundat cum coefficientibus, putetque eſſe $a^2 = 2a$: a^2 ſignificat vnitatem bis eſſe per a multiplicatam, ſeu quantitatem a bis eſſe multiplicatione poſitam; at $2a$ denotat eandem bis eſſe poſitam additione. Ponatur $a = 7$, erit $a^2 = 49$, $2a = 14$.

18. Quantitates monomiae, ſeu termini dicuntur *ſimiles*, aut *homogenei*, ſi conſtent iisdem accurate literis cum iisdem exponentibus, licet diuerſis gaudere poſſint ſignis, et coefficientibus. Sic homogeneae quantitates ſunt $3ab$, et $2ab$; item $-cb^2d$ et $+4cb^2d$: quae vero aut literas diuerſas habent, aut in iisdem literis diuerſos exponentes *heterogeneae* vocantur, vt ſunt ab et cb, $3a^2b$ et $-ab^2$.

19. *Numerus* eſt multitudo compoſita ex vnitatibus. Nimirum quaeuis quantitas numero deſignata concipitur veluti diuiſa in partes plures aequales, quarum quaeuis ſeorſim ſpectata eſt vnitas. E. g. octo floreni ſunt determinata pecuniae quantitas, conſtans octo florenorum vnitatibus, vel vt alii adpellant monadibus.

20. Characteres, quos ad exprimendum quemuis numerum adhibemus, hi ſunt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, quorum poſtremus *zerus* dicitur, nec quidquam ſignificat ſecundum ſe, ſed valorem duntaxat auget prae-

cedentium, remouendo illos longius ab extremo loco, vt iam dicemus.

21. Valor autem horum characterum ex libera hominum inſtitutione pendet a loco, quo quisque poſitus eſt. Quiuis ſeorſim collocatus denotat vnitates, nempe 1 vnam, 2 duas, 3 tres etc. Si plures coniungantur, dextimus vnitates, ſecundus verſus ſiniſtram vnitatum decades, tertius centenarios, quartus millenarios etc. ſignificat. Valor proinde characterum a dextimo recedendo continenter creſcit in decuplum. Quodſi in quopiam loco nullus adſit character, illic ponitur zerus, ſeu o, vt in numero 306 in quo zerus debet occupare locum decadum, quae deſiderantur, vt ſcilicet numerus 3 centenarios valeat; nam ſi omiſſo zero ſcriberetur 36, iam 3 non centenarios ſed decades exprimeret.

22. Atque hinc elucet modus datum quemuis numerum enunciandi. Nimirum 1) numerus propoſitus a dextra inchoando diuidatur in claſſes, quarum cuilibet terni numeri attribuantur excepta ſiniſtima, quae etiam duabus, aut vna nota conſtare poteſt. 2) Poſt primam claſſem ponatur virgula inferius, poſt ſecundam virgula ſuperius, poſt tertiam iterum virgula inferius, et ſic deinceps ſemper alternando, ita tamen, vt virgulae ſuperiores ſemper vna creſcant. 3) Peracta hac partitione prima claſſis ſeu dextima ſignificabit vnitates, decades, centenarios regrediendo; ſecunda vnitates, decades, centenarios millium; tertia vnitates, decades, centenarios millionum etc. hoc eſt,

classis ante virgulas superiores millionarios denotat, ante inferiores millenarios, eosque vel simplices, si nulla virgula superior sequatur; vel millenarios millionum si vna, bimillionum si duae, trimillionum si tres etc. virgulae sequantur superius. En exemplum:

0	9	7,	8	0	5''	3	1	0,	0	0	2'	4	5	3,	2	0	4.
Centenarii	Decades	Vnitates	Centenarii	Decades	Vnitates	Centenarii	Decades	Vnitates	Centenarii	Decades	Vnitates	Centenarii	Decades	Vnitates	Centenarii	Decades	Vnitates
Millium Bimillionum			Bimillionum			Millium Millionum			Millionum			Millium			Simplices		

Numerum hunc a sinistra exorsus, omissis zeris, qui nihil significant, sed tantum valorem notarum anteriorum augent, hunc in modum enunciabis. Nonaginta septem *millia bimillionum*, octingenti quinque *bimilliones*, trecenta decem *millia millionum*, duo *milliones*, quadringenta quinquaginta tria *millia*: ducentae quatuor *vnitates*. Ratio enunciandi perspicua est ex n. 21.

SECTIO I.

De primis quantitatum integrarum, et fractarum calculis.

CAPUT I.

De Additione, et Subtractione quantitatum integrarum.

23. Quantitates iſthic ea ſolum ratione ſpectamus, quatenus augeri, vel minui poſſunt (1): quare duplex tantum calculandi genus locum in iisdem habere poteſt; nimirum additio, per quam augentur; et ſubtractio, per quam minuuntur. Quia vero quaevis quantitas augeri poteſt tam alterius quantitatis homogeneae, quam repetita ſuimet ipſius adiectione, duplex eſt genus additionis: nempe operatio, qua quantitati alia quantitas adiungi-

tur, ſimpliciter vocatur *additio*; qua vero eadem quantitas vicibus repetitis ponitur, ſeu ſibi ipſi additur, dicitur *multiplicatio*. Similiter minui quantitas poteſt alterius quantitatis ablatione ſemel aut ſaepius facta; prior ablatio *ſubtractio*, poſterior *diuiſio* adpellatur. Verum de multiplicatione, ac diuiſione agemus in ſequentibus.

24. *Addere* eſt ex datis partibus facere vnum *totum*, quod etiam *ſumma* dicitur.

25. Coroll. 1 Quantitates addendas oportere eſſe homogeneas nemo non videt: neque enim lineae et pondera, aut tres ſtellae et quinque aurei cogi in vnam ſummam poſſunt; nam ea neque lineas, neque pondera, aut neque ſtellas, neque aureos poſſet ſignificare. Interdum tamen numeri heterogenei poſſunt ad eandem ſpeciem reduci, atque ita reddi homogenei, vt ſunt floreni, et groſſi, qui ad crucigeros reuocari, ac deinde in vnam ſummam coaleſcere poſſunt.

26. Coroll. 2. Si ergo additio absque errore facta eſt, totum debet eſſe aequale omnibus partibus additis ſimul ſumtis: et ſiquidem inaequale deprehendatur. id erit indicii additionem fuiſſe vitioſam.

27. Coroll. 3. Quare dum inquiritur, vtrum additio ſine errore perfecta ſit, iſtud quaeritur, an totum aequale ſit omnibus partibus additis ſimul ſumtis.

28. Coroll. Id autem dupliciter deprehenditur: ſi enim totum ſit aequale datis partibus ſimul ſumtis, 1) ablatis ſucceſſiue ex toto

omnibus partibus nihil debet remanere: 2) ablata vna parte debent remanere reliquae. Hinc patet ratio explorandi bonitatem additionis per ſubtractionem.

29. PROBLEMA. *Quantitates algebraicas addere.*

RESOLVTIO. Retentis ſingularum ſignis ſcribantur partes addendae infra eas, ad quas addendae ſunt, tum ducta linea totum a partibus addendis ſeparante hae leges obſeruentur:

1) Primum indagetur, quinam termini ſint inter ſe ſimiles (18).

2) Attendatur ad ſigna. Si quantitates homogeneae, ſeu termini ſimiles eodem ſigno afficiantur, coefficientes iis praefixi addantur in vnam ſummam retento communi ſigno, et literis cum iisdem exponentibus.

3) Si vero diuerſis ſignis afficiantur, minor coefficiens tollatur a maiore, et reſiduum cum ſigno maioris praefigatur communibus literis (10).

4) Si termini ſimiles aequales coefficientes, et ſigna contraria habeant, penitus omittantur (9).

5. Demum termini heterogenei iungantur cum ſuis ſignis abſque vlla mutatione (25).

EXEMPLA.

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \left.\begin{array}{l} 3ab - 2ac + 3d \\ 5ab - 5ac \end{array}\right\} \textit{Partes addendae} \\ \hline & 8ab - 7ac + 3d \,] \ \textit{Totum} \end{array}$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{array}{r} 8ax + 3bc - 5de \\ -ax - 7bc + 2de \end{array}\right\} \textit{Partes addendae.}$$
$$\left.\begin{array}{r} 7ax - 4bc - 3de \end{array}\right] \textit{Totum.}$$

$$\text{III.}\quad \left.\begin{array}{r} 9a^{m+2}b^3x - 12b^5c^2 - 5a^3x^m + 32 \\ 6 - 2a^3x^m - 5a^{m+2}b^3x + 8b^5c^2 \end{array}\right\} \textit{Partes addendae}$$
$$\left.\begin{array}{r} 4a^{m+2}b^3x - 4b^5c^2 - 7a^3x^m + 38 \end{array}\right] \textit{Totum.}$$

$$\text{IV.}\quad \left.\begin{array}{r} 16ab^2 - 25 + 4b^mcx^2 - 4a^mb^2 \\ 3b^mcx^3 - 10ab^2 + 3a^mb^2 + 20 \end{array}\right\} \textit{Partes addendae}$$
$$\left.\begin{array}{r} 6ab - 5 + 4b^mcx^2 - a^mb^2 + 3b^mcx \end{array}\right] \textit{Totum.}$$

30. PROBLEMA. *Numeros addere.*

RESOLVT. Additio numerorum ſimplicium regulis non eget, quiuis enim facillime peruidet $6+5$ eſſe $=11$; $9+8=17$. Verum in addendis numeris compoſitis maioribus ingenii humani imbecillitas arte aliqua adiuuanda eſt. Sunt ergo in eam rem hae regulae.

1) Numeri addendi ſcribantur infra ſe inuicem hac lege, vt vnitates vnitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis etc. reſpondeant in eadem columna deorſum verſus.

2) Ducta linea transuerſa, ne numeri addendi confundantur cum toto, colligantur primum vnitates in vnam ſummam, tum decades, centenarii etc. et quaeuis ſumma ſcribatur infra eam columnam, e cuius additione collecta eſt.

3) Si ſumma vnitatum excedat 9, ſeu excreſcat in vnam, vel plures decades, ſolae vnitates, quae praeter decades adſunt (aut 0, ſi nulla adſit vnitas) ſcribantur infra vnitatum columnam, ipſae vero decades ad ſequentem columnam adiungantur (21.) Similiter ſi decadum ſumma excreſcat in vnum, vel plures centena-

rios, ii ad tertiam columnam reſeruentur, et ſic porro. Conf. exemp. 2. et 3.

4) Si numeri addendi heterogenei quidem fuerint, ad eandem tamen aliquam ſpeciem reduci poſſint, vt floreni, groſſi, crucigeri; item dies, horae, minuta, collocentur infra ſe inuicem ita, vt e. g. crucigeri crucigeris, groſſi groſſis, floreni florenis reſpondeant, et inchoando a minima ſpecie additio peragatur vt ante. Quoties autem ſumma ſpeciei minoris exaequat ſpeciem maiorem, toties ſpeciei maiori erit addenda; vt ſi ſumma crucigerorum eſſet 7, cum in ea 2 groſſi contineantur, et inſuper 1 cruciger, ſcribendus eſſet 1 cruciger, et 2 groſſi ad columnam groſſorum reſeruandi. Conf. exempl. 4.

DEMONSTR. Addere numeros eſt ex datis numeris facere vnum totum (24): atqui per has regulas fit vnum totum e datorum numerorum vnitatibus, decadibus, centenariis etc. ſeu ex omnibus partibus, hoc eſt ex ipſis numeris datis, qui a ſuis partibus vtique non diſtinguuntur.

EXEMPLA.

I.

342	*Addendi.*
23	
365	*Totum.*

II.

2501	*Addendi.*
932	
43	
3476	*Totum.*

III.

235002	*Addendi.*
104523	
60048	
399573	*Totum.*

IV. flor.	grossi	cruc.	
8,	12,	2	*Addendi.*
7,	18,	1	
4,	9,	2	
21,	0,	2	*Totum.*

31. CorOLL. Si in columnae cuiuspiam collectione nullus sit numerus scribendus, illic ponitur o, nisi quid e columna praecedente illuc translatum sit, vt factum est in columna grossorum exemp. 4. Quodsi multi numeri essent addendi, perturbationis vitandae caussa commodius perageretur additio per partes, addendo primum tres primos numeros, tum alios tres, et sic deinceps, ac demum summas particulares cogendo in vnam summam, vt patet in adiecto exemplo.

Addendi.	36245 82036 10500	128781	*Tota particular.*
	9878 6369 896	17143	
	920 68	988	
		146912)	*Totum*

32. *Subtrahere* est auferre vnam partem a toto, vt cognoscatur pars altera, quae etiam *residuum* vel *differentia* adpellatur.

33. Coroll. 1. Partem ſubtrahendam debere toti eſſe ſimilem, aut ſaltem ad eandem aliquam ſpeciem reducibilem in aperto eſt: neque enim a celeritate pondus, a 5 aureis 3 ſtellae ſubduci poſſunt; nam differentia neque celeritatem, neque pondus, item neque aureos, neque ſtellas poſſet ſignificare.

34. Coroll. 2. Si ergo ſubtractio legitime facta eſt, parte vna ablata debet praeciſe altera remanere, nec plus, nec minus: et ſiquidem plus minusue remaneat, id erit indicii ſubtractionem fuiſſe vitioſam.

35. Coroll. 3. Quare dum inquiritur, vtrum absque errore facta ſit ſubtractio, iſtud quaeritur, an reſiduum ſit praeciſe pars altera totius.

36. Coroll. 4. Atqui ſi reſiduum accurate eſt pars altera totius, illud cum parte ſubtrahenda ſimul debet efficere totum; cum totum quoduis ſit aequale ſuis partibus ſimul ſumtis: quare ſicuti additio ope ſubtractionis (28), ita ſubtractio ope additionis comprobatur.

37. Problema. *Quantitates algebraicas ſubtrahere.*

Resolvt. Pars ſubtrahenda toti ſubſcribatur, ductaque linea transuerſa mutentur ſigna omnia partis ſubtrahendae in contraria, nempe $+$ in $-$, et $-$ in $+$; tum fiat additio per regulas ſuperiores (29): dabit ſumma quaeſitam differentiam.

Demonstr. Terminus enim ſubtrahendus vel poſitiuus, vel negatiuus eſt (6): ſi eſt poſitiuus, poſitiuum tollere idem eſt, ac tantundem negatiui addere: ergo idem eſt, ſiue poſitiuum tollatur, ſiue ex illo fiat negatiuum, et addatur. Si eſt negatiuus, negatiuum tollere idem eſt, ac tantundem poſitiui addere: ergo idem eſt, ſiue negatiuum tollatur, ſiue ex illo fiat poſitiuum, et addatur. Ergo generatim quantitates quascunque algebraicas ſubtrahere idem eſt, ac easdem ſignis mutatis addere.

EXEMPLA.

I. $8ab - 7ac + 3d$] *Totuum*
$5ab - 5ac$] *Pars ſubt.*
$-5ab + 5ac$] *mut. ſign.*

$3ab - 2ac + 3d$] *Differ.*

II. $7ax - 4bc - 3de$] *Totum.*
$8ax + 3bc - 5de$] *Pars ſubt.*
$-8ax - 3bc + 5de$] *mut. ſign.*

$-ax - 7bc + 2de$] *Differ.*

III. $20a^4b - 3b^mcd^2 + 2ad^2 - 64$] *Totum*
$6 + 5ad^2 - 4a^4b + 5b^mcd^2 - c^2d$] *Pars ſubt.*
$-6 - 5ad^2 + 4a^4b - 5b^mcd^2 + c^2d$] *mut. ſign.*

$24a^4b - 8b^mcd^2 - 3ad^2 - 70 + c^2d$] *Differ.*

IV. $5a^mx^2 - 20 + 7ab^3x - 4b^mcx^2$] *Totum.*
$2b^mcx^2 + 5a^mx^2 + 8 - 2a^3bx$] *Pars ſubt.*
$-2b^mcx^2 - 5a^mx^2 - 8 + 2a^3bx$] *mut. ſign.*

$-28 + 7ab^3x - 6b^mcx^2 + 2a^3bx$] *Differ.*

38. Corollar. Quodſi partes ſubtrahendae reſtitutis ſignis priſtinis addantur diffe-

rentiis, summae restituent tota, atque ita patebit subtractiones fuisse rite peractas (36).

39. PROBLEMA. *Numeros subtrahere.*

RESOLVT. Subtractio numerorum simplicium rursus nullis eget regulis. Quiuis enim videt e g. 8 — 5 esse = 3, 9 — 5 = 4. Si vero numeri occurrant compositi, subtractio hisce regulis perficitur:

1) Pars subtrahenda scribatur infra totum ea lege, quam in additione praescripsimus, ducaturque transuersa linea differentiam a parte subtrahenda separans.

2) Inchoetur subtractio ab vnitatibus; tum transeatur ad decades, centenarios etc. residua singula scribendo sub linea infra illum numerum, cuius residua sunt.

3) Si numerus tollendus aequalis fuerit superiori, aut si zerus a zero subtrahi debeat, ponatur pro differentia zerus (9). Si subtrahendus tantum fuerit zerus, ponatur pro differentia totus numerus superior: sin autem superior fuerit zerus, vel minor inferiore, e nota sinisteriore transferatur ad eum vnitas, quae valebit eo loco decadem (21): tum fiat subtractio e zero vel numero iam decade aucto; interim nota sinisterior vnitate multata signetur puncto, quod admoneat illam vnitate fuisse multatam.

4) Si vero nota illa sinisterior, e qua vnitas transferenda esset, zerus fuerit, transferatur e nota eundem praecedente ad zerum ipsum vnitas, quae in loco zeri valebit 10 (21), vnde vnitate ad sequentem notam traducta, in

loco zeri remanebunt 9. Quodſi plures zeri in minuendo continenter occurrant, ii omnes translata vnitate a numero eosdem praecedente pari plane ratione abeunt in 9.

5) Eaedem ſunt regulae pro numeris heterogeneis ad eandem ſpeciem reducibilibus, hoc vno diſcrimine, quod vnitas a ſpecie maiore ad minorem translata non decadem, ſed tot vnitates valeat, quot ſpeciei minoris vnitates in ea continentur: e. g. 1 florenus ad locum groſſorum translatus valet 20, groſſus in loco crucigerorum valet 3. Si ſpecies minores, quae in parte ſubtrahenda ſunt, in toto deſiderentur, eae ex vnitate ſpeciei maioris faciendae erunt: e. g. ſi totum contineret tantum florenos 8, nullos groſſos, et crucigeros, relictis 7 florenis ex vno fieri deberent 20 groſſi; tum relictis 19 groſſis ex vno fieri 3 crucigeri, adeoque pro 8 florenis ſcribi 7 floreni, 19 groſſi, 3 crucigeri. Idem obſeruandum eſt in aliis numeris heterogeneis ad eandem ſpeciem reducibilibus.

Demonstr. Subtractio numerica eſt vnius numeri ab altero ablatio, vt innoteſcat eorum differentia (32); atqui per traditas regulas ſingulae partes partis ſubtrahendae, ſcilicet vnitates, decades etc. auferuntur a ſingulis partibus totius, et innoteſcit ſingularum partium differentia: totus ergo numerus ſubtrahendus aufertur a toto atque ita obtinetur totius partis a toto differentia.

EXEMPLA.

I.	6824	*Totum.*
	4023	*Pars ſubt.*
	2801	*Differ.*

II.	70562	*Totum.*
	9386	*Pars ſubt.*
	61176	*Differ.*

III.	90005	*Totum.*
	27837	*Pars ſubt.*
	62168	*Differ.*

	flor.	groſſ.	cruc.	
IV.	36,	8,	1,	*Totum.*
	9,	16,	2,	*Pars ſubt.*
	26,	11,	2,	*Differ.*

Scholion. Si differentiam vbique addideris parti ſubtrahendae, reſtituetur vbique totum, atque ita adparebit ſubtractiones rite fuiſſe inſtitutas (36). Vt autem additiones, et ſubtractiones heterogeneorum reducibilium peragi poſſint, neceſſe eſt ſcire, quotnam vnitates ſpeciei minoris requirantur ad efficiendam vnitatem ſpeciei maioris. En tabellam ſpecierum apud nos in frequentiore vſu poſitarum.

1 florenus	=	20 groſſis
1 groſſus	=	3 crucigeris
1 dies	=	24 horis
1 hora	=	60 minutis
1 minutum	=	60 ſecundis
1 ſecundum	=	60 tertiis
1 gradus	=	60 minutis
1 minutum	=	60 ſecundis
1 ſecundum	=	60 tertiis

1 Centenarius	=	100 libris
1 libra	=	32 ſemiunc.
1 ſemiuncia	=	4 drachmis
1 libra Apoth.	=	12 vnciis
1 vncia	=	8 drachmis
1 drachma	=	3 ſcrupulis
1 ſcrupulus	=	20 granis
1 hexapeda	=	6 pedibus
1 pes	=	12 digitis
1 digitus	=	12 lineis.

CAPVT II.

De Multiplicatione, et Diuiſione quantitatum integrarum.

40. *Multiplicare* eſt vnam quantitatem toties ponere, quoties continetur vnitas in altera. Hinc *a* per *b multiplicare*, ſeu *a* in *b ducere* idem eſt, ac quantitatem *a* toties ponere, quoties continetur vnitas in quantitate *b*. Quantitas, quae toties ponitur, *multiplicanda*; quae ſuis vnitatibus indicat, quoties ponenda ſit, *multiplicator*: quae demum ea operatione conſurgit, *factum*, vel *productum* adpellatur, vnde multiplicanda, et multiplicator ſolent etiam communi vocabulo *factores* dici.

41. Coroll. 1. Igitur quantitas multiplicanda toties continetur in facto, quoties vnitas in multiplicatore, ſeu factum coaleſcit praeciſe ex multiplicando toties poſito, quoties eſt vnitas in multiplicatore, ſiquidem legitima ſit multiplicatio.

42. Coroll. 2. Quum ergo inquiritur, an multiplicatio rite peracta ſit, illud quaeritur, an factum praeciſe coaluerit e multiplicando toties poſito, quoties eſt vnitas in multiplicatore.

43. Coroll. 3. Atqui an factum ſic coaluerit, repetita ſubtractio oſtendit: ſi enim ita coaluit, toties ſublato multiplicando, quoties eſt vnitas in multiplicatore, factum penitus

tolli, atque in nihilum redigi debet: nam quibus positis factum coaluit, iisdem ablatis destrui necesse est.

44. Multiplicatio quantitatum maxime complexarum saepe indicatur tantum, reapse non peragitur. Signa autem indicatae multiplicationis sunt crux decussata $\times$, aut punctum inter factores interiectum: e. g. 2×3, vel $2 . 3 = 6$. Factores complexi plerumque parenthesi includuntur signo $\times$, vel nullo interposito: e. g. $(a + 2b - c) \times (2a - d$, vel $(a + 2b - c)$ $(2a - d)$ significat priorem quantitatem per posteriorem esse multiplicatam.

45. THEOREMA. *Cum duae quantitates* a *et* b *inuicem multiplicantur, idem factum nascitur, siue* a *ducatur in* b, *siue* b *in* a.

DEMONSTR. Sint enim in recta AB tot puncta, quot sunt in quantitate a vnitates, e. g. sex, et in recta AC tot, quot b continet vnitates e. g. quatuor. Ducere quantitatem a in b idem est, ac seriem punctorum AB quater sumere; et ducere quantitatem b in a idem est, ac seriem punctorum AC sexies sumere (40): atqui vtroque in casu idem prodit numerus punctorum scilicet spatio ABDC contentorum, in quo quatuor sunt series AB, aut sex series AC: ergo $a \times b = b \times a$. Fig. 1.

46. COROLL. 1. Eodem modo patet veritas theorematis, etiamsi fuerint plures factores a, b, c etc. Nam per demonstrata $a \times b = b \times a$, quare siue illud, siue hoc multiplices per c, idem plane est, seu $a \times b \times c = b \times a \times c$. Similiter $a \times c = c \times a$ (45): quare siue illud, si-

ue hoc ducas in b, idem eſt, ſeu $a\times c\times b=c\times a\times b$. Denique $b\times c=c\times b$ (45): ergo $b\times c\times a=c\times b\times a$.

47. COROLL. 2. Igitur perinde eſt, vterlibet factor ſit multiplicandus, aut multiplicator.

48. PROBLEMA. *Quantitates algebraicas multiplicare.*

RESOLVT. Scribatur multiplicator infra multiplicandum, ductaque transuerſa linea, per ſingula membra multiplicatoris inchoando a ſiniſtra, vel dextra multiplicetur totus multiplicandus his legibus:

1) Si factores diuerſa ſigna habeant, factum debet eſſe negatiuum.

DEMONSTR. Quiuis factor negatiuus repraeſentari poteſt per $-a$, et alter poſitiuus per b: ergo ſi demonſtratum fuerit, quod $-a\times b$, det factum negatiuum, id erit generatim verum: hoc autem ſic demonſtratur. Sit $a-a$ multiplicandum per b, erit prima pars facti $=ab$, cum poſitiuum aliquoties poſitum ſemper det factum poſitiuum; altera pars facti literalis rurſus erit ab, at dubium eſt, an debeat eſſe $+ab$, an $-ab$: dico debere eſſe $-ab$, et ſic oſtendo: $a-a=0$: ergo hic nihilum debet per b multiplicari, ſeu toties poni, quoties eſt vnitas in b; ſed nihilum quotiescunque ponatur, ſemper factum inde genitum debet eſſe nihilum; ac proinde etiam hic noſtrum factum debet eſſe nihilum; ſed niſi in ſecunda facti parte poneretur $-ab$, noſtrum factum non eſſet nihilum, ſed eſſet $=2ab$: ergo in ſecunda parte debet poni $-ab$: ergo $-a\times b=-ab$: ergo ſi factores diuerſa ſigna habeant, factum debet eſſe negatiuum.

Si vero factores ambo idem ſignum habeant, factum debet eſſe poſitiuum.

DEMONSTR. Nam imprimis ſi factor vterque poſitiuus eſt, patet factum debere eſſe poſitiuum, cum e poſitiuo aliquoties poſito factum enaſcatur poſitiuum: ſin autem ambo factores negatiui ſint, regula ſic demonſtratur. Quiuis factor negatiuus vnus repraeſentari poteſt per $-a$, alter per $-b$; ergo ſi demonſtratum fuerit, quod $-a\times-b$ det factum poſitiuum, id erit generatim verum; hoc autem ſic demonſtratur. Sit $a-a$ multiplicandum per $-b$, erit prima pars facti ex ante demonſtratis $=-ab$; altera pars facti literalis rurſus erit ab, at dubium eſt, an debeat eſſe $+ab$, an $-ab$: dico debere eſſe $+ab$, et ſic oſtendo: $a-a=0$; ergo hic nihilum debet per $-b$ multiplicari, ſeu toties poni, quoties eſt vnitas in $-b$; ſed nihilum quotiescunque ponatur, ſemper factum inde genitum debet eſſe nihilum, ac proinde etiam hic noſtrum factum debet eſſe nihilum; ſed niſi in ſecunda facti parte poneretur $+ab$, noſtrum factum non eſſet nihilum, ſed eſſet $=-2ab$: ergo in ſecunda parte debet poni $+ab$: ergo $-a\times-b=+ab$: ergo ſi factores ambo idem ſignum habeant, factum eſſe debet poſitiuum.

2) Coefficientes terminorum more aliorum numerorum inter ſe multiplicentur, et facto literali praefigatur eorundem factum.

3) Literae diuerſae multiplicatoris, et multiplicandi ſeruato alphabeti ordine iungantur, vti ſunt nullo ſigno interpoſito. Sic $a \times b = ab$; $3a \times 2c = 6ac$.

4) Si in factoribus eadem occurrat litera, haec in facto ſemel ſcribatur, et exponentes eius addantur. E. g. $a^2 \times a^3 b = a^5 b$.

DEMONSTR. Sit enim a^3 multiplicandum per a^2, dico factum eſſe $= a^5$. Nam a^3 eſt $= aaa$, et $a^2 = aa$ (16): ergo idem eſt, ſiue a^3 multiplicetur per a^2, ſiue aaa per aa; ſed ſi aaa multiplicetur per aa coniungendo literas, factum eſt $aaaaa$, ſeu a^5: ergo etiam ſi a^3 multiplicetur per a^2, factum eſt a^5. Eadem demonſtratio cuiuis caſui ſpeciali accommodari poteſt.

5) Denique peracta multiplicatione facta particularia addantur in vnam ſummam iuxta leges additionis (29), et ſumma erit totum productum.

EXEMPLA.

I.
$$\left.\begin{array}{r} 3ab - 2cd + f \\ 2c - 3f^2 \end{array}\right\} \textit{Factores.}$$

$$\left.\begin{array}{r} 6abc - 4c^2 d + 2cf \\ -9abf^2 + 6cdf^2 - 3f^3 \end{array}\right\} \textit{Factum.}$$

II.
$$\left.\begin{array}{l} 2a^{3-2m}b^2c^{m-2} - ab^{3m+1}c^{5+2m} + 6a^{-5}b^{3m}cx^{4-2m} \\ a^{4m-5}b^{2m}c^{3-4m} - 6 \end{array}\right\} \textit{Factores.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a^{2m-2}b^{2m+2}c^{1-3m} - a^{4m-4}b^{5m+1} \\ \quad c^{8-2m} + 6a^{4m-10}b^{5m}c^{4-4m} \\ x^{4-2m} - 12a^{3-2m}b^2c^{m-2} + 6ab^{3m+1} \\ \quad c^{5+2m} - 36a^{-5}b^{3m}cx^{4-2m} \end{array}\right\} \textit{Factum}$$

III.

$$\left.\begin{array}{l} 6a^3b^{2m-2}c^{-3}-2a^{m-3}b^4c^{-5}+4a^{5-2m}b^3c^{m+1} \\ 2a^{3m-1}b^3c^{m-4}-3a^{2-3m}b^{-2}c^{5-m} \end{array}\right\}\textit{Facto-res.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 12a^{2+3m}b^{2m+1}c^{m-7}-4a^{4m-4}b^7c^{m-9}+8a^{4+m}b^6c^{2m-3} \\ -18a^{5-3m}b^{2m-4}c^{-m}+6a^{-1-2m}b^2c^{-2-m}-12a^{7-5m}bc^{6} \end{array}\right\}\textit{Fa-ctum.}$$

IV. $$\left.\begin{array}{l} a^m + b^x - 2c^n \\ 2a^m - 3b \end{array}\right\}\textit{Factores.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a^{2m}+2a^mb^x-4a^mc^n \\ -3a^mb-3b^{x+1}+6bc^n \end{array}\right\}\textit{Factum.}$$

SCHOLION. Vt modum ipſum operandi tirones facilius peruideant, iuuabit poſtremum exemplum paulo diffuſius perſequi. Itaque 1) per $2a^m$ multiplicetur terminus primus multiplicandi a^m, erit factum iuxta regulas ſuperiores $= 2a^{2m}$, quod proinde infra lineam ſcribatur. Deinde per eundem multiplicatoris terminum multiplicetur $+ b^x$, erit factum $= + 2a^mb^x$. Denique multiplicetur etiam $- 2c^n$, erit factum $= - 4a^mc^n$. 2) Tranſeatur ad ſecundum multiplicatoris terminum $- 3b$, ac per eum multiplicetur imprimis a^m, erit factum $= - 3a^mb$ ſcribendum in ſecunda ſerie. Deinde per eundem etiam multiplicetur $+ b^x$, erit factum $= - 3b^{x+1}$ addendo ſcilicet exponentes. Demum per eundem multiplicetur $- 2c^n$, erit factum $= + 6bc^n$. 3) Quoniam facta haec particularia meris heterogeneis terminis conſtant, addi, ſeu ad ſimpliciorem expreſſionem reduci nequeunt; ac proinde ſine vlla vlteriore operatione relinquuntur.

49. Numerorum ſimplicium multiplicatio nullas habet regulas, ſed neceſſe eſt aut memoria tenere, aut in promptu habere tabellam, vt vocant, Pythagoream, quam iſthic adiecimus.

							D			
A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	B
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
	4	8	12	16	20	24	28	32	36	
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
F	6	12	18	24	30	36	42	48	54	G
	7	14	21	28	35	42	49	56	63	
	8	16	24	32	40	48	56	64	72	
	9	18	27	36	45	54	63	72	81	
	C						E			

Ope huius tabellae multiplicatio numerorum ſimplicium facile peragitur. Sit e. g. numerus 7 multiplicandus per 6. Quaeratur in ſerie AB numerus 7, et in ſerie AC numerus 6, aut contra; tum a 7 procedatur per ſeriem DE, et a 6 per ſeriem FG, dum perueniatur ad quadratulum, in quo concurrunt duae illae ſe-

ries:

ries: numerus 42 illi quadratulo insertus est factum quaesitum. Eadem ratione inuenietur $9 \times 8 = 72$, $8 \times 7 = 56$ etc.

50. PROBLEMA. *Numeros quosuis multiplicare.*

RESOLVT. Pro multiplicandis numeris compositis hae regulae seruient.

1) Multiplicator subscribatur multiplicando ea prorsus lege, quam in additione constituimus (30), ducaturque transuersa linea factum a factoribus separans.

2) Si multiplicator vnica nota constet, per eam a dextris inchoando multiplicentur vnitates, decades, centenarii etc. multiplicandi, et facta particularia scribantur infra lineam, quae sicubi vltra 9 excrescant, fiat reiectio ad factum sequens, quemadmodum dictum est in additione (30).

3) Si multiplicator pluribus notis constet, imprimis per eius vnitates multiplicetur totus multiplicandus, vt ante. Tum per eius decades rursus eodem modo multiplicetur totus multiplicandus, at initium productorum particularium fiat sub decadibus multiplicatoris; denique transeatur eadem lege ad centenarios, millenarios etc. et scribendi initium semper fiat sub ea nota multiplicatoris, per quam fit multiplicatio.

DEMONSTR. Imprimis euidens est ope huius regulae partes omnes multiplicandi, adeoque totum multiplicandum toties poni, quot sunt in omnibus notis multiplicatoris, seu in toto multiplicatore vnitates. Deinde cum vnitates multiplicandi ducuntur in decades multiplicatoris, idem eſt, ac ſi decades multiplicarentur per vnitates (45), ac proinde factum ſignificat decades ſecundo a dextris loco ſcribendas. Eodem modo patet factum ex vnitatibus multiplicandi in centenarios multiplicatoris continere centenarios tertio loco ſcribendos, et ſic deinceps.

4) Facta omnia particularia peracta multiplicatione addantur in vnum totum, quod continebit integrum factum.

5) Si in fine vnius, vel vtriusque factoris occurrant zeri, iis interea omiſſis fiat multiplicatio per reliquas notas, et a dextris totius facti adiungantur tot zeri, quot erant in fine factorum. Conf. exempl. 3.

6) Si in loco intermedio multiplicatoris occurrant zeri, iis omiſſis multiplicatio fiat per reliquas notas, ſeruato tamen ordine, quo per regulam tertiam facta particularia ſcribenda ſunt. Conf. exempl. 4.

7) Denique ſi multiplicandus conſtet numeris heterogeneis reducibilibus, vel ſingulae ſpecies a minima inchoando multiplicentur ſeruata lege quarta, quam pro additione praeſcripſimus (30): vel reducantur omnes ad infimam ſpeciem, e. g. floreni, et groſſi ad crucigeros, ac deinde multiplicentur. Conf. exemp. 5.

EXEMPLA.

I. 3204 2	*Factores.*	II. 68079 253	*Factores.*
6408	*Factum.*	204237 340395 136158	*Facta part.*
		17223987	*Fact. integr.*
III. 36|00 24|0	*Factores.*	IV. 3652 2003	*Factores.*
144 72	*Facta part.*	10956 7304	*Facta part.*
864000 flor. groff. cruc.	*Fact. integr.*	7314956 cruc.	*Fact. integr.*
V. 4, 16, 2 24	*Factores.*	vel 290 24	*Factores.*
116, 0, 0	*Fact. integr.*	1160 580	*Facta part.*
		6960	*Fact. integr.*

Scholion. Vt omnem operandi rationem perfpiciant tirones, refumemus exemplum fecundum. Igitur 1) per 3 multiplicetur totus multiplicandus dicendo: ter 9 funt 27, et fcriptis 7 vnitatibus retineantur 2 decades; tum dicatur: ter 7 (feu ter 70) funt 21 (feu 210), et additis prioribus 2 decadibus funt 23; fcribantur ergo 3 decades, et retineantur 2 centenarii. Porro dicatur ter *o* eft *o*, ac additis 2 illis centenariis fcribatur 2. Rurfus dicatur: ter 8 funt 24, et fcriptis 4 millenariis retineantur 2 decemmillenarii. Denique dicatur: ter

6 ſunt 18, ac duobus illis additis ſunt 20; ſcribantur ergo 20. 2) Similiter per 5 multiplicetur totus multiplicandus, et productum initium ſumat a loco ſecundo, quem occupat 5 in multiplicatore. 3) Eodem pacto per 2 fiat multiplicatio, et productum initium capiat a loco tertio, quem tenet 2 in multiplicatore. 4) Abſoluta multiplicatione tria haec facta particularia addantur, et obtinebitur factum integrum.

51. *Diuidere* eſt vnam quantitatem toties tollere ab altera, quoties tertia quaepiam quantitas continet vnitatem: e. g. 6 diuidere per 2 eſt numerum 2 a numero 6 ter tollere, quoties nimirum in eo continetur. Quantitas, quae hunc in modum tollitur, *diuiſor* adpellatur: quantitas, ex qua diuiſor tollitur, *diuidendus* dicitur: quantitas demum, quae ſuis vnitatibus indicat, quoties tollendus ſit diuiſor e diuidendo, *quotus*, vel *quotiens* vocatur. In allato exemplo diuiſor eſt 2, diuidendus 6, quotus 3.

52. COROLL. 1. Quare diuiſor toties eſt in diuidendo, quoties vnitas in quoto, cum toties inde auferatur.

53. COROLL. 2. Si ergo diuiſio legitime facta eſt, diuidendus vel totus, ſi nihil remanet, vel eius pars, ſi aliquid remanet, deſtruitur per diuiſorem toties ex eo ablatum, quoties eſt vnitas in quoto (51): ergo diuiſore iterum toties repoſito debet renaſci diuidendus vel totus, vel eius pars deſtructa; ſed diuiſorem toties reponere quoties eſt vnitas in quoto, eſt diuiſorem per quotum multiplicare (40): ergo ſi diuiſio legitime facta eſt, diuiſor ductus in quo-

tum debet reſtituere diuidendum vel totum, vel partem eius deſtructam.

54. Coroll. 3. ergo viciſſim quotus ductus in diuiſorem debet reſtituere diuidendum (45), et tunc quotus erit multiplicandus, diuiſor erit multiplicator, diuidendus erit factum; ſed multiplicandus quiuis toties eſt in facto quoties vnitas in multiplicatore (41): ergo etiam hic multiplicandus ſeu quotus toties eſt in facto ſeu in diuidendo, quoties vnitas in multiplicatore ſeu in diuiſore.

55. Coroll. 4. Si factum aliquod diuidatur per vnum factorem, quotus eſt alter factor. Quoduis enim factum repraeſentari poteſt per ab; atqui ſi ab diuidatur per a, quotus erit b, cum a ſit per b multiplicatum, ſeu toties poſitum, quoties eſt vnitas in b, adeoque toties in ab contineatur. Eodem modo patet quotum fore a ſi ab per b diuidatur.

56. Coroll. 5. Si multiplicatio legitime facta eſt, facto per multiplicandum diuiſo nihil debet remanere. Si enim multiplicatio legitime facta eſt, factum coaluit e multiplicando toties poſito, quoties eſt vnitas in multiplicatore (41): ergo multiplicando iterum toties ablato nihil debet remanere ex facto; ſed multiplicandum e facto toties auferre quoties eſt vnitas in multiplicatore, eſt factum per multiplicandum diuidere (51): ergo ſi multiplicatio legitime facta eſt etc. Hinc ſicuti diuiſio multiplicatione (53), ita viciſſim multiplicatio diuiſione comprobatur.

57. PROBLEMA. *Quantitatem quamcunque algebraicam per aliam diuidere.*

RESOLVT. Scribatur primum diuiſor; tum in eadem linea ſcribatur diuidendus parentheſi incluſus. Deinde quaeratur quoties primus terminus diuiſoris contineatur in primo, vel quouis alio diuidendi termino, et quotus ſcribatur poſt diuidendum; quia vero diuiſor toties debet tolli a diuidendo, quoties eſt vnitas in quoto (51), debet prius diuiſor toties poni, ſeu per quotum multiplicari, et factum hinc enatum a diuidendo ſubtrahi. Id quod peracta ſubtractione remanſit e diuidendo, rurſus vt ante diuidatur, et nouus quotus ducatur in totum diuiſorem, factumque a diuidendo ſubtrahatur. Eodem pacto continuetur operatio, dum nihil denique reſtet e diuidendo. Quodſi inter operandum aduertatur ſubtractione diuiſoris in quotum ducti numerum terminorum in diuidendo non minui, id erit plerumque indicium diuiſionem absque reſiduo peragi non poſſe: quare indicetur duntaxat diuiſio, ſubſcripto diuiſore infra diuidendum interiecta linea vt in exempl. 2. Speciales porro diuiſionis regulae ſunt:

1) Quotus e terminis eodem ſigno affectis ſemper eſt poſitiuus: contra e terminis diuerſa ſigna habentibus ſemper eſt negatiuus. Quatuor occurrunt caſus: nam 1*mo* vel vterque terminus habet ſignum +, vel 2*do* vterque habet —, vel 3*tio* diuidendus habet +, diuiſor —, vel 4*to* diuidendus habet —, diuiſor +.

DEMONSTR. Pro caſu 1*mo*. Cum diuidendus ſit factum e diuiſore in quotum (53), quiuis diuidendus poſitiuus repraeſentari poteſt per ab, et diuiſor poſitiuus per a: ergo ſi hic demonſtrauero quotum eſſe poſitiuum, id erit in omni tali caſu verum; hoc autem ſic demonſtro. Si ab diuidatur per a, quotus literalis eſt b (55), at dubium eſt, an debeat eſſe $+b$, an $-b$; dico debere eſſe $+b$. Nam diuiſor ductus in quotum reſtituere debet diuidendum (53); atqui niſi in quoto poneretur $+b$, non reſtitueret: ergo.

Pro caſu 2*do* Quiuis diuidendus negatiuus repraeſentari poteſt per $-ab$, et quiuis diuiſor negatiuus per $-a$: ergo ſi hic demonſtrauero quotum eſſe poſitiuum, id erit in omni tali caſu verum; hoc autem ſic demonſtro. Si $-ab$ diuidatur per $-a$, quotus literalis eſt b, at dubium eſt, an debeat eſſe $+b$, an $-b$; dico debere eſſe $+b$. Nam diuiſor ductus in quotum etc. vt ſupra.

Pro caſu 3*tio*. Quiuis diuidendus poſitiuus repraeſentari poteſt per ab, et quiuis diuiſor negatiuus per $-a$: ergo ſi hic demonſtrauero quotum eſſe negatiuum, id erit in omni tali caſu verum; hoc autem ſic demonſtro. Si ab diuidatur per $-a$, quotus literalis eſt b; at dubium eſt etc. vt ſupra.

Pro caſu 4*to*. Quiuis diuidendus negatiuus repraeſentari poteſt per $-ab$, et diuiſor poſitiuus per a: ergo ſi hic demonſtrauero quotum eſſe negatiuum, id erit in omni tali caſu verum; hoc autem ſic demonſtro. Si $-ab$ diuidatur per a, quotus literalis eſt b; at dubium eſt etc. vt ſupra.

2) Coefficiens termini diuidendi diuidatur per coefficientem diuiſoris: quodſi exacte diuidi nequeat, indicetur tantummodo diuiſio, ſcribendo coefficientem diuiſoris infra coefficientem diuidendi interiecta linea.

3) Siquas literas communes habeant diuiſor et diuidendus, eae in quoto ſemel ſcribantur, et exponens diuiſoris ſubtrahatur ab exponente diuidendi, aut ſi ſubtrahi nequit, mutato ſigno addatur (37). Quodſi in quoto aliqua litera pro exponente acquirat o, ſeu nihilum, ea, vt dicemus, aequiualet vnitati, adeoque ſi in quoto praeter eam adſint aliae quantitates, ea litera illic omitti poteſt, ſecus expreſſe ponenda eſt, vel loco eius vnitas ſcribenda. E. g. a^2 diuiſum per $a = a^0 = 1$.

DEMONSTR. Sit a^5 diuidendum per a^2, dico quotum fore a^3. Nam a^5 eſt $= a^3 \times a^2$: ergo idem debet quotus prodire, ſiue per a^2 diuidatur a^5, ſiue eius loco diuidatur $a^3 \times a^2$; ſed ſi per a^2 diuidatur $a^3 \times a^2$, quotus eſt a^3 (55): ergo etiamſi per idem a^2 diuidatur a^5, quotus eſt a^3. Eadem demonſtratio cuiuis caſui ſpeciali accommodari poteſt.

4) Abſolutis communibus literis, ſi diuidendus praeterea habeat alias literas, eae in quoto ſcribuntur vt ſunt: e. g. ſi $a^3 b^2 c$ diuidi debeat per $a b$, quotus erit $a^2 b c$. Si vero etiam diuiſor praeter communes habeat alias literas, indicatur tantummodo diuiſio, ſcribendo diuiſoris literas infra diuidendi literas interiecta linea: e. g. ſi $a^2 b^3 c^4$ diuidi debeat per $a b d$, quotus erit $a b^2 \frac{c^4}{d}$.

EXEMPLA.

Diuiſ.

I. $3ab - 2b^3c^2 + 5\ (6a^{m+1}b^2 + 10a^mb$

Diuid.

$-9abcd^n - 15cd^n + 12a^3bc - 4a^mb^4c^2 + 20a^7c$

Quot.

$+ 6b^7c^3d^n - 8a^2b^3c^3)\ 2a^mb - 3cd^n + 4a^6c.$

Diuiſ.

II. $2a^2c^2 - 3a^nb^m\ (10a^3b^mc^2 - 24a^2b^3c^3$

Diuid.

$-15a^{n+1}b^{2m} + 36a^nb^{m+3}c - 6a^mc^3)\ 5ab^m$

Quot.

$$-12b^3c - \frac{6a^mc^3}{2a^2c^2 - 3a^nb^m}$$

Diuiſ.

III. $3a^{2+2m}b^{-3}x^{m-1} - 4ab^{m-3}x^{-2} + 8\ (3a^{7+m}$

Diuid.

$b^{2+2m}x^{m+3} - 4a^{6-m}b^{2+3m}x^2 + 8a^{5-m}b^{5+2m}x^4 -$
$6a^{3+2m}b^{m-4}x^{2-m} + 8a^2b^{2m-4}x^{1-2m} - 16ab^{m-1}$

Quot.

$x^{3-2m})\ a^{5+m}b^{5+2m}x^4 - 2ab^{m-1}x^{3-2m}.$

Diuiſ.

IV. $2a^{3m-1}b^2x^{5-m} - 5a^3b^{m-2}x^{3-2m}\ (6a^{2+2m}$

Diuid.

$b^2x^{3-m} + 8a^{4m-3}b^5x^3 - 2a^{2+m}b^3x^{9-2m} - 15a^{6-m}$
$b^{m-2}x^{1-2m} - 20a^{m+1}b^{m+1}x^{1-m} + 5a^{6-2m}b^{m-1}x^{7-3m})$

Quot.

$3a^{3-m}x^{-2} + 4a^{m-2}b^3x^{m-2} - a^{3-2m}bx^{4-m}$

SCHOLION. Vt operandi modum plenius intelligant tirones, reſumemus exemplum primum. Igitur 1) quaeratur quoties primum diuiſoris membrum $3ab$ contineatur iuxta regulas ſuperiores in primo diuidendi membro $6a^{m+1}b^2$, et quotus inuentus $2a^{m}b$ ſcribatur poſt diuidendum: deinde diuiſor totus ducatur in quotum, ac factum $6a^{m+1}b^{2} - 4a^{m}b^{4}c^{2} + 10a^{m}b$ ſubtrahatur a diuidendo, erit reſiduum primum $- 9abcd^{n} - 15cd^{n} + 12a^{3}bc + 20a^{2}c + 6b^{3}c^{3}d^{n} - 8a^{2}bc^{2}$. 2) Rurſus quaeratur quoties primum diuiſoris membrum $3ab$ contineatur in primo reſidui membro $- 9abcd^{n}$, et quotus $- 3cd^{n}$ ſcribatur poſt priorem quotum: deinde diuiſor totus ducatur in nouum hunc quotum, ac factum $- 9abcd^{n} + 6b^{3}c^{3}d^{n} - 15cd^{n}$ ſubtrahatur a diuidendo, ſeu a primo illo reſiduo, et habebitur reſiduum ſecundum $12a^{3}bc + 20a^{2}c - 8a^{2}b^{3}c^{3}$ 3) Quaeratur iterum quoties primum diuiſoris membrum $3ab$ contineatur in primo reſidui membro $12abc$, et quotus $+ 4a^{2}c$ ſcribatur poſt quotum praecedentem: deinde diuiſor totus ducatur in nouum hunc quotum, et factum $12a^{3}bc - 8a^{2}b^{3}c^{3} + 20a^{2}c$ tollatur a diuidendo, ſeu a ſecundo reſiduo: nihil remanebit.

58. Diuiſio quantitatum complexarum ſaepe indicatur tantum facienda, reapſe non perficitur, et tunc vel ſubſcribitur diuiſor diuidendo, vti ſupra diximus: vel poſt diuidendum parentheſi incluſum ponitur diuiſor et ipſe parentheſi incluſus punctis duobus interpoſitis. E. g. $(3a^{2}b - 5cd) : (2b^{2} + 5b^{2})$ ſignificat priorem quantitatem per poſteriorem eſſe diuiſam.

59. PROBLEMA. *Numeros diuidere per numeros ſimplices.*

RESOLVT. Si numerus etiam diuidendus ſimplex fuerit, quotus abſque vllo artis adminiculo innoteſcit; facile enim quisque peruidet, quoties numerus ſimplex ab alio ſimplice poſſit ſubtrahi, ſeu quoties in illo contineatur. At ſi diuidendus compoſitus ſit, arte opus eſt, quae hiſce praeceptis continetur:

1) Scribatur numerus diuidendus intra parentheſim, ac diuiſor ad eius ſiniſtram collocetur.

2) Quaeratur, quoties diuiſor contineatur in prima, vel ſi ea diuiſore minor eſt, in duabus primis diuidendi notis a ſiniſtra inchoando; deinde quotus poſt diuidendum ſcriptus ducatur in diuiſorem, et factum tollatur ab iis diuidendi notis, quae diuidebantur; ac ſiquid remaneat ducta transuerſa linea ſubſcribatur.

3) Reſiduo huic ad dextram iungatur ſequens diuidendi nota, aut ſola ponatur, ſi nihil remanſit, ſuperius autem in ipſo diuidendo vel deleatur, vel ſignetur virgula indicante eam notam iam eſſe adiunctam reſiduo. In his notis rurſus inquiratur quoties diuiſor contineatur, et quotus poſt priorem ſcriptus ducatur in diuiſorem, et factum ſubtrahatur, vt ante. Deponatur iterum ſequens diuidendi nota, ac eadem operatio tamdiu continuetur, dum omnes diuidendi notae ſenſim depoſitae ſint. Siquid ex ſubtractione vltima remaneat, adiungatur ad dextram quoti, et lineola interpoſita diuiſor eidem ſubſcribatur. Conf. exempl. 2.

4) Si reſiduum nullum fuerit, et depoſita diuidendi nota minor ſit diuiſore, ſcribatur pro quoto zerus, ac ex diuidendo adhuc vna nota deponatur. Conf. exempl. 3. et 4.

EXEMPLA.

I. *Diuiſ.* 7	*Diuid.* 24, 1, 5,	*Quot.* 345
II. *Diuiſ.* 5	*Diuid.* 46, 8, 7,	*Quot.* $937\frac{2}{5}$
III. *Diuiſ.* 4	*Diuid.* 20, 3, 2,	*Quot.* 508
IV. *Diuiſ.* 8	*Diuid.* 33, 6, 9, 6, 6, 4,	*Quot.* 421208

60. PROBLEMA. *Numeros diuidere per numeros compoſitos.*

RESOLVT. Obſeruata eadem ſcribendi lege, qua vſi fuimus in ſuperioribus, cetera fiant iuxta praeceptiones ſequentes:

1) Inquiratur, quoties prima diuiſoris nota contineatur in prima diuidendi nota, aut (ſi ea minor ſit, quam prima diuiſoris nota) in duabus primis diuidendi notis, et quotus in totum diuiſorem ductus ſubtrahatur a tot prioribus diuidendi notis, quot habet notas diuiſor, vel vna pluribus, ſi prima diuidendi nota minor ſit, quam prima diuiſoris. Si factum hoc ſubtrahi inde nequeat, indicio eſt quotum iuſto maiorem eſſe, ac proinde vnitate multandum: ſin autem facta ſubtractione reſiduum maius fuerit diuiſore, argumento eſt quotum iuſto minorem eſſe, atque adeo vnitate augendum.

2) Peracta ſubtractione reſiduo ad dextram iungatur ſequens diuidendi nota, et operatio

eadem plane ratione continuetur, dum omnes diuidendi notae ſenſim depoſitae ſint. Siquid ex vltima ſubtractione remaneat, iungatur ad dextram quoti, eique interiecta lineola diuiſor ſubſcribatur. Conf. exempl. 1.

3) Si reſiduum quoddam cum adiuncta nota diuidendi minus fuerit diuiſore, ſcribatur pro quoto zerus, et ex diuidendo nota ſequens iterum deponatur: ſi adhuc diuiſor maior fuerit, rurſus ſcribatur zerus pro quoto, et ex diuidendo nota ſequens denuo deponatur, idque tamdiu repetatur, dum reſiduum ſic auctum diuidi demum poſſit per diuiſorem; deinceps autem methodo conſueta continuetur operatio. Conf. exempl. 2.

4) Si diuiſor in fine zeros habeat, locus eſt compendio. Nimirum reſecentur a dextris diuidendi tot notae, quot zeri ſunt in fine diuiſoris, et diuiſione cum reliquis diuidendi, ac diuiſoris notis peracta, reſiduo vltimo, ſiquod fuerit, iungantur a dextris notae reſectae diuidendi, et interpoſita lineola ſubſcribatur diuiſor, vt in 3. exempl. Si vero tam in fine diuiſoris, quam in fine diuidendi adfuerint zeri, reſecentur totidem ab vtroque zeri, et fiat cum reliquis notis operatio. Conf. exempl. 4.

5) Numeri heterogenei reducibiles, e. g. dies, horae, minuta, eadem plane ratione diuiduntur, dummodo ad ſpeciem minimam prius reducantur.

EXEMPLA.

	Diuis.	Diuid.	Quot.	
I.	456	2568, 0, 4,	563	76
				456
II.	298	894, 7, 4, 5, 0,	30025	
III.	25|00	46, 8, 9, |34	187	1434
				2500
IV.	38|00	97, 2, 8, 0, |00	2560	

SCHOLION. Dum inquiritur, quoties prima diuiſoris nota contineatur in prima, vel in duabus primis notis diuidendi, ſimul attendi debet, an etiam reliquae diuiſoris notae in ſequentibus diuidendi notis totidem vicibus contineantur, ne quotus iuſto maior ſumatur. Sic in exemplo ſecundo licet 2 in 8 quater contineatur, quia tamen 9 in 9, et 8 in 4 toties non continetur, pro quoto non 4, ſed 3 ponendum eſt. Iuuat oc idem exemplum in tironum gratiam enucleatius expendere. Itaque 1) quaeratur, quoties 2 contineantur in 8, et iuxta ſuperiorem admonitionem pro quoto ponatur 3, et per eum totus diuiſor multiplicetur, ac factum 894 ex 894 ſubtrahatur, atque ad reſiduum, quod quidem hic nullum eſt, adiungatur ſequens nota diuidendi 7. 2) Quia diuiſor in 7 nulla vice continetur, ſcribatur pro quoto *o*, qui ductus in diuiſorem dat nihil, quod a 7 ſubtractum relinquit totum 7: quare adiungatur ei ſequens nota diuidendi 4. 3) Quoniam diuiſor ne quidem in 74 continetur, rurſus pro quoto ponatur *o*, et facta diuiſoris per quotum multiplicatione, factique, quod eſt $= o$, a 74 ſubtractione remanet totum 74, ad quod adiungatur ſequens nota diuidendi 5. 4) Quaeratur quoties reperiatur 2 in 7, deprehendetur quidem reperiri ter, quia tamen 98 in 45 toties non reperitur, idcirco pro quoto ponatur 2, et facta diuiſoris per hunc quotum multiplicatione factum 596 tollatur a 745, ac ad reſiduum 149 adiungatur poſtrema nota diuidendi *o*. 5) Demum indagetur, quoties contineatur 2 in 14; deprehendetur quidem contineri ſepties, tamen propter ſuperiorem admonitionem pro quoto ſcribatur 5, qui ductus in diuiſorem dat factum 1490, quod ablatum a 1490 nihil relinquit: igitur quotus eſt 30025. Bona autem erit operatio, ſi deprehendatur eſſe $298 \times 30025 = 8947450$ (56.)

CAPVT III.

De natura, et variis transformationibus Fractionum.

61. Fractio est quantitas, quae integri cuiuspiam, seu totius vnam, vel plures partes significat. E. g. 2 grossi sunt fractio comparate ad florenum, quia significant duas vicesimas floreni partes.

62. Coroll. 1. Quoniam pars quaeuis comparata ad suas partes totius instar haberi potest, patet dari etiam *fractionum fractiones*. E. g. grossus comparate ad florenum est fractio: comparate vero ad crucigerum est totum; hinc cruciger est grossi, ac proinde fractionis fractio.

63. Coroll. 2. Ad determinandum fractionis cuiusuis valorem duabus opus est quantitatibus, quarum altera ostendat numerum, altera speciem partium integri, quas fractio significat: vnde prior *numerator*, posterior *denominator* adpellatur. Igitur numerator indicat, quot partes fractio ex integro denotet: denominator indicat speciem earum partium, seu in quot partes totum sit diuisum. Solet autem denominator subscribi numeratori interiecta lineola, e. g. $\frac{2}{3}$, quae fractio hunc in modum enunciatur: duae tertiae, scilicet cuiusdam integri partes.

64. Coroll. 3. Quando numerator aequatur denominatori, fractio omnes integri partes, adeoque totum integrum denotat: si numerator maior sit denominatore, fractio plus quam omnes par-

tes

tes, ac proinde plus quam integrum ſignificat: quare fractiones huius generis *impropriae* ſunt. Fractio ergo *genuina* illa ſolum dicitur, cuius numerator minor eſt denominatore, ſeu quae aliquas duntaxat, non omnes integri partes denotat.

65. Coroll. 4. Quemadmodum igitur valor fractionis aequatur vnitati, ſeu vni integro, ſi numerator aequalis ſit denominatori; ita fractio dupla, tripla, quadrupla etc. eſt, ſi numerator fuerit duplus, triplus, quadruplus etc. denominatoris. Vnde valorem fractionis indicat quotus, qui naſcitur numeratore per denominatorem diuiſo. Hinc ſi tam numerator, quam denominator eadem ſigna habeant, valor fractionis poſitiuus eſt; ſi contraria, negatiuus (57).

66. Coroll. 5. Quare reſidua diuiſionum (58) ſunt fractiones genuinae. E. g. $\frac{3}{4}$ partes vnius floreni idem plane ſignificat, ac 3 floreni diuiſi per 4, ſeu ac quarta pars trium florenorum: nam tres quartae partes vnius, et vna quarta pars trium florenorum ſunt denique 15 groſſi.

67. Theorema. *Si manente eodem denominatore creſcat numerator, valor fractionis augetur.*

Demonst. Si enim manet idem denominator, manent eiusdem ſpeciei partes (63); ſi creſcit numerator, fractio plures ac plures eiusdem ſpeciei partes ex eodem integro ſignificat: ergo eius valor augetur.

68. Coroll. 1. Eadem ratiocinatione efficitur decreſcere valorem fractionis, ſi manente eodem denominatore minuatur numerator.

69. Coroll. 2. Quare si duae fractiones communem habeant denominatorem, eius valor maior est, quae maiorem habet numeratorem, et quidem tanto maior, quanto numerator maior est. E. g. $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$.

70. Theorema. *Si manente eodem numeratore crescat denominator, valor fractionis minuitur.*

Demonst. Si enim manet idem numerator, fractio semper totidem partes integri denotat (63): si crescit denominator, integrum in plures, adeoque hoc ipso in minores partes diuiditur: ergo fractio totidem quidem, sed minores et minores partes denotat ex eodem integro: ergo valor eius minuitur.

71. Coroll. 1. Eodem prorsus modo adparet valorem fractionis augeri, si eodem manente numeratore decrescat denominator.

72. Coroll. 2. Si ergo duarum fractionum idem sit numerator, ea maior est, quae minorem habet denominatorem, et tanto quidem maior, quanto denominator minor est. E. g. $\frac{3}{7} > \frac{3}{9}$.

73. Theorema. *Si fractionis cuiuspiam tam numerator, quam denominator per idem multiplicetur, valor eiusdem non mutatur.*

Demonst. Crescente enim numeratore valor fractionis crescit (67), crescente denominatore decrescit (70): ergo vtroque crescente, crescit et decrescit: ergo vtroque aequaliter crescente, aequaliter crescit et decrescit, hoc est, non mutatur; atqui si tam numerator, quam denominator per idem multiplicentur, vterque aequaliter crescit: ergo valor fractionis non mutatur.

74. THEOREMA. *Si fractionis cuiuspiam tam numerator, quam denominator per idem diuidatur, valor eiusdem non mutatur.*

DEMONSTR. Decrescente enim numeratore valor fractionis decrescit (68), decrescente denominatore crescit (71): ergo vtroque decrescente decrescit et crescit: ergo vtroque aequaliter decrescente aequaliter decrescit et crescit, hoc est, non mutatur; atqui si tam numerator, quam denominator per idem diuidatur, vterque aequaliter decrescit: ergo valor fractionis non mutatur.

75. PROBLEMA. *Datas quotcunque fractiones heterogeneas, seu diuersos denominatores habentes ad eundem communem denominatorem reducere.*

RESOLVT. Fractionis cuiusuis tam numerator, quam denominator ducatur in reliquarum omnium denominatores: ita enim et omnium idem erit communis denominator, et singulae valorem pristinum retinebunt, cum earum tam numeratores, quam denominatores per easdem quantitates multiplicentur (73).

EXEMPLA.

I. $\frac{2a^3b}{4c^2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2a^{m+1}}{3a^{-n}}$ *Reducendae*

$\frac{30a^{-n+3}b,\ 48a^{-n}c^2,\ 40a^{m+1}c^2}{60a^{-n}c^2}$ *Reductae.*

II. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$ *Reducendae.*

$\frac{140,\ 168,\ 105,\ 90}{210}$ *Reductae.*

76. PROBLEMA. *Datas quasuis fractiones ad minores terminos, seu ad minores numeratores, et denominatores reducere manente cuiusuis valore.*

RESOLVT. Fractionis cuiusuis tam numerator, quam denominator diuidatur per aliquam quantitatem, quae in vtroque exacte contineatur: ita enim et termini fractionum minuentur, et pristinus singularum valor retinebitur (73).

EXEMPLA.

I.

$\dfrac{30a^{-n+3}b}{60a^{-n}c^2}$ *diuid. per* $30a^{-n}$ fit $\dfrac{a^3b}{2c^2}$

$\dfrac{-48a^{-n}c^2}{-60a^{-n}c^2}$ *diuid. per* $12a^{-n}c^2$ fit $\frac{4}{5}$

$\dfrac{40a^{m+1}c^2}{-60a^{-n}c^2}$ *diuid. per* $20c^2$ fit $-\dfrac{2a^{m+1}}{3a^{-n}}$

II.

$\dfrac{-140}{210}$ *diuid. per* 70 fit $-\frac{2}{3}$

$\dfrac{-168}{-210}$ *diuid. per* 42 fit $\frac{4}{5}$

$\dfrac{105}{210}$ *diuid. per* 105 fit $\frac{1}{2}$

$\dfrac{90}{-210}$ *diuid. per* 30 fit $-\frac{3}{7}$

Schol. Communis numeratorum, et denominatorum diuiſor in literis facile reperitur, in numeris paulo maioribus non item. Qui de fractionum transformationibus prolixius agunt, adferunt methodum inueniendi communem diuiſorem maximum, per quem ſcilicet diuiſi numeratores, ac denominatores ad ſimpliciſſimas expreſſiones reducantur: verum in vſu quotidiano fere ſufficient animaduerſiones ſequentes. 1) Si numerator exacte metitur denominatorem, facta per eundem tam ſui ipſius, quam denominatoris diuiſione fractio ad minimos terminos reducitur. E. g. $\frac{105}{210} = \frac{1}{2}$. 2) Si tam numerator, quam denominator fuerint numeri pares, communis diuiſor ſemper erit 2. E. g. $\frac{148}{324} = \frac{74}{162} = \frac{37}{81}$. 3) Si tam numerator quam denominator in fine habuerint zeros, ambo diuidi poterunt per 10, 100 etc. deleto vtrobique vno, duobus etc. zeris. E. g. $\frac{140}{210} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$; $\frac{300}{5000} = \frac{3}{50}$. 4) Si tam numerator quam denominator pro dextima nota habuerint numerum 5; aut alter 5, alter autem zerum, ambo diuidi poterunt per 5. E. g. $\frac{175}{225} = \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$; $\frac{125}{350} = \frac{25}{70} = \frac{5}{14}$.

77. **Problema.** *Datam fractionem impropriam ad integra reducere.*

Resol. Quoniam valor fractionis cuiusuis aequatur quoto, qui naſcitur e numeratore per denominatorem diuiſo (65), diuidatur numerator per denominatorem, quotus dabit integra vel cum fractione, vel ſine fractione genuina remanente. E. g. $\frac{a^{2m}}{a^m} = a^m$; $\frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$.

78. PROBLEMA. *Datam quantitatem integram reducere ad fractionem dati denominatoris.*

RESOLVT. Cum fractionis valorem indicet quotus, qui oritur e diuiſione numeratoris per denominatorem (65), et quantitas per vnitatem diuiſa nihil mutetur, datae quantitati pro denominatore ſubſcribatur 1; ita quantitas manente priſtino valore induit formam fractionis, cuius ſi tam numerator, quam denominator, ſeu 1 ducantur in denominatorem datum, erit data quantitas reducta ad fractionem dati denominatoris retento valore (73). E. g. ſit quantitas a^{-2m} reducenda ad fractionem, cuius denominator ſit b^2a^{3m}; primum data quantitas ſcribatur hunc in modum: $\frac{a^{-2m}}{1}$; deinde tam numerator, quam denominator ducatur in b^2a^{3m}, erit $a^{-2m} = \frac{b^2a^m}{b^2a^{3m}}$. Similiter numerus 3 reductus ad denominatorem 5 erit $= \frac{15}{5}$.

SCHOLION. In praxi ſufficiet datam quantitatem integram multiplicare per datum denominatorem, illumque facto ſubſcribere: nam rem eodem redire perſpicuum eſt.

CAPVT IV.

De Additione, Subtractione, Multiplicatione, ac Diuisione fractionum.

79. PROBLEMA. *Datas quotcunque fractiones in vnam summam addere.*

RESOLVT. 1) Si fractiones fuerint heterogeneae, primum reducantur ad eundem denominatorem (75), deinde numeratores addantur more integrorum, et subscribatur summae communis denominator. 2) Si fractionibus permista fuerint integra, poterunt ea vel seorsim addi, vel ad fractiones reduci (78), et cum iisdem addi.

DEMONST. Fractiones heterogeneas e. g. $\frac{2}{3}$, et $\frac{4}{5}$ non posse cogi in vnam summam perspicuum est; nam ea summa neque tertias, neque quintas partes denotaret: hinc primum reduci debent ad eundem denominatorem. Porro facta reductione valores fractionum pendent a numeratoribus, adeoque valor summae a summa numeratorum (69): ergo soli numeratores debent addi, summaeque subscribi communis denominator. Et sane euidens est $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ esse $= \frac{5}{7}$.

EXEMPLA.

I. $\frac{2a}{3b} + \frac{4a}{3b} = \frac{6a}{3b} = \frac{2a}{b}$. Item $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$.

II. $\frac{6a^{3m}b^3}{a^{n+m}} + \frac{b^3}{2a^{n-3m}} = \frac{12a^{n+m}b^3 + a^{n+m}b^3}{2a^{2n-2m}}$

$= \frac{13a^{n+m}b^3}{2a^{2n-2m}}.$

III. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} = \frac{70 + 84 + 90}{105} = \frac{244}{105}$

$= 2\frac{34}{105}.$

IV. $3\frac{2}{5} + 7\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 10\frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{52}{5}$

$+ \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{312 + 15 + 20}{30} = \frac{347}{30} =$

$11\frac{17}{30}.$

SCHOLION. Additio fractionum algebraicarum saepissime fit iungendo duntaxat easdem cum suis signis absque reductione ad communem denominatorem. Idem plerumque fit in subtractione.

80. PROBLEMA. *Datam fractionem ab altera subtrahere.*

RESOLVT. Quoniam subtrahere idem est, ac subtrahendum mutatis signis addere (37), eaedem plane sunt leges subtractionis, quae additionis. Nimirum reductis fractionibus heterogeneis ad eundem denominatorem (75) tollatur numerator partis subtrahendae a numeratore totius, et residuo subscribatur communis denominator.

EXEMPLA.

I. $\frac{5a^2b}{7c^2} - \frac{2a^2b}{7c^2} = \frac{3a^2b}{7c^2}.$

II. $4a + \frac{2b^2}{c} - 3a - \frac{b^2}{c} = a + \frac{b^2}{c}.$

III. $\frac{2}{3} - \frac{4}{7} = \frac{14 - 12}{21} = \frac{2}{21}$.

IV. $4\frac{3}{4} - 3\frac{1}{5} = 1\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{7}{4} - \frac{1}{5} = \frac{35 - 4}{20}$
$= \frac{31}{20} = 1\frac{11}{20}$.

SCHOLION. Additio fractionum comprobatur ſubtractione, et ſubtractio additione eo plane modo quo ſolent explorari additiones, et ſubtractiones quantitatum integrarum (28, 36).

81. PROBLEMA. *Fractionem vnam per alteram multiplicare.*

RESOLVT. Multiplicentur numeratores fractionum inter ſe, et denominatores inter ſe, factoque priori poſterius ſubſcribatur. Tres poſſunt caſus occurrere: vel enim 1*mo* in fractione multiplicatore numerator minor eſt denominatore, vel 2*do* aequalis, vel 3*tio* maior.

DEMONSTR. Pro caſu 1*mo*. Multiplicandus eſt ad factum vt vnitas ad multiplicatorem (41); ſed in hoc caſu vnitas maior eſt multiplicatore fracto (64): ergo etiam multiplicandus maior eſt facto: ergo vt ex multiplicando fiat factum, debet ille minui; vt autem minuatur fractio, debet eius numerator minus creſcere quam denominator (67, 70), ſeu debet eius numerator per aliquid minus, et denominator per aliquid maius multiplicari; atqui ex hypotheſi in multiplicatore numerator minor eſt denominatore: ergo numerator multiplicandi debet multiplicari per numeratorem multiplicatoris, et denominator per denominatorem, Pro caſu *2do.* Multiplicandus eſt ad factum vt vnitas ad multiplicatorem; ſed in hoc caſu vnitas aequatur multiplicatori (64): ergo etiam multiplicandus aequatur facto: ergo vt ex multiplicando fiat factum, is non debet mutari; vt autem fractio non mutetur, debet eius tam numerator quam denominator aequaliter creſcere (73), ſeu per idem multiplicari; atqui ex hypotheſi in multiplicatore numerator idem eſt cum denominatore: ergo numerator multiplicandi etc. vt ſupra.

Pro caſu *3tio.* Multiplicandus eſt ad factum vt vnitas ad multiplicatorem; ſed in hoc caſu vnitas minor eſt multiplicatore fracto (64): ergo etiam multiplicandus minor eſt facto: ergo vt ex multiplicando fiat factum, debet ille augeri; vt autem augeatur fractio, debet eius numerator magis creſcere quam denominator (67, 70), ſeu debet eius numerator per aliquid maius, denominator per aliquid minus multiplicari; atqui ex hypotheſi in multiplicatore numerator maior eſt denominatore: ergo numerator multiplicandi etc. vt ſupra.

82. Quodſi quantitas integra ſit cum fractione multiplicanda, poteſt integrae valore retento ſubſcribi vnitas pro denominatore (78), et multiplicatio iuxta ſuperius dicta peragi. E. g.

$$a \times \frac{2a^m c}{d^2} = \frac{a}{1} \times \frac{2a^m c}{d^2} = \frac{2a^{m+1}c}{d^2}.$$

83. Coroll. Imo in hoc eodem caſu poteſt compendii cauſſa per quantitatem integram ſolus numerator fractionis multiplicari, cum vnitas

quantitati integrae subscribenda nihil multiplicet. E. g. $3a \times \frac{2b}{c^2} = \frac{6ab}{c^2}$.

EXEMPLA.

I. $\frac{2a^{2m-2}b^3}{3c^2} \times \frac{a^3b^{-1}}{2c^m} = \frac{2a^{2m+1}b^2}{6c^{m+2}}$.

II. $\frac{4}{5} \times \frac{11}{12} = \frac{44}{60} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$.

III. $\frac{3a^{m+1}b^2c^n}{4a^{2-m}b^nc^{-2}} \times \frac{4a^{2m-3}b^m c^{3-2n}}{5a^{\,}b^{n-2}c^{\,+2}} = \frac{12a^{3m-2}b^{m+2}c^{3-n}}{20a^{4-m}b^{2n-2}c^m}$.

IV. $(12 + \frac{2}{3}) \times (2 - \frac{4}{5}) = \frac{38}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{228}{15} = 15\frac{1}{5}$.

Scholion. Mirum videri tironibus non debet, quod in multiplicatione per fractionem genuinam facta generetur factum minus ipso multiplicando. Si enim quantitas aliqua per integram vnitatem multiplicetur, ea vtique tota semel ponitur: si ergo multiplicetur per quantitatem vnitate minorem, seu per genuinam fractionem, ne semel quidem ponitur, sed pars duntaxat eius, et quidem talis, qualem designat multiplicator: quare necesse est, vt factum minus sit multiplicando. E. g. dum fractio $\frac{4}{5}$ multiplicatur per $\frac{2}{3}$, reapse duae partes tertiae ponuntur quatuor quintarum: hinc data fractio $\frac{4}{5}$ primum in tres partes diuidenda est, quod fit, vt dicemus, multiplicando 5 per 3; et pars tertia bis accipienda, seu numerator 4 per 2 multiplicandus.

84. THEOREMA. *Fractio fractionis eſt factum e duabus fractionibus in ſe ductis enatum.*

DEMONSTR. Nam fractio fractionis eſt pars fractionis inſtar totius conſideratae (62); atqui factum e duabus fractionibus enatum eandem partem multiplicandi exprimit, quam partem vnitatis denotat multiplicator: cum enim ſit multiplicandus ad factum vt vnitas ad multiplicatorem (41), qualis pars vnitatis eſt multiplicator, talis pars multiplicandi eſt factum.

85. COROLL. Quare multiplicationis ope fractiones fractionum ad ſimplices fractiones reduci poſſunt. E. g. $\frac{\frac{2a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{2a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{2ac}{bd}$;

$$\frac{\frac{3a^2}{b}}{3} = \frac{3a^2}{b} \times \frac{1}{3} = \frac{3a^2}{3b} = \frac{a^2}{b}; \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

86. PROBLEMA. *Fractionem vnam per alteram diuidere.*

RESOLVT. Numerator diuidendi ducatur in denominatorem diuiſoris, denominator diuidendi in numeratorem diuiſoris, et facto priori poſterius ſubſcribatur; aut, quod eodem redit, diuiſor inuertatur, et fiat fractionum multiplicatio, vt ſupra (81). Tres poſſunt caſus occurrere; vel enim 1*mo* in fractione diuiſore numerator minor eſt denominatore, vel 2*do* aequalis, vel 3*tio* maior.

DEMONSTR. Pro caſu 1*mo.* Quotus eſt ad diuidendum vt vnitas ad diuiſorem (54): ſed in hoc caſu diuiſor minor eſt vnitate (64); ergo etiam diuidendus minor eſt quoto: vt ergo e diuidendo fiat quotus, debet diuidendus augeri; vt autem fractio augeatur, debet eius numerator magis creſcere quam denominator (67, 70), adeoque debet numerator per aliquid maius, denominator per aliquid minus multiplicari; atqui ex hypotheſi in diuiſore denominator maior eſt numeratore: ergo debet numerator diuidendi multiplicari per denominatorem diuiſoris, et denominator diuidendi per numeratorem diuiſoris.

Pro caſu 2*do.* Quotus eſt ad diuidendum vt vnitas ad diuiſorem; ſed in hoc caſu diuiſor aequatur vnitati: ergo et diuidendus quoto: ergo vt ex diuidendo fiat quotus, debet diuidendus nihil mutari; vt autem fractio non mutetur, debet tam numerator eius, quam denominator aequaliter creſcere (73), ſeu per idem multiplicari; atqui ex hypotheſi in diuiſore denominator idem eſt cum numeratore: ergo debet numerator diuidendi multiplicari etc. vt ſupra.

Pro caſu 3*tio.* Quotus eſt ad diuidendum vt vnitas ad diuiſorem; ſed in hoc caſu diuiſor maior eſt vnitate: ergo etiam diuidendus maior eſt quoto: ergo vt ex diuidendo fiat quotus, debet diuidendus minui; vt autem fractio minuatur, debet eius numerator minus creſcere, quam denominator (67, 70), adeoque debet numerator per aliquid minus, denominator per aliquid maius multiplicari; atqui ex hypotheſi in diuiſore denominator minor eſt numeratore: ergo debet numerator diuidendi multiplicari etc. vt ſupra.

87. Si diuiſor vel diuidendus fuerit quantitas integra, ei pro denominatore ſubſcribatur vnitas, tum fiat operatio vti ſupra dictum eſt.

88. Coroll. Imo ſufficiet quantitatem integram ducere in denominatorem fractionis, et producto numeratorem ſubſcribere, ſi quantitas integra ſit per fractionem diuidenda; aut productum ſubſcribere numeratori, ſi fractio ſit per quantitatem integram diuidenda. E. g. $2a : \frac{3}{5} = \frac{2}{1}a : \frac{3}{5} = \frac{10}{3}a$. Similiter $\frac{3}{5} : 2a = \frac{3}{5} : \frac{2}{1}a = \frac{3}{10}a$.

EXEMPLA.

I. $\frac{2a^{2m+1}b^2}{6c^{m+2}} : \frac{2a^{2m-2}b^3}{3c^2} = \frac{6a^{2m+1}b^2c^2}{12a^{2m-2}b^3c^{m+2}}$

$= \frac{a^3}{2bc^m}$.

II. $\frac{11}{15} : \frac{4}{5} = \frac{55}{60} = \frac{11}{12}$.

III. $\frac{2a^{m-1}b^2x}{3a^2b^{m-2}} : \frac{4a^{m+2}bc^{-3}}{5a^{m-2}b^mc} = \frac{10a^{2m-3}b^{m+2}cx}{12a^{m+4}b^{m-1}c^{-3}}$

IV. $(3 - \frac{2}{3}) : (2 + \frac{1}{4}) = \frac{7}{3} : \frac{9}{4} = \frac{28}{27}$.

Schol. Quemadmodum multiplicatio exploratur diuiſione facti per vnum factorem; vt obtineatur alter factor (55); ita bonitatem diuiſionis patefaciet multiplicatio, ſi nempe diuiſor ductus in quotum reſtituat diuidendum (53).

89. Problema. *Quamlibet fractionem ope diuiſionis in ſeriem infinitam reſoluere.*

RESOLVT. Quoniam fractio eſt quotus, qui oritur e numeratore per denominatorem diuiſo (65). euidens eſt fractionem aequalem fore ſeriei, quae facta reapſe diuiſione pro quoto enaſcitur. Igitur cum fractionis cuiusuis denominator poſſit exhiberi per quantitatem complexam $a + b$, fractio quaeuis reuocari poteſt ad hanc expreſſionem: $\frac{c}{a+b}$, quae ſit in ſeriem infinitam reſoluenda. Diuidatur ergo c per a, erit quotus $\frac{c}{a}$, qui ductus in totum diuiſorem $a + b$ dat factum $\frac{ac}{a} + \frac{bc}{a} = c + \frac{bc}{a}$, quo e diuidendo c ſublato remanet $- \frac{bc}{a}$. Reſiduum hoc rurſus diuidatur per a, erit ſecundus quotus $- \frac{bc}{a^2}$, qui ductus in totum diuiſorem dat factum $- \frac{abc}{a^2} - \frac{b^2c}{a^2} = - \frac{bc}{a} - \frac{b^2c}{a^2}$, quo e diuidendo ſublato remanet $\frac{b^2c}{a^2}$. Hoc denuo diuidatur per a, erit tertius quotus $\frac{b^2c}{a^3}$, qui ductus in totum diuiſorem dat factum $\frac{ab^2c}{a^3} + \frac{b^3c}{a^3} = \frac{b^2c}{a^2} + \frac{b^3c}{a^3}$, quo e diuidendo ſublato remanet $- \frac{b^3c}{a^3}$. Si rurſus et hoc reſiduum per a diuidatur, erit quartus quotus $-\frac{b^3c}{a^4}$. Quotis hisce diligenter inspectis iam patet lex, iuxta quam eorum series progreditur, ita vt etiam sine calculo vlteriore continuari possit in infinitum. En calculi praecedentis typum:

$$a+b\,(c) = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \frac{b^4c}{a^5} - \frac{b^5c}{a^6} + \frac{b^6c}{a^7} \text{ etc. in infin.}$$

$$\begin{array}{llll}
c + \frac{bc}{a} & & & \\
-\frac{bc}{a} & & & \\
-\frac{bc}{a} - \frac{b^2c}{a^2} & & & \\
\hline
 & +\frac{b^2c}{a^2} & & \\
 & \frac{b^2c}{a^2} + \frac{b^3c}{a^3} & & \\
\hline
 & & -\frac{b^3c}{a^3} & \text{etc.}
\end{array}$$

Si a sit $= 2$, $b = 1$, $c = 1$, erit $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$ etc.

Si a ſit $= 3$, $b = 1$, $c = 1$, erit $\frac{c}{a+b} =$ $\frac{1}{4} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ etc.

Si a ſit $= 1$, $b = 2$, $c = 1$, erit $\frac{c}{a+b} =$ $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 -$ 32 etc.

SCHOLION. Iuuat adiungere quidpiam de *fractionibus decimalibus*, quarum ſcilicet denominator poſt vnitatem totidem habet adiectos zeros, quot numerator notas. Quare cum ex numeratore iam noſci poſſit denominator, hic prorſus omitti ſolet, et numerator praefixa virgula vel puncto ab integris ſeparari. E. g. pro $24\frac{232}{1000}$ ſcribitur 24,232. Porro ex ipſa fractionum decimalium natura deducet tiro ſequentia.

1) Si fractionis decimalis numerator pauciores habeat notas, quam ſint in denominatore zeri, numerus notarum praefixis zeris explendus eſt. E. g. $3\frac{4}{1000}$ eſt $= 3{,}004$.

2) Cuiuis fractioni decimali adiungi poſſunt zeri quotcunque manente valore, cum hoc ipſo etiam denominatori totidem adiici, adeoque tam numerator quam denominator per idem multiplicari concipiantur. E. g. $5{,}32 = 5{,}32000$ etc.

3) Prima poſt virgulam nota denotat partes decimas, ſecunda centeſimas, tertia milleſimas etc. Si enim quaeuis fractio decimalis e. g. 0,352 ſeorſim ſcribatur hoc modo $0 +$

$\frac{300}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{2}{1000}$, et omnes termini vltimum praecedentes ad minores terminos reducantur, fiet $0{,}352 = 0 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{2}{1000}$, et ſic de aliis.

4) Hinc adparet valorem notarum decimalium a fine regrediendo continenter creſcere in decuplum, vt fit in numeris integris.

5) Denique quaeuis alia fractio facile conuertitur in decimalem, ſi numeratori adiiciatur zerus, tum diuidatur per denominatorem: rurſus reſiduo, ſiquod eſt, adiungatur zerus, ac per denominatorem iterum diuidatur, et ſic porro. E. g. ſi numeratori fractionis $\frac{1}{4}$ addatur zerus, ac 10 diuidatur per 4, quotus erit 2, et remanebunt 2, quibus denuo addendo zerum, ac 20 diuidendo per 4, quotus erit 5, et nihil remanebit; erit ergo $\frac{1}{4} = 0{,}25$. Si continenter aliquid remaneat, patet ad verum fractionis valorem nunquam perueniri, ſed ſemper magis accedi poſſe. E. g. $\frac{3}{7} = 0{,}4285$ etc.

Ex his facile adparet modus fractiones decimales addendi, ac ſubtrahendi: cum enim earum notae a dextra ad ſiniſtram regrediendo more integrorum progrediantur, additio et ſubtractio fit prorſus vt in integris, nempe ſubſcribendo integris integra, partibus decimis decimas, centeſimis centeſimas etc. E. g.

$$\textit{Addit.} \left\{ \begin{array}{r} 232{,}342 \\ 14{,}5 \\ 7{,}0006 \\ \hline 253{,}8426 \end{array} \right. \qquad \textit{Subt.} \left\{ \begin{array}{r} 62{,}7000 \\ 8{,}6253 \\ \hline 54{,}0747 \end{array} \right.$$

In multiplicatione factores rurſus ſpectantur vt numeri integri: at in facto totali tot notae reſecantur a fine incipiendo verſus ſiniſtram interiecta virgula, quot ambo factores ſimul habent decimales notas, et ſiquidem facti notae non ſufficerent totidem reſecandis, zeris praefixis augendae ſunt, vt infra in exemplo ſecundo. Ratio eſt, quia dum fractiones huiusmodi inter ſe multiplicantur, denominator facti tot acquirit zeros, quot erant in denominatore vtriusque factoris ſimul, ſeu quot erant in factoribus notae decimales: cum ergo in facto tot eſſe debeant notae decimales, quot denominator habet zeros, patet in facto tot eſſe reſecandas notas, quot erant notae decimales in factoribus. E. g.

2,342	0,0234
3,256	0,0052
7,625552	0,00012168

Similiter in diuiſione diuiſor et diuidendus ſpectantur vt numeri integri: at in quoto tot notae reſecantur a fine incipiendo verſus ſiniſtram interiecta virgula, quot notis decimalibus diuidendus ſuperat diuiſorem, qui ſi non ſuperaret, deberent eius notae decimales augeri adiectis in fine zeris, vt infra in exemplo ſecundo. Vt ratio operationis pateat, ſit fractio decimalis 0,288 diuidenda per 0,8; ſcribantur eae cum ſuis denominatoribus hoc modo $\frac{288}{1000} : \frac{8}{10}$: ſi iam diuiſio more conſueto fiat inuertendo diuiſorem, quotus erit $= \frac{2880}{8000} = \frac{288}{800} = \frac{36}{100} =$ 0,36, quo quidem pacto ſemper patebit in quoti denominatore ſemper tot eſſe zeros, quot notis diuidendi decimales notae ſuperant notas decimales diuiſoris, ac proinde tot notis decimalibus conſtare ipſum quotum. E. g.

3,2 (8,192) 2,56.
0,5234 (1695,816) 3240,00.

SECTIO II.

DE COMPOSITIONE, ET RESOLUTIONE POTENTIARUM.

CAPVT I.

De natura, et geneſi Potentiarum.

90. *Potentia* vel *dignitas* quantitatis cuiuspiam eſt factum, quod oritur, ſi ea quantitas in vnitatem ſemel, aut ſaepius ducatur: id eſt, ſi multiplicatione ſemel aut ſaepius ponatur; ipſa vero illa quantitas, quae hac multiplicatione potentiam gignit, *radix* adpellatur. E. g. a^m eſt potentia, cuius radix eſt quantitas a, quae toties eſt multiplicatione poſita, quot in m ſunt vnitates.

91. COROLL. Cum ergo exponentes indicent, quoties ſit quantitas aliqua multiplicatione poſita (16), patet indicari ab exponentibus, quoti gradus quaeuis potentia ſit. E. g. a eſt potentia prima; a^2 eſt potentia ſecunda, ſeu *quadratum*; a^3 eſt potentia tertia, ſeu *cubus*; a^∞ eſt potentia infiniti gradus; a^m eſt potentia quaeuis indeterminata.

92. Radix comparate ad quadratum dicitur *radix quadrata*; comparate ad cubum *radix cubica*; comparate ad quartam potentiam *radix quarta*, et ſic deinceps. Eſt autem ſignum radicis quadratae $\sqrt[2]{\ }$ vel $\sqrt{\ }$; radicis cubicae $\sqrt[3]{\ }$; radicis quartae $\sqrt[4]{\ }$ etc. radicis indeterminatae $\sqrt[m]{\ }$: quantitas vero, cui tale ſignum praefixum eſt, *radicalis*; quantitas ſigno ipſi radicali impoſita *exponens radicis* nuncupatur. Quando deſignanda eſt radix quantitatis complexae, ea plerumque parentheſi includitur ſigno radicali praefixo hunc in modum: $\sqrt[3]{}(a+b)$: interdum ſic ſcribitur: $\sqrt[3]{a+b}$. Ipſae etiam potentiae quantitatum complexarum ſaepe indicantur tantum hac ratione: $(a+b)^2$, vel $\overline{a+b}^{\,2}$.

93. COROLL. 1. Si ergo radix bis ponatur multiplicatione, id eſt bis in vnitatem, ſeu ſemel in ſe ducatur, naſcitur quadratum; ſi bis, cubus; ſi ter, quarta potentia etc. Quare exponens potentiae vnitate multatus indicat, quoties ſit radix in ſeipſam ducta. E g. ad generandam potentiam a^m radix in vnitatem duci

debet vicibus m, in feipfam autem vicibus m — 1.

94. COROLL. 2. Si radix in fe ipfam, feu in radicem femel ducatur, nafcitur quadratum; fi radix in quadratum ducatur, nafcitur cubus; fi in cubum, nafcitur quarta potentia, et fic deinceps. Hinc quaeuis vnitatis potentia eft vnitas.

95. COROLL. 3. Omne adeo quadratum debet effe pofitiuum, cum radix tam pofitiua, quam negatiua femel in fe ducta gignat pofitiuum factum (48). Cubus radicis pofitiuae pofitiuus, at negatiuae negatiuus eft, cum quadratum pofitiuum in radicem negatiuam ductum generet negatiuum factum (cit.). Omnis potentia quarta pofitiua eft, cum cubus pofitiuus in radicem pofitiuam, aut negatiuus in negatiuam ductus factum pofitiuum progignat (cit.). Vniuerfe potentiae habentes exponentem parem 2, 4, 6, 8 etc, femper debent effe pofitiuae, poffuntque radicem tam pofitiuam quam negatiuam habere: potentiae vero habentes exponentem imparem 1, 3, 5, 7 etc. poffunt effe etiam negatiuae, et hae quidem negatiuas, pofitiuae autem pofitiuas radices habent.

96. COROLL. 4. Si ergo occurrat potentia negatiua habens pro exponente numerum parem, eius radix eft *impoffibilis*, feu *imaginaria*, cum nulla quantitas poffit eiusmodi potentiam gignere. E. g. $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-5}$ funt radices impoffibiles.

97. Coroll. 5. Cum fractio ad potentiam aliquam euehenda eſt, ea aliquoties in ſe duci, ac proinde numerator per ſemetipſum, et denominator per ſeipſum multiplicari debet (31). Quare cum in quauis fractione genuina maior ſit denominator, quam numerator (64), in ea euectione magis creſcit denominator, quam numerator, adeoque valor fractionis diminuitur (67, 70).

98. Problema. *Potentiam quamuis monomiam ad aliam dati exponentis euehere.*

Resolvt. Exponens potentiae datae multiplicetur per exponentem datum potentiae quaeſitae.

Demonstrat. Quaeuis enim potentia monomia data repraeſentari poteſt per a^m, et quiuis exponens datus potentiae quaeſitae per n: ergo ſi hic demonſtratum fuerit exponentem potentiae datae m multiplicari debere per exponentem datum quaeſitae potentiae n, id erit generatim verum; hoc autem ſic demonſtratur. Vt a^m eleuetur ad potentiam exponentis n, debet multiplicatione toties poni, quoties eſt vnitas in n (90): atqui a^m multiplicatione toties ponere eſt exponentem eius m toties ſibi addere, quoties eſt vnitas in n (48), ſeu m per n multiplicare (40): ergo exponens potentiae datae m ducendus eſt in exponentem n, vt habeatur exponens potentiae quaeſitae, quae eſt a^{mn}. Similiter $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$; item $(a^{-m})^{2m} = a^{-2m^2}$; item $(a^{-n})^{\frac{m}{n}} = a^{-\frac{mn}{n}} = a^{-m}$.

99. COROLL. Si quantitas eleuanda pluribus conftet literis, facile adparet, fingularum exponentes ducendos effe in datum exponentem. E. g. $(b^2 a^m)^n = b^{2n} a^{mn}$; item $(a^3 b^{-2})^2 = a^6 b^{-4}$.

100. PROBLEMA. *Potentias datas addere, fubtrahere, multiplicare, ac diuidere.*

RESOLVT. Quoniam potentiae algebraicae non aliud funt, quam quantitates exponentibus affectae (90, 91), earum additio, fubtractio, multiplicatio, et diuifio peraguntur iuxta regulas, quas de his calculis in fuperioribus tradidimus.

101. THEOREMA. *Potentia habens pro exponente zerum aequatur vnitati.*

DEMONST. Omnis enim eiusmodi potentia repraefentari poteft per a^0, ergo fi oftendero a^0 aequari vnitati, id erit de omni tali potentia verum; hoc autem fic oftendo. Sit a^m diuidendum per a^m, erit $\frac{a^m}{a^m} = 1$, quia a^m in a^m femel continetur; fed etiam fi reipfa diuidatur, erit $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$ (57); atqui aequalia eidem tertio funt aequalia inter fe: ergo $a^0 = 1$.

102. THEOREMA. *Potentia habens pro exponente fractionem pofitiuam aequatur radici habenti pro exponente eius fractionis denominatorem de potentia habente pro exponente numeratorem.*

DEMONST. Omnis enim eiusmodi potentia repraefentari poteft per $a^{\frac{m}{n}}$; ergo fi oftendero

$a^{\frac{m}{n}}$ esse $= \sqrt[n]{a^m}$, id erit de omni tali potentia verum; hoc autem sic ostendo. Eleuetur $a^{\frac{m}{n}}$ ad potentiam exponentis n, prodibit $a^{\frac{mn}{n}}$ (58) $=$ a^m : ergo a^m est potentia n respectu $a^{\frac{m}{n}}$: ergo vicissim $a^{\frac{m}{n}}$ est radix n respectu a^m, seu quod idem est $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

103. THEOREMA. *Potentia habens pro exponente quantitatem integram negatiuam aequatur suo coefficienti diuiso per eandem potentiam, sed exponentis positiui.*

DEMONSTR. Omnis enim eiusmodi potentia repraesentari potest per ba^{-m}; ergo si ostendero ba^{-m} esse $= \frac{b}{a^m}$, id erit de omni tali potentia verum; hoc autem sic ostendo. Multiplicetur ba^{-m} per ba^{2m}, erit factum b^2a^m : si hoc factum diuidatur per vnum factorem, nempe per ba^{2m}, quotus erit alter factor, nempe ba^{-m} (55); erit ergo $\frac{b^2a^m}{ba^{2m}} = ba^{-m}$: iam valor prioris fractionis non mutatur, si tam numerator, quam denominator diuidatur per ba^m (74): erit ergo $\frac{b}{a^m} = ba^{-m}$.

104. COROLL. I. Si ergo coefficiens fuerit $= 1$, erit potentia exponentis integri negatiui aequalis vnitati diuisae per eandem poten-

tiam, ſed exponentis poſitiui. E. g. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

105. Coroll. 2. Erit igitur viciſſim $\frac{b}{a^{-m}} = ba^m$: nam pro a^{-m} ponendo $\frac{1}{a^m}$, erit $\frac{b}{a^{-m}} = \frac{b}{1} : \frac{1}{a^m} = \frac{ba^m}{1} = ba^m$. Eodem modo patet eſſe $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$.

106. Theorema. *Potentia habens pro exponente fractionem negatiuam aequatur ſuo coefficienti diuiſo per radicem habentem pro exponente denominatorem illius fractionis de potentia habente pro exponente numeratorem, ſed poſitiuum.*

Demonstr. Omnis enim eiusmodi potentia repraeſentari poteſt per $ba^{\frac{-m}{n}}$; ergo ſi oſtendero $ba^{\frac{-m}{n}}$ eſſe $= \frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}$, id erit de omni tali potentia verum; hoc autem ſic oſtendo. Multiplicetur $ba^{\frac{-m}{n}}$ per $ba^{\frac{2m}{n}}$, erit factum $b^2a^{\frac{m}{n}}$: ſi hoc factum diuidatur per vnum factorem, nempe per $ba^{\frac{2m}{n}}$, quotus erit alter factor, nempe $ba^{\frac{-m}{n}}$ (55): ergo $\frac{b^2a^{\frac{m}{n}}}{ba^{\frac{2m}{n}}} = ba^{\frac{-m}{n}}$; iam valor prioris fractionis non mutatur, ſi tam numerator, quam denominator diuidatur per $ba^{\frac{m}{n}}$ (74): erit ergo $a^{\frac{b}{m}} = ba^{\frac{-m}{n}}$; atqui pro denominatore $a^{\frac{m}{n}}$ ſubſtitui poteſt $\sqrt[n]{a^m}$ (102): ergo hoc ſubſtituto erit $\sqrt[n]{a^{\frac{b}{m}}} = ba^{\frac{-m}{n}}$.

107. COROLL. 1. Si ergo coefficiens fuerit 1, erit potentia exponentis fracti negatiui aequalis vnitati diuiſae per radicem habentem pro exponente denominatorem illius fractionis de potentia habente pro exponente numeratorem, ſed poſitiuum. E. g. $a^{\frac{-m}{n}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}}$.

108. COROLL. 2. Igitur quaeuis quantitates radicales poſſunt exhiberi forma potentiarum omiſſo radicali ſigno, ſi nempe exponens quantitatis radicalis diuidatur per exponentem radicis. E. g. $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{4}{3}}$;

$$\sqrt[\frac{2}{3}]{\frac{a}{b}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{a^3}{b^3}}.$$

109. PROBLEMA. *Conſtruere formulam pro quauis potentia determinata radicis binomiae.*

RESOLVT. Cum quaeuis radix binomia repraeſentari poſſit per $a + b$, ducatur $a + b$ ſemel in ſeipſum, erit $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Hoc rurſus ducatur in $a + b$, erit $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, et ſic deinceps eadem operatione continuata exſurgent ſequentes potentiarum formulae.

$$(a+b)^1 = 1a^1 + 1b^1.$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$
$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$
$$(a+b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6$$
$$(a+b)^7 = 1a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + 1b^7$$
$$(a+b)^8 = 1a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + 1b^8 \text{ etc.}$$

Si iam hae potentiae attente perluſtrentur, patebit imprimis ſingulas conſtare factis quibusdam literalibus; deinde horum factorum coefficientibus. Si rurſus attentius conſiderentur, eruentur duae regulae, vna pro inueniendis factis literalibus, altera pro coefficientibus. 1) Pro inueniendis factis literalibus haec eſt regula: formentur duae ſeries, quarum prior incipiat ab illa potentia termini primi a, pro qua quaeruntur facta literalia, et deſinat in 1; altera incipiat ab 1, et deſinat in eadem potentia termini ſecundi b. E. g. ſi petantur facta literalia pro potentia octaua, ſcribantur hae ſeries

$$a^8,\ a^7,\ a^6,\ a^5,\ a^4,\ a^3,\ a^2,\ a^1,\ 1$$
$$1,\ b^1,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ b^5,\ b^6,\ b^7,\ b^8$$

deinde termini eiusdem ordinis in ſe ducantur; facta: $1a^8 + a^7b^1 + a^6b^2 + a^5b^3 + a^4b^4 + a^3b^5 + a^2b^6 + a^1b^7 + 1b^8$ exhibebunt facta literalia potentiae octauae radicis binomiae $a + b$.

2) Regula pro inueniendis coefficientibus haec eſt. Exponentibus termini primi a ſubſcribantur exponentes termini ſecundi b tanquam denominatores hoc modo:

$$\tfrac{8}{1},\ \tfrac{7}{2},\ \tfrac{6}{3},\ \tfrac{5}{4},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{3}{6},\ \tfrac{2}{7},\ \tfrac{1}{8},$$

erit prima fractio $\tfrac{8}{1} = 8$ coefficiens termini ſecundi; factum e prima, et ſecunda, ſeu $\tfrac{8}{1} \cdot \tfrac{7}{2} = 28$ coefficiens termini tertii; factum ex prima, ſecunda, et tertia, ſeu $\tfrac{8}{1} \cdot \tfrac{7}{2} \cdot \tfrac{6}{3} = 56$ coefficiens termini quarti, et ſic deinceps. Patet ergo methodus radicem binomiam ad quamuis potentiam determinatam euehendi.

110. PROBLEMA. *Conſtruere formulam generalem pro quauis potentia indeterminata radicis binomiae.*

RESOL. 1) Pro inueniendis factis literalibus formentur, vt ante, binae ſeries, in quarum prima pro exponente determinato ponatur indeterminatus m: multiplicatis inter ſe ſeriebus habebuntur pro formula generali facta literalia

$$a^m + a^{m-1}b^1 + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 \text{ etc.}$$

2) Pro inueniendis coefficientibus rurſus, vt ſupra, formentur duae ſeries exponentium, nempe

$$\frac{m}{1},\ \frac{m-1}{2},\ \frac{m-2}{3},\ \frac{m-3}{4} \text{ etc.}$$

erit $\frac{m}{1}$ coefficiens termini ſecundi, $\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}$ coefficiens termini tertii, $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ coefficiens termini quarti etc. Si ergo hi coefficientes praefigantur factis literalibus ſupra inuentis, habebitur ſequens generalis formula

$$a^m$$
$$+ \frac{m}{1} a^{m-1} b$$
$$+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2$$
$$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3$$
$$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 \text{ etc.}$$

111. COROLL. Cum ſit $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$; $a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$; $a^{m-3} = \frac{a^m}{a^3}$ etc. his valoribus ſubſtitutis naſcetur altera haec formula:

$$a^m$$
$$+ \frac{m\, a^m b}{1\; a}$$
$$+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \frac{a^m b^2}{a^2}$$
$$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{a^m b^3}{a^3}$$
$$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{a^m b^4}{a^4} \text{ etc.}$$

112. PROBLEMA. *Inuenire partes, quibus conſtat quadratum radicis binomiae.*

RESOLVT. Si in prima formula generali fiat $m = 2$, ea in hanc abibit: $a^2 + 2ab + b^2$; reliqua membra ob $m - 2 = 2 - 2 = 0$, erunt aequalia nihilo. Hinc quadratum radicis binomiae conſtat 1) quadrato termini primi a^2,

2) duplo termini vnius in alterum ductο $2ab$, 3) quadrato termini ſecundi b^2. Sic etiam quadratum numeri 6, ſeu $2 + 4 = 4 + 16 + 16 = 36$.

113. PROBLEMA. *Inuenire partes, quibus conſtat cubus radicis binomiae.*

RESOLVT. Si in prima formula generali fiat $m = 3$, ea in hanc abibit: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; reliqua membra ob $m - 3 = 3 - 3 = 0$, erunt aequalia nihilo. Hinc cubus radicis binomiae conſtat 1) cubo termini primi a^3, 2) triplo quadrato termini primi in ſecundum $3a^2b$, 3) triplo quadrato ſecundi in primum $3ab^2$, 4) cubo termini ſecundi b^3. Sic etiam cubus numeri 5 ſeu $2 + 3 = 8 + 36 + 54 + 27 = 125$.

114. PROBLEMA. *Complere quadratum incompletum, in quo ſcilicet quadratum termini ſecundi deſideratur.*

RESOLVT. Quoniam in eiusmodi quadrato praeter quadratum termini primi adeſt praeterea factum e duplo termini ſecundi in primum (112) videatur, per quid terminus primus radicis ſit multiplicatus; id enim erit duplum ſecundi, adeoque eius dimidium erit terminus ſecundus, e quo ſi quadratum fiat, et addatur quadrato illi incompleto, habebitur quadratum completum. Omne autem eiusmodi quadratum duplici hac formula continetur: $x^2 + ax$, et $x^2 - ax$, vbi x deſignat primum radicis terminum, a termini ſecundi duplum: hinc terminus ſecundus in prima erit $\frac{1}{2}a$, in ſecunda $-\frac{1}{2}a$, ac termini ſecundi quadratum vtrobique $\frac{1}{4}a^2$, quo addito erunt quadrata completa $a^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$, et $a^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$.

EXEMPLA.

$$\text{I.}\ \left.\begin{array}{l} n^2 + \dfrac{2an}{d} - n \\ x^2 + cx - 6x \end{array}\right\} \textit{Incompl.}$$

$$\left.\begin{array}{l} n^2 + \dfrac{2an}{d} - n + \dfrac{a^2}{d^2} - \dfrac{a}{d} + \frac{1}{4} \\ x^2 + cx - 6x + \frac{1}{4}c^2 - 3c + 9 \end{array}\right\} \textit{Compl.}$$

$$\text{II.}\ \left.\begin{array}{l} n^2 - \dfrac{2\omega n}{d} - n \\ x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}ax \end{array}\right\} \textit{Incompl.}$$

$$\left.\begin{array}{l} n^2 - \dfrac{2\omega n}{d} - n + \dfrac{\omega^2}{d^2} + \dfrac{\omega}{d} + \frac{1}{4} \\ x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}ax + \frac{4}{36} + \frac{4}{24}a + \frac{1}{16}a^2 \end{array}\right\} \textit{Compl.}$$

115. PROBLEMA. *Radicem quamuis polynomiam euehere ad quadratum.*

RESOLVT. Inter radices polynomias poſt binomiam primo loco occurrit trinomia, quae repraeſentari poteſt per $c + d + g$: ſi ergo fiat $c + d = a$, et $g = b$, quaeuis radix trinomia bene repraeſentabitur per $a + b$, et hinc formula generalis facta pro $a + b$ ſeruiet etiam pro radice trinomia ad quadratum euehenda. Igitur factis pro a et b ſubſtitutionibus in formula generali erit

$$\left.\begin{array}{l} a^m = (c + d)^2 = c^2 + 2cd + d^2 \\ + \frac{m}{1}a^{m-1}b = (2c + 2d)g = 2cg + 2dg \\ + \dfrac{m \,.\, m - 1}{1 \,.\, 2} a^{m-2}b^2 = \quad \cdot \quad \cdot \quad g^2 \end{array}\right\}$$

et

et hinc $(c + d + g)^2 = c^2 + 2cd + d^2 + 2cg + 2dg + g^2$.

Poſt radicem trinomiam ſequitur quadrinomia, quae repraeſentari poteſt per $c + d + g + h$: ſi ergo fiat $c + d + g = a$, et $h = b$, quaeuis radix quadrinomia bene repraeſentabitur per $a + b$, et hinc formula generalis facta pro $a + b$ ſeruiet etiam pro radice quadrinomia euehenda ad quadratum. Igitur factis, vt ante, ſubſtitutionibus erit

$$\left.\begin{aligned} a^m &= (c + d + g)^2 = c^2 + 2cd + d^2 + 2cg \\ &\qquad + 2dg + g^2 \\ + \tfrac{m}{1} a^{m-1} b &= (2c + 2d + 2g)\,h = 2ch \\ &\qquad + 2dh + 2gh \\ + \frac{m \,.\, m - 1}{1 \,.\, 2} a^{m-2} b^2 &= \quad - \quad - \quad h^2. \end{aligned}\right\}$$

et hinc $(c + d + g + h)^2 = c^2 + 2cd + d^2 + 2cg + 2dg + g^2 + 2ch + 2dh + 2gh + h^2$

116. CoROLL. 1. Igitur quadratum cuiusuis radicis polynomiae conſtat 1) quadratis ſingulorum terminorum, 2) duplo praecedentium ducto in omnes ſequentes.

117. CoROLL. 2. Et quidem ſi quadratum legitime ordinatum eſt, partes hoc ordine ſe excipiunt: quadratum termini primi; duplum primi ductum in ſecundum; quadratum ſecundi; duplum primi et ſecundi ductum in tertium; quadratum tertii; duplum primi, ſecundi, et tertii ductum in quartum; quadratum quarti etc.

118. PROBLEMA. *Radicem quamuis polynomiam euehere ad cubum.*

RESOLVT. Inter radices polynomias poſt binomiam primum occurrit trinomia, quae repraeſentari poteſt per $c+d+g$: ſi ergo fiant omnia vt ſupra, erit

$$\left.\begin{array}{l} a^m = (c+d)^3 = c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \\ + \frac{m}{1} a^{m-1}b = 3(c^2 + 2cd + d^2)g = 3c^2g \\ \qquad + 6cdg + 3d^2g \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2} a^{m-2}b^2 = 3(c+d)g^2 = 3cg^2 \\ \qquad + 3dg^2 \\ + \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^{m-3}b^3 = \;-\;-\; g^3 \end{array}\right\}$$

et hinc $(c+d+g)^3 = c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 + 3c^2g + 6cdg + 3d^2g + 3cg^2 + 3dg^2 + g^3$.

Inter radices polynomias poſt trinomiam ſequitur radix quadrinomia, quae repraeſentari poteſt per $c+d+g+h$: ſi ergo fiant omnia vt ſupra, erit

$$\left.\begin{array}{l} a^m = (c+d+g)^3 = c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \\ \qquad + 3c^2g + 6cdg + 3d^2g + 3cg^2 \\ \qquad + 3dg^2 + g^3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{m}{1} a^{m-1}b = 3(c^2 + 2cd + d^2 + 2cg + 2dg \\ \qquad + g^2)h = 3c^2h + 6cdh + 3d^2h \\ \qquad + 6cgh + 6dgh + 3g^2h \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2} a^{m-2}b^2 = 3(c+d+g)h^2 = \\ \qquad 3ch^2 + 3dh^2 + 3gh^2 \end{array}\right\}$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 = \quad . \quad . \quad h^3 \Big\}$$

et hinc $(c + d + g + h)^3 = c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 + 3c^2g + 6cdg + 3d^2g + 3cg^2 + 3dg^2 + g^3 + 3c^2h + 6cdh + 3d^2h + 6cgh + 6dgh + 3g^2h + 3ch^2 + 3dh^2 + 3gh^2 + h^3$.

119. Coroll. 1. Igitur cubus cuiusuis radicis polynomiae conſtat 1) cubis ſingulorum terminorum, 2) triplo quadrato praecedentium in ſequentes, 3) triplo quadrato cuiusuis ſequentis in omnes praecedentes.

120. Coroll. 2. Et ſiquidem cubus legitime ordinatus eſt, partes hoc ordine ſe excipiunt: cubus termini primi; triplum quadratum primi ductum in ſecundum; triplum quadratum ſecundi ductum in primum; cubus ſecundi; triplum quadratum primi, et ſecundi ductum in tertium; triplum quadratum tertii in primum, et ſecundum; cubus tertii; triplum quadratum primi, ſecundi et tertii in quartum; triplum quadratum quarti in primum, ſecundum, et tertium; cubus quarti etc.

Schol. In potentiis algebraicis partes hae, e quibus coaleſcunt, facile incurrunt in oculos; at in potentiis numerorum veluti permiſtae, et confuſae latent; quare diligenter videndum erit, quem quaeque locum in potentia obtineat. Sit radix binomia 30 + 4 euehenda ad quadratum: erit illud = 900 + 240 + 16 = 1156. Quoniam pars ſecunda radicis vnitates, prima decades ſignificat, quadratum vnitatum in loco dextimo, factum ex vnius termini duplo in alterum in loco ſecundo, quadratum decadum in loco tertio terminari debet. Sit radix trinomia 200 + 40 + 3 euehenda ad quadratum, erit illud = 40000 + 16000 + 1600 + 1440 + 9 = 59049. Quoniam pars tertia radicis vnitates, ſecunda decades, prima centenarios denotat, quadratum tertiae terminari debet in loco a dextris primo; factum ex duplo ſecundae in tertiam in loco ſecundo; quadratum ſecundae, et factum ex duplo primae in tertiam in loco tertio, duplum primae in ſecundam in loco quarto, quadratum denique primae in loco quinto. Eadem eſt de aliis radicibus polynomiis, deque aliis earum potentiis ratiocinatio. Vnde eruitur haec animaduerſio vſui in ſequentibus futura: nimirum quot quaeuis radicis pars habet poſt ſe notas, bis totidem habebit poſt ſe eiusdem quadratum, ter totidem eiusdem cubus, quater totidem eiusdem potentia quarta, et ſic porro. Hinc ſi in quadrato poſt ſingulas duas notas a dextris inchoando ponatur virgula, in cubo poſt tres, in quarta potentia poſt quatuor, et generatim in quauis potentia poſt tot notas, quot habet exponens potentiae vnitates, radix potentiae totidem habebit notas, quot in potentia fuerint membra virgulis diſtincta.

CAPVT II.

De extractione radicum e potentiis algebraicis.

121. R*adicem extrahere* eſt e data potentia radicem eruere, ſeu quantitatem, quae ſcilicet in ſe aliquoties ducta potentiam illam generauit. E. g. extrahere radicem quadratam, vel cubicam ex a^6, eſt indagare quantitatem a^3 vel a^2, quae ſemel in ſe ducta generet quadratum a^6, aut bis in ſe ducta cubum a^6.

122. Coroll. 1. Quare radicum extractio contraria eſt potentiarum compoſitioni: et potentiae ſicuti coaleſcunt multiplicatione, ita diſſuuntur, inque ſuas radices reſoluuntur diuiſione.

123. Coroll. 2. Interdum radices *ſurdae*, vel *irrationales* occurrunt, quae ſcilicet nullis numeris poſſunt exprimi, vt eſt $\sqrt{2}$. Quum ergo radix huiusmodi quaeritur, talis quantitas indagatur, quae capax ſit producendi potentiam ad datam quantitatem proxime accedentem: e. g. ſi quaeratur $\sqrt{12}$, inueſtigatur numerus, cuius quadratum proxime accedat ad 12.

124. Problema. *E data potentia monomia radicem quamlibet extrahere.*

Resol. Diuidatur exponens potentiae per exponentem datae radicis, et habebitur exponens radicis deſideratae. Nam omnis potentia monomia repraeſentari poteſt per a^m, et omnis radix extrahenda per radicem $\sqrt[n]{}$, atqui $\sqrt[n]{a^m}$

$= a^{\frac{m}{n}}$ (102). Hinc ſi radix quadrata quaeratur exponens potentiae datae diuidendus eſt per 2, ſi cubica per 3 etc. e. g. $\sqrt{a^8} = a^{\frac{8}{2}} = a^4$; $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$.

125. PROBLEMA. *E data potentia polynomia radicem quadratam extrahere.*

RESOLVT. Ordinetur propoſita potentia ſecundum exponentes cuiusdam literae, ita vt maximus exponens primo loco ſit (12); deinde obſeruentur hae regulae:

1) Cum in primo termino lateat quadratum termini primi radicis, extrahatur radix quadrata e primo termino (124) et ſcribatur poſt potentiam parentheſi incluſam: tum radicis huius quadratum e data potentia ſubtrahatur, ac notetur primum reſiduum.

2) Cum ſequatur duplum termini primi ductum in ſecundum, per duplum termini primi iam inuenti reſiduum primum diuidatur, et quotus ſcribatur pro ſecundo radicis termino; deinde quotus hic ducatur tam in ſe, quam in duplum termini prioris, ſeu in diuiſorem, et ſublatis hiſce productis notetur ſecundum reſiduum.

3) Cum ſequatur duplum termini primi et ſecundi ductum in tertium, per duplum termini primi et ſecundi iam inuentorum diuidatur ſecundum reſiduum; tum ſcribatur quotus pro tertio termino radicis, qui ducatur tam in ſe, quam in duplum terminorum praecedentium,

ſeu in diuiſorem, et ſublatis hiſce productis notetur tertium reſiduum.

4) Cum ſequatur duplum termini primi, ſecundi, et tertii ductum in quartum, per duplum termini primi, ſecundi, et tertii iam inuentorum diuidatur tertium reſiduum, ac eadem conſtanter lege continuetur operatio, dum vel nihil ſuperſit e data potentia, vel abeatur in ſeriem quamdam infinitam. Si propoſita potentia fractio fuerit, per easdem regulas extrahatur radix tam e numeratore, quam e denominatore (97).

DEMONST. Radix quadrata rite inuenta eſt, ſi eius quadratum aequale ſit potentiae datae: eſt autem aequale, nam radicis inuentae quadratum per partes ablatum eſt a potentia data, et nihil remanſit: ergo. Siquid autem remanet, indicio eſt inuentam radicem non eſſe accuratam, vt infra in Exemp. 4.

EXEMPLA.

$$\text{I. } \sqrt{(a^4 + 6a^3b + 5a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4)} = a^2 + 3ab - 2b^2$$

$$\frac{a^4}{0}$$

$$1.\ \mathit{Diu.}\ 2a^2\ (6a^3b + 5a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4)\ 1\ \mathit{reſid.}$$

$$\frac{6a^3b + 9a^2b^2}{0}$$

$$2.\ \mathit{Diu.}\ 2a^2 + 6ab\ (-4a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4)\ 2\ \mathit{reſid.}$$

$$\frac{-4a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4}{0 \quad 0 \quad 0}$$

II. $\sqrt{(b^2 - 2bd + d^2 + 2bc - 2dc + c^2)} = b - d + c$

$$\begin{array}{l} b^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

1. *Diu.* $2b\,(- 2bd + d^2 + 2bc - 2dc + c^2)$ 1 *resid.*

$$\begin{array}{cc} -2bd & +d^2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

2. *Diuis.* $2b - 2d\,(2bc - 2dc + c^2)$ 2 *resid.*

$$\begin{array}{ccc} 2bc & -2dc & +c^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$$

III. $\sqrt{\left\{\dfrac{9c^2 - 12cdx + 4d^2x^2 + 24cfy - 16dfxy + 16f^2y^2}{y^4 + 4y^3 - 8y + 4}\right\}}$

$= \dfrac{3c - 2dx + 4fy}{y^2 + 2y - 2}.$

IV. $\sqrt{(a^2 + x^2)} = a + \dfrac{x^2}{2a} - \dfrac{x^4}{8a^3} + \dfrac{x^6}{16a^5}$

$- \dfrac{5x^8}{128a^7} + \dfrac{7x^{10}}{256a^9}$ etc. in infin.

SCHOL. Iuuat in tironum gratiam duo ex allatis exemplis minutatim perſequi. Igitur in primo ordinata potentia ſecundum exponentes literae a (poterat perinde ordinari etiam ſecundum exponentes literae b) extrahatur radix a^2 ex a^4, et ſcribatur poſt potentiam; deinde eius quadratum a^4 ſubtrahatur e data potentia. Primus reſidui primi terminus $6a^3b$ diuidatur per duplum radicis inuentae $2a^2$, et quotus $3ab$ ſcribatur pro ſecundo radicis termino, qui tam in diuiſorem, quam in ſeipſum ductus dat factum $6a^3b + 9a^2b^2$, quo ſubtracto habebitur reſiduum ſecundum. Radix iam inuenta $a^2 + 3ab$ duplicetur, et per primum eius terminum $2a^2$ diuidatur primus reſidui ſecundi terminus $- 4a^2b^2$, et quotus $- 2b^2$ ſcribatur pro tertio radicis termino, qui tam in totum diuiſorem, quam in ſe ipſum ductus dat factum $- 4a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4$, quo ſubducto nihil remanet, ac proinde radix quaeſita eſt $a^2 + 3ab - 2b^2$.

In quarto exemplo radix termini primi a ſcribatur poſt potentiam, eiusdemque quadrato e data potentia ſubtracto remanet x^2, quod diuiſum per $2a$ nempe per duplum radicis iam inuentae dat ſecundum radicis terminum $\frac{x^2}{2a}$, qui tam in diuiſorem, quam in ſe ipſum ductus dat factum $x^2 + \frac{x^4}{4a^2}$; quo ex x^2 ſubducto remanet reſiduum ſecundum $- \frac{x^4}{4a^2}$. Si hoc alterum reſiduum diuidatur per duplum radicum iam inuentarum nempe per $2a + \frac{x^2}{a}$, habebitur tertius radicis terminus $- \frac{x^4}{8a^3}$, qui tam in totum diuiſorem quam in ſeipſum ductus dat factum ad minimos terminos reductum $- \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6}$, quo ex $- \frac{x^4}{4a^2}$ ſubducto remanet reſiduum tertium $\frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6}$; iſto per duplum radicum hactenus inuentarum diuiso inuenitur quartus radicis terminus $\frac{x^6}{16a^5}$, et sic deinceps in infinitum. At pro huiusmodi radicibus eruendis proferemus infra formulam paulo commodiorem.

126. PROBLEMA. *E data potentia polynomia radicem cubicam extrahere.*

RESOL. Ordinata vt ante potentia peragatur operatio sequentibus legibus:

1) Cum in primo termino lateat cubus termini primi radicis, e primo potentiae datae termino extrahatur radix cubica (124), scribaturque post potentiam; tum cubus eiusdem e data potentia subtrahatur, ac notetur primum residuum.

2) Cum sequatur triplum quadratum termini primi ductum in secundum, per triplum, quadratum termini primi diuidatur residuum primum, et quotus scribatur pro secundo radicis termino: deinde quotus hic ducatur in diuisorem; triplum eiusdem quadratum ducatur in primum radicis terminum; ac deinde fiat ex eodem cubus: tribus hisce factis e residuo primo sublatis notetur residuum secundum.

3) Cum sequatur triplum quadratum termini primi et secundi ductum in tertium, per triplum quadratum termini primi et secundi iam inuentorum diuidatur residuum secundum, et quotus scribatur pro tertio radicis termino: deinde quotus hic ducatur in totum diuisorem; triplum eiusdem quadratum ducatur in ambos

praecedentes radicis terminos; ac denique fiat ex eodem cubus; tribus hisce factis e residuo secundo sublatis notetur residuum tertium.

4) Cum sequatur triplum quadratum termini primi, secundi, et tertii ductum in quartum, per triplum quadratum termini primi, secundi, et tertii iam inventorum diuidatur residuum tertium, et obtinebitur quartus radicis terminus, qui eo plane modo tractandus est, quo ceteros repertos tractauimus. Atque haec operandi ratio tam diu producatur, dum vel nihil supersit, vel abeatur in seriem quamdam infinitam. Quodsi potentia proposita fractio fuerit, per easdem regulas extrahatur radix cubica tam ex numeratore, quam ex denominatore (97).

DEMONST. Radix cubica rite inuenta est, si eius cubus aequalis sit potentiae datae: est autem aequalis, nam radicis inuentae cubus per partes ablatus est a potentia data, et nihil remansit: ergo. Siquid autem remanet, indicio est inuentam radicem non esse accuratam, vt infra in Exemp. 4

EXEMPLA.

I. $\sqrt[3]{(x^6 + 3bx^5 + 3b^2x^4 + 3cx^4 + b^3x^3 + 6bcx^3 + 3b^2cx^2 + 3c^2x^2 + 3bc^2x + c)} = x^2 + bx + c$

x^6

$\overline{}$

0

1 *Diuis.* $3x^4$ $(3bx^5 + 3b^2x^4 + 3cx^4 + b^3x^3$

$3bx^5 + 3b^2x^4 \qquad\qquad + b^3x^3$

$\;\;\circ \qquad\quad \circ$

$+ 6bcx^3 + 3b^2cx^2 + 3c^2x^2 + 3bc^2x$

$\circ$

$+ c^3)$ 1 *resid.*

2 *Diuis.* $3x^4 + 6bx^3 + 3b^2x^2$

$(3cx^4 + 6bcx^3 + 3b^2cx^2 + 3c^2x^2 + 3bc^2x + c^3)$ 2 *resid.*

$3cx^4 + 6bcx^3 + 3b^2cx^2 + 3c^2x^2 + 3bc^2x + c^3$

$\circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ$

II. $\sqrt[3]{}(b^3 - 3b^2d + 3b^2c + 3bd^2 - 6bdc$

b^3

$\circ$

$+ 3bc^2 - d^3 + 3d^2c - 3dc^2 + c^3)$

$= b - d + c.$

1 *Diuis.* $3b^2$ $(- 3b^2d + 3b^2c + 3bd^2 - 6bcd$

$- 3b^2d \qquad\qquad + 3bd^2$

$\circ \qquad\quad \circ$

$+ 3bc^2 - d^3 + 3d^2c - 3dc^2 + c^3)$ 1 *resid.*

$- d^3$

$\circ$

2 *Diuis.* $3b^2 - 6bd + 3d^2$

$(3b^2c - 6bcd + 3bc^2 + 3d^2c - 3dc^2 + c^3)$ 2 *resid.*

$3b^2c - 6bcd + 3bc^2 + 3d^2c - 3dc^2 + c^3$

$\circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ$

$$\text{III. } \sqrt[3]{\left\{\frac{(8c^3 + 36dc^2 + 54d^2c + 27d^3 + 72ac^2 + 216adc + 162ad^2 + 216a^2c + 324a^2d + 216a^3}{c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 + 3c^2g + 6cdg + 3d^2g + 3cg^2 + 3dg^2 + g^3}\right\}} = \frac{2c + 3d + 6a.}{c + d + g}$$

$$\text{IV. } \sqrt[3]{(a^3 + x^3)} = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8} \text{ etc. in infin.}$$

SCHOLION. Iterum in tironum gratiam bina ex allatis exemplis vberius explanabimus. Igitur in primo ordinata potentia ſecundum exponentes literae x (poterat ordinari etiam iuxta exponentes literae c, vel b), extrahatur radix x^2 ex x^6, et ſcribatur poſt potentiam; deinde cubus eiusdem x^6 ſubtrahatur e data potentia, noteturque reſiduum primum. Primus reſidui terminus $3bx^5$ diuidatur per triplum quadratum radicis iam inuentae, ſeu per $3x^4$, et quotus bx ſcribatur pro ſecundo radicis termino, ducaturque in diuiſorem, triplum vero eius quadratum $3b^2x^2$ in praecedentem radicis terminum, ac denique fiat ex eodem cubus b^3x^3: his e reſiduo primo ſublatis notetur alterum reſiduum, quod diuiſum per triplum quadratum ſummae terminorum radicis iam inuentorum, ſeu per $3x^4 + 6bx^3 + 3b^2x^2$, dat pro quoto tertium radicis terminum c, qui ducendus eſt in totum diuiſorem, triplum autem eius quadratum $3c^2$ in terminos radicis praecedentes, ac demum faciendus eſt ex eodem cubus c^3: tribus hiſce factis ſubductis nihil remanet, ac proinde radix quaeſita eſt $x^2 + bx + c$.

In exemplo quarto radix cubica termini primi a poſt datam potentiam ſcribatur, cubusque eiusdem a^3 ſubtrahatur, remanet x^3, quod diuiſum per triplum quadratum radicis iam inuentae, ſeu per $3a^2$ dat ſecundum radicis terminum $\frac{x^3}{3a^2}$ qui ducendus eſt in diuiſorem $\frac{3a^2}{1}$, dabitque factum $\frac{3a^2x^3}{3a^2} = x^3$: deinde triplum eiusdem quadratum $\frac{3x^6}{9a^4} = \frac{x^6}{3a^4}$ ducendum eſt in terminum primum radicis, naſceturque factum huiusmodi $\frac{ax^6}{3a^4} = \frac{x^6}{3a^3}$; faciendus denique ex eodem cubus $\frac{x^9}{27a^6}$: tribus hiſce factis ex x^3 ſublatis remanet ſecundum reſiduum $-\frac{x^6}{3a^3} - \frac{x^9}{27a^6}$. Reſiduum hoc diuiſum per triplum quadratum ſummae terminorum iam inuentorum, ſeu per $3a^2 + \frac{2x^3}{a} + \frac{x^6}{3a^4}$ dat tertium radicis terminum $-\frac{x^6}{9a^5}$. Terminus hic ducatur in totum diuiſorem, dabitque factum $-\frac{x^6}{3a^3} - \frac{2x^9}{9a^6} - \frac{x^{12}}{27a^9}$; tum triplum eius quadratum in ſummam terminorum praecedentium, et naſcetur factum $\frac{x^{12}}{27a^9} + \frac{x^{15}}{81a^{12}}$; denique fiat ex eodem cubus $-\frac{x^{18}}{729a^{15}}$: his ergo tribus e ſecundo reſiduo ſubtractis obtinebitur reſiduum tertium $\frac{5x^9}{27a^6} + \frac{x^{12}}{27a^9} - \frac{x^{12}}{27a^9} - \frac{x^{15}}{81a^{12}} + \frac{x^{18}}{729a^{15}}$. Reſiduum hoc diuiſum per triplum quadratum ſummae terminorum iam inuentorum dabit pro quoto quartum radicis terminum $\frac{5x^9}{81a^8}$, atque ita deinceps in infinitum. Verum huiusmodi ſeries longe facilius inuenietur ope ſequentium problematum.

127. PROBLEMA. *Conſtruere formulam generalem pro extrahendis quibusuis radicibus etiam irrationalibus.*

RESOLVT. Ponatur $a = P$, $b = PQ$, adeoque $Q = \frac{b}{a}$; valoribus hiſce ſubſtitutis formula generalis ſecunda (111) in hanc abibit:

$$P^m$$

$$+ \frac{m}{1} P^m Q$$

$$+ \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2} P^m Q^2$$

$$+ \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} P^m Q^3 \text{ etc.}$$

Fiat rursus $P^m = A$, erit $\frac{m}{1} P^m Q = \frac{m}{1}$ AQ.

Fiat $\frac{m}{1} P^m Q$, seu $\frac{m}{1}$ AQ = B, erit $\frac{m.m-1}{1.2}$

$$P^m Q^2 = \text{ - - - - - - - - } \frac{m-1}{2} BQ$$

Fiat $\frac{m-1}{2}$ BQ = C, erit $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$

$$P^m Q^3 = \text{ - - - - - - - } \frac{m-2}{3} CQ.$$

Fiat $\frac{m-2}{3}$ CQ = D, erit $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$

$$P^m Q^4 = \text{ - - - - - - } \frac{m-3}{4} DQ \text{ etc.}$$

Vnde imprimis quidem eruitur noua formula binomii $a+b$ ad quamcunque potentiam indeterminatam m euehendi, nempe $(a+b)^m =$

$$\begin{aligned} &P^m \\ &+ \frac{m}{1} AQ \\ &+ \frac{m-1}{2} BQ \\ &+ \frac{m-2}{3} CQ \\ &+ \frac{m-3}{4} DQ \text{ etc.} \end{aligned}$$

Iam si hic pro integro exponente m substituatur exponens fractus $\frac{m}{n}$, nascetur sequens for-

formula, cuius ope radix quaeuis extrahi possit:

$$P^{\frac{m}{n}}$$
$$+ \frac{m}{n} A Q$$
$$+ \frac{m-n}{2n} B Q$$
$$+ \frac{m-2n}{3n} C Q$$
$$+ \frac{m-3n}{4n} D Q \text{ etc.}$$

Nempe si exponens $\frac{m}{n}$ explicetur per numerum fractum, seu per exponentem quantitatis radicalis (102) e. g. per $\frac{1}{2}$ pro extrahenda radice quadrata, per $\frac{1}{3}$ pro cubica etc. ope huius formulae extrahi poterit radix quaecunque quantitatis $P+PQ$, seu $a+b$, vti patebit in exemplis sequentibus. Imo si pro n ponatur 1, et pro m exponens potentiae, ad quam $P+PQ$, seu $a+b$ euehi debet, haec eadem formula inseruit etiam eleuandis ad quamcunque potentiam quantitatibus.

EXEMPLA.

I. $\sqrt{(a^2+x^2)} = (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \frac{7x^{10}}{256a^9}$ etc. in infin.

II. $\sqrt[3]{(a^3+x^3)} = (a^3+x^3)^{\frac{1}{3}} = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}}$ etc. in infin.

III. $\frac{1}{\sqrt[3]{(y^3-a^2y)}} = (y^3-a^2y)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{y} + \frac{a^2}{3y^3} + \frac{a^4}{9y^5} + \frac{7a^6}{81y^7}$ etc. in infin.

IV. $\sqrt[5]{(c^5+c^4x-x^5)} = (c^5+c^4x-x^5)^{\frac{1}{5}} = c + \frac{c^4x-x^5}{5c^4} - \frac{2c^8x^2+4c^4x^6-2x^{10}}{25c^9}$ etc. in infin.

SCHOLION I. Nimirum in primo exemplo $P=a^2$, $Q=\frac{x^2}{a^2}$, $m=1$, $n=2$, $A=P^{\frac{m}{n}} = aa^{\frac{1}{2}} = a$. $B = \frac{m}{n} AQ = \frac{x^2}{2a}$. $C = \frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{x^4}{8a^3}$. $D = \frac{m-2n}{3n} CQ = \frac{x^6}{16a^5}$ etc.

In secundo exemplo $P=a^3$, $Q=\frac{x^3}{a^3}$, $m=1$ $n=3$, $A=P^{\frac{m}{n}} = aaa^{\frac{1}{3}} = a$. $B = \frac{m}{n} AQ = \frac{x^3}{3a^2}$. $C = \frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{x^6}{9a^5}$. $D = \frac{m-2n}{3n} CQ = \frac{5x^9}{81a^8}$ etc.

In quarto exemplo $P = c^5$, $Q = \dfrac{c^4 x - x^5}{c^5}$, $m = 1$, $n = 5$, $A = P^{\frac{m}{n}} = ccccc^{\frac{1}{5}} = c$. $B = \dfrac{m}{n} AQ = \dfrac{c^4 x - x^5}{5c^4}$. $C = \dfrac{m-n}{2n} BQ = - \dfrac{2c^8 x^2 + 4c^4 x^6 - 2x^{10}}{25c^9}$. etc:

SCHOLION 2. Vt adpareat ope eiusdem formulae poſſe binomium euehi ad quamcumque potentiam, ſit $a + b$ eleuandum ad ſextam potentiam, erit $P = a$, $Q = \dfrac{b}{a}$, $m = 6$, $n = 1$; hinc $A = P^{\frac{m}{n}} = a^6$: $B = \dfrac{m}{n} AQ = 6a^5 b$: $C = \dfrac{m-n}{2n} BQ = 15a^4 b^2$: $D = \dfrac{m-2n}{3n} CQ = 20a^3 b^3$: $E = \dfrac{m-3n}{4n} DQ = 15a^2 b^4$: $F = \dfrac{m-4n}{5n} EQ = 6ab^5$: $G = \dfrac{m-5n}{6n} FQ = b^6$; denique $H = \dfrac{m-6n}{7n} GQ = 0$. Ergo $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$, prorſus vt ſupra inuenimus (109).

CAPVT III.

De extractione Radicum e numeris.

128. PROBLEMA. *E dato quouis numero, qui quidem ſit quadratum perfectum, radicem quadratam extrahere.*

RESOLVT. Pro numeris vltra duas notas non aſſurgentibus in promptu eſſe debet tabella potentias numerorum ſimplicium continens, quam iſthic adponimus, quaeque continuari poteſt pro arbitrio.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	4096
5	25	125	625	3125	15625
6	36	216	1296	7776	46656
7	49	343	2401	16807	117649
8	64	512	4096	32768	262144
9	81	729	6561	59049	531441

Sin autem numerus occurrat maior, extrahetur radix ſecundum has regulas:

1) A dextris inchoando poſt binas quasque numeri propoſiti notas inſeratur virgula : tot erunt in radice notae, quot erunt huiusmodi membra virgulis diſtincta (119. ſch.), quorum ſiniſtimum etiam vnica nota conſtare poteſt.

2) Cum in membro ſiniſtimo contineatur quadratum notae primae radicis (cit.), quaeratur in tabella ſuperiore numerus quadratus aequalis, vel proxime minor membro illo ſiniſtimo, et radix eius ponatur poſt numerum propoſitum parentheſi incluſum, eius vero quadratum ſubtrahatur a membro illo ſiniſtimo, et notetur reſiduum primum.

3) Adiungatur ad reſiduum, ſiquod manſit, membrum ſequens, in quo vna cum illo reſiduo contineri debet duplum termini primi radicis ductum in ſecundum, et ſecundi quadratum (119 ſch.), et quia quadratum ſecundi terminatur in nota vltima (119. ſch.), reſecta illa pro quadrato termini ſecundi, reliquum diuidatur per duplum termini primi, erit quotus ſecunda nota radicis; ſcribatur hic quotus poſt prius inuentam radicis notam, et ſimul diuiſori a dextris iungatur, totumque hoc in quotum ipſum ducatur, et factum, ſeu duplum termini primi ductum in ſecundum, ac quadratum ſecundi ſubtrahatur, noteturque ſecundum reſiduum.

4) Secundo reſiduo adiungatur membrum ſequens, et vtraque radicis nota iam inuenta vnius inſtar ſpectata eadem lege repetatur operatio dum nullum ſuperſit membrum deponendum. Si operatione vltima abſoluta nullum ſuperſit reſiduum, radix accurate eſt eruta: ſiquid etiam-

num remaneat, indicio eſt propoſitum numerum non eſſe quadratum, habere proinde radicem irrationalem.

DEMONSTR. Eadem eſt, quae n. 125.

EXEMPLA.

I. √ (11, 97, 16) = 346.

9

1 *diuiſ.* 6 (29, 7) *reſid.* 1 *cum membr. ſequ.*

256

2 *diuiſ.* 68 (411, 6) *reſid.* 2 *cum membr. ſequ.*

411 6

0000

II. √ (9, 12, 64, 41) = 3021

9

1 *diuiſ.* 6 (012) *reſid.* 1. *cum membr. ſequ.*

00

2 *diuiſ.* 60 (126, 4) *reſid.* 2. *cum membr. ſequ.*

120 4

3 *diuiſ.* 604)604, 1) *reſid.* 3 *cum membr ſequ.*

604 1

0000

III. √ (25,20,04,00) = 5020

IV. √ (36,30,06,25) = 6025.

SCHOLION. Percurramus prima duo exempla. In primo facta per virgulas ſeparatione, conferatur membrum primum 11 cum tabella potentiarum, reperietur in ea quadratum proxime minus 9: huius ergo quadrati radix 3 ſcribatur pro prima radicis nota, et 9 ab 11 ſubtrahatur. Ad reſiduum primum 2 adiungatur membrum ſequens 97, vt ſit 297: hoc relicta nota vltima 7 diuidatur per duplum radicis iam inuentae, ſeu per 6, erit quotus 4 ſecunda nota radicis: iungatur quotus 4 etiam ad diuiſorem 6, vt ſit 64, et hoc ducatur in ipſum quotum 4, factumque 256 ſubtrahatur, ac notetur reſiduum ſecundum 41: huic adiungatur membrum ſequens 16, vt ſit 4116, hoc relicta nota vltima 6 diuidatur per duplum radicis hactenus inuentae 34, ſeu per 68, erit quotus 6 tertia nota radicis: denique iungatur quotus 6 etiam ad diuiſorem 68, vt ſit 686, et hoc ducatur in ipſum quotum 6, factumque 4116 ſubtrahatur. Quia peracta hac ſubtractione neque reſtat quidquam, neque membrum vllum iam ſupereſt, radix quadrata numeri propoſiti eſt 346, quae ſemel in ſe ducta eundem numerum reſtituet.

In ſecundo exemplo membrum primum 9 in tabella quadratorum inuenitur, quare eius radix 3 pro prima radicis nota ſcribatur, et quadratum 9 a 9 ſubtrahatur. Quia reſiduum nullum eſt, deponatur ſolum membrum ſequens 12, et omiſſa nota vltima 2 per duplum radicis iam inuentae, ſeu per 6 diuidatur: quotus 0 pro ſecunda radicis nota ſcribatur, ſimulque diuiſori 6 adiungatur, vt ſit 60, quod ductum in 0 dat factum aequale nihilo, et hoc ſubtractum a 12 relinquit pro ſecundo reſiduo totum 12. Iungatur reſiduo huic membrum ſequens 64, vt ſit 1264, quod omiſſa nota poſtrema 4 diuidatur per duplum radicis hactenus inuentae 30, nempe per 60, et quotus 2 fcribatur pro tertia radicis nota, fimulque iungatur diuifori 60, vt fit 602, quod ductum in ipfum quotum 2 dat factum 1204, quo fubtracto remanet refiduum tertium 60. Iungatur refiduo huic membrum fequens 41, vt fit 6041, quod omiffa nota poftrema 1 diuidatur per duplum radicis hactenus inuentae 302, nempe per 604, et quotus 1 fcribatur pro quarta radicis nota, fimulque iungatur diuifori 604, vt fit 6041, quod ductum in ipfum quotum 1 dat factum 6041, quo fubducto quia nihil remanet, nec vllum iam membrum fupereft, radix propofiti numeri eft 3021.

129. PROBLEMA. *Radicem quadratam per approximationem extrahere e numero, qui non fit quadratum.*

RESOLVT. 1) Fiat operatio per regulas fuperiores dum nullum amplius fuperfit membrum e propofito numero; peracta vltima fubtractione remanebit aliquod refiduum; huic tanquam numero integro pro denominatore fubfcripta concipiatur vnitas, et adiungantur numeratori a dextris duo zeri, totidemque adiungi concipiantur denominatori, feu conuertatur integrum in fractionem decimalem; valor refidui haud mutabitur (74). Iam cum tacitus ille denominator fit 100, erit eius radix quadrata 10 mente duntaxat retinenda: e numeratore autem extrahatur radix per regulas fuperiores fpectando adiunctos zeros inftar noui membri adiuncti; habebit radix inde extracta pro denominatore

10, ac proinde interiecta virgula ab integris radicis notis feparetur.

2) Si ex praecedente operatione aliquid remanfit, id habet ob geminos adiectos zeros pro denominatore 100. Adiungantur denuo numeratori huic refiduo duo zeri, totidemque adiungi concipiantur etiam denominatori, qui proinde erit 10000, cuius radix quadrata eft 100 mente duntaxat retinenda: e numeratore autem extrahatur radix vt ante, fpectando adiectos zeros inftar noui membri adiuncti; habebit ea radix pro denominatore 100. Eadem repetita operatione elicientur vlteriores notae radicis decimales, quae omnes cum a virgula incipiendo ordine fe excipiant, earum denominatores omitti folent, vt in aliis fractionibus decimalibus.

EXEMPLA.

I. $\sqrt{(1,48)} = 12,165$ etc. $12 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000}$ etc.

II. $\sqrt{(11,90)} = 34,496$ etc. $= 34 + \frac{4}{10} + \frac{9}{100} + \frac{6}{1000}$ etc.

III. $\sqrt{(3,62,54)} = 190,404$ etc. $= 190 + \frac{4}{10} + \frac{0}{100} + \frac{4}{1000}$ etc.

SCHOLION. Nempe in exemplo primo extracta per regulas fuperiores radice 12, adhuc remanent $4 = \frac{4}{1}$; adiunctis ergo ad 4 duobus zeris erit $4 = \frac{400}{100}$. Notetur mente radix denominatoris 10, e numeratore autem extrahatur hoc modo. Radix hactenus inuenta 12 duplicetur, perque eius duplum 24 diuidatur 400 omiſſa nota vltima o, et quotus 1 habens pro denominatore 10 ſcribatur poſt 12 interiecta virgula: cetera deinde fiant vt ſupra (128). Peracta hac operatione remanebit $\frac{159}{100}$, cui ſi denuo addantur duo zeri, erit $\frac{159}{100} = \frac{15900}{10000}$, ac radix denominatoris mente retinenda $=$ 100: extrahatur ergo radix e numeratore hoc modo. Radix hactenus inuenta 121 duplicetur, perque eius duplum 242 diuidatur 15900 omiſſa nota poſtrema o, et quotus 6 habens pro denominatore 100 ſcribatur pro ſequente radicis nota, tum fiat conſueta operatio. Pro tertio reſiduo remanebit $\frac{1344}{10000}$, cui ſi rurſus addantur duo zeri, erit $\frac{1344}{10000} = \frac{134400}{1000000}$, ac radix denominatoris $=$ 1000 mente retinenda; e numeratore autem elicietur 5 lege conſueta, nempe duplicando radicem hactenus inuentam 1216, et ſic deinceps.

130. PROBLEMA. *E dato quouis numero, qui quidem cubus perfectus ſit, radicem cubicam extrahere.*

RESOLVT. Pro numeris vltra tres notas non aſſurgentibus ad manum eſſe debet tabella, quam ſupra adiecimus (128). Si autem numerus occurrat maior, hoc pacto operandum erit:

1) A dextris inchoando poſt ternas quasque numeri propoſiti notas inſeratur virgula: tot erunt in radice notae, quot huiusmodi membra virgulis diſtincta (119. ſch.), quorum ſiniſtimum etiam duabus, aut vnica nota conſtare poteſt.

2) Cum in membro ſiniſtimo continetur cubus notae primae radicis (cit.), quaeratur in

tabella (128) numerus cubicus aequalis; vel proxime minor membro illo finiſtimo, et radix eius ponatur poſt numerum propoſitum parentheſi incluſum, eius vero cubus ſubtrahatur e membro illo finiſtimo, et notetur reſiduum primum.

3) Adiungatur ad reſiduum, ſiquod manſit, membrum ſequens, in quo vna cum illo reſiduo contineri debet triplum quadratum termini primi radicis ductum in ſecundum, triplum quadratum ſecundi ductum in primum, et ſecundi cubus (119 ſch.): et quia ex his primum terminatur in nota antepenultima, ſecundum in penultima, tertium in vltima, relictis duabus poſtremis notis reliquum diuidatur per triplum quadratum radicis iam inuentae, erit quotus ſecunda nota radicis, quae ducatur in diuiſorem, ſeu in triplum quadratum termini primi, ac factum ſubtrahatur, et ad reſiduum adiungatur nota penultima e duabus illis relictis; latebit ibi triplum quadratum termini ſecundi ductum in primum: fiat ergo quadratum e termino ſecundo, tum triplicetur, ac ducatur in primum, et hoc factum ſubtrahatur; ad reſiduum adiungatur nota vltima e relictis; latebit ibi cubus termini ſecundi: fiat ergo e termino ſecundo cubus, ac ſubtrahatur, noteturque, ſiquod eſt reſiduum.

4) Secundo reſiduo adiungatur membrum ſequens: et vtraque radicis nota iam inuenta inſtar vnius ſpectata eadem repetatur operatio, atque ita reperietur tertia radicis nota. Reſiduo tertio denuo adiungatur membrum ſequens,

ac tribus radicis notis iam inuentis inſtar vnius ſpectatis eadem lege fiat operatio, atque ita deinceps dum nullum ſuperſit membrum deponendum. Si operatione vltima abſoluta nullum ſuperſit reſiduum, radix accurate eſt inuenta: ſiquid etiamnum remaneat, indicio eſt propoſitum numerum non eſſe cubum, habere proinde radicem irrationalem.

Demonstr. Eadem eſt, quae n. 126.

EXEMPLA.

I. $\sqrt[3]{(41,421,736)} = 346$

27

1 *diuiſ.* 27(144, 21) *reſid.* 1 *cum membr. ſequ.*

108

362

144

2181

64

2 *diuiſ.* 3468(21177, 36) *reſid.* 2 *cum membr. ſeq.*

20808

3693

3672

216

216

000

II. $\sqrt[3]{(143,877,824)} = 524$

III. $\sqrt[3]{(14,886,936)} = 246$

IV. $\sqrt[3]{\left\{\frac{140,608}{1,860,867}\right\}} = \frac{52}{123}$

SCHOLION. Expendamus minutatim exemplum primum. Numero per virgulas rite ſeparato conferatur primum membrum 41 cum tabella potentiarum (128), inuenietur illic cubus proxime minor 27; huius proinde radix 3 ſcribatur pro prima radicis quaeſitae nota, et cubus 27 ſubtrahatur a primo membro 41, noteturque primum reſiduum 14, cui a dextris iungatur membrum ſequens 421, vt ſit 14421. Hoc omiſſis poſtremis duabus notis 21 diuidatur per radicis iam inuentae 3 triplum quadratum 27, et quotus 4 ſcribatur pro ſecunda radicis nota: haec ducta in diuiſorem dat factum 108; quod ſubductum a 144 relinquit 36, cui adiecta nota penultima e duabus relictis, habebitur 362, e quo ſi ſubducatur triplum quadratum termini ſecundi 4 ductum in primum, nempe 144, reſiduum erit 218, cui adiecta nota vltima e duabus relictis, habebitur 2181, in quo latet cubus termini ſecundi 64, quo proinde ſublato obtinebitur reſiduum ſecundum 2117, cui adiungatur membrum ſequens 736, vt ſit 2117736. Hoc omiſſis duabus poſtremis notis 36 diuidatur per radicis iam inuentae 34 triplum quadratum 3468, et quotus 6 ſcribatur pro tertia radicis nota: ducatur hic quotus in diuiſorem, et factum 20808 ſubducatur, reſtabit 369, cui adiecta nota penultima e duabus relictis, habebitur 3693, e quo ſi ſubducatur triplum quadratum termini tertii 6 ductum in primum et ſecundum, nempe 3672, reſiduum erit 21, cui adiecta nota vltima e duabus relictis, habebitur 216, in quo latet cubus termini tertii 216, quo proinde ſublato nihil remanet, id quod indicio eſt numerum 346 eſſe radicem cubicam numeri propoſiti, quem bis in ſe ducta accurate reſtituet.

131. PROBLEMA. *Radicem cubicam per approximationem extrahere e numero, qui non ſit cubus.*

RESOLVT. Fiat primum operatio per regulas ſuperiores, qua peracta, membrisque omnibus iam exhauſtis reſtabit adhuc aliquod reſiduum habens pro denominatore 1: adiectis ad hoc reſiduum tribus zeris denominator erit 1000, cuius radix cubica eſt 10; extrahatur itaque e numeratore radix lege conſueta, ſpectando nimirum tres adiectos zeros tanquam nouum membrum reſiduo adiectum. Peracta operatione reſiduo ſecundo iterum adiiciantur tres zeri, erit iam denominator 1000000, cuius radix cubica eſt 100: extrahatur igitur e numeratore radix more conſueto, denuo tres hos adiectos zeros tanquam nouum membrum reſiduo adiunctum ſpectando. Hac eadem operatione quamdiu libuerit repetita obtinebuntur notae radicis decimales ab integris virgula ſeparandae, habentes pro denominatoribus 10, 100, 1000 etc. qui in ſcribendo omitti ſolent.

EXEMPLA.

I. $\sqrt[3]{(5,305,472)} = 174,41$ etc. $= 174 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100}$ etc.

II. $\sqrt[3]{48} = 3,63$ etc. $= 3 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100}$ etc.

III. $\sqrt[3]{(474,676,416)} = 780,068$ etc. $= 780 + \frac{0}{10} + \frac{6}{100} + \frac{8}{1000}$ etc.

132. PROBLEMA. *Ope formulae ſuperioris (127) extrahere quamuis radicem e dato numero, qui non ſit perfecta potentia.*

RESOLVT. Potentia perfecta proxime minor ponatur $= P$, reſiduum, quod poſt conſuetam extractionem remanet, per eandem diuiſum $= Q$, $m = 1$, exponens radicis quaeſitae $= n$: obtinebitur ope eius formulae factis his ſubſtitutionibus ſeries numerorum infinita, quae reliquam radicis partem certa quadam progreſſionis lege exhibebit.

EXEMPLA.

I. $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{256}$ etc.

II. $\sqrt[3]{15} = 2 + \frac{7}{12} - \frac{40}{288} + \frac{1715}{20736}$ etc.

SCHOLION. In exemplo primo quadratum proxime minus eſt $1 = P$, reſiduum eſt itidem 1, quod per P diuiſum dat quotum $1 = Q$, $m = 1$, $n = 2$. Quare

$$P^{\frac{m}{n}} = A = 1 \text{ — — — — — } = 1$$

$$\frac{m}{n} AQ = B = \tfrac{1}{2} \text{ — — — — — } = \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = C = -\tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{2} \times 1 = -\tfrac{1}{8}$$

$$\text{— — — — } = -\frac{1}{2.4}$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = D = -\tfrac{3}{6} \times -\tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{48} -$$

$$- = \frac{1.\ 3}{2.4.6.}$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = E = -\tfrac{5}{8} \times \tfrac{1}{16} = -\tfrac{5}{128}$$

$$= - \frac{15}{384} - = - \frac{1.3.5.}{2.4.6.8.}$$

Nempe lex progreſſionis ea eſt, vt fractionum ſigna alternent, et deinceps quaeuis fractio ſequens componatur e praecedente, numeratore eiusdem ducto in numerum, qui ſequitur in ſerie numerorum imparium 1, 3, 5 etc. denominatore ducto in numerum, qui ſequitur in ſerie parium 2, 4, 6 etc.

In exemplo ſecundo cubus proxime minor eſt $8 = P$, reſiduum eſt 7, quod diuiſum per P dat quotum $\tfrac{7}{8} = Q$, $m = 1$, $n = 3$. Quare

$$P^{\frac{m}{n}} = A = 2$$

$$\frac{m}{n} AQ = B = \tfrac{1}{3} \times 2 \times \tfrac{7}{8} = \tfrac{14}{24} = - -$$

$$- - \frac{2.7}{3.8}$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = C = -\tfrac{2}{6} \times \tfrac{7}{12} \times \tfrac{1}{8} = -\tfrac{1}{3} \times \tfrac{49}{96}$$

$$= - \tfrac{49}{288} = - \frac{2.\ 2.\ 7.\ 7}{6.\ 3.\ 8.\ 8}$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = D = -\tfrac{5}{9} \times -\tfrac{49}{288} \times \tfrac{7}{8} =$$

$$\tfrac{1715}{20736} \text{ etc.} \cdots = \frac{5.2.2.7.7.7.}{9.6.3.8.8.8} \text{etc.}$$

Pa-

Patet adeo lex continuandi ſeriem: nempe ſigna fractionum alternant, et vt ſequens quiuis terminus obtineatur, debet anterior duci in $\frac{7}{8}$, item in fractionem, cuius tam numerator, quam denominator creſcit iuxta eandem differentiam 3; ſunt nimirum eae fractiones $\frac{2}{6}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{11}{15}$ etc.

CAPVT IV.

De Calculo quantitatum Radicalium.

133. Nomine quantitatum *radicalium* eas intelligi, quibus ſignum radicale $\sqrt{}$ praefixum eſt, alibi adnotauimus (92). Quanquam autem eae plerumque irrationales ſint, vſum tamen habent frequentiſſimum, capacesque ſunt variae transformationis, additionis, ſubtractionis etc. Porro *eiusdem denominationis* eſſe dicuntur, in quibus idem eſt exponens ſigni radicalis; e. g. $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{cd}$: item $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[3]{5}$: *diuerſae denominationis* autem vocantur, in quibus exponentes illi diuerſi ſunt; e. g. $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[m]{a}$. Quodſi quantitates radicales eiusdem denominationis poſt radicale ſignum easdem inſuper quantitates habeant, vt $5\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, *communicantes* adpellantur.

134. PROBLEMA. *Quantitates radicales diuerſae denominationis ad eandem denominationem reducere.*

RES. Quantitates quaeuis radicales diuerſae denominationis rite exhibentur his formulis: $\sqrt[n]{a^m}$,

$\sqrt[r]{b^t}$. Iam $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, et $\sqrt[r]{b^t} = b^{\frac{t}{r}}$ (102): non ergo alia re opus eſt, quam vt exponentes fracti reducantur ad eundem denominatorem (75); erit enim $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mr}{nr}}$, et $b^{\frac{t}{r}} = b^{\frac{nt}{nr}}$: hinc $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{mr}{nr}} = \sqrt[nr]{a^{mr}}$; et $\sqrt[r]{b^t} = b^{\frac{nt}{nr}} = \sqrt[nr]{b^{nt}}$. Vnde exſiſtit haec regula: exponens cuiusuis ſigni, et quantitatis radicalis ducatur in omnium reliquorum ſignorum exponentes.

EXEMPLA.

I. $$\begin{cases} \sqrt[2]{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8} \\ \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \end{cases}$$

II. $$\begin{cases} \sqrt[2]{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{12}{24}} = 3^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729} \\ \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{6}{24}} = 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125} \\ \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{8}{24}} = 7^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401}. \end{cases}$$

135. COROLL. I. Locus eſt interdum compendio, vti adparet in exemplo ſecundo. Si enim habeatur minimus quidam numerus, quem ſignorum exponentes abſque vllo reſiduo metiantur, hic ponatur pro communi ſignorum exponente; quantitas autem quaeuis radicalis eleuetur ad eam potentiam, quam indicat quotus enaſcens e diuiſione eius numeri per exponen-

tem ſui ſigni. E. g. in ſecundo exemplo per omnium ſignorum exponentes diuidi poteſt numerus 12, ergo hic erit communis ſignorum exponens; deinde cum 12 diuiſum per 2 det pro quoto 6, eleuetur 3 ad ſextam potentiam, eritque $\sqrt[2]{3} = \sqrt[12]{729}$. Item quia 12 diuiſum per 4 dat pro quoto 3, eleuetur 5 ad tertiam potentiam, eritque $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{125}$. Denique quia $\frac{12}{3} = 4$, eleuetur 7 ad quartam potentiam, eritque $\sqrt[3]{7} = \sqrt[12]{2401}$.

136. CoROLL. 2. Reductio haec patefacit, vtra maior ſit e propoſitis duabus quantitatibus radicalibus. E. g. ſi dubitetur, an quantitas $\sqrt[4]{5}$ maior ſit, quam $\sqrt[6]{11}$, erit prior reducta $= \sqrt[12]{125}$, poſterior $= \sqrt[12]{121}$: vbi iam adparet priorem maiorem eſſe poſteriore.

137. PROBLEMA. *Quantitates radicales reducere ad minores terminos, ſeu ad ſimpliciorem expreſſionem.*

RESOLVT. Quantitas radicalis reſoluatur in ſuos factores, quorum ſi vnus fuerit potentia eiusdem gradus, quem ſigni radicalis exponens indicat, extrahatur ex illo radix, et ponatur ante ſignum pro coefficiente, ceteris factoribus poſt ſignum radicale relictis.

DEMONST. Omnis enim quantitas ad ſimpliciorem expreſſionem reducibilis repraeſentari poteſt hac formula $d\sqrt[n]{a^m b^n}$; atqui $d\sqrt[n]{a^m b^n} = d \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{n}{n}}$ (102) $= d \cdot b \cdot a^{\frac{m}{n}} = db\sqrt[n]{a^m}$: ergo e factore b^n extrahenda eſt radix n, et ipſa ante ſignum pro coefficiente ponenda.

EXEMPLA.

I. $\sqrt[3]{a^3b^2} = a^{\frac{3}{3}} . b^{\frac{3}{3}} = a\sqrt[3]{b^2}$

II. $\sqrt{12} = \sqrt{4 . 3} = 2\sqrt{3}$.

III. $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 . 3} = 2\sqrt[4]{3}$.

IV. $\sqrt{(a^2c - a^2b)} = a\sqrt{(c - b)}$

V. $\sqrt[m+1]{b^m c d^{m+1}} = b^{\frac{m}{m+1}} . c^{\frac{1}{m+1}} . d^{\frac{m+1}{m+1}}$
$= d\sqrt[m+]{b^m c}$.

138. Coroll. 1. Viciſſim ergo coefficientes ante ſignum radicale poſiti, manente valore quantitatis radicalis, reiici poſſunt poſt ſignum, modo eleuentur ad eam potentiam, quam indicat exponens ſigni radicalis. Sic in ſuperioribus exemplis $a\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{a^3b^2}$; $2\sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{4 . 3} = \sqrt[2]{12}$; $2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{16 . 3} = \sqrt[4]{48}$.

139. Coroll. 2. Siqua radicalis quantitas nullum habeat factorem, qui ſit potentia perfecta eiusdem gradus, quem exponens ſigni radicalis indicat, ea nequit reduci ad ſimpliciorem expreſſionem, vti ſunt $\sqrt{15}, \sqrt[3]{ab^2}, \sqrt[n]{a^m b^r}$.

140. Coroll. 3. Reductione hac interdum efficitur, vt quantitates radicales euadant communicantes. E. g. radicales hae $\sqrt{8}$ et $\sqrt{18}$ non ſunt communicantes (133): at redu-

ctae $2\sqrt{2}$ et $3\sqrt{2}$ factae ſunt communicantes. Similiter ſi $\sqrt[3]{a^3b}$ et $\sqrt[3]{c^3b}$ reducantur ad has $a\sqrt[3]{b}$ et $c\sqrt[3]{b}$, redduntur communicantes.

SCHOL. In quantitatibus radicalibus algebraicis factores facile innoteſcunt; in numericis non item. Quare vt deprehendi poſſit, an numerus radicalis habeat aliquem factorem, qui ſit accurate ea potentia, quam exponens ſigni radicalis indicat, reſolui debet in ſuos diuiſores, in quibus ſi compareat quaeſita potentia, e. g. quarta, neceſſe eſt etiam comparere omnes inferiores nempe tertiam, ſecundam, primam. Sic ſi quaeratur, an quantitas $\sqrt[4]{368}$ habeat aliquem factorem quarti gradus, reſoluatur ope diuiſionis in ſuos factores tentando diuiſionem per minores numeros, et cuiuis diuiſori quotum adſcribendo hoc pacto:

2, 184
4, 92
8, 46
16, 23

comparet inter hos factores numeri 2 potentia prima 2, ſecunda 4, tertia 8, et quarta 16; quare 16 eſt quaeſita potentia, ac proinde $\sqrt[4]{368}$ $= \sqrt[4]{16.23.} = 2\sqrt[4]{23}$.

141. PROBLEMA. *Datas quantitates radicales inter ſe addere, vel a ſe ſubtrahere.*

RESOLVT. 1) Si datae quantitates diuerſae fuerint denominationis, ante omnia ad eandem reducantur (134), tum ſi deprehendantur eſſe communicantes, addantur, vel ſubtrahantur coefficientes ante ſignum radicale poſiti, adiecta ſummae, vel differentiae communi quantitate radicali. 2) Si vero non fuerint communicantes, addantur, vel ſubtrahantur more quantitatum heterogenearum (29). 3) Quodſi quantitates radicales afficiantur pluribus ſignis radicalibus radices radicum exprimentibus, eaedem obtinent leges, modo eae habeantur pro communicantibus, in quibus quantitates poſt totidem ſigna radicalia poſitae eaedem ſunt, e. g. $3\sqrt{(2\sqrt{5})}$ et $7\sqrt{(2\sqrt{5})}$. Conf. exempl. 4.

EXEMPLA.

I. $$\left.\begin{array}{l}\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot2}=5\sqrt{2}\\ \sqrt{18}=\sqrt{9\cdot2}=\underline{3\sqrt{2}}\end{array}\right\}\ \textit{Addend.}$$
$$8\sqrt{2}\quad \textit{Totum.}$$

II. $$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{8a^3b}-\sqrt{a^2b}=2a\sqrt[3]{b}-a\sqrt{b}\\ \sqrt[3]{27a^3b}-\sqrt{4a^2b}=\underline{3a\sqrt[3]{b}-2a\sqrt{b}}\end{array}\right\}\ \textit{Add.}$$
$$5a\sqrt[3]{b}-3a\sqrt{b}\quad \textit{Totum.}$$

III. $$\left.\begin{array}{l}\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=2\sqrt{5}=2\sqrt[6]{125}\\ \sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\cdot3}=\underline{2\sqrt[3]{3}=2\sqrt[6]{9}}\end{array}\right\}\ \textit{Add.}$$
$$2\sqrt[6]{125}+2\sqrt[6]{9}\quad \textit{Totum.}$$

IV. $$\left.\begin{array}{l}\sqrt{(8\sqrt{3})}=2\sqrt{(2\sqrt{3})}\\ \sqrt{(9\sqrt{12})}=\underline{3\sqrt{(2\sqrt{3})}}\end{array}\right\}\ \textit{Addend.}$$
$$5\sqrt{(2\sqrt{3})}\quad \textit{Totum.}$$

I. $\sqrt{32} = \sqrt{4 \cdot 8} = 2\sqrt{8}$ *Totum.*
$\sqrt{8} = \sqrt{1 \cdot 8} = 1\sqrt{8}$ *Pars subt.*
$\sqrt{8}$ *Differ.*

II. $6\sqrt{a^2b} - \sqrt{9b^2c} = 6a\sqrt{b} - 3b\sqrt{c}$ *Totum.*
$2\sqrt{a^2b} + 2\sqrt{b^2c} = 2a\sqrt{b} + 2b\sqrt{c}$ *Pars subt.*
$4a\sqrt{b} - 5b\sqrt{c}$ *Differ.*

III. $\frac{am}{bc}\sqrt{(d^2 - 4md^3)} = \frac{am}{bc}d\sqrt{(1 - 4md)}$ *Tot.*
$\frac{c}{a}\sqrt{(d^2 - 4md^3)} = \frac{c}{a}d\sqrt{(1 - 4md)}$ *P. s.*
$\left(\frac{am - bc^2}{abc}\right)d\sqrt{(1 - 4md)}$ *Differ.*

IV. $2\sqrt{(16\sqrt{18})} = 2\sqrt{(16\sqrt{9.2})} = 8\sqrt{(3\sqrt{2})}$ *T.*
$\sqrt{(12\sqrt{2})} = \sqrt{(4.3\sqrt{2})} = 2\sqrt{(3\sqrt{2})}$ *S.*
$6\sqrt{(3\sqrt{2})}$ *D.*

142. Coroll. Si quantitates radicales habeant sibi adiunctas alias nullo signo radicali affectas, eae addantur, vel subtrahantur iuxta consuetas regulas. E. g.

$$\left.\begin{array}{l} a + 2\sqrt{ac} + 3\sqrt{bd} \\ 2a - \sqrt{ac} + 4\sqrt{bd} \end{array}\right\} = 3a + \sqrt{ac} + 7\sqrt{bd}.$$

143. Problema. *Quantitates radicales inter se multiplicare.*

Resolvt. Si quantitates radicales diuersae fuerint denominationis, ante omnia reducantur ad eandem (134): tum coefficientes multiplicentur inter se, et quantitates radicales itidem inter se communi signo radicali retento. Si quantitates afficiantur pluribus signis radicalibus, eae radicales debent in se ipsas duci, quae totidem ſigna radicalia ante ſe habent. Conf. exempl. 3, et 4.

Demonstr. Quaeuis quantitates radicales eiusdem denominationis repraeſentari poſſunt per has formulas $c\sqrt[n]{a^m}$ et $d\sqrt[n]{b^r}$; atqui $c\sqrt[n]{a^m} \times d\sqrt[n]{b^r} = c \,.\, a^{\frac{m}{n}} \times d \,.\, b^{\frac{r}{n}} = cd \,.\, a^{\frac{m}{n}} \,.\, b^{\frac{r}{n}} = cd\sqrt[n]{a^m b^r}$.

EXEMPLA.

I. $\sqrt{ab} \times \sqrt[3]{a^2 b} = \sqrt[6]{a^3 b^3} \times \sqrt[6]{a^4 b^2} = \sqrt[6]{a^7 b^5}$.

II. $(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \times (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{9} + \sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$.

III. $\sqrt{(3+\sqrt{2})} \times \sqrt{(5\sqrt{5})} = \sqrt{(15\sqrt{5})} + \sqrt{(5\sqrt{10})} = \sqrt{\sqrt{1125}} + \sqrt{\sqrt{250}}$.

IV. $(\sqrt{\sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{2}}) \times \sqrt{5\sqrt{5}} = \sqrt{5\sqrt{25}} + \sqrt{5\sqrt{10}} = \sqrt{5 \cdot 5} + \sqrt{5\sqrt{10}} = 5 + \sqrt{5\sqrt{10}}$.

144. Coroll. Si quantitas radicalis eleuanda ſit ad eam potentiam, quam exponens ſigni radicalis indicat, omiſſo radicali ſigno ſcribatur ipſa quantitas absque vlla mutatione. Si enim quantitas radicalis $\sqrt[n]{a^m}$ eleuanda ſit ad potentiam n, erit ea $= \sqrt[n]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$.

145. Problema. *Datam quantitatem radicalem per aliam radicalem diuidere.*

Resolvt. 1) Si datae quantitates diuerſae fuerint denominationis, ante omnia reducantur ad eandem (134); diuidantur deinde coefficientes, et radicales diuidendi per coefficientes, ac radicales diuiſoris. 2) Si quantitates pluribus afficiantur ſignis radicalibus, eae debent per ſeſe diuidi, quae poſt totidem ſigna radicalia poſitae ſunt, vt in exempl. 6. 3) Si diuiſio peragi nequeat, notetur quotus inſtar fractionis. 4) Si diuiſor, aut diuidendus non ſit ſigno radicali affectus, eleuetur ad eam potentiam, quam indicat exponens ſigni radicalis, quo alter affectus eſt, ac praefixo eodem radicali ſigno tractetur inſtar quantitatis radicalis. Conf. exempl. 6.

DEMONSTR. Omnis enim huiusmodi diuiſio repraeſentari poteſt hac formula: $c\sqrt[n]{a^m} : d\sqrt[n]{b^r}$;

atqui in hac quotus eſt $\dfrac{ca^{\frac{m}{n}}}{db^{\frac{r}{n}}} = \dfrac{c}{d}\sqrt[n]{\dfrac{a^m}{b^r}}$

EXEMPLA.

I. $6\sqrt{ab} : 2\sqrt{a} = 3\sqrt{b}$.

II. $(ab\sqrt{cd} - b^2\sqrt{ed}) : b\sqrt{d} = a\sqrt{c} - b\sqrt{e}$.

III. $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{5}} : \frac{5}{9}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{27}{20}\sqrt{\frac{6}{10}} = \frac{27}{20}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

IV. $(8\sqrt[3]{20} + 12\sqrt[3]{10}) : 4\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2}$.

V. $(\sqrt{15} + \sqrt{21} - \sqrt{27}) : \sqrt{3} = \sqrt{5} + \sqrt{7} - 3$.

VI. $(\sqrt{8}\sqrt{5} - 3\sqrt{12}\sqrt{2}) : 2 = \sqrt{2}\sqrt{5} - 3\sqrt{3}\sqrt{2}$.

VII. $(\sqrt{ac} - \sqrt{bc} - \sqrt{ad} + \sqrt{bd}) : (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{c} - \sqrt{d}$.

SCHOLION. Si quantitates poſt ſigna radicalia fuerint negatiuae, calculus earum iisdem plane regulis continetur. At de ſignis, quae fa-ꝺto in earundem multiplicatione, vel quoto in diuiſione praefigenda ſunt, autores non conueniunt. Mihi videtur radix ex eiusmodi multiplicatione, aut diuiſione oriunda ſemper eſſe impoſſibilis, adeoque negatiuo ſigno afficienda. Certe in aperto eſt quadratum quantitatis $\sqrt{-a}$ eſſe $-a$, ac proinde $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$; niſi quis exiſtimet cum Boſcouichio aliud eſſe multiplicare eiusmodi quantitatem per ſeipſam, aliud euehere ad ſecundam potentiam, quae duo idem plane ſonant in realibus quantitatibus.

146. **Problema.** *Datam quantitatem radicalem euehere ad quamcunque potentiam datam.*

Resolvt. Coefficiens, ſiquis eſt, quantitatis datae reiiciatur poſt ſignum radicale (138): deinde exponens ſigni radicalis diuidatur per exponentem potentiae datae.

Demonst. Quaeuis quantitas radicalis repraeſentari poteſt hac formula: $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c}{d}}$, et quiuis exponens potentiae, ad quam eleuari debet, poni poteſt $= \frac{n}{r}$: atqui $\left(\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}\right)^{\frac{n}{r}} = \sqrt[\frac{mr}{n}]{\frac{a^m c}{b^m d}}$; nam $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \sqrt[m]{\frac{a^m c}{b^m d}}$ (138) $= \frac{a^{\frac{m}{m}} c^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{m}{m}} d^{\frac{1}{m}}}$ (102): atqui hoc eleuatum ad potentiam $\frac{n}{r}$ eſt $= \dfrac{a^{\frac{mn}{mr}} c^{\frac{n}{mr}}}{b^{\frac{mn}{mr}} d^{\frac{n}{mr}}}$ (99) $= \dfrac{a^{m:\frac{mr}{n}} c^{1:\frac{mr}{n}}}{b^{m:\frac{mr}{n}} d^{1:\frac{mr}{n}}}$ (86)

$= \sqrt[\frac{mr}{n}]{\dfrac{a^m c}{b^m d}}$ (120).

147. PROBLEMA. *E data quantitate radicali quamuis radicem extrahere.*

RESOLVT. Coefficiens datae quantitatis, ſiquis eſt, reiiciatur poſt ſignum radicale (138): deinde exponens ſigni radicalis multiplicetur per exponentem radicis, quae extrahenda eſt.

DEMONST. Quaeuis quantitas radicalis repraeſentari poteſt hac formula: $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$, et exponens cuiusuis radicis quaeſitae poteſt poni $= \frac{n}{r}$; atqui $\sqrt[\frac{n}{r}]{\left(\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}\right)} = \sqrt[\frac{mn}{r}]{\dfrac{a^m c}{b^m d}}$;

nam $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \sqrt[m]{\dfrac{a^m c}{b^m d}}$ (138) $= \dfrac{a^{\frac{m}{m}} c^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{m}{m}} d^{\frac{1}{m}}}$ (102)

atqui huius radix $\frac{n}{r}$ eſt $\dfrac{a^{\frac{mr}{mn}} c^{\frac{r}{mn}}}{b^{\frac{mr}{mn}} d^{\frac{r}{mn}}}$ (124) $=$

$\dfrac{a^{m:\frac{mn}{r}} c^{1:\frac{mn}{r}}}{b^{m:\frac{mn}{r}} d^{1:\frac{mn}{r}}} = \sqrt[\frac{mn}{r}]{\dfrac{a^m c}{b^m d}}$ (102).

SECTIO III.

DE PROBLEMATIS, ET AEQVATIONIBVS.

CAPVT I.

De natura Problematum, et Aequationum.

148. *Problema* hoc loco eſt propoſitio, qua petitur, vt e datis quibusdam quantitatibus valor vnius, aut plurium incognitarum eruatur; vt ſi proponatur quaerendus numerus, qui ſibi additus, et in ſe ductus det ſummam aequalem facto. Methodus reſoluendi problemata adhibito calculo, et ſignis algebraicis *Analyſis* dicitur.

149. COROLL. Cum ergo valor incognitarum e datis eruendus ſit, inter quantitates datas, et quaeſitas neceſſe eſt nexum quemdam, et relationes intercedere, quae *conditiones problematis* vocantur. In exemplo ſuperiore numero quaeſito haec adnectitur conditio, vt eius ſibi additi ſumma, et in ſe ducti factum aequalia ſint.

150. In quauis autem problematis conditione inuoluitur aequalitas quaedam duarum quantitatum, quae *aequatio* adpellatur, vt ſi propona-

tur problema de inueniendo numero, qui vna cum ſuo dimidio efficiat 6, euidens eſt in eius conditione inuolui aequationem, ſeu aequalitatem, quam numerus ille auctus ſuo dimidio habet cum numero 6. Quodſi non aequalitas, ſed proportio tantum inuoluatur in aliqua problematis conditione, facile eruetur e proportione aequatio, vt infra docebimus (202).

151. COROLL. 1. Quoduis ergo problema reſolui poteſt in aequationem vnam, aut plures, ſi nempe ſingulae eius conditiones ſingulis aequationibus exprimantur. E. g. problema de inueniendis duobus numeris, quorum ſumma ſit 30, differentia 10, duas habet conditiones, quarum prima reſoluitur in aequationem ſummae cum numero 30, ſecunda in aequationem differentiae cum numero 10.

152. COROLL. 2. Quaelibet aequatio duobus conſtat membris ſigno $=$ coniunctis: nimirum termini a ſiniſtris ante ſignum aequalitatis poſiti primum membrum, ceteri a dextris ſecundum conſtituunt. E. g. in hac aequatione $a^2 - x^2 = b^2 - ad$, termini $a^2 - x^2$ primum aequationis membrum, reliqui $b^2 - ad$ ſecundum efficiunt.

153. COROLL. 3. Poteſt vnum aequationis membrum etiam eſſe $= o$, ſi nempe in altero membro quantitates poſitiuae, et negatiuae ſeſe deſtruant: e. g. $3a - 2a + 5 - a - 5 = o$.

154. Problemata dicuntur *determinata*, quae vel vnicam tantum ſolutionem, vel determinatum aliquem habent ſolutionum numerum; ſeu

in quibus vel vnicus tantum eſt valor incognitae quantitatis quaeſtioni ſatisfaciens, vel certe determinatus valorum numerus. *Indeterminata* vocantur, quae innumeras admittunt ſolutiones, ſeu vbi infiniti ſunt valores, qui pro quantitatibus incognitis ſubſtituti quaeſtioni ſatisfaciunt. E. g. ſi quaerantur duo numeri, quorum differentia ſit $= 3$, problema erit indeterminatum, cum eiusmodi numeri infiniti eſſe poſſint: nam $9 - 6 = 3$, $6 - 3 = 3$; $7 - 4 = 3$; $15 - 12 = 3$ etc. At ſi addatur eorundem numerorum ſummam oportere eſſe $= 15$, iam adiecta haec altera conditio problema determinat, nec iam ſatisfaciunt quaeſtioni vlli alii numeri, quam 6 et 9.

155. COROLL. 1. Si omnibus problematis conditionibus per totidem aequationes expreſſis tot aequationes deprehendantur, quot ſunt quantitates incognitae a ſe independentes, ſeu quarum vna inuenta non hoc ipſo innoteſcit altera, poterit ſemper deueniri ad finalem quamdam aequationem, quae vnicam contineat incognitam, quemadmodum patebit in ſequentibus, idque erit certum indicium problema eſſe determinatum. Sin autem pauciores ſint aequationes, quam incognitae a ſe independentes, non poterit elici finalis aequatio vnicam continens incognitam, eritque argumento problema eſſe indeterminatum, poſſeque vnam, vel plures incognitas aſſumi ad arbitrium, ſicut adparebit in ſequentibus.

156. COROLL. 2. Si aequationes plures fuerint, quam incognitae a ſe mutuo non depen-

dentes, problema eſt *plus quam determinatum*, et niſi caſu fortuito accidat, vt determinatis incognitarum valoribus reliquae etiam redundantes aequationes verificentur, problema inuoluet repugnantiam. Sic ſi in exemplo ſuperiore (154) addas tertiam conditionem, vt maior ex numeris quaeſitis ſit aequalis quadrato differentiae eorundem, haec quidem conditio in repertis numeris 6 et 9 caſu verificabitur: at ſi hanc adderes, vt ambo numeri ſint pares, problema repugnantiam inuolueret, cum repugnet, vt duo numeri pares efficiant ſummam imparem.

157. Aequatio, ad quam problema vltimo reducitur, vel *ſimplex* erit, ſi nempe occurrat vnica tantum potentia quantitatis incognitae, vt in his $x = a$; $x^3 = a^2 b$: vel *affecta*, ſi nimirum plures eiusdem quantitatis incognitae occurrant potentiae, vt in his $x^2 - ax = b^2$; $x^3 + ax^2 = b^2 c$. Quaeuis item aequatio eſt primi, ſecundi, tertii etc. gradus, prout quantitas incognita aſſurgit ad primam, ſecundam, tertiam etc. potentiam.

Scholion. Nos, qui ſolis tironibus ſcribimus, ea ſolum pertractabimus, quae ad aequationes primi, et ſecundi gradus pertinent. Quare praetermittimus ea omnia, quae in gratiam altiorum aequationum tradi hoc loco ſolent. Siqui tironum vlteriores in algebra progreſſus facere voluerint, iis, quae trademus, probe intellectis cetera facile condiſcent, quae in libro de Reſolutionibus Aequationum diffuſe tradidimus.

158. THEOREMA. *Quiuis aequationis terminus ex vno membro in aliud transponi poteſt cum ſigno contrario retenta membrorum aequalitate.*

DEMONST. Terminus enim, qui cum ſigno contrario transponitur, vel eſt poſitiuus, vel negatiuus: ſi eſt poſitiuus, ea transpoſitione idem vtrinque tollitur; ſi eſt negatiuus, ea transpoſitione idem vtrinque additur; atqui ſi ab aequalibus tollatur, vel addatur idem, retinetur aequalitas: ergo.

E. g. Si in aequatione $a + b = c$ terminus b cum ſigno — transponitur, vt ſit $a = c - b$, terminus b reapſe vtrinque tollitur. Et ſi in aequatione $a^2 - x^2 = b^2$ terminus $- x^2$ cum ſigno + transponitur, vt ſit $a^2 = b^2 + x^2$, terminus x^2 reapſe vtrinque additur.

159. COROLL. 1. Quiuis ergo aequationis terminus poteſt transpoſitione e negatiuo poſitiuus, e poſitiuo negatiuus reddi retenta membrorum aequalitate. Poteſt item quaelibet aequatio redigi in nihilum, ſi ex vno membro omnes termini transponantur ad aliud cum ſignis contrariis, id quod in aequationibus praeſertim altioribus facere non raro expedit. E. g. ſi fuerit $a^2 + x^2 = b^2$ erit $a^2 + x^2 - b^2 = o$.

160. COROLL. 2. Quiuis terminus in vtroque aequationis membro iisdem ſignis affectus retenta aequalitate vtrinque deleri poteſt. E. g. ſi fuerit $3a^2 - 2bc + x^2 = b^2 + c^2 - 2bc$, erit $- 2bc$ vtrinque delendo $3a^2 + x^2 = b^2 + c^2$: nam delere vtrinque quantitatem negatiuam idem eſt, ac eam cum ſigno + vtrobique addere:

re; et delere positiuuam idem est, ac eam vtrobique tollere.

161 THEOREMA. *Siquis terminus aequationis per aliquam quantitatem est multiplicatus, possunt omnes alii vtrinque per eandem retenta aequalitate diuidi, et illa in termino illo deleri: aut si est diuisus, possunt reliqui multiplicari, et ea ibi rursus deleri.*

DEMONSTR. Aequalitas enim retinetur, si vtrumque aequationis membrum per eandem quantitatem diuidatur, aut multiplicetur; atqui per eandem quantitatem diuidendo in primo casu, vel multiplicando in secundo, terminus ille erit per idem multiplicatus simul et diuisus: quare deleto diuisore, ac multiplicatore manet inuariatus; ceteri vero, qui per eam quantitatem non multiplicabantur, nec diuidebantur, iam diuidentur in primo casu, multiplicabuntur in secundo: ergo retinebitur membrorum aequalitas.

E. g. si fuerit $a^2x - b^2x = ac + cd$, diuidendo vtrumque aequationis membrum per $a^2 - b^2$ erit $x = \frac{ac + cd}{a^2 - b^2}$; rursus diuidendo per c erit $\frac{x}{c} = \frac{a + d}{a^2 - b^2}$. Similiter si fuerit $\frac{a - b}{2c} = 2b^2 - d$, cum primum membrum diuisum sit per $2c$, hoc in primo membro omittendo, et alterum per illud multiplicando erit $a - b = 4b^2c - 2dc$.

162. COROLL. 1. Si ergo omnes aequationis termini per eandem, vel easdem quantitates fuerint multiplicati, aut diuisi, possunt eae

vtrinque omitti retenta aequalitate. E. g. ſi fuerit $a^2b - ab = ac$, erit omittendo a vtrinque $ab - b = c$. Item ſi fuerit $\frac{a^2 - b^2}{2c} = \frac{d^2}{2c}$, erit omittendo $2c$ vtrinque $a^2 - b^2 = d^2$

163. COROLL. 2. Patet hinc methodus liberandi aequationem a fractionibus. Si enim omnes vtrinque termini reducantur ad eundem denominatorem, poterit vtrinque omitti denominator. E. g. ſi fuerit $\frac{2}{5}ax - \frac{3}{4}x^2 = ab$, erit reducendo omnes terminos ad communem denominatorem $\frac{8ax - 15x^2}{20} = \frac{20ab}{20}$, ſeu $8ax - 15x^2 = 20ab$. Poſſunt etiam fractiones altera poſt alteram tolli, ſi nempe vtrumque membrum aequationis per ſingularum fractionum denominatores ſucceſſiue multiplicetur. E. g in praecedente aequatione terminos omnes primum multiplicando per 5 erit $2ax - \frac{15}{4}x^2 = 5ab$; rurſus multiplicando per 4 erit $8ax - 15x^2 = 20ab$, vt ante.

164. THEOREMA. *Poteſt vtrumque aequationis membrum retenta aequalitate ad eandem potentiam euehi, vel ex vtroque membro eadem radix extrahi.*

DEMONSTR. Quantitatum enim aequalium tam potentiae, quam radices eiusdem gradus aequales ſunt; cum illae oriantur aequalium per aequalia multiplicatione (93), hae aequalium per aequalia diuiſione (122).

E. g. ſi fuerit $a\sqrt[m]{x} = b\sqrt[n]{y}$, erit eleuando ad potentiam m vtrumque membrum $a^m x =$

$b^m \sqrt[n]{y^m}$; rurſus vtrumque eleuando ad potentiam n erit $a^{mn}x^n = b^{mn}y^m$. Similiter ſi fuerit $x^3 = ab^3$, erit vtrinque extrahendo radicem cubicam $x = \sqrt[3]{ab^3} = b\sqrt[3]{a}$.

SCHOLION. Ope horum theorematum facile ſoluuntur omnia problemata, quae ad aequationes ſimplices reducuntur, vti elucebit e ſequenti capite.

CAPVT II.

De reſolutione problematum, quae ad aequationes ſimplices reducuntur.

165. PROBLEMA. *Aequationem ſimplicem, in qua vnica eſt incognita, reducere; ſeu efficere, vt in vno membro aequationis ſola incognita, in altero merae quantitates cognitae ſint.*

RESOLVT. 1) Si in membris aequationis occurrant fractiones, eae ante omnia tollantur (163): et ſi termini omnes per aliquam quantitatem multiplicati ſunt, ea vbique deleatur (162). E. g. $2a - \frac{ac}{d} = ab^2$; idem eſt ac $2ad - ac = ab^2d$, ſeu $2d - c = b^2d$.

2) Si in vtroque membro aequationis occurrant termini quantitatem incognitam continentes, transferantur ſignis mutatis in eam partem, in qua facta finali reductione quantitas incogni-

ta euadat positiua (159). E. g. sit $5ax^2 - ab^2 = cd - 2ax^2$: transponendo $-2ax^2$ erit $7ax^2 - ab^2 = cd$: quodsi $5ax^2$ transponeretur, quantitas incognita x^2 euaderet in fine negatiua.

3) Si terminis incognitam continentibus adhaereant quantitates cognitae signis + aut — iunctae, transferantur omnes ad membrum alterum (159). E. g. si fuerit $ax - bx + c^2 - 2d^2 = 3ab^2$, erit transponendo cognitas c^2 et $-2d^2$ ad aliud membrum, $ax - bx = 3ab^2 - c^2 + 2d^2$.

4) Si quantitas incognita fuerit per cognitas multiplicata, per eas vtrinque omnes termini diuidantur. E. g. in exemplo superiore x est multiplicatum per $a - b$; ergo per $a - b$ omnes terminos diuidendo erit $x = \frac{3ab^2 - c^2 + 2d^2}{a - b}$.

5) Si quantitas incognita a cognitis iam plene separata ad aliquam potentiam, e. g. secundam, tertiam etc. eleuata fuerit, ex vtroque membro aequationis extrahatur radix eiusdem gradus, quem indicat exponens potentiae. E. g. Si fuerit $x^m = a^2 - b^2$, erit $x = \sqrt[m]{(a^2 - b^2)}$. Sin autem quantitas incognita signo radicali affecta fuerit, eleuetur vtrumque membrum ad eam potentiam, quam indicat exponens radicis (164). E. g. Si fuerit $\sqrt[m]{x} = ab$, erit $x = a^m b^m$.

Scholion. Si in quapiam aequatione plures adsuerint radicales, reductio commodius instituetur hunc in modum. Sit e. g. reducenda haec aequatio $\sqrt{ax} = \sqrt{bx} + d$. Ponatur $\sqrt{ax} = p$, $\sqrt{bx} = q$, erit $ax = p^2$, $bx = q^2$. Iam facta pro radicalibus ſubſtitutione erit $p = q + d$, et membrum vtrumque eleuando ad quadratum erit $p^2 = q^2 + 2qd + d^2$, ac loco p^2, et q^2 ponendo valores ſuperiores erit $ax = bx + 2qd + d^2$: quia vero terminus $2qd = 2d\sqrt{bx}$ etiamnum radicalis eſt, rurſus eleuetur vtrumque membrum ad quadratum ante bx et d^2 in alterum membrum traiiciendo, eritque $a^2x^2 - 2abx^2 + b^2x^2 - 2ad^2x + 2bd^2x + d^4 = 4q^2d^2$, vbi ſi pro q^2 ſubſtituatur eius valor bx, obtinebitur aequatio ab omni radicali libera. Atque hoc pacto quantitates radicales eliminare ſemper licebit.

166. PROBLEMA. *Datum problema ad ſuas aequationes reducere.*

RESOLVT. Statu quaeſtionis, et incluſis in ea conditionibus diligenter expenſis, ſedulo diſpiciendum eſt, quaenam dentur quantitates, quaenam quaerantur, quaenam item inter quaeſitas ſit illa, a cuius inuentione pendet ſolutio problematis: quaenam denique inter datas, et quaeſitas intercedant relationes.

2) Quantitates datae primis alphabeti literis, quaeſitae poſtremis deſignentur. Siquae propter mutuam relationem eadem litera deſignari poſſint, eadem deſignentur iuxta eam, quam habent relationem, vt ſi maior ſit minoris tripla, et minor adpelletur x, maior exprimenda eſt per $3x$, non per nouam literam.

3) Videndum accurate, quaenam quantitates iuxta problematis conditiones vel ſimul, vel ſeorſim dicantur eſſe aequales, vel proportio-

nales: earum aequalitates per aequationes exprimantur, quae quidem ſemper tot erunt, quot problema habet conditiones (151): proportio vero, ſiqua occurrit, reſoluatur in aequationem, vti dicemus (202).

EXEMPLA.

I. Sit propoſitum ſequens problema. *Tres luſores lucrati ſunt aureos 160; ſecundus octonis plures accepit quam primus; lucrum tertii aequat amborum lucra: quaeritur ſingulorum lucrum.* 1) Patet dari ſummam lucrorum, nempe 160 aureos, dari item numerum 8; quaeri autem ſingulorum lucrum: patet autem inuento primi lucro ceterorum lucra innoteſcere; nam lucrum ſecundi tantundem eſt plus aureis 8, lucrum tertii e lucro vtriusque coaleſcit. Igitur 2) ſit ſumma $160 = a$, $8 = b$, lucrum primi $= x$, erit iuxta problematis conditionem lucrum ſecundi $= x + b$; lucrum tertii $= 2x + b$. 3) Cum lucra omnium trium ſimul efficere debeant $160 = a$, collectis omnium lucris naſcetur haec aequatio $x + x + b + 2x + b = a$, ſeu $4x + 2b = a$.

II. Sit propoſitum ſequens problema. *Inuenire tres numeros quorum primus cum ſecundo faciat* 8, *ſecundus cum tertio* 13, *tertius cum primo* 11. 1) Patet hic dari tres numeros 8, 13, et 11, ac quaeri tres alios. 2) Itaque ſit $8 = a$, $13 = b$; $11 = c$; et quia tres numeri quaeſiti a ſe non pendent ita, vt vnus ex alio innoteſcat; ſinguli ſingulis literis deſignandi ſunt: ſit ergo primus $= x$, ſecundus $= y$, tertius $= z$. 3) Ex prima problematis conditione nafcitur haec aequatio $x+y=a$; ex fecunda haec $y+z=b$; ex tertia haec $x+z=c$.

III. Sit propofitum fequens problema. *Inuenire duos numeros, e quorum primo fi ad fecundum transferatur* 1, *ambo aequales fiant: fin autem e fecundo ad primum transferatur* 1, *primus fiat fecundi duplus.* 1) Perfpicuum eft quaeri duos numeros a fe independentes, et dari duas eorundem relationes, vnam fcilicet aequalitatis, alteram, vt fic loquar, duplicitatis. Quare 2) prior vocetur x, pofterior y. 3) Iam e prima conditione fi ex x ad y accedat 1, erit $x-1=y+1$; et ex fecunda fi ad x ex y accedat 1, erit $x+1$ duplum de $y-1$; vt ergo hoc illi aequale fiat, debet hoc per 2 multiplicari, eritque $x+1=2y-2$. Atque ita inuentae funt duae aequationes e totidem conditionibus problematis erutae.

167. PROBLEMA. *Aequationes intermedias, in quas problema refolutum eft, reducere ad vnicam finalem, in qua vna tantum contineatur quantitas incognita.*

RESOLVT. Poftquam problema in fuas aequationes rite refolutum eft, hae inter fefe ita comparandae funt, vt quantitates incognitae fenfim eliminentur, vnica in aequatione finali remanente. Et fiquidem problema determinatum fuerit, ea incognitarum eliminatio femper obtineri poterit his modis:

1) *Subftitutione*, fi nempe valor cuiusdam incognitae ex vna aequatione erutus in altera fubftituatur. E. g. fint duae aequationes, in quas

problema poſtremum e ſuperioribus reſolutum eſt, $x - 1 = y + 1$, et $x + 1 = 2y - 2$. Quaeratur in poſteriore valor incognitae x (165); reperietur $x = 2y - 3$; valor hic in priore loco x ſubſtituatur, erit $2y - 4 = y + 1$, vbi vnica tantum eſt iam incognita y. Similiter ſint tres aequationes $x + 2y = a$, $x - 3z = b$, $y + z = c$. Quaeratur x in ſecunda (cit.); reperietur $x = b + 3z$; ac y in tertia, reperietur $y = c - z$: valores hi in prima ſubſtituantur, et obtinebitur aequatio $b + 3z + 2c - 2z = a$, vbi vnica duntaxat eſt incognita z.

2) *Aequalitate* duorum cum vno tertio, cum ſcilicet e duabus aequationibus totidem valores eiusdem incognitae eliciuntur, ac deinde inter ſe comparantur. Sic in poſtremo ſuperiore exemplo ſi tam e prima, quam e ſecunda aequatione eliciatur valor incognitae x, erit in prima $x = a - 2y$, in ſecunda $x = b + 3z$; hinc $a - 2y = b + 3z$: eliciatur deinde e noua hac aequatione valor incognitae y, nempe $y = \frac{a - b - 3z}{2}$, idemque eliciatur e tertia ex propoſitis, nimirum $y = c - z$; erit duos hos valores conferendo $\frac{a - b - 3z}{2} = c - z$, vbi vnica tantummodo eſt incognita z. Curandum tamen, vt diuerſi eiusdem incognitae valores e diuerſis conditionibus eruantur, ſecus eorum inter ſe collatio dabit aequationem, cuius membra adhibita reductione vtrinque fient aequalia nihilo, ac proinde ſoluendo problemati inepta.

SCHOLION. Quaenam eliminandi ratio in casibus peculiaribus ſit adhibenda, vſus, et crebra exercitatio optime docebit. Illud certum, his methodis poſſe ſemper reduci quaeſtionem ad vnicam incognitam, ſiquidem problema ſit determinatum; vel ad pauciſſimas, ſi indeterminatum ſit.

168. PROBLEMA. *Reſoluere problemata determinata, in quibus vnica occurrit quantitas incognita.*

RESOLVT. 1) Reducatur problema ad ſuam, quam continet, aequationem (166). 2) Reducatur eadem aequatio ita, vt incognita in vno membro ſola ſit (165). 3) Inuento valore incognitae, ſi problema per numeros ſolui debeat, ſuus cuiuis literae numerus ſubſtituatur, quemadmodum exigit expreſſio aequationis. Sin autem problema per lineas ſit reſoluendum, conſtruatur iuxta geometriam figura prout exigit aequatio, quemadmodum docemus in libro de Reſolutionibus Aequat. Quodſi repertus numerus, aut linea conditionibus problematis ſatisfaciat, rite facta eſt reſolutio; ſin minus erronea eſt, niſi forte problema ipſum fuerit impoſſibile.

EXEMPLA.

I. *Inuenire numerum, cuius pars dimidia, tertia, et quarta ſimul ipſum numerum vnitate ſuperent.*

Sit quantitas incognita $= x$: quoniam vnica incognita quaeritur, vnica eſt e problematis conditionibus eruenda aequatio. Cum ergo x ponatur aequalis numero quaeſito, erit; eius numeri dimidium $= \frac{1}{2}x$; pars tertia $= \frac{1}{3}x$ pars quarta $= \frac{1}{4}x$: atqui problematis conditio postulat, vt omnes hae partes numerum x vnitate ſuperent, adeoque ipſum vnitate auctum exaequent: ergo enaſcitur aequatio ſequens $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x, = x + 1$, quae reductis fractionibus abit in hanc $\frac{12x + 8x + 6x}{24} = x + 1$, et ſublatis iisdem in hanc $12x + 8x + 6x = 24x + 24$, ſeu reapſe addendo $26x = 24x + 24$, ac transponendo $24x$ fit $26x - 24x = 24$, id eſt, $2x = 24$: denique omnia per 2 diuidendo obtinetur $x = 12$. Rite ſolutum eſſe problema patet: nam numeri 12 pars dimidia, tertia, et quarta ſimul efficiunt ſummam 13, quae numerum ipſum 12 vnitate ſuperat, vti in problemate petebatur. En typum calculi:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$$
$$\frac{12x + 8x + 6x}{24} = x + 1$$
$$12x + 8x + 6x = 24x + 24$$
$$26x = 24x + 24$$
$$26x - 24x = 24$$
$$2x = 24$$
$$x = \frac{24}{2} = 12.$$

II. *Data ſumma, et differentia duarum quantitatum, inuenire quantitates ipſas.*

Sit ſumma data $= s$, differentia $= d$, quantitas maior x, erit hoc ipſo quantitas minor, $= s - x$. Quia ergo quantitates quaeſitae differunt per d, ſi e maiore x tollatur differentia d, adaequabit minorem, vnde exiſtet haec aequatio $x - d = s - x$; transferendo autem —

d et $-x$ erit $2x = s + d$, ac vtrinque diuidendo per 2, $x = \frac{s+d}{2}$. Si vero quantitas minor vocetur x, erit maior $= s - x$, adaequabitque minorem, si minori addatur differentia d; vnde enascitur haec aequatio $x + d = s - x$: transponendo autem $+d$ et $-x$ erit $2x = s - d$, ac vtrinque diuidendo per 2, $x = \frac{s-d}{2}$. Vniuerse ergo adparet *quantitatem maiorem constare ex semisumma addita semidifferentia: minorem ex semisumma demta semidifferentia.* En typum calculi:

$$x - d = s - x \qquad x + d = s - x$$
$$2x = s + d \qquad 2x = s - d$$
$$x = \frac{s+d}{2} \qquad x = \frac{s-d}{2}$$

III. *Interrogatus quispiam quotnam possideret aureos, in hunc modum respondit: Quarta pars meorum aureorum cum binis trientibus aequat numerum* 132 *diuisum per ipsum illum aureorum numerum. Quaeritur aureorum numerus.*

Datus numerus 132 sit $= a$, numerus aureorum quaesitus $= x$, erit eius quarta pars $= \frac{1}{4}x$, duae trientes $= \frac{2}{3}x$: cum ergo quarta pars cum binis trientibus debeat aequare numerum a diuisum per x, habebitur haec aequatio $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x = \frac{a}{x}$; vnde reductis fractionibus erit $\frac{3x + 8x}{12} = \frac{a}{x}$, iisdemque ex vtroque membro ſublatis $3x^2 + 8x^2 = 12a$, ſeu reapſe addendo $11x^2 = 12a$, ac vtroque membro per 11 diuiſo $x^2 = \frac{12a}{11}$, et demum extracta vtrobique radice quadrata $x = \sqrt{\frac{12a}{11}} = \sqrt{\frac{12.132}{11}} = \sqrt{\frac{1584}{11}} = \sqrt{144} = 12$. Poſſidet ergo 12 aureos, quorum pars quarta cum binis trientibus, ſeu 11 aequat numerum 132 diuiſum per 12. En typum calculi:

$$\tfrac{1}{4}x + \tfrac{2}{3}x = \frac{a}{x}$$

$$\frac{3x + 8x}{12} = \frac{a}{x}$$

$$3x^2 + 8x^2 = 12a$$

$$11x^2 = 12a$$

$$x^2 = \frac{12a}{11}$$

$$x = \sqrt{\frac{12a}{11}} = \sqrt{\frac{12.\ 132}{11}} = \sqrt{\frac{1584}{11}}$$

$$= \sqrt{144} = 12.$$

IV. *Abiit Vienna curſor Matritum ante dies 4, qui diebus ſingulis emetitur 6 milliaria: mittitur poſt illum alter, qui iubetur intra diem conficere 8 milliaria: quaeritur tempus, quo hic illum aſſequetur.*

Sit $6 = a$, $8 = b$, $4 = c$ tempus quaeſitum $= x$. Perſpicuum eſt curſores eo temporis momento conuenturos, quo milliaria ab vtroque emenſa fuerint totidem: quare amborum milliaria algebraice exprimenda, et inter ſe aequanda ſunt. Prior curſor intra dies c iam confecit milliaria ac, confecturus adhuc intra dies x milliaria ax; hinc milliaria ab eo, dum conueniant, emetienda ſunt $ac + ax$. Poſterior, qui perget tantum diebus x, conficiet milliaria bx: vnde conſurgit haec aequatio $ac + ax = bx$; transponendo ax erit $ac = bx - ax$, ac vtrinque diuidendo per $b - a$ erit $\frac{ac}{b-a} = \frac{24}{2} = 12 = x$. Prior ergo intra 4 praeteritos et 12 ſequentes dies conficiet milliaria 96; totidem poſterior intra dies 12: quare poſt totidem dies priorem aſſequetur. En typum calculi:

$$ac + ax = bx$$
$$ac = bx - ax$$
$$\frac{ac}{b-a} = \frac{6.\ 4}{8-6} = \frac{24}{2} = 12 = x.$$

SCHOLION. Exempla ſuperiora in tironum gratiam aliquanto fuſius perſequuti ſumus: addemus hic alia compendio in quibus reſoluendis ſeſe exercere poſſint, adiecta vbique aequatione, in quam problema reſoluitur, et valore incognitae.

1) Proponitur inuenienda haereditas x, ad quam ſi accederet pars dimidia, tertia, et quarta eiusdem, et ab hac ſumma tolleretur pars haereditatis duodecima, haberentur aurei 600. *Aequat.* $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{12}x = 600$. Hinc $x = 300$.

2) Senex quidam de ſua aetate rogatus: Si annis, inquit, meis x adderetur pars aetatis dimidia, et ex tota illa ſumma tolleretur pars to-

tius ſummae quarta, haberem annos 99. *Aequat.* $x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x = 99$. Hinc $x = 88$.

3) Quidam domum emturus habet venalia vaſa aliquot generoſi vini, et hunc in modum ſubducit calculum: Si pro ſingulis, inquit, vaſis acquirerem 5 aureos, deeſſent mihi ad pretium domus 30 aurei; at ſi 6 aureis ſingula venderem, ſupereſſent vltra id pretium 40 aurei. Quaeritur numerus vaſorum x, et pretium domus. *Aequat.* $5x + 30 = 6x - 40$. Hinc $x = 70$, adeoque pretium domus $= 380$.

4) Cuidam munifico numos inter pauperes x diſtribuere volenti deſunt 8 crucigeri quo minus dare poſſit ſingulis tres: quare dat ſingulis duos, et 3 crucigeri ſuperſunt. Quaeritur numerus pauperum. *Aequat.* $3x - 8 = 2x + 3$. Hinc $x = 11$.

169. PROBLEMA. *Reſoluere problemata determinata, in quibus plures occurrunt quantitates incognitae.*

RESOLVT. Reſoluatur primum problema propoſitum in ſuas aequationes (166); tum aequationes intermediae reducantur ad vnicam, in qua vna tantum occurrat quantitas incognita (167): denique poſtrema haec aequatio reducatur (165), et problema reſoluatur vt ſupra (168).

EXEMPLA.

I. *Inuenire duos numeros, quorum ſumma ſit* 8, *differentia quadratorum* 16.

Sit $8 = a$, $16 = b$, numerus maior $= x$, minor $= y$: erit ex prima problematis conditione $x+y=a$; ex ſecunda $x^2-y^2=b$. Quaeratur in prima aequatione valor quantitatis x, erit $x=a-y$, ac eleuando vtrumque membrum ad quadratum $x^2=a^2-ay+y^2$: valore iſto in aequatione ſecunda ſubſtituto erit $a^2-2ay+y^2-y^2=b$, ſeu $a^2-2ay=b$; transponendo b et $-2ay$ erit $a^2-b=2ay$, ac omnia diuidendo per $2a$ erit $\frac{a^2-b}{2a}=y=\frac{64-16}{16}=\frac{48}{16}=3$. Et hinc $x=a-y=8-3=5$. Et certe numeri 3 et 5 problemati ſatisfaciunt. En typum calculi:

$$x+y=a \qquad\qquad x^2-y^2=b$$
$$x=a-y$$
$$x^2=a^2-2ay+y^2$$
$$a^2-2ay+y^2-y^2=b$$
$$a^2-2ay=b$$
$$a^2-b=2ay$$
$$\frac{a^2-b}{2a}=y=\frac{64-16}{16}=\frac{48}{16}=3.$$

II. *Ancilla cum ſeruo tritici metretas baiulans ſub pondere queſta eſt; cui ſeruus: Non eſt quod queraris, inquit; nam ſi e tuis metretam vnam mihi dederis, onus meum duplum erit tui; ſin autem vnam a me acceperis, idem amborum futurum eſt onus. Quaeritur quot quisque metretas baiulauerit.*

Sit numerus metretarum ancillae $=x$, ſerui $=y$. Iam ex prima problematis conditione ſi ancilla ſeruo det 1 metretam, illa habebit metretas $x-1$, iſte $y+1$, et hic numerus metretarum eſt illius duplus; vt igitur aequales fiant, debet $x - 1$ per 2 multiplicari, atque ita exfurget prima aequatio $2x - 2 = y + 1$. Ex altera vero conditione fi feruus det anciliae vnam metretam, illa habebit metretas $x + 1$, ifte $y - 1$, eritque ex eadem conditione aequatio fecunda $x + 1 = y - 1$. Quaeratur in vtraque valor quantitatis y, erit ex prima $y = 2x - 3$; ex fecunda $y = x + 2$: vnde $2x - 3 = x + 2$, et transponendo x et -3, $x = 5$; hinc $y = x + 2 = 5 + 2 = 7$. En typum calculi:

$$2x - 2 = y + 1 \qquad\qquad x + 1 = y - 1$$
$$2x - 3 = y \qquad\qquad x + 2 = y$$
$$2x - 3 = x + 2$$
$$x = 5.$$

III. *Herus cum feruo hunc in modum pactus eft. Si opus feceris, inquit, accipies in dies fingulos groffos 6; fi feriatus fueris, multaberis in dies groffis 4. Elapfis a pacto diebus 30 nihil feruo debetur, nec ipfe debet hero. Quaeritur numerus dierum, quibus laborauit, et quibus feriatus eft.*

Sint dies laboris $= x$, dies feriarum $= y$, $30 = a$. Quoniam dies laboris, et otii fimul funt 30, erit aequatio prima $x + y = a$. Et quia neuter alteri debet, merces mulctam exaequet neceffe eft: cum autem merces intra diem fint 6 groffi, erunt intra dies laboris x groffi $6x$, mulcta item intra dies otii y erunt groffi $4y$; vnde nafcitur fecunda aequatio $6x = 4y$. Quaeratur iam x in vtraque aequatione, erit in prima $x = a - y$, in fecunda $x = \frac{4y}{6} = \frac{2y}{3}$: erg. $a - y = \frac{2y}{3}$, et tollendo fra-

ctio-

ctionem $3a - 3y = 2y$, ac transponendo $-3y$ erit $3a = 5y$; diuidendo per 5, $\frac{3a}{5} = y = \frac{3 \cdot 30}{5} = \frac{90}{5} = 18$: hinc $x = a - y = 30 - 18 = 12$. En typum calculi:

$$x + y = a \qquad 6x = 4y$$
$$x = a - y \qquad x = \frac{4y}{6} = \frac{2y}{3}$$
$$a - y = \frac{2y}{3}$$
$$3a - 3y = 2y$$
$$3a = 5y$$
$$\frac{3a}{5} = y = \frac{3 \cdot 30}{5} = \frac{90}{5} = 18$$

IV. *Habet oenopola duo vini genera; vrna generosioris constat flor. 12, debilioris flor. 7; vult haec ita permiscere, vt habeat vrnas 100, quarum quaeuis constet 9. flor. Quaerit, quotnam vrnas debeat sumere e vino meliore, quotnam e viliore ne fallat, aut ne fallatur.*

Sit $100 = a$, numerus vrnarum sumendarum e vino meliore $= x$, e deteriore $= y$. Erit ex problematis conditione $x + y = a$; hinc etiam pretia harum vrnarum aequalia sunt, nempe $12x + 7y = 9a$. Quaeratur iam in vtraque aequatione x, erit in prima $x = a - y$, in secunda $x = \frac{9a - 7y}{12}$: ergo $a - y = \frac{9a - 7y}{12}$, et sublata fractione $12a - 12y = 9a - 7y$, tum transponendo $9a$ et $-12y$ erit $3a = 5y$;

denique omnia diuidendo per 5 erit $\frac{3a}{5}=y=\frac{300}{5}=60$; hinc $x=a-y=100-60=40$. Et profecto 40 vrnae venditae ſingulae 12 flor. et 60 venditae ſingulae 7 flor. tantundem important pretii ſimul, quantum vrnae mixtae 100 venditae ſingulae flor. 9. En typum calculi:

$$x+y=a \qquad 12x+7y=9a$$

$$x=a-y \qquad x=\frac{9a-7y}{12}$$

$$a-y=\frac{9a-7y}{12}$$

$$12a-12y=9a-7y$$

$$3a=5y$$

$$\frac{3a}{5}=y=\frac{300}{5}=60.$$

SCHOLION. Eadem, quam in his tenuimus, methodo reſoluere poterunt tirones ſuopte marte exempla ſequentia, quorum aequationes duntaxat inſinuamus.

1) Luſores duos e theatro reduces audio hunc in modum ſermocinantes. Si mihi, inquit prior, dares dimidium tuorum aureorum, haberem vltra quadruplum tui reſidui inſuper 3 aureos. At ſi mihi, reponit alter, dares e tuis tres, et dimidium aureum, tantum haberem, quantum tibi reſtaret. Quaeritur numerus aureorum x quos prior, et y quos poſterior habet.

Aequat. $\begin{cases} x+\frac{1}{2}y=4.\frac{1}{2}y+3 \\ y+3+\frac{1}{2}=x-3-\frac{1}{2} \end{cases}$

2) Mater de trium filiorum aetate rogata respondet: primus cum tertio habet annos 24; idem cum secundo 18; secundus cum tertio 22. Quaeruntur anni primi x, secundi y, tertii z.

$$\textit{Aequat.}\ \begin{cases} x+z=24 \\ x+y=18 \\ y+z=22 \end{cases}$$

3) Aurum, cuius vnica valet 8 flor. cum argento, cuius vnica valet 4 flor. ita permiscendum est, vt habeantur vnciae 10, quarum quaeuis valeat 6. flor. Quaeritur numerus vnciarum x ex auro, et y ex argento accipiendarum.

$$\textit{Aequat.}\ \begin{cases} x+y=10 \\ 8x+4y=60 \end{cases}$$

4) Quidam e foro reueniens interrogatur, quantinam veneat libra caffée, et libra sachari. Vidi, inquit, duos emtores, primus 3 libras caffée, et 2 sachari soluit grossis 73; alter 5 libras caffée, et 4 sachari grossis 131. Quaeritur pretium librae caffée x, et sachari y.

$$\textit{Aequat.}\ \begin{cases} 3x+2y=73 \\ 5x+4y=131 \end{cases}$$

5) Distribuenda est in pauperes certa pecuniae summa, e qua si duo singulis darentur cruцigeri, deessent 2; si vnus daretur singulis, superessent 10. Quaeritur numerus pauperum x, et summa pecuniae y. *Aequat.* $\begin{cases} 2x-2=y \\ x+10=y \end{cases}$

170. Problema. *Resoluere problemata indeterminata, quae ad aequationes simplices reducuntur.*

Resolvt. Postquam problema ad suas aequationes rite reductum est (166), eliminentur quotquot possunt quantitates incognitae (167).

Si numerus incognitarum a ſeſe non pendentium vno ſuperet numerum aequationum, reſtabunt in aequatione finali duae incognitae nulla arte eliminandae; ſi duobus, reſtabunt tres; ſi tribus, quatuor etc. Peractis ergo reductionibus, ſi duae ſuperſint incognitae, valor vnius aſſumatur ad arbitrium, attamen intra limites ab intermediis aequationibus determinatos, et eo ipſo alterius valor determinatur. Si tres remanſerint incognitae, duarum; ſi quatuor, trium etc. valor aſſumendus eſt pro arbitrio.

EXEMPLA.

I. *Inuenire duos numeros inaequales, quorum facto ſi addatur ſumma, prodeant* 34.

Sit $34 = a$, numerus quaeſitorum vnus $= x$, alter $= y$; erit eorundem factum xy; ſumma $x + y$: igitur e problematis conditione exſiſtit haec aequatio $xy + x + y = a$, ac tollendo vtrinque y erit $xy + x = a - y$, et diuidendo per $y + 1$ obtinebitur $x = \frac{a - y}{y + 1}$. Quoniam haec aequatio nequit reduci ad vnicam incognitam, aſſumatur pro y numerus quispiam, talis nihilominus, qui minor ſit quam a, ne x euadat quantitas negatiua. E. g. Si $y = 4$, erit $x = \frac{30}{5} = 6$. Si $y = 6$, erit $x = \frac{28}{7} = 4$. Si $y = 9$, erit $x = \frac{25}{10} = 2\frac{1}{2}$ etc. En typum calculi:

$$xy + x + y = a$$
$$xy + x = a - y$$
$$x = \frac{a - y}{y + 1}$$

II. *Inuenire duos numeros, quorum vnus in alterum ductus producat cubum perfectum, cuius radix aequet factum e primo in quadratum secundi.*

Sit numerus primus $= x$, secundus $= y$, radix cubi $= v$; erit ex prima conditione problematis $xy = v^3$, ex secunda $xy^2 = v$. Quaeratur x in vtraque aequatione; erit in prima $x = \frac{v^3}{y}$, in secunda $x = \frac{v}{y^2}$; ergo $\frac{v^3}{y} = \frac{v}{y^2}$, et tollendo fractiones $v^3 y^2 = vy$, ac diuidendo per y, $v^3 y = v$, rursus diuidendo per v^3, $y = \frac{v}{v^3} = \frac{1}{v^2}$. Quodsi hic valor substituatur in aequatione superiore $x = \frac{v^3}{y}$, erit $x = v^5$. Assumi ergo potest pro v quiuis numerus. Si $v = 3$, erit $y = \frac{1}{v^2} = \frac{1}{9}$, et $x = v^5 = 243$. Si $v = 2$, erit $y = \frac{1}{4}$, $x = 32$ etc. En typum calculi:

$$xy = v^3 \qquad\qquad xy^2 = v$$
$$x = \frac{v^3}{y} \qquad\qquad x = \frac{v}{y^2}$$
$$\frac{v^3}{y} = \frac{v}{y^2}$$
$$v^3y^2 = vy$$
$$v^3y = v$$

$$y = \frac{v}{v^3} = \frac{1}{v^2}$$

$$x = v^5$$

III. *Inuenire numerum, qui si multiplicetur per* 12, *et per* 3 *semper gignat numerum quadratum.*

Sit $12 = a$, $3 = b$, numerus quaesitus $= x$, radix quadrati primi $= v$, secundi $= y$; erit ex prima problematis conditione $ax = v^2$, ex secunda $bx = y^2$. Quaeratur iam x in vtraque aequatione, erit in prima $x = \frac{v^2}{a}$, in secunda $x = \frac{y^2}{b}$: ergo $\frac{v^2}{a} = \frac{y^2}{b}$, ac per a vtrinque multiplicando erit $v^2 = \frac{ay^2}{b}$, et radicem quadratam extrahendo $v = \sqrt{\frac{ay^2}{b}} = y\sqrt{\frac{a}{b}}$. Si $y = 2$, erit $v = 4$, et $x = \frac{v^2}{a} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. Si $y = 3$, erit $v = 6$, $x = \frac{36}{12} = 3$. Si $y = 5$, erit $v = 10$, $x = \frac{100}{12} = 8\frac{4}{12} = 8\frac{1}{3}$ etc. En typum calculi:

$$ax = v^2 \qquad bx = y^2$$

$$x = \frac{v^2}{a} \qquad x = \frac{y^2}{b}$$

$$\frac{v^2}{a} = \frac{y^2}{b}$$

$$v^2 = \frac{ay^2}{b}$$

$$v = \sqrt{\frac{ay^2}{b}} = y\sqrt{\frac{a}{b}}$$

SCHOLION. Tirones ſeſe exercere poterunt in reſoluendis ſequentibus problematis, quorum aequationes duntaxat inſinuamus.

1) Habet oenopola tria vini genera, quorum primi vrna valet 4 flor. ſecundi 6, tertii 9: haec ita permiſcere vult, vt habeantur 20 vrnae, quarum quaelibet conſtet flor. 7. Quaerit numerum vrnarum x e primo, vrnarum y e ſecundo, vrnarum z e tertio vino ſumendarum.

$$\textit{Aequat.} \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=20 \\ 4x+6y+9z=140 \end{array} \right.$$

2) Floreni 240 diſtribuendi ſunt inter 50 pauperes, ita vt ſinguli viri acquirant flor. 8, mulieres ſingulae 6, pueri 2. Quaeritur numerus virorum x, mulierum y, puerorum z.

$$\textit{Aequat.} \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=50 \\ 8x+6y+2z=240 \end{array} \right.$$

3) Vrnae vini 120 emendae ſunt florenis 600. Vrna vini vnius valet 8 flor. alterius 5, tertii 3. Quaeritur numerus vrnarum x e primo, vrnarum y e ſecundo, vrnarum z e tertio vino emendarum.

$$\textit{Aequat.} \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=120 \\ 8x+5y+3z=600. \end{array} \right.$$

CAPVT III.

De resolutione problematum, quae ad aequationes affectas secundi gradus reducuntur.

171. PROBLEMA. *Reducere aequationem affectam secundi gradus.*

RESOLVT. Praeter communes reducendi methodos, quas in superioribus adhibuimus, hae regulae speciatim obseruandae veniunt:

1) Si quadratum quantitatis incognitae per cognitam multiplicatum, vel diuisum est, ante omnia liberetur ab eadem diuisione, aut multiplicatione (161).

2) Cum nullum quadratum possit esse negatiuum (49), si quadratum incognitae negatiuum fuerit, transpositione fiat positiuum (159).

3) Termini aequationis ita ordinentur, vt primo loco sit quadratum incognitae, secundo loco omnes illi termini, in quibus comparet incognita; termini meris cognitis constantes transponantur ad alteram aequationis partem. Si plures sint termini, in quibus occurrit incognita, ii omnes infra sese scripti pro vnico termino secundo habeantur.

EXEMPLA.

I. $3ax^2 - ab^2 + bx^2 = cx - bx$. *Reducend.*

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - \dfrac{cx}{3a+b} = \dfrac{ab^2}{3a+b} \\ + \dfrac{bx}{3a+b} \end{array}\right\}$$ *Reduct.*

II. $3ax + cx - 2bx = a^2 - cx^2$ *Reducend.*

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + \dfrac{3ax}{c} = \dfrac{a^2}{c} \\ + x \\ - \dfrac{2bx}{c} \end{array}\right\}$$ *Reduct.*

III. $3a^2 = 5x^2 - c^2 + 7x - bx$ Reducend.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + \dfrac{7x}{5} = \dfrac{3a^2 + c^2}{5} \\ - \dfrac{bx}{5} \end{array}\right\}$$ *Reduct.*

IV. $-\dfrac{3b}{2c} - 3x + x^2 + \dfrac{b^2}{4c^2} + \dfrac{bx}{c} + \dfrac{9}{4} = a^2$ *Reducend.*

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + \dfrac{bx}{c} = a^2 - \dfrac{b^2}{4c^2} + \dfrac{3b}{2c} - \dfrac{9}{4} \\ - 3x \end{array}\right\}$$ *Reduct.*

172. PROBLEMA. *Inuestigare, an aequatio affecta secundi gradus contineat quadratum completum, an incompletum.*

RESOLVT. Ordinetur aequatio iuxta regulas superiores; deinde dispiciatur, an inter terminos cognitos adsit quadratum semisummae earum quantitatum, per quas in secundo termino incognita eſt multiplicata: et ſiquidem adſit, eo ad partem incognitae translato, membrum ſiniſtrum aequationis erit quadratum completum (114): ſi vero non adſit, erit quadratum incompletum, deficiente nimirum quadrato termini ſecundi radicis binomiae, cuius terminus primus eſt ipſa incognita, ſecundus ſemiſumma coefficientium termini ſecundi aequationis.

E. g. In allatis tribus primis exemplis aequationes continent quadrata incompleta: deeſt enim in prima quadratum ſemiſummae coefficientium $-\frac{c+b}{6a+2b}$; in ſecunda quadratum ex $\frac{3a-2b}{2c}+\frac{1}{2}$; in tertia quadratum ex $\frac{7-b}{10}$. At aequatio exempli vltimi quadratum habet completum, cum adſit quadratum ſemiſummae coefficientium $\frac{b}{2c}-\frac{3}{2}$, nempe $\frac{b^2}{4c^2}-\frac{3b}{2c}+\frac{9}{4}$ ſi ad partem incognitae transferatur; hinc membrum ſiniſtrum eſt perfectum quadratum, cuius radix eſt $x+\frac{b}{2c}-\frac{3}{2}$.

SBHOLION. Si aequatione ad nihilum redacta, quadratum ſemiſummae coefficientium fuerit negatiuum, aequatio non continebit quadratum completum, cum quadratum negatiuum ſit impoſſibile (49). E. g. Sit $x^2-ax-\frac{1}{4}a^2-bd=0$: quoniam quadratum dimidii coefficientis termini ſecundi $-\frac{1}{4}a^2$ negatiuum eſt, traiecto ad partem dextram termino $-bd$, membrum ſiniſtrum non continebit quadratum perfectum, ſed complebitur addendo $+\frac{2}{4}a^2$.

173. PROBLEMA. *Reſoluere problemata, quae reducuntur ad aequationes affectas ſecundi gradus.*

RESOLVT. 1) Si adhibita reductione problematis ad aequationem finalem (166, 167), ac aequationis ordinatione (171), aequatio deprehendatur continere quadratum completum (172), extrahatur vtrinque radix quadrata (125), et ſoluatur problema (168, 169).

2) Si aequatio animaduertatur quadratum habere incompletum, compleatur quadratum addendo vtrique membro quadratum ſemiſummae coefficientium termini ſecundi (114), cetera peragantur vt ante.

174. COROLL. 1. Dum e quadrato ita completo radix binomia extrahitur, alteruter eius terminus ſemper eſt negatiuus, ſi in ipſa aequatione terminus ſecundus negatiuus eſt: cum enim terminus ille ſit factum e duplo radicis vnius in alteram (112), neceſſe vtique eſt alterutram radicis partem eſſe negatiuam: nam termini poſitiui non producunt factum negatiuum (48). E. g. $\sqrt{(x^2-2ax+a^2)}=x-a$.

175. COROLL. 2. In hoc eodem caſu ſemper duplex eſt radix. Siue enim pro radice ſumatur $x-a$, ſiue $a-x$, ſemper idem obtinetur quadratum, nimirum $x^2-2ax+a^2$. Quaenam ergo radix ex hiſce duabus in problematis ſolutione ſit adhibenda, e ſtatu quaeſtionis, et aequationis expreſſione diiudicandum eſt. Quando problema ſolui debet in numeris,

ea radix deligenda erit, ex qua valor incognitae positiuus eliciatur.

EXEMPLA.

I. *Tres bursas aureis refertas quidam reperit. In prima erant aurei 37; in secunda aureis 23 plures quam in tertia. Quodsi e tribus aureorum in totidem illis bursis contentorum numeris fierent quadrata, primi quadratum aequaret quadrata reliquorum simul. Quaeritur numerus aureorum in singulis bursis inuentorum.*

Sit $37 = a$, $23 = b$, numerus aureorum in tertia bursa $= x$, erit numerus aureorum in secunda $= b + x$; hinc quadratum numeri primi est a^2, secundi $b^2 + 2bx + x^2$: tertii x^2: ergo e problematis conditione oritur haec aequatio $b^2 + 2bx + 2x^2 = a^2$, et transponendo b^2, ac ordinando aequationem erit $2x^2 + 2bx = a^2 - b^2$; diuidendo omnia per 2 erit $x^2 + bx = \frac{a^2 - b^2}{2}$. Compleatur itaque quadratum addendo vtrique membro quadratum dimidii coefficientis termini secundi, nempe $\frac{1}{4} b^2$, erit $x^2 + bx + \frac{1}{4} b^2 = \frac{a^2 - b^2}{2} + \frac{1}{4} b^2$ seu $- \frac{b^2}{2}$ reducendo ad denominatorem 4, $x^2 + bx + \frac{1}{4} b^2 = \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{4} b^2$. Extrahatur vtrinque radix quadrata, erit $x + \frac{1}{2} b = \sqrt{(\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{4} b^2)}$, ac transponendo $\frac{1}{2} b$ erit $x = \sqrt{(\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{4} b^2)} - \frac{1}{2} b = \sqrt{(\frac{1369}{2} - \frac{529}{4})} - 11\frac{1}{2} = \sqrt{(684\frac{1}{2} - 132\frac{1}{4})} - 11\frac{1}{2} = \sqrt{552\frac{1}{4}} - 11\frac{1}{2} = 23\frac{1}{2} -$

$11\frac{1}{2} = 12$. Hinc $b + x = 12 + 23 = 33$.
En typum calculi:

$$b^2 + 2bx + 2x^2 = a^2$$
$$2x^2 + 2bx = a^2 - b^2$$
$$x^2 + bx = \frac{a^2 - b^2}{2}$$
$$+\tfrac{1}{4}b^2 \quad +\tfrac{1}{4}b^2 \ \textit{add.}$$
$$x^2 + bx + \tfrac{1}{4}b^2 = \frac{a^2 - b^2}{2} + \tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2$$
$$x + \tfrac{1}{2}b = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2)}$$
$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2)} - \tfrac{1}{2}b = \sqrt{\left\{\frac{1369}{2} - \frac{529}{4}\right\}} - 11\tfrac{1}{2} = \sqrt{(684\tfrac{1}{2} - 132\tfrac{1}{4})} - 11\tfrac{1}{2} = \sqrt{552\tfrac{1}{4}} - 11\tfrac{1}{2} = 23\tfrac{1}{2} - 11\tfrac{1}{2} = 12.$$

II. *Magister duas discipulorum erudiens classes rogatus de eorundem in vnaquaque classe numero respondet: summa discipulorum vtriusque classis subducta e summa eorundem quadratorum relinquit 78; eadem vero addita ad numerum eorum multiplicatione productum facit dimidium, seu 39. Quaeritur numerus discipulorum vtriusque classis.*

Sit summa discipulorum vtriusque classis $= 2x$ differentia $= 2y$, erit numerus maior $= x + y$, minor $= x - y$. Sit $39 = a$, erit $78 = 2a$, erit praeterea summa quadratorum $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2x^2 + 2y^2$, a qua si tollatur $2x$, erit ex prima problematis conditione $2x^2 + 2y^2 - 2x = 2a$, seu diuidendo per 2, $x^2 + y^2 - x = a$. Ex altera vero conditione $(x+y) \times (x-y)$ seu $x^2 - y^2 + 2x = a$. Addantur iam fibi ambae aequationes, erit $2x^2 + x = 2a$, et diuidendo per 2, $x^2 + \frac{1}{2}x = a$. Complendo quadratum, feu vtrinque addendo $+ \frac{1}{16}$ erit $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = a + \frac{1}{16}$; extrahendo vtrinque radicem quadratam erit $x + \frac{1}{4} = \sqrt{(a + \frac{1}{16})}$; transponendo $\frac{1}{4}$ erit $x = \sqrt{(a + \frac{1}{16})} - \frac{1}{4} = \sqrt{(39 + \frac{1}{16})} - \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{625}{16}} - \frac{1}{4} = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = \frac{24}{4} = 6$. Eft autem ex prima aequatione reducta $y^2 = a + x - x^2$, ergo $y = \sqrt{(a + x - x^2)} = \sqrt{(39 + 6 - 36)} = \sqrt{9} = 3$. En typum calculi:

$$2x^2 + 2y^2 - 2x = 2a$$

$$x^2 + y^2 - x = a \qquad x^2 - y^2 + 2x = a$$

$$2x^2 + x = 2a$$

$$x^2 + \tfrac{1}{2}x = a$$

$$+ \tfrac{1}{16} \quad + \tfrac{1}{16} \ \textit{add.}$$

$$x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{16} = a + \tfrac{1}{16}$$

$$x + \tfrac{1}{4} = \sqrt{(a + \tfrac{1}{16})}$$

$$x = \sqrt{(a + \tfrac{1}{16})} - \tfrac{1}{4} = \sqrt{(39 + \tfrac{1}{16})}$$

$$- \tfrac{1}{4} = \sqrt{\tfrac{625}{16}} - \tfrac{1}{4} = \frac{25 - 1}{4}$$

$$= \tfrac{24}{4} = 6.$$

III. *Quaerenti nuper quotnam fint in regio hoc Collegio auditores phyficae, quotnam metaphyficae, refpondi plures effe illos, quam hos; factum numeri vtrorumque efficere* 160; *differentiam quadratorum* 156. *Quaeritur numerus auditorum feorfim.*

Sit $160 = a$, $156 = 2b$, fumma auditorum $= 2x$, differentia $= 2y$; erit numerus auditorum phyficae $= x + y$, metaphyficae $= x - y$, factum eorundem $= x^2 - y^2$. Quare ex prima conditione problematis nafcitur haec aequatio $x^2 - y^2 = a$, et y transponendo, $x^2 = a + y^2$. Ex ſecunda conditione differentia quadratorum, ſeu $4xy = 2b$, ac diuidendo per $4y$ erit $x = \frac{b}{2y}$, et eleuando ad quadratum $x^2 = \frac{b^2}{4y^2}$; cum ergo ſupra fuerit $x^2 = a + y^2$, erit $a + y^2 = \frac{b^2}{4y^2}$; tollendo fractionem $4ay^2 + 4y^4 = b^2$, ſeu ordinando aequationem, et ſimul diuidendo per 4, $y^4 + ay^2 = \frac{1}{4}b^2$; complendo quadratum erit $y^4 + ay^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$; adeoque radicem quadratam extrahendo $y^2 + \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2)}$, et $\frac{1}{2}a$ transponendo $y^2 = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2)} - \frac{1}{2}a$; rurſus extrahendo radicem quadratam erit $y = \sqrt{(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)})} = \sqrt{(-80 + \frac{1}{2}\sqrt{(6084 + 25600)})} = \sqrt{(-80 + 89)} = \sqrt{9} = 3$. Hinc $x = \frac{b}{2y} = \frac{78}{6} = 13$. Vnde numerus auditorum phyſicae $x + y = 16$; auditorum metaphyſicae $x - y = 10$. En typum calculi:

$$x^2 - y^2 = a \qquad 4xy = 2b$$

$$x = \frac{b}{2y}$$

$$x^2 = a + y^2 \qquad x^2 = \frac{b^2}{4y^2}$$

$$a + y^2 = \frac{b^2}{4y^2}$$

$$4ay^2+4y^4=b^2$$
$$y^4+ay^2=\tfrac{1}{4}b^2$$
$$y^4+ay^2+\tfrac{1}{4}a^2=\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2$$
$$y^2+\tfrac{1}{2}a=\surd(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)$$
$$y^2=\surd(\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2)-\tfrac{1}{2}a$$
$$y=\surd(-\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\surd(a^2+b^2))=\surd(-80+\tfrac{1}{2}\surd(6084+25600))=\surd(-80+89)=\surd 9=3.$$

IV. *Inuenire duos numeros eius conditionis, vt quadratum primi cum eorundem facto efficiat* 55.

Sit $55=a$, numerus primus $=x$, secundus $=y$, erit ex conditione problematis $x^2+xy=a$. Complendo quadratum $x^2+xy+\frac{1}{4}y^2=a+\frac{1}{4}y^2$; extrahendo radicem quadratam erit $x+\frac{1}{2}y=\surd(a+\frac{1}{4}y^2)$, ac transponendo $\frac{1}{2}y$, $x=\surd(a+\frac{1}{4}y^2)-\frac{1}{2}y$. Adparet adeo problema esse indeterminatum; quare pro y assumi debet numerus ad arbitrium, eiusmodi tamen, cuius quadratum per 4 diuisum cum 55 faciat perfectum quadratum. Sit $y=6$, erit $x=\surd(55+\frac{36}{4})-3=\surd(55+9)-3=\surd 64-3=8-3=5$. En typum calculi:

$$x^2+xy=a$$
$$x^2+xy+\tfrac{1}{4}y^2=a+\tfrac{1}{4}y^2$$
$$x+\tfrac{1}{2}y=\surd(a+\tfrac{1}{4}y^2)$$
$$x=\surd(a+\tfrac{1}{4}y^2)-\tfrac{1}{2}y.$$

SCHOLION. Sequentium problematum solutionem tironi relinquimus, addentes tantum aequationem, ad quam vnumquodque eorum reducitur.

1) Inuenire numerum x, qui cum 42 efficiat ſuum quadratum. *Aequat.* $x^2 = x + 42$.

2) Habeo apud me certum florenorum numerum x, a cuius quadrati quintuplo ſi demas quadruplum ipſius numeri, reſtabunt floreni 105. Dic numerum florenorum meorum. *Aequat.* $5x^2 - 4x = 105$.

3) Duorum luſorum vnus lucratus eſt aureos 10, qui ſi per numerum aureorum alterius multiplicentur, et facto quadrata amborum adiiciantur, prouenient 124. Quaeritur lucrum ſecundi x. *Aequat.* $10x + 100 + x^2 = 124$.

4) Agricolae duo ex agro reuertebantur, aiebatque primus ad alterum: Ego 6 metretis plures ſeminaui, quam tu: et ſiquidem ſingulae metretae tantum procrearent, quantum tu ſeminaſti, inferrem in horreum metretas 135. Quaeritur numerus metretarum x, quem ſecundus agricola ſeminauit. *Aequat.* $x^2 + 6x = 135$.

SECTIO IV.

DE VARIIS QVANTITATVM RELATIONIBVS.

CAPVT I.

De Rationibus.

176. *Ratio* eſt habitudo quaedam duarum eiusdem generis quantitatum ad ſe inuicem comparatarum. Duobus autem modis poſſunt quantitates ad ſeſe comparari; nimirum vel quoad *differentiam*, vt innoteſcat, quantum altera differat ab altera; vel quoad *quotitatem*, vt innoteſcat quoties altera contineatur in altera. Hinc ratio duplex eſt, et prior quidem vocatur *arithmetica*, poſterior *geometrica*. E. g. habitudo, qua numerus 2 differt a 6, eſt ratio arithmetica: habitudo autem, qua idem numerus 2 continetur in 6 eſt ratio geometrica.

177. COROLL. Quare differentia duarum quantitatum, quae obtinetur ſubtractione, indicat earundem rationem arithmeticam: quotus, qui oritur vnius per alteram diuiſione, indicat rationem geometricam. Sicubi ergo eadem fuerit differentia, vel idem quotus, eadem quoque erit ratio arithmetica, vel geometrica.

178. Quantitas, quae cum altera comparatur, dicitur *antecedens*, et priore loco ſcribitur; quantitas vero, quacum comparatur, adpellatur *conſequens*, et poſteriore loco ſcribitur interiectis inter vtrumque duobus punctis, e.g. $a : b$, id quod ſic enunciatur: a *ſe habet ad* b.

179. PROBLEMA. *Conſtruere formulam generalem, quae repraeſentet omnem rationem arithmeticam.*

RESOLVT. Cuiusuis rationis arithmeticae antecedens poteſt adpellari a, differentia d: iam conſequens vel erit maior antecedente, vel minor; ſi maior, conſtabit ex antecedente addita differentia: ergo erit $a + d$; ſi minor, conſtabit ex antecedente demta differentia: ergo erit $a - d$: ergo conſequens generatim erit $a \pm d$: ergo quaeuis ratio arithmetica bene repraeſentatur hac formula $a : a \pm d$.

180. *Exponens* rationis geometricae eſt ille quotus, qui oritur diuiſione conſequentis per antecedens. E. g. rationis $3 : 6$ exponens eſt 2; rationis $a : b$ exponens eſt $\frac{b}{a}$; rationis $a : am$ exponens eſt m.

181. COROLL. 1. Si ergo antecedens maior ſit conſequente, exponens erit fractio; ſi minor, erit quantitas integra vel ſola, vel cum aliqua fractione.

182. COROLL. 2. Cum fractio quaeuis deſignet quotum e diuiſione numeratoris per denominatorem oriundum (65), quaeuis fractio denotat exponentem eius rationis, quam habet denominator ad numeratorem.

183. COROLL. 3. Si duarum rationum exponens idem fuerit, eae rationes aequales erunt (177). Hinc identitas exponentium eſt certum indicium aequalitatis rationum.

184. PROBLEMA. *Conſtruere formulam generalem, quae repraeſentet omnem rationem geometricam.*

RESOLVT. Cuiusuis rationis geometricae antecedens poteſt adpellari a, exponens m, dico conſequens fore am: nam diuiſor ductus in quotum producit diuidendum (53); atqui hic a eſt diuiſor, m quotus, conſequens diuidendus (180): ergo conſequens eſt am: ergo quaeuis ratio geometrica bene repraeſentatur hac formula, $a:am$.

185. Si duarum rationum iidem ſint exponentes eodem diuiſionis genere oriundi, nempe diuiſione conſequentium per ſuos antecedentes, termini harum rationum dicentur eſſe in eadem ratione *directa*, vt ſunt $2:4$, $3:6$, item $a:am$, $b:bm$.

186. At ſi exponentes iidem fuerint quidem, ſed alteruter non diuiſione conſequentis per antecedens, ſed diuiſione antecedentis per conſequens oriatur, termini eiusmodi rationum dicentur eſſe in eadem quidem, at *reciproca* ratione, vt ſunt $2:4$, $6:3$, et $a:am$, $bm:b$.

187. COROLL. 1. Rationes reciprocae in directas conuertuntur, ſi termini alterutrius inuertantur, vt ſi in exemplis ſuperioribus fiat $4:2$, $6:3$; item $a:am$, $b:bm$: erit enim idem exponens eodem diuiſionis genere obtentus.

188. COROLL. 2. Poteſt etiam quaeuis ratio reciproca directa reddi, ſi retento terminorum ordine antecedens, et conſequens ſcriban-

tur pro denominatoribus fractionum, quarum numerator ſit 1. E. g. ſi ſint duae rationes *a*: *am*, *bm*: *b*, poterit ſecunda reddi directa ſcribendo $\frac{1}{bm}$: $\frac{1}{b}$; erit enim vtrobique exponens idem *m* diuiſione conſequentis per antecedens oriundus.

189. Ratio, quam habet factum ex antecedentibus plurium rationum ad factum ex earundem conſequentibus, vocatur *ratio compoſita:* ſpeciatim vero *duplicata* dicitur compoſita e duabus, *triplicata* e tribus rationibus inter ſe aequalibus. E. g. *ac*: *bd* eſt ratio compoſita e rationibus componentibus *a*: *b* et *c*: *d*, quae ſi inſuper inter ſe aequales ſint, ratio illa compoſita erit ſimul duplicata reſpectu rationis *a*: *b*, vel *c*: *d*, et harum quaeuis reſpectu duplicatae dicetur ſubduplicata.

190. THEOREMA. *Si rationis cuiusuis geometricae tam antecedens, quam conſequens per eandem, vel per easdem quantitates multiplicetur, aut diuidatur, ratio non mutatur.*

DEMONSTR. Quaeuis enim ratio geometrica repraeſentari poteſt hac formula *a*: *am* (184), et quiuis multiplicator, aut diuiſor poteſt vocari *n*; atqui ſi huius rationis tam antecedens quam conſequens multiplicetur, vel diuidatur per *n*, rationes *an*: *amn*, et $\frac{a}{n}$: $\frac{am}{n}$ aequabuntur rationi *a*: *am*, cum in omnibus idem ſit exponens *m* (183): ergo ea multiplicatione, aut diuiſione ratio non mutatur.

191. COROLL. Quare aeque multipla, aut aeque ſubmultipla duarum quantitatum eandem inter ſe habent rationem, quam ſimpla. Nam aeque multipla oriuntur, ſi tam antecedens quam conſequens per idem multiplicentur; aeque ſubmultipla, ſi per idem diuidantur.

192. THEOREMA. *Ratio duplicata, ſeu e duabus aequalibus orta aequatur rationi, quam habent quadrata terminorum vtriuslibet rationis componentis.*

DEMONSTR. Ratio duplicata eſt compoſita ex duabus rationibus inter ſe aequalibus (189); ſed duae aequales rationes duplicatam componentes poſſunt repraeſentari his formulis, $a : am$, $b : bm$ (184); ergo quaeuis ratio duplicata exhiberi poterit hac formula, $ab : abm^2$; atqui haec ratio aequatur rationi quadratorum $a^2 : a^2m^2$, vel $b^2 : b^2m^2$, cum vtrobique idem ſit exponens m^2 (183): ergo ratio duplicata aequatur rationi, quam habent quadrata terminorum rationum componentium.

193. COROLL. Eodem modo patet rationem triplicatam aequari rationi, quam habent cubi terminorum rationum componentium, cum ſit $abc : abcm^3 = a^3 : a^3m^3 = b^3 : b^3m^3 = c^3 : c^3m^3$ ob eundem vbique exponentem m^3. Imo inductione patet quamuis rationem e pluribus aequalibus compoſitam aequari ei rationi, quam habent termini cuiusuis rationis componentis eleuati ad eam potentiam, quam indicat numerus rationum componentium.

CAPVT II.

De Proportionibus.

194. *Proportio* eſt aequalitas duarum rationum. Hinc ſi duae rationes aequales fuerint arithmeticae, proportio quoque erit arithmetica; ſi geometricae, geometrica. E. g. $2:5=4:7$ eſt proportio arithmetica, et ſic enunciatur: 2 *differt* a 5 *ſicut* 4 a 7; at $a:am=b:bm$ eſt proportio geometrica, et ſic enunciatur: a *ſe habet ad* am *ſicut* b *ad* bm.

195. Coroll. 1. Omnis ergo proportio quatuor habet terminos, duos nimirum antecedentes, et duos conſequentes.

196. Coroll. 2. Cum indicium aequalitatis rationum geometricarum ſit identitas exponentium (183), proportionis geometricae certum ſignum eſt, ſi vtraque ratio eundem habeat exponentem.

197. Problema. *Conſtruere formulam generalem, quae repraeſentet quamuis proportionem arithmeticam, vel geometricam.*

Resolvt. Quaeuis ratio arithmetica vna bene repraeſentatur hac formula, $a: a\pm d$, et altera huic aequalis hac, $b: b\pm d$ (179), item quaeuis ratio geometrica vna bene repraeſentatur hac formula, $a: am$, et altera huic aequalis hac $b: bm$ (184); ergo quaeuis duae rationes arithmeticae inter ſe aequales bene repraeſentantur per $a: a\pm d=b: b\pm d$, et geometricae per $a : am = b : bm$; atqui duae rationes aequales faciunt proportionem (194); ergo quaeuis proportio arithmetica bene repraesentatur hac formula, $a : a \pm d = b : b \pm d$; et quaeuis geometrica hac formula, $a : am = b : bm$.

198. Si primae rationis consequens in secunda fiat antecedens, proportio adpellatur *continua*, ac terminus ille, qui ita repetitur, *medius proportionalis*. E. g. proportiones continuae sunt $2 : 5 = 5 : 8$; $2 : 4 = 4 : 8$. In priore 5 est medius arithmetice, in posteriore 4 est medius geometrice proportionalis inter 2, et 8.

199. COROLL. Cum cuiusuis proportionis continuae terminus primus possit vocari a, differentia d, aut exponens m, formula generalis proportionis continuae arithmeticae erit haec $a : a \pm d = a \pm d : a \pm 2d$ (179); et geometricae haec, $a : am = am : am^2$ (184).

200. THEOREMA. *In quauis proportione arithmetica summa terminorum extremorum aequatur summae mediorum.*

DEMONSTR. Quaeuis enim proportio arithmetica repraesentatur hac formula vniuersali $a : a \pm d = b : b \pm d$ (197), aut si continua sit, hac, $a : a \pm d = a \pm d : a \pm 2d$ (199); atqui in vtraque summae extremorum, et mediorum aequales sunt, nempe in prima $a + b \pm d = a \pm d + b$; in secunda $2a \pm 2d = 2a \pm 2d$: ergo theorema in quauis proportione arithmetica vniuerse obtinet.

201. PROBLEMA. *Datis tribus terminis inuenire quartum; aut datis duobus tertium; aut inter duos datos medium arithmetice proportionalem.*

RESOLVT. 1) Si dentur tres termini, a, b, c, et quaeratur quartus x, ſtabit haec proportio $a : b = c : x$; ergo $a + x = b + c$ (200) et hinc $x = b + c - a$.

2) Si datis duobus a, et b quaeratur tertius x, ſtabit haec continua proportio $a : b = b : x$; ergo $a + x = 2b$ (cit.), et hinc $x = 2b - a$.

3) Si inter datos a et b quaeratur medius x ſtabit haec proportio continua $a : x = x : b$; ergo $a + b = 2x$ (cit.), et hinc $\frac{a+b}{2} = x$.

SCHOLION. Tirones huiusmodi problemata ad exempla numerica adplicent, quae nos breuitatis ſtudio praetermittimus; ſic enim fiet, vt theoremata ipſa in huiusmodi exemplis tanquam in ſpeculis elucentia clarius perſpiciant.

202. THEOREMA. *In quauis proportione geometrica factum terminorum extremorum aequatur facto mediorum.*

DEMONSTR. Quaeuis enim proportio geometrica continetur hac formula vniuerſali $a : am = b : bm$ (197), aut, ſi continua ſit, hac, $a : am = am : am^2$ (199); atqui in vtraque factum extremorum aequatur facto mediorum, nempe in prima $abm = amb$ (46), in ſecunda $a^2m^2 = a^2m^2$: ergo theorema in quauis proportione geometrica vniuerſe obtinet.

203. PROBLEMA. *Datis tribus terminis quartum; aut datis duobus tertium; aut inter duos datos medium geometrice proportionalem inuenire.*

RESOLVT. 1) Si dentur tres termini a, b, c, et quaeratur quartus x, ſtabit haec proportio $a : b = c : x$, ergo $ax = bc$ (202), et hinc $x = \frac{bc}{a}$.

2) Si datis duobus a, et b, quaeratur tertius x, ſtabit haec proportio continua $a : b = b : x$; ergo $ax = b^2$ (cit.) et hinc $x = \frac{b^2}{a}$.

3) Si inter datos a, et b quaeratur medius x, ſtabit haec proportio $a : x = x : b$; ergo $ab = x^2$ (cit.), et hinc $\sqrt{ab} = x$.

SCHOLION. In hoc problemate continetur celebris illa *regula trium*, propter vſum quotidianum *aurea* dicta, praeſcribens modum datis tribus terminis inueniendi quartum geometrice proportionalem, de qua nos capite ſequenti tractabimus.

204. THEOREMA. *Si duo quaeuis facta aequalia fuerint, factores erunt reciproce proportionales, ſeu erit factor primi facti ad factorem ſecundi, vt alter factor ſecundi ad alterum primi.*

DEMONSTR. Quaeuis enim duo aequalia facta repraeſentari poſſunt per $ad = bc$; ergo ſi hic oſtendero factores eſſe reciproce proportionales, ſeu ſtare hanc proportionem, $a : b = c : d$, id erit generatim verum; hoc autem ſic oſtendo. Illa proportio bona eſt, in qua vtrinque idem eſt exponens (183); atqui hic vtrobique idem eſt exponens, quod probo; nam hic exponentes ſunt $\frac{b}{a}$ et $\frac{d}{c}$; atqui hi aequales ſunt;

nam ex hypothesi $ad = bc$: ergo vtrumque diuidendo per ac erit $\frac{ad}{ac} = \frac{bc}{ac}$, et reducendo fractiones ad minores terminos (76) erit $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

205. THEOREMA. *Termini quatuor proportionales multimodis permutari possunt manente semper proportione.*

DEMONSTR. Cum enim omnis proportio geometrica repraesentetur per hanc $a : am = b : bm$ (197), patet omnes permutationes, quae in hac manente proportione fieri possunt, in quauis alia locum habere; atqui haec varias admittit terminorum collocationes manente eodem vtrinque exponente, adeoque manente proportione (196), ficuti perspicuum est ex adiecta tabella.

	$a : am = b : bm$	
	Permutationes	Expon.
Inuert.	$am : a = bm : b$	$\frac{1}{m}$
Altern.	$a : b = am : bm$	$\frac{b}{a}$
Compon.	$a + am : am = b + bm : bm$	$\frac{m}{1+m}$
vel	$a + am : a = b + bm : b$	$\frac{1}{1+m}$
Subtrah.	$a - am : am = b - bm : bm$	$\frac{m}{1-m}$
vel	$a - am : a = b - bm : b$	$\frac{1}{1-m}$
Conuert	$a : a + am = b : b + bm$	$1+m$
vel	$a : a - am = b : b - bm$	$1-m$

206. THEOREMA. *Si ſint duae proportiones eiusmodi, vt conſequentes primae fiant in ſecunda antecedentes, erunt* ex aequo ordinato *reliqui termini directe proportionales.*

DEMONSTR. Quaeuis enim duae id genus proportiones repraeſentari poſſunt his formulis $\begin{cases} a : am = b : bm \\ am : amn = bm : bmn \end{cases}$ (184); atqui in his eſt

$a : amn = b : bmn$, cum exponens vtrobique ſit mn: ergo theorema in omnibus eiusmodi proportionibus generatim obtinet.

207. THEOREMA. *Si ſint duae proportiones eiusmodi, vt primus conſequens primae fiat in ſecunda antecedens, et ſecundus antecedens primae fiat in ſecunda conſequens, erunt* ex aequo perturbato *reliqui termini reciproce proportionales.*

DEMONSTR. Quaeuis enim duae id genus proportiones repraeſentari poſſunt his formulis $\begin{cases} a : b = c : d \\ b : e = f : c \end{cases}$: eſt vero in prima $ad = bc$ in ſecunda $bc = ef$ (202): ergo $ad = ef$, et hinc $a : e = f : d$ (204).

208. COROLL. Si ergo duarum proportionum vel antecedentes, vel conſequentes aequales fuerint, erunt reliqui termini directe proportionales; nam ſi in caſu primo prima proportio inuertatur, in ſecundo ſecunda, habebitur caſus theorematis n. 206. Si vero vel extremi, vel medii fuerint aequales, erunt reliqui reciproce proportionales; nam ſimili terminorum inuerſione facta habebitur caſus theorematis n. 207.

209. THEOREMA. *Si proportionis cuiusuis antecedentes, aut conſequentes per easdem quantitates multiplicentur, vel diuidantur, perſtabit eorundem proportio.*

DEMONSTR. Si enim in formula vniuerſali $a : am = : bm$ antecedentes multiplicentur per n, conſequentes per o, erit $an : amo = bn : bmo$, cum idem ſit vtrobique exponens $\frac{mo}{n}$. Si autem loco multiplicationis diuiſio adhibeatur, erit $\frac{a}{n} : \frac{am}{o} = \frac{b}{n} : \frac{bm}{o}$, cum idem ſit vtrobique exponens $\frac{mn}{o}$.

210. COROLL. Cum ratio eadem permaneat, ſi tam antecedens, quam conſequens per eandem quantitatem multiplicetur, vel diuidatur (190), patet non mutari proportionem, ſi vel alterutrius, vel vtriusque rationis termini per idem multiplicentur, aut diuidantur. Hinc ſi ſimpla proportionalia fuerint, erunt etiam eorum dupla, tripla etc. vel ſubdupla, ſubtripla etc. proportionalia.

211. THEOREMA. *Si duarum, vel plurium proportionum antecedentes inter ſe, et conſequentes inter ſe multiplicentur, aut per ſe diuidantur, erunt facta, vel quoti proportionales.*

DEMONSTR. Nam proportiones quotcunque bene repraeſentantur per has formulas $\left\{\begin{array}{l} a : am = b : bm \\ c : cn = d : dn \\ e : eo = f : fo \text{ etc.} \end{array}\right.$ eſt vero $ace : acemno = bdf : bdfmno$, cum idem ſit vtrobique exponens mno. Similiter ſi termini vnius per terminos alterius diuidantur, erit $\frac{a}{c} : \frac{am}{cn} = \frac{b}{d} : \frac{bm}{dn}$, cum idem ſit vtrobique exponens $\frac{m}{n}$.

212. COROLL. I. Radicum proportionalium quaeuis eiusdem gradus potentiae proportionales ſunt. Nam quaeuis quatuor radices pro-

portionales bene repraeſentantur per has, $a : b = c : d$: ergo ſi oſtendero harum quasuis potentias eiusdem gradus eſſe proportionales, id erit generatim verum: hoc autem ſic oſtendo imprimis de quadratis. Scribatur prior proportio bis, erunt facta antecedentium factis conſequentium proportionalia (211); atqui haec facta erunt quadrata: ergo quadrata erunt proportionalia. Similiter oſtenditur de cubis, ſi ea proportio ter ſcribatur; de quartis potentiis, ſi quater ſcribatur etc.

213. COROLL. 2. Et viciſſim potentiarum proportionalium quaeuis eiusdem gradus radices proportionales ſunt. Nam quaeuis quatuor potentiae proportionales bene repraeſentantur per $a^m : b^m = c^m : d^m$, vbi $a^m d^m = b^m c^m$ (202), et hinc $\sqrt[m]{a^m d^m} = \sqrt[m]{b^m c^m}$, ſeu $ad = bc$; ergo $a : b = c : d$ (204).

214. THEOREMA. *Si fuerint quotcunque rationes aequales, ſeu quotcunque termini proportionales, erit ſumma vel differentia omnium antecedentium ad ſummam vel differentiam omnium conſequentium, vt quiuis antecedens ad ſuum conſequentem.*

DEMONSTR. Plures enim id genus rationes aequales repraeſentari poſſunt his formulis generalibus $\left\{\begin{array}{l} a : am \\ b : bm \\ c : cm \text{ etc.} \end{array}\right.$ eſt autem in his ſumma omnium antecedentium $a + b + c$ ad ſummam omnium conſequentium $am + bm + cm$, ſicut $a : am$, vel $b : bm$, vel $c : cm$; cum idem vbique ſit exponens m: ergo theorema vniuerſe in quotuis rationibus aequalibus obtinet. Eadem eſt demonſtratio pro differentia.

215. THEOREMA. *Si fuerint termini quotcunque continue proportionales, erit primus eorum ad quemlibet vt primus et ſecundus eleuati ad eam potentiam, quam deſignat duorum illorum diſtantia.*

DEMONSTR. Si enim fuerint termini quotcunque continue proportionales, poterit primus vocari a, exponens m; erit ergo conſequens $= am$, huius conſequens $= am^2$, huius conſequens $= am^3$ etc. (184): ergo termini quotcunque continue proportionales bene repraeſentantur per a, am, am^2, am^3, am^4 etc. atqui eſt $a : am^2 = a^2 : a^2m^2$; $a : am^3 = a^3 : a^3m^3$; $a : am^4 = a^4 : a^4m^4$ etc, ergo vniuerſe obtinet theorema de quotcunque terminis continue proportionalibus.

216. COROLL. Si ergo terminus primus vocetur a, ſecundus x, et inter primum, ac vltimum ω intercedant termini continue proportionales numero m, erit diſtantia primi ab vltimo $= m + 1$, et hinc primus erit ad illum, ſeu $a : \omega = a^{m+1} : x^{m+1}$.

CAPVT III.

De Regula aurea.

217. Regula *aurea*, ſeu methodus inueniendi quantitatem incognitam datis proportionalem, alia eſt *ſimplex*, ſi nempe datis tribus terminis quaeratur quartus proportionalis;

lis: alia *composita*, si nimirum aut quinque datis sextus, aut septem datis octauus proportionalis desideretur.

218. Regula autem vtraque *directa* adpellatur, si terminis ita collocatis, vt tertium locum occupet ille, cui quaestio annexa est, primum eiusdem homogeneus, secundum is, cui quaeritur homogeneus, si inquam his hoc ordine collocatis deprehendatur esse primus ad secundum, vt tertius ad quartum quaesitum. *Inuersa* contra, vel *reciproca* dicitur, si tertius deprehendatur esse ad primum, vt secundus ad quartum quaesitum.

E. g. 3 vrnae vini constant 16 flor. ergo 12 vrnae quanti? haec regula aurea directa est, quia pretia numero vrnarum sunt directe proportionalia, adeoque $3 : 16 = 12 : x$. Contra haec, 200 militibus certa annona sufficit 8 mensibus, ergo militibus 500 quamdiu? haec, inquam, inuersa est, quia quanto plures sunt milites 500 quam 200, tanto viciffim plures sunt menses 8, quam ii, intra quos eadem annona sufficit 500 militibus, hinc $500 : 200 = 8 : x$.

219. PROBLEMA. *Resoluere problemata regulae aureae simplicis directae.*

RESOLVT. Dati tres termini collocentur hac lege, vt ille, qui quaestionem adnexam habet, seu cui respondens quaeritur, tertium locum occupet; e reliquis ille, qui tertio est homogeneus, seu qui eiusdem generis rem significat, primo loco sit; medio autem ille, cui homogeneus quaeritur. Facta hac terminorum collocatione ducatur secundus in tertium, et factum diuidatur per primum, quotus dabit terminum quartum quaesitum (203).

EXEMPLA.

I. *Inuenire pretium vasis vini, cuius vasa* 80 *constant aureis* 500.

Cum pretia numero vasorum directe proportionalia sint, 1 vas, quod quaestionem adnexam habet, seu cuius pretium quaeritur, ponatur loco tertio; vasa 80 loco primo; 500 aurei loco secundo; pretium queasitum x loco vltimo, stabitque haec proportio; $80 : 500 = 1 : x$; vnde $x = \frac{500}{80} = 6\frac{1}{4}$ aur.

II. *In equos duos intra diem expenduntur grossi* 24; *inuenire, quotnam expendendi sint in equos* 12.

Cum expensae numero equorum directe proportionales sint, ponatur loco tertio numerus equorum 12, cui quaestio adnexa est; numerus equorum 2 primo loco; 24 grossi secundo; grossi quaesiti x vltimo, stabitque haec proportio, $2 : 24 = 12 : x$; vnde $x = \frac{288}{2} = 144$ gross. $= 7$ flor. 4 gross.

III. *Inuenire pretium* 5 *librarum cuiusdam mercis, cuius* 6 *vnciae constant* 3 *flor.*

Quoniam pretia mercibus directe proportionalia sunt, 5 librae mercis, quibus quaestio adnexa est, ponantur loco tertio; 6 vnciae primo; 3 floreni secundo; pretium quaesitum x vltimo. Cum vero termini homogenei, seu pondus mercis significantes sint diuersae denominationis, reducantur 5 librae ad vncias, multiplicando nempe 5 per 16; tot enim vna libra habet vncias: ſic ergo ſtabit proportio, 6: $3 = 80 : x$; vnde $x = \frac{240}{6} = 40$ flor.

IV. *Tres luſores compoſuerunt ſummam aureorum* 45, *et quidem primus contulit aureos* 10, *ſecundus* 15, *tertius* 20; *hac ſumma lucrati ſunt aureos* 135. *Quaeritur ſingulorum lucrum.*

Vocetur tota ſumma $45 = s$, totum lucrum $135 = l$, collatum primi $10 = a$, ſecundi $15 = b$, tertii $20 = c$: lucrum primi $= x$, ſecundi $= y$, tertii $= z$. Euidens eſt collatum primi eſſe ad ſuum lucrum, vt collatum ſecundi ad ſuum, et vt collatum tertii ad ſuum, hinc tres rationes $a : x$, $b : y$, $c : z$ aequales ſunt; erit ergo ſumma antecedentium s ad ſummam conſequentium l, vt quiuis antecedens ad ſuum conſequentem (214), adeoque ſtabunt hae tres proportiones:

$$s : l = \begin{cases} a : x \\ b : y \\ c : z \end{cases} \text{ ſeu } 45 : 135 = \begin{cases} 10 : x \\ 15 : y \\ 20 : z \end{cases}$$

$$\text{hinc } \begin{aligned} x &= 30 \\ y &= 45 \\ z &= 60 \end{aligned}$$

SCHOLION. Poſtremum exemplum continet *regulam ſimplicem ſocietatis*, quae docet lucrum aut damnum commune diuidere in partes datis numeris proportionales. In huiusmodi quaeſtionibus datorum numerorum ſumma primum locum obtinet numerus diſtribuendus ſecundum, ſinguli datorum tertium: deinde regula aurea ſimplex toties repetitur, quot ſunt numeri dati. Tirones exercere ſeſe poterunt in exemplis ſequentibus.

1) Tres emere volunt 4000 vrnas vini, quae venduntur 500 aureis. Primus deſiderat vrnas 1300, ſecundus 1460, tertius reliquum, nempe 1240. Quantum ergo ſoluet quilibet?

2) Tres laniones contulerunt ad emendos boues 10000 flor. et primus quidem dedit 5000, ſecundus 3000, tertius 2000; venditis bobus lucrati ſunt 15000 flor. Quantum cuique debet obuenire ex lucro?

3) Quatuor nobiles ſimul elocarunt ad cenſum annuum florenos 685620, ita vt cenſus annuus pro florenis 100 eſſent 5 flor. Primus dedit 182560 flor. ſecundus 237940, tertius 120350, quartus 144770: periit autem primi anni cenſus excurrens ad flor. 34281. Quantum quisque damni paſſus eſt?

220. PROBLEMA. *Reſoluere problemata regulae aureae ſimplicis inuerſae.*

RESOLVT. Ordinatis terminis, vt in probl. praecedent. interdum ex natura problematis adparet terminos eo ordine non eſſe proportionales, ſed terminum tertium eſſe ad primum, vt eſt ſecundus ad quartum quaeſitum, id quod argumento eſt regulam auream eſſe inuerſam (218). Quare vt termini reddantur proportionales, terminus tertius collocetur primo loco, primus ſecundo, ſecundus tertio; quo facto problema continebit regulam auream directam, et reſoluetur vt ſupra (219).

E. g. Deſignatum opus intra menſes 8 abſoluunt operarii 100: quaeritur quot abſoluent intra menſes 16. Perſpicuum eſt terminos iuxta praecedens problema ordinatos non eſſe proportionales, cum eo pauciores operarii ſufficiant abſoluendo operi, quo pluribus menſibus durat labor: patet autem, quanto plures ſunt menſes 16 quam 8, tanto viciſſim plures requiri operarios pro menſibus 8, quam pro 16: quare legitime collocatis terminis ſic ſtabit proportio, $16 : 8 = 100 : x$; vnde $x = 50$.

221. **Problema.** *Reſoluere problemata regulae aureae directae compoſitae.*

Resolvt. Duplicem admittunt id genus problemata ſolutionem.

1) Sit propoſitum ſequens problema. Quatuor equi intra 3 menſes conſumunt 20 cubulos auenae; quantum ergo conſument equi 6 intra menſes 12? Adeſt hic praeter duas rationes, equorum nempe, et cubulorum, etiam ratio menſium. Seponatur itaque menſium diuerſitas, et quaerantur cubuli pro equis 6 conſumendi intra menſes 3, ſtabitque haec prima proportio, $4 : 20 = 6 : x$; vnde $x = 30$. Reſumatur menſium diuerſitas, et ſtabit haec proportio altera, $3 : 30 = 12 : x$ vnde $x = 120$. Sit aliud problema continens ſeptem datos terminos. Scribae 3 intra diem ſinguli ſcribendo 4 folia merentur 80 groſſos per dies 5: ergo ſcribae 5 intra diem ſinguli ſcribendo 6 folia, quantum merentur per dies 10? Problemata huiusmodi reſolui poſſunt in tres proportiones, et imprimis quidem habendo rationem ſolius diuerſi numeri ſcribarum, et mercedis ſtabit haec proportio, $3 : 80 = 5 : x$; vnde $x = 133\frac{1}{3}$.

Aſſumta deinde diuerſitate numeri foliorum, quae intra diem ſcribunt, ſtabit ſecunda haec proportio, $4: 133\frac{1}{3} = 6 : x$; vnde $x = 200$. Denique aſſumta diuerſitate numeri dierum, intra quos ſcribunt, ſtabit haec tertia proportio, $5 : 200 = 10 : x$; vnde $x = 400$ groſſ. quos merentur 5 ſcribae per dies 10, ſcribendo ſinguli intra diem 6 folia.

2) Problemata huius generis reduci poſſunt ad vnicam proportionem ſimplicem, multiplicando datarum rationum antecedentes inter ſe, et conſequentes inter ſe, excepto vnico illo termino, cui homogeneus quaeritur; ſeu, quod eodem redit, multiplicando numeros, qui exprimunt res principales per ſuos ſecundarios denotantes earum rerum tempus, laborem, lucrum, damnum etc. tum haec facta ponendo pro termino primo, ac tertio, terminum autem quaeſito homogeneum pro ſecundo. Denotent enim a et b res principales, e. g. in exemplo ſuperiore ſcribas; d et e, item m et n deſignent earum circumſtantias, e. g. in eodem exemplo labores diurnos, et laborum tempora; c terminum quaeſito homogeneum, e. g. in caſu eodem 80 groſſos. Stabunt e praecedenti reſolutione hae tres proportiones:

$$a : b = c : x; \text{ vnde } x = \frac{bc}{a}$$

$$d : x = e : y; \text{ vnde } y = \frac{ex}{d} = \frac{ebc}{ad}$$

$$m : y = n : z; \text{ vnde } z = \frac{ny}{m} = \frac{ebcn}{adm}$$

Eſt ergo ſublata fractione $admz = ebcn$; ergo $adm : c = ben : z$ (204). Eodem modo problema primum e ſuperioribus in vnicam hanc proportionem reſolui poteſt: $12 : 20 = 72 : x$; vnde $x = 120$.

EXEMPLA.

I. *Floreni 1000 per annos 4 dant cenſum flor. 200; ergo floreni 3500 quantum dabunt intra 6 annos?*

Multiplicentur dati floreni 1000 per numerum ſuorum annorum 4, et floreni 3500 per 6, ſtabitque hunc in modum proportio: $4000 : 200 = 21000 : x$, vnde $x = 1050$.

II. *Si vaſa ſingula coemti vini venderem 20 florenis, lucrarer in vaſis 100 florenos 30; quantum ergo lucrarer in vaſis 600 vendendo ſingula florenis 24?*

Multiplicentur vaſa 100 per 20, et vaſa 600 per 24, ſtabitque haec proportio: $2000 : 30 = 14400 : x$; vnde $x = 216$.

III. *Trabs lignea longa pedes 4, lata 3, alta 2 ponderat 240 libras: ergo quantum ponderat trabs alia ex eodem ligno longa pedes 10, lata 4, alta 1?*

Ducatur trabis vtriusque longitudo in ſuam latitudinem, et altitudinem, ſtabitque haec proportio: $24 : 240 = 40 : x$; vnde $x = 400$.

SCHOLION. Poterunt tirones eadem haec exempla, quae nos reducendo ad vnicam proportionem ſoluimus, in plures proportiones reſoluere, vt ſupra docuimus, inuenientque prorſus easdem quantitates, quas hic alia methodo eruimus.

222. PROBLEMA. *Inueſtigare an regula aurea compoſita directa ſit, an reciproca.*

RESOLVT. Reſoluatur regula aurea compoſita in proportiones ſimplices, ac eae ſingulatim examinentur, an directae, an inuerſae ſint. E. g. ſit propoſitum ſequens problema. Meſſores 20 intra dies 9 demetunt iugera 15, ergo meſſores 30 quot diebus demetent iugera 45? Fiant duae hae proportiones: $\begin{matrix} 20: 9 = 30: x \\ 15: x = 45: y \end{matrix}$ patet terminos prioris eſſe reciproce proportionales, cum 30 meſſores minori tempore egeant ad demetenda 15 iugera, quam meſſores 20; vnde termini, vt reddantur proportionales, ſic erunt collocandi: $30: 20 = 9: x$ (220).

223. PROBLEMA. *Reſoluere problemata regulae aureae inuerſae compoſitae.*

RESOLVT. Reſoluatur regula aurea compoſita in ſuas proportiones ſimplices, et diſpiciatur, quaenam earum ſint inuerſae, quaenam directae: deinde terminus principalis prior ducatur in ſuos ſecundarios, qui ſunt in proportione directa, et in alterius ſecundarios, qui ſunt in proportione inuerſa. Similiter alter primarius ducatur vel in ſuos, vel in alterius ſecundarios; ſitque primum factum terminus primus, ſecundum factum ſit terminus ſecundus, ſi termini principales ſint in proportione directa: ſi vero ſint in reciproca, factum primum ſecundo loco ponatur, ſecundum primo; locum autem tertium ſemper occupet terminus quaeſito homogeneus.

DEMONSTR. Sint termini principales A et B, terminus quaeſito homogeneus C, ſecundarii ad A ſpectantes ſint d et m, ad B ſpectantes e et n. Sint iam principales A et B in proportione directa, ſecundarii d et e itidem in directa, at m et n in reciproca. Stabunt ergo iuxta hactenus tradita hae tres proportiones:

$$A : C = B : x ; \text{ vnde } x = \frac{BC}{A}$$

$$d : x = e : y ; \text{ vnde } y = \frac{xe}{d} = \frac{BCe}{Ad}$$

$$n : y = m : z ; \text{ vnde } z = \frac{my}{n} = \frac{BCem}{Adn}$$

Fractione ergo ſublata erit $Adnz = BCem$: hinc $Adn : Bem = C : z$ (204). Si termini principales A et B ponerentur eſſe in ratione inuerſa, in locum A veniret B, et contra.

EXEMPLA.

I. *Militibus* 3 *ſufficiunt librae carnis* 36 *per dies* 12; *ergo militibus* 9 *librae* 180 *quamdiu ſufficient?*

Facta reſolutione in duas proportiones adparet rationem militum eſſe reciprocam rationi dierum, rationem contra librarum eidem eſſe directam: multiplicando ergo 9 per 36, et 3 per 180, ſic ſtabit proportio: $324 : 540 = 12 : x$; vnde $x = 20$.

II. *Aratra* 8 *proſcindunt* 50 *iugera intra dies* 10: *ergo* 16 *aratra quot diebus proſcindent iugera* 150?

Facta resolutione in duas proportiones adparet aratra esse in ratione reciproca dierum, iugera vero in ratione directa eorundem: multiplicando igitur 16 per 50, et 8 per 150, sic stabit proportio: $800 : 10 = 1200 : x$; vnde $x = 15$.

III. *Scribae 25 scribendo intra diem 9 horis conscribunt intra 8 dies libros chartae 36: ergo scribae 15 scribendo intra diem 8 horis quot diebus conscribent libros $28\frac{4}{5}$?*

Numerus scribarum, item numerus horarum diurnarum, quibus scribunt, sunt in ratione reciproca dierum; at numerus librorum, quos conscribunt, est in ratione eorundem directa: stabunt ergo hae tres proportiones:

$$15 : 25 = 8 : x; \text{ vnde } x = \frac{25.8}{15}.$$

$$8 : 9 = x : y; \text{ vnde } y = \frac{9x}{8} = \frac{9.25.8}{8.15}$$

$$36 : y = 28\tfrac{4}{5} : z; \text{ vnde } z = \frac{144y}{5.36} = \frac{144.9.25.8}{5.36.8.15}$$

$$= \frac{144}{4.3} = 12.$$

CAPVT IV.

De Progressionibus.

224. *Progressio* est series quantitatum continue proportionalium. Speciatim autem progressio dicitur *arithmetica*, si quanti-

tates fuerint continue arithmetice proportionales; *geometrica*, ſi eaedem fuerint geometrice proportionales. E. g. numeri naturales 1, 2, 3, 4 etc. ſunt in progreſſione arithmetica; at numeri 1, 2, 4, 8, 16 etc. progreſſionem conſtituunt geometricam.

225. PROBLEMA. *Conſtruere formulam generalem, quae repraeſentet omnem progreſſionem arithmeticam.*

RESOLVT. Cuiusuis progreſſionis arithmeticae terminus primus poteſt adpellari a, differentia d; iam ſecundus vel erit maior praecedente, vel minor: ſi maior, conſtabit ex praecedente addita differentia: ergo erit $a+d$; ſi minor, conſtabit ex praecedente demta differentia, ergo erit $a-d$: ergo generatim erit $a\pm d$. Rurſus tertius vel erit maior praecedente, vel minor: ſi maior, conſtabit ex praecedente addita differentia, ergo erit $a+2d$: ſi minor, conſtabit ex praecedente demta differentia, ergo erit $a-2d$: ergo generatim erit $a\pm 2d$, et ſic deinceps: ergo quaeuis progreſſio arithmetica bene repraeſentatur hac formula a, $a\pm d$, $a\pm 2d$, $a\pm 3d$, $a\pm 4d$ etc.

226. COROLL. 1. In quauis progreſſione arithmetica quiuis terminus conſtat termino primo addita vel demta differentia communi toties ſumta, quot ſunt termini praecedentes. Patet conſideratione formulae generalis, in qua e. g. terminus quintus $a\pm 4d$ conſtat termino primo a addita, vel demta differentia communi d quater ſumta, quot nempe ſunt termini quintum praecedentes.

227. COROLL. 2. Si ergo primus terminus ſit $= a$, vltimus $= \omega$, differentia $= d$, numerus terminorum $= n$, erit numerus terminorum vltimum praecedentium $= n - 1$: hinc in progreſſione creſcente erit $\omega = a + dn - d$; in decreſcente $\omega = a - dn + d$.

228. THEOREMA. *Summa totius progreſſionis arithmeticae aequatur ſemiſummae extremorum ductae in numerum terminorum.*

DEMONSTR. Quaeuis enim progreſſio arithmetica bene repraeſentatur hac formula, a, $a \pm d$, $a \pm 2d$, $a \pm 3d$, $a \pm 4d$ etc. ergo ſi hic demonſtrauero ſummam totius progreſſionis aequari ſemiſummae extremorum ductae in numerum terminorum, id erit generatim verum: hoc autem ſic oſtendo. Addatur haec progreſſio in vnam ſummam, erit ſumma $= 5a \pm 10d$: iam ſumma extremorum eſt $= 2a \pm 4d$, et hinc ſemiſumma $= \frac{2a \pm 4d}{2}$, haec ducta in numerum terminorum eſt $= \frac{10a \pm 20d}{2} = 5a \pm 10d$, adeoque aequatur ſummae. Hinc ſi primus terminus ſit $= a$, vltimus $= \omega$, numerus terminorum $= n$, ſumma totius progreſſionis $= s$, erit $s = \frac{an + \omega n}{2}$, et hinc $2s = an + \omega n$.

229. PROBLEMA. *Conſtruere formulas viginti, quarum ope reſolui poſſint problemata progreſſionis arithmeticae.*

RESOLVT. 1) Ex ſupra dictis habetur $\omega = a + dn - d$ (227): e qua elici poterunt quatuor fequentes formulae totidem problematum refolutionem continentes:

1. $a = \omega - dn + d$

2. $\omega = a + dn - d$

3. $d = \dfrac{\omega - a}{n - 1}$

4. $n = \dfrac{\omega - a + d}{d}$

2) Ex fupra dictis habetur $2s = an + \omega n$ (228), e qua rurfus elici poterunt quatuor fequentes totidem problematum refolutionem continentes:

5. $s = \dfrac{an + \omega n}{2}$

6. $a = \dfrac{2s}{n} - \omega$

7. $\omega = \dfrac{2s}{n} - a$

8. $n = \dfrac{2s}{a + \omega}$

3) In aequatione fuperiore loco a fubftituatur valor e prima aequatione erutus, nempe $\omega - dn + d$, erit $2s = 2\omega n - dn^2 + dn$, e qua elici poterunt quatuor fequentes totidem problematum refolutionem continentes:

9. $d = \dfrac{2\omega n - 2s}{n^2 - n}$

10. $n = \sqrt{\left(\dfrac{\omega^2}{d^2} + \dfrac{\omega}{d} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{2s}{d}\right)}$

$+ \dfrac{\omega}{d} + \frac{1}{2}$

$$11.\quad s = \frac{2\omega n - dn^2 + dn}{2}$$

$$12.\quad \omega = \frac{2s + dn^2 - dn}{2n}.$$

4) In eadem formula loco ω ſubſtituatur valor e prima aequatione ſupra erutus, nempe $a + dn - d$, erit $2s = 2an + dn^2 - dn$, e qua elici poterunt quatuor ſequentes totidem problematum reſolutionem continentes:

$$13.\quad a = \frac{2s - d^2 + dn}{2n}$$

$$14.\quad d = \frac{2s - 2an}{n^2 - n}$$

$$15.\quad n = \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}\right)} - \frac{a}{d} + \tfrac{1}{2}$$

$$16.\quad s = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$$

5) Denique in eadem formula loco n ſubſtituatur valor e prima aequatione erutus, nempe $\frac{\omega - a + d}{d}$, erit $2s = a + \omega + \frac{\omega^2 - a^2}{d}$ e qua elici poterunt quatuor ſequentes totidem problematum reſolutionem continentes:

$$17.\quad a = \sqrt{(\omega^2 + \omega d - 2ds + \tfrac{1}{4}d^2)} + \tfrac{1}{2}d$$

$$18.\quad \omega = \sqrt{(a^2 - ad + 2ds + \tfrac{1}{4}d^2)} - \tfrac{1}{2}d$$

$$19.\quad d = \frac{\omega^2 - a^2}{2s - a - \omega}$$

$$20.\quad s = \frac{ad + \omega d + \omega^2 - a^2}{2d}$$

SCHOLION. Formulas has consuescant adplicare tirones ad problemata particularia. E. g. Dato numero primo 1, vltimo 15, numero terminorum 8, sit quaerenda summa totius progressionis, et differentia communis. Erit in formula quinta $s = \frac{8 + 120}{2} = 64$; et in formula tertia $d = \frac{15 - 1}{8 - 1} = 2$. Similiter dato termino primo 1, differentia communi 3, et summa progressionis 51, sit inueniendus terminus vltimus, et numerus terminorum. Erit in formula decima octaua $\omega = \sqrt{(1 - 3 + 306 + \frac{9}{4})} - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{1225}{4}} - \frac{3}{2} = \frac{35}{2} - \frac{3}{2} = 16$; et in formula decima quinta $n = \sqrt{(102 + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4})} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \sqrt{(\frac{304}{9} + \frac{1}{4})} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1225}{36}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{35}{6}\ \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{33}{6} + \frac{1}{2} = \frac{36}{6} = 6$: ergo progressio proposita est 1, 4, 7, 10, 13, 16.

230. PROBLEMA. *Inter datos duos terminos inuenire quotuis medios arithmetice proportionales.*

RESOLVT. Sit primus datorum $= a$, vltimus $= \omega$, numerus mediorum quaesitorum $= m$, erit numerus omnium terminorum vna cum datis primo et vltimo $= m + 2$, adeoque idem vnitate multatus $= m + 1$: vt iam inueniantur omnes medii proportionales, inueniri duntaxat debet differentia: atqui supra fuit $d = \frac{\omega - a}{n - 1}$ (229. n. 3): ergo hic pro $n - 1$ ponendo $m + 1$, erit differentia communis $d = \frac{\omega - a}{m + 1}$, quae proinde addita, vel demta termino primo a dabit ſecundum; addita, vel demta ſecundo dabit tertium, et ſic porro. Hinc quaeſitae mediae proportionales in proportione creſcente erunt hae $a + \frac{\omega - a}{m+1}$, $a + \frac{2\omega - 2a}{m+1}$, $a + \frac{3\omega - 3a}{m+1}$, $a + \frac{4\omega - 4a}{m+1}$, etc. Haec autem ſeries ſponte terminabitur, ſi m in numeris determinetur; nempe ſeries ibi terminabitur, vbi $m+1$ aequat coefficientem numeratoris; erit enim ille terminus $= \omega$: e. g. ſit $a = 4$, $\omega = 16$, $m = 3$, ſubſtituendo numeros pro literis, erit in ſerie terminus $a + \frac{4\omega - 4a}{m+1} = 4 + \frac{48}{4} = 16 = \omega$, in quo adeo ſeries terminabitur, et tres praecedentes termini exhibebunt totidem quaeſitos medios proportionales 7, 10, 13.

231. Coroll. Si terminus primus maior ſit vltimo, permutetur vltimus cum primo, ita vt primus fiat vltimus, ſeu $= \omega$, vltimus fiat primus, ſeu $= a$, cetera fiant vt ante.

232. Problema. *Conſtruere formulam generalem repraeſentantem quamuis progreſſionem geometricam.*

Resolvt. Cum cuiusuis progreſſionis geometricae terminus primus poſſit poni $= a$, exponens communis $= m$, erit ſecundus $= am$, tertius $= am^2$ etc. (215), hinc omnem vniuerſe progreſſionem geometricam repraeſentabit haec formula: a, am, am^2, am^3, am^4 etc.

233.

233. COROLL. 1. In progreſſione geometrica quiuis terminus conſtat termino primo ducto in exponentem eleuatum ad eam potentiam, quam indicat numerus terminorum praecedentium. Patet conſideratione formulae generalis, in qua e. g. terminus quintus am^4 conſtat termino primo a ducto in exponentem m eleuatum ad quartam potentiam, quot nimirum ſunt termini quintum praecedentes.

234. COROLL. 2. Si ergo terminus primus ſit $= a$, vltimus $= \omega$, numerus terminorum $= n$, exponens communis $= m$, erit numerus terminorum vltimum praecedentium $= n - 1$, et hinc $\omega = am^{n-1}$.

235. PROBLEMA. *Conſtruere octo formulas ſoluendis problematis progreſſionis geomtricae inſeruientes.*

RESOLVT. 1) Sit terminus primus $= a$, vltimus $= \omega$, exponens communis $= m$, numerus terminorum $= n$, ſumma totius progreſſionis $= s$: cum in progreſſione quiuis terminus ſit antecedens excepto vltimo, erit ſumma omnium antecedentium $= s - \omega$; et cum quiuis terminus ſit conſequens excepto primo, erit ſumma omnium conſequentium $= s - a$: ſtabit adeo haec proportio $s - \omega : s - a = a : am$ (214), et hinc $sam - \omega am = sa - a^2$ (202), ſeu omnia diuidendo per a, $sm = \omega m = s - a$, vnde naſcuntur quatuor ſequentes formulae totidem problematum reſolutionem continentes:

1. $a = s - sm + \omega m$

2. $\omega = \dfrac{a - s + sm}{m}$

3. $s = \dfrac{\omega m - a}{m - 1}$

4. $m = \dfrac{s - a}{s - \omega}$

2) Quodſi in ſuperiori aequatione loco ω ſubſtituatur am^{n-1} (234), erit $sm - am^n = s - a$, vnde naſcuntur tres ſequentes formulae totidem problematum reſolutionem exhibentes:

5. $a = \dfrac{sm - s}{m^n - 1}$

6. $s = \dfrac{am^n - a}{m - 1}$

7. $n = log. \left\{ \dfrac{sm - s + a}{a} \right\} : log. m$ (242).

3) Cum ſit $\omega = am^{n-1}$ (234), diuidendo vtrinque per a, ac radicem $n - 1$ extrahendo erit

8. $m = \sqrt[n-1]{\dfrac{\omega}{a}}$

Scholion. Conſueſcant rurſus tirones formulas has ad problemata particularia adplicare. E. g. dato termino primo 1, vltimo 243, et exponente 3, inueniri debeat ſumma totius progreſſionis: erit in formula tertia $s = \frac{729 - 1}{2} = 364$. Similiter dato termino primo 1, vltimo 243, numero terminorum 6, inueniri debeat exponens: erit in formula octaua $m = \sqrt[5]{\frac{243}{1}} = 3$.

236. PROBLEMA. *Inter datos duos terminos inuenire quotuis medios geometrice proportionales.*

RESOLVT. 1) Sit primus datorum $= a$, vltimus $= \omega$, numerus quaesitorum $= m$, primus eorundem $= x$, erit $a : \omega = a^{m+1} : x^{m+1}$ (215); vnde $ax^{m+1} = \omega a^{m+1}$ (202), ac vtrinque diuidendo per a, tum extrahendo radicem $m+1$, $x = \sqrt[m+1]{\omega a^{m}}$.

2) Cum in continua proportione terminus primus sit ad secundum, vt secundus ad tertium, qui sit $= x$, erit $a : \sqrt[m+1]{\omega a^{m}} = \sqrt[m+1]{\omega a^{m}} : x$, seu eleuando omnes terminos ad potentiam $m+1$ erit $a^{m+1} : \omega a^{m} = \omega a^{m} : x^{m+1}$ (144, 212); vnde $a^{m+1} x^{m+1} = \omega^{2} a^{2m}$ (202), et diuidendo vtrinque per a^{m+1} erit $x^{m+1} = \omega^{2} a^{m-1}$, ac denique vtrinque extrahendo radicem $m+1$, $x = \sqrt[m+1]{\omega^{2} a^{m-1}}$.

3) Cum sit terminus secundus ad tertium, vt tertius ad quartum, qui sit $= x$, erit $\sqrt[m+1]{\omega a^{m}} : \sqrt[m+1]{\omega^{2} a^{m-1}} = \sqrt[m+1]{\omega^{2} a^{m-1}} : x$, et eleuando omnes terminos ad potentiam $m+1$ erit $\omega a^{m} : \omega^{2} a^{m-1} = \omega^{2} a^{m-1} : x^{m+1}$; vnde $\omega a^{m} x^{m+1} = \omega^{4} a^{2m-2}$: et vtrinque diuidendo per ωa^{m}, erit $x^{m+1} = \omega^{3} a^{m-2}$, ac denique vtrinque extrahendo radicem $m+1$, $x = \sqrt[m+1]{\omega^{3} a^{m-2}}$.

4) Inuentis vel tribus mediis proportionalibus iam adparet lex, iuxta quam ceteri etiam progrediuntur, ac proinde absque calculo vlteriore inueniuntur: nempe quiuis terminus habet praefixum signum $\sqrt[m+1]{}$: quiuis conſtat potentiis termini vltimi ω ordine ſe excipientibus, ductis in potentias termini primi a potentia a^m incipiendo ordine decreſcentibus. En ſeriem, quam efficiunt: $\sqrt[m+1]{\omega a^m}$, $\sqrt[m+1]{\omega^2 a^{m-1}}$, $\sqrt[m+1]{\omega^3 a^{m-2}}$, $\sqrt[m+1]{\omega^4 a^{m-3}}$, $\sqrt[m+1]{\omega^5 a^{m-4}}$ etc.

5) Terminabitur autem ſponte haec ſeries, ſi m in numeris determinetur; nam ille terminus, in quo habebitur a^0, erit $=\omega$. E. g. Sit $m=4$ erit quintus ſeriei terminus $=\sqrt[5]{\omega^5 a^0}=\sqrt[5]{\omega^5}$, $=\omega$, qui eſt terminus datus vltimus, adeoque ſeries in termino quinto deſinit, et quatuor praecedentes exhibent totidem quaeſitos medios proportionales. Tirones exercitationis cauſſa literis a, ω, m numeros ſubſtituant.

CAPVT V.

De Logarithmis.

237. Si progreſſioni arithmeticae numerorum naturalium a 0 incipienti ſubſcribatur progreſſio geometrica ab 1 incipiens, erunt termini illius terminorum huius correſpondentium *logarithmi*, vt ſi ſint hae duae progreſſiones:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16$$

quiuis terminus ſuperior erit inferioris logarithmus.

238. Coroll. Quodſi eiusmodi progreſſiones vtcunque continuentur, logarithmi non habebuntur, niſi eorum numerorum, qui aderunt in ſerie inferiori; ceterorum autem intermediorum logarithmi calculo inueſtigandi erunt, vt iam dicemus.

239. Theorema. *Logarithmi ſunt quantitatum exponentes.*

Demonstr. Cuiusuis progreſſionis geometricae exponens poteſt poni $=a$, et $1=a^0$ (101): ergo quaeuis progreſſio geometrica ab 1 incipiens repraeſentari poteſt hac formula a^0, a^1, a^2, a^3, a^4 etc. ſi igitur haec priori ſubſcribatur

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \text{etc.}$$
$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \text{etc.}$$

euidenter adparet ſeriem logarithmorum prorſus eandem eſſe cum ſerie exponentium, ac proinde logarithmum cuiusuis termini progreſſionis geometricae eſſe eiusdem exponentem.

240. Coroll. 1. Atqui ſi addantur exponentes factorum, habetur exponens facti (48): ergo etiam ſi in vnam ſummam addantur logarithmi factorum, obtinetur logarithmus facti. Vnde patet methodus multiplicationem ope logarithmorum ſola additione peragendi.

241. Coroll. 2. Si ab exponente diuidendi tollatur exponens diuiſoris, habetur exponens quoti (57): ergo etiam ſi logarithmus diuiſoris ſubtrahatur a logarithmo diuidendi, obtinetur logarithmus quoti. Vnde patet methodus diuiſionem ope logarithmorum ſola ſubtractione peragendi.

242. Coroll. 3. Si exponens radicis datae ducatur in exponentem datum potentiae quaeſitae, habetur exponens potentiae (99): ergo etiam ſi logarithmus radicis datae ducatur in exponentem datum potentiae quaeſitae, obtinetur logarithmus eiusdem potentiae. Vnde patet modus datum numerum ad quamuis potentiam ope logarithmorum euehendi.

243. Coroll. 4. Si exponens potentiae diuidatur per exponentem radicis datum, habetur exponens radicis quaeſitae (124): ergo etiam ſi logarithmus potentiae datae diuidatur per exponentem radicis datum, obtinetur eiusdem radicis logarithmus. Vnde patet modus e dato numero radicem quamuis ope logarithmorum extrahendi.

Scholion. Patet ex his egregia logarithmorum vtilitas maxime in calculo magnorum numerorum. Ad manum autem esse debent tabulae logarithmorum passim prostantes, in quarum maximis habentur logarithmi numerorum naturalium ab 1 vsque ad 100000. Iuuat autem tironi aperire modum, quo vtilissimae id genus tabulae condi possint.

244. PROBLEMA. *Construere tabulam, in qua habeantur logarithmi numerorum naturalium ab* 1 *e.g. vsque ad* 100000.

RESOLVT. 1) Assumatur progressio geometrica ab 1 incipiens, cuius exponens sit 10, nempe 10^0, 10^1, 10^2, 10^3 etc. seu 1, 10, 100, 1000 etc. exponens cuiusuis termini erit eiusdem logarithmus (239), nempe vnitatis logarithmus erit 0, numeri 10 erit 1, numeri 100 erit 2 etc. At desiderabuntur logarithmi omnium numerorum inter 1, et 10, 10 et 100 etc. intermediorum.

2) Igitur concipiatur quiuis terminus in vtraque progressione constare particulis decemmillionesimis, ita vt 1 contineat id genus particularum decem milliones, 2 viginti milliones, 3 triginta milliones etc. vt scilicet ad numeros intermedios eo accuratius adproximari possit; abibunt duae illae progressiones, nempe progressio exponentium, seu logarithmorum, et progressio geometrica in has:

0, 0000000; 1, 0000000; 2, 0000000 3, 0000000; 4, 0000000 etc.

1, 0000000; 10, 0000000; 100, 0000000; 1000, 0000000; 10000, 0000000 etc.

3) Quaeratur iam logarithmus cuiusuis numeri intermedii, e. g. 3. Inueniatur inter 1 et 10, seu inter 10000000 et 100000000 medius geometrice proportionalis (203), eius logarithmus obtinebitur, si logarithmi numerorum 1 et 10 addantur, et summa per 2 diuidatur (240, 243). Rursus inter hunc medium proportionalem, et inter 1 quaeratur medius, eique respondens logarithmus, atque ista operatio tamdiu continuetur inter numeros ternario proxime maiores et minores, donec tandem deueniatur ad numerum 3,0000000, qui a ternario ne vna quidem particula decemmillionesima differt, cuius proinde logarithmus 0,4771213 citra errorem pro logarithmo numeri 3 haberi potest. Quodsi inter numerum nunc inuentum, et inter 1, seu inter 1,0000000 eodem modo quaerantur medii proportionales, ac iis respondentes logarithmi, reperietur etiam numerus 2,0000000, qui a binario nec vnica decemmillionesima discrepat, cuius proinde logarithmus pro logarithmo numeri 2 haberi potest, et sic deinceps.

245. COROLL. Prima logarithmi cuiusuis nota a reliquis virgula separatur, et *characteristica* dicitur: indicat enim, quot notis post primam constet numerus, cuius est logarithmus. Hinc numeri omnes ab 1 vsque ad 10 exclusiue habent pro logarithmi sui characteristica 0; a 10 ad 100 exclusiue 1; a 100 ad 1000 exclusiue 2 etc. Adeoque characteristica semper vnitate minor est numero notarum omnium eius numeri, cui logarithmus respondet; vt

adeo dato numero illico innotescat characteristica logarithmi eidem respondentis.

SCHOLION. Non est necesse omnium numerorum intermediorum logarithmos tam operose indagare; cum enim numeri compositi plurimi ex aliorum multiplicatione oriantur, inueniuntur eorum logarithmi addendo logarithmos factorum (240). Sic inuentis logarithmis numerorum 3 et 2, habentur 1) logarithmi numerorum 9, 27, 81, 243 etc. item numerorum 4, 8, 16, 32, 64 etc. qui sunt potentiae numerorum 3 et 2 (242). 2) Habetur logarithmus numeri 6, qui est factum ex 3 et 2 (240), ac proinde etiam logarithmi omnium potentiarum eiusdem numeri 6. 3) Habetur logarithmus numeri 12, qui est factum ex 2 et 6; numeri 18, qui est factum ex 3 et 6; ac praeterea logarithmi potentiarum vtriusque numeri, et sic deinceps.

246. PROBLEMA. *Si detur logarithmus, qui in tabulis logarithmorum non occurrit, inuenire numerum eidem respondentem.*

RESOLVT. 1) A logarithmo dato subtrahatur logarithmus proxime minor in tabulis occurrens, et prima haec differentia notetur.

2) Idem ille logarithmus minor subtrahatur a logarithmo proxime maiore in tabulis, et haec quoque altera differentia notetur.

3) Cum logarithmi in tabulis respondeant numeris naturalibus ordine sese excipientibus, differentia numerorum postremis duobus logarithmis contiguis in tabula respondentium est 1. Fiat ergo haec proportio: vt differentia duo-

rum logarithmorum contiguorum in tabulis ſe habet ad 1, ita differentia logarithmi dati a logarithmo proxime minore in tabulis ad terminum quartum, qui ſi addatur numero reſpondenti proxime minori logarithmo in tabulis, obtinetur numerus reſpondens logarithmo dato.

4) Vt autem quartus ille terminus addendus eo accuratior ſit, loco 1 in proportione ponatur 10, vel 100, vel 1000 etc. ſeu vnitas concipiatur diuiſa in partes decimas, vel centeſimas, vel milleſimas etc. ita enim acquiretur pro termino quarto fractio in partibus decimis, centeſimis, milleſimis etc. addenda numero reſpondenti logarithmo proxime minori.

EXEMPLA.

I. *Detur logarithmus in tabulis non occurrens* 2, 1851003, *et quaeratur eidem reſpondens numerus.*

Logarithmus proxime minor in tabulis 2, 1846914 a dato ſubtractus relinquit differentiam 4089: idem ſubtractus a logarithmo proxime maiore in tabulis 2, 1875207 relinquit differentiam 28293. Stabit ergo haec proportio: 28293 : 1 ſeu 100 = 4089 : x, vnde $x = \frac{14}{100}$; ſi igitur haec fractio addatur numero 153 reſpondenti in tabulis logarithmo proxime minori, obtinebitur numerus 153, 14 a quaeſito vna centeſima non diſſidens.

II. *Detur logarithmus in tabulis non occurrens* 3, 7589982, *et quaeratur eidem reſpondens numerus.*

Logarithmus proxime minor in tabulis 3, 7589875 a dato ſubtractus relinquit differentiam 107; idem ſubtractus a logarithmo proxime maiore in tabulis 3, 7590632 relinquit differentiam 757. Fiat ergo haec proportio: $757 : 1000 = 107 : x$, erit $x = \frac{141}{1000}$: quare ſi haec fractio addatur numero 5741 reſpondenti logarithmo proxime minori in tabulis, obtinebitur numerus 5741, 141 a quaeſito vna milleſima non diſcrepans.

247. COROLL. I. Quodſi dati logarithmi characteriſtica tot vnitatibus augeatur, quot notae in fractione adiicienda deſiderantur, et quaeratur numerus in tabulis logarithmo ſic aucto proxime reſpondens, e quo verſus dextram tot notae reſecentur, quot vnitates ad dati logarithmi characteriſticam erant additae, erunt hae notae fractio decimalis, cuius denominator praeter 1 tot habet zeros, quot ſunt notae in numeratore, atque ita habebitur numerus dato logarithmo proxime reſpondens. Nam logarithmus, cuius characteriſtica augetur vna, duabus, tribus etc. vnitatibus, euadit hoc ipſo logarithmus numeri eiusdem, cuius antea fuit, ſed iam multiplicati per 10, 100, 1000 etc. (240): ſi ergo huius producti valor diuidatur per 10, 100, 1000 etc. hoc eſt, ſi reſecentur a dextris vna, duae, tres etc. notae (59) habebitur numerus quaeſitus vna cum ſua fractione.

E. g. ſi quaeratur numerus reſpondens logarithmo 1, 5342678 habens adnexas duas notas fractionis, addantur characteriſticae vnitates duae, vt ſit 3, 5342678, eritque numerus eidem in tabulis proxime reſpondens 3422, e quo ſi duae poſtremae notae pro fractione reſecentur, obtinebitur numerus $34 \frac{22}{100} = 34,22$ a quaeſito ne vna quidem centeſima diſſidens. Si tres additae fuiſſent ad characteriſticam vnitates, inuentus fuiſſet numerus in tabulis maioribus, qui a quaeſito ne vna quidem milleſima differret, et ſic porro.

248. Coroll. 2. Si logarithmus datus excedat omnes eos, qui in tabulis continentur, ab eo ſubtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000 etc. donec relinquatur logarithmus minor, quam ſit vltimus in tabulis: quaeratur deinde numerus huic reſiduo reſpondens in tabulis, ac multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000 etc. factum erit numerus quaeſitus. Numerus enim huic reſiduo reſpondens eſt numerus quaeſitus per 10, vel 100, vel 1000 etc diuiſus (241); ergo ſi diuiſio tollatur contraria multiplicatione obtinebitur ipſe numerus quaeſitus.

E. g. Quaeratur numerus reſpondens logarithmo 6,6872682: ſubtrahatur ex eo logarithmus numeri 1000, qui eſt 3,0000000, reſtabit 3,6872682, cui proxime reſpondet in tabulis numerus 4867, qui ductus in 1000 dabit numerum proxime quaeſitum 4867000.

249. Problema. *Inuenire logarithmum numeri habentis adnexam fractionem decimalem, ſeu cuius denominator eſt 1 cum vno, vel pluribus zeris.*

Resol. Quaeratur logarithmus conueniens dato numero ita conſiderato, ac ſi cum notis fractionis conſtitueret vnum numerum integrum; deinde a logarithmi reperti characteriſtica demantur tot vnitates, quot habet notas fractio numero adiecta; obtinebitur logarithmus quaesitus (247).

E. g. Quaeratur logarithmus respondens numero 23 $\frac{42}{100}$ seu 23, 42: consideretur is quasi esset 2342, cuius logarithmus est 3, 3695869, e cuius characteristica si tollantur duae vnitates, restabit numeri dati logarithmus 1,3695869.

250. PROBLEMA. *Inuenire logarithmum numeri maioris, quam sint ii, quorum logarithmi habentur in tabulis.*

RESOLVT. 1) Resecentur a dextris numeri dati tot notae, quot vnitatibus excedit characteristica logarithmi dato numero respondentis (245) characteristicam maximam in tabulis, et quaeratur logarithmus reliquarum notarum in tabulis, isque a proxime maiori subducatur, et notetur prima haec differentia, cui respondet differentia numerorum logarithmis illis in tabula respondentium, quae erit 10, vel 100, vel 1000 etc. prout vna, vel duae, vel tres etc. notae e dato numero resectae sunt.

2) Fiat deinde haec proportio: vt 10, vel 100, vel 1000 etc. ad differentiam logarithmorum supra inuentam, ita notae a numero dato resectae ad differentiam, qua logarithmus quaesitus superat proxime minorem in tabulis: quare si haec inuenta addatur logarithmo illi minori, et characteristica prior restituatur, habebitur logarithmus quaesitus. Nam differentiae duorum logarithmorum contiguorum sub quauis characteristica sunt aequales quantum ad praxes

ordinarias attinet, licet haec aequalitas reapſe non habeatur.

EXEMPLA.

I. *Quaeratur logarithmus numeri* 3647093 *ſuperantis omnes eos, quorum logarithmi habentur in tabulis.*

Cum characteriſtica logarithmi numero huic reſpondentis ſit 6 (245), et maxima characteriſtica in tabulis ſit 4, e dato numero reſecentur duae dextimae notae 93, erit reliquarum 36470 logarithmus in tabulis 4,5619357, et logarithmus proxime maior 4,5619476, adeoque differentia logarithmorum = 119: vnde ſtabit haec proportio: 100 : 119 = 93 : x, eritque $x = 111$; quare ſi hic valor addatur logarithmo minori 4,5619357, et characteriſtica 6 reſtituatur, obtinebitur logarithmus numeri propoſiti 6,5619468.

II. *Quaeratur logarithmus numeri* 92375, *ac ſit in tabulis minoribus maxima characteriſtica* 3.

Cum propoſiti numeri characteriſtica ſit 4 (245), reſecetur e dato numero a dextris vna nota, erit reliquarum 9237 logarithmus in tabulis 3,9655309, qui ſubductus e proxime maiore 3,9655780 relinquit differentiam 471; quare haec ſtabit proportio: 10: 471 = 5: x, id eſt 2: 471 = 1: x (209), vnde $x = 235$: ſi ergo hic valor addatur logarithmo minori 3, 9655309, et characteriſtica 4 reſtituatur, obtinebitur logarithmus numeri propoſiti 4, 9655544.

251. PROBLEMA. *Inuenire logarithmum fractionis, cuius numerator minor eſt denominatore.*

RESOLVT. Logarithmus numeratoris ſubtrahatur a logarithmo denominatoris, reſiduum praefixo ſigno — erit logarithmus quaeſitus. Cum enim fractio ſit quotus e diuiſione numeratoris per denominatorem oriundus (65), eius logarithmus habetur, ſi logarithmus denominatoris ſubtrahatur a logarithmo numeratoris (241), ſeu ſi mutato ſigno eidem addatur, quo in caſu differentia euadit negatiua (37).

E. g. ſi quaeratur logarithmus fractionis $\frac{5}{8}$, e logarithmo denominatoris, qui eſt 0, 9030900, ſubtrahendus eſt logarithmus numeratoris 0, 6989700, ac reſiduum — 0, 2041200 cum ſigno — erit logarithmus quaeſitus.

252. COROLL. 1. Cum ergo logarithmus vnitatis meris zeris conſtet, omnes fractiones, quarum numerator eſt 1, habent pro logarithmo denominatoris logarithmum, ſed cum ſigno —.

253. COROLL. 2. Si numerator fractionis maior fuerit denominatore, eius logarithmus poſitiuus erit: obtinetur enim, ſi a logarithmo numeratoris maiore ſubtrahatur logarithmus minor denominatoris (241).

254. COROLL. 3. Si integro adhaereat fractio, poteſt totus numerus reduci ad fractionem impropriam (78), atque ita eius logarithmus inueniri. E. g. numeri $9\frac{1}{3} = \frac{28}{3}$ logarithmus eſt $1,4471580 - 0,4771212 = 0,9700368$.

255. COROLL. 4. Dato logarithmo negatiuo facile inuenitur fractio respondens, si quaeratur numerus eiusdem logarithmi positiui, et hic tanquam denominator vnitati subscribatur (252). E.g. si detur logarithmus — 1, 8260748, fractio eidem respondens erit $\frac{1}{67}$.

256. COROLL. 5. Idem obtinebitur, si dato logarithmo negatiuo addatur logarithmus vltimus in tabulis respondens numero 10000, aut 100000, seu si ille ab hoc subtrahatur, et residuo respondens numerus quaeratur (246): erit enim ille numerus fractionis quaesitae numerator, ac 10000, vel 100000 denominator. Nam sit illa fractio $= f$, numerator $= n$, denominator $= d$, numerus residuo illi respondens $= x$, cum fractio sit quotus e diuisione numeratoris per denominatorem oriundus (65), erit vnitas ad eam vt denominator ad numeratorem, seu $1 : f = d : n$ (52); atqui cum ea logarithmorum additione fractio quaesita multiplicetur per 10000, vel per 100000, (240), erit vnitas ad eandem fractionem vt 10000, vel 100000 ad numerum residuo logarithmo respondentem seu $1 : f = 10000 : x$ (47): ergo $d : n = 10000 : x$, quare si d ponatur $= 10000$, erit $n = x$.

CAPVT V.

De Seriebus.

257. *Series* eſt ordo quantitatum certa aliqua, et conſtanti lege ſeſe excipientium. E. g. progreſſiones arithmeticae, et geometricae ſunt ſeries; nam termini earum conſtanter iuxta eandem differentiam, aut exponentem progrediuntur.

258. Series *finita* dicitur, ſi numerus terminorum finitus; *infinita*, ſi hic infinitus eſt.

259. COROLL. 1. Si in ſerie infinita occurrat terminus quiſpiam infinite magnus, qualis in progreſſione arithmetica eſt $a + \infty d$, in geometrica am^{∞}, ceteri termini infinitam habentes magnitudinem cum eo collati euaneſcunt, ac proinde nihilo aequales poni poſſunt. E. g. $a^{\infty} + a^2 = a^{\infty}$; $\infty m - 4m = \infty m$.

260. COROLL. 2. Similiter ipſi termini infinite magni collati cum infinities infinite magnis, et hi ipſi collati cum infinities infinities infinite magnis, ſeu generatim omnis magnitudo infinita inferioris ordinis collata cum magnitudine infinita ſuperioris ordinis euaneſcit, atque adeo nihilo aequalis poni poteſt. E. g. $3\infty^2 + 2\infty = 3\infty^2$; $\frac{1}{4}\infty^4 - 5\infty^3 = \frac{1}{4}\infty^4$.

261. COROLL. 3. Eodem modo termini infinite parui collati cum finitis euaneſcunt. E. g. $2a + \frac{a}{\infty} = 2a$; eſt enim fractio habens nume-

ratorem finitum, denominatorem infinitum infinite parua (70).

262. COROLL. 4. Imo etiam quantitas infinities infinite parua respectu infinite paruae, et quantitas infinities infinities infinite parua respectu infinities infinite paruae, seu generatim omnis paruitas infinita superioris ordinis euanescit respectu paruitatis infinitae inferioris ordinis. E. g. $\frac{1}{\infty 3} - \frac{3}{\infty 2} + \frac{2a}{3\infty} = \frac{2a}{3\infty}$.

SCHOLION. Innumerabiles haberi possunt serierum species. Nos hic de iis tantum agemus, quarum vsus in sequentibus erit necessarius. Quare series numerorum figuratorum, et polygonorum praetermittemus: series contra potentiarum pertractabimus.

263. PROBLEMA. *Inuenire summam fractionum infinitarum, quarum numerator constans est, denominatores autem crescunt in progressione geometrica.*

RESOLVT. Quiuis numerator constans potest adpellari d, et quaeuis progressio geometrica crescens bene repraesentatur hac formula, b, bm, bm^2, bm^3, $- - - - bm^\infty$ (232): ergo quaeuis eiusmodi fractionum series repraesentari potest hac formula, $\frac{d}{b}$, $\frac{d}{bm}$, $\frac{d}{bm^2}$, $\frac{d}{bm^3}$ $- - - -$ $\frac{d}{bm^\infty}$. Iam cum in his fractionibus manente eodem numeratore denominatores crescant in progressione geometrica, fractiones decrescunt in progressione geometrica (70): ergo vt creſcant, debent inuerti hoc modo: $\frac{d}{bm^{\infty}}$ - - $\frac{d}{bm^3}$, $\frac{d}{bm^2}$, $\frac{d}{bm}$, $\frac{d}{b}$: eſt autem in eiusmodi progreſſione ſumma $s = \frac{\omega m - a}{m - 1}$ (235): ſi ergo pro ω ponatur terminus vltimus $\frac{d}{b}$, et terminus primus a, ſeu $\frac{d}{bm^{\infty}}$ negligatur (261), erit $s = \frac{dm}{bm - b}$.

264. PROBLEMA. *Inuenire ſummam infinitarum fractionum, quarum numeratores creſcant in progreſſione arithmetica, denominatores in geometrica.*

RESOLVT. Quaeuis progreſſio arithmetica creſcens bene repraeſentatur hac formula, a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ etc. (225), et quaeuis geometrica creſcens hac formula, b, bm, bm^2, bm^3 etc, (232): ergo quaeuis eiusmodi fractionum ſeries repraeſentari poteſt hac formula: $\frac{a}{b}$, $\frac{a+d}{bm}$, $\frac{a+2d}{bm^2}$, $\frac{a+3d}{bm^3}$ etc. Scribantur ſinguli termini ſeorſim hoc modo: $\frac{a}{b} \Big| \frac{a}{bm} + \frac{d}{bm} \Big|$ $\frac{a}{bm^2} + \frac{d}{bm^2} + \frac{d}{bm^2} \Big| \frac{a}{bm^3} + \frac{d}{bm^3} + \frac{d}{bm^3} + \frac{d}{bm^3} \Big|$ + etc. Deinde colligantur in vnam ſummam omnes termini primi, omnes ſecundi, omnes terti etc. adeoque ſcribantur in vna ſerie omnes termini primi, in altera omnes ſecundi, in tertia omnes tertii etc. naſcentur inde hae ſeries particulares:

$$\frac{a}{b},\ \frac{a}{bm},\ \frac{a}{bm^2}\ \frac{a}{bm^3} --- \frac{a}{bm^\infty},\ \text{cuius ſumma}$$

$$= \frac{am}{bm-b}\ (263)$$

$$\frac{d}{bm},\ \frac{d}{bm^2},\ \frac{d}{bm^3} ---- \frac{d}{bm^\infty}\ \text{cuius ſumma}$$

$$= \frac{d}{bm-b}\ (\text{cit.})$$

$$\frac{d}{bm^2},\ \frac{d}{bm^3} ------ \frac{d}{bm^\infty}\ \text{cuius ſumma}$$

$$= \frac{d}{bm^2-bm}\ (\text{cit.})$$

$$\frac{d}{bm^3} ----------- \frac{d}{bm^\infty}\ \text{cuius ſumma}$$

$$= \frac{d}{bm^3-bm^2}\ \text{etc. (cit.)}$$

Perſpicuum vero eſt has ſummas particulares, excepta prima, conſtituere ſeriem fractionum infinitarum quarum numerator d eſt conſtans, denominatores autem creſcunt in progreſſione geometrica, cuius exponens eſt m: erit ergo huius ſeriei ſumma, id eſt ſumma omnium terminorum ſecundorum, tertiorum, quartorum etc. $= \frac{dm}{bm^2 - 2bm + b}$ (263), cui ſi addatur ſumma primae ſeriei, ſeu omnium terminorum primorum

$\frac{am}{lm - b}$, erit facta ad eundem denominatorem reductione (quod fiet multiplicando posterioris fractionis terminos per $m - 1$) summa totius seriei propositae $= \frac{am^2 - am + dm}{bm^2 - 2bm + b}$.

265. PROBLEMA. *Inuenire theoremata generalia pro quauis potentia termini vltimi numerorum naturalium seriem finitam constituentium.*

RESOLVT. Numeri naturales quotcunque bene repraesentantur per a, b, c, d, e, qui quoniam vnitate inter se differunt, erit $e = d + 1$; $d = c + 1$; $c = b + 1$; $b = a + 1$; eleuatis ergo his terminis ad potentias ordine sese excipientes, erit

$e^2 = d^2 + 2d + 1$	$e^3 = d^3 + 3d^2 + 3d + 1$
$d^2 = c^2 + 2c + 1$	$d^3 = c^3 + 3c^2 + 3c + 1$
$c^2 = b^2 + 2b + 1$	$c^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1$
$b^2 = a^2 + 2a + 1$	$b^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

$$e^4 = d^4 + 4d^3 + 6d^2 + 4d + 1$$
$$d^4 = c^4 + 4c^3 + 6c^2 + 4c + 1$$
$$c^4 = b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1$$
$$b^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$$

Quodsi iam in valore potentiarum termini vltimi e^2, e, e^4 aequalibus aequalia substituantur, nempe loco primi termini d^2, d^3, d^4 ponatur series sequens eidem aequalis, loco primi sequentis c^2, c^3, c^4 tertia, loco primi tertiae b^2, b^3, b^4 quarta, erit

$$\begin{array}{r|r}
e^2 = 2d + 1 & e^3 = 3d^2 + 3d + 1 \\
+ 2c + 1 & + 3c^2 + 3c + 1 \\
+ 2b + 1 & + 3b^2 + 3b + 1 \\
a^2 + 2a + 1 & a^3 + 3a^2 + 3a + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
e^4 = 4d^3 + 6d^2 + 4d + 1 \\
+ 4c^3 + 6c^2 + 4c + 1 \\
+ 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1 \\
a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1
\end{array}$$

Hoc eſt; 1) Quadratum termini vltimi conſtat quadrato termini primi, duplo omnium terminorum praecedentium, ac numero eorundem. 2) Cubus termini vltimi conſtat cubo termini primi, triplo quadrato terminorum praecedentium, triplo terminorum praecedentium, ac numero eorundem. 3) Potentia quarta conſtat potentia quarta termini primi, quadruplo cubo terminorum praecedentium, ſextuplo quadrato eorundem, quadruplo eorundem, ac denique numero eorundem. Patet haec theoremata ad quasuis potentias eadem ratione extendi poſſe.

266. Coroll. Si ergo in ſerie numerorum naturalium terminus primus ſit $= a$, vltimus $= \omega$, ſumma ſeriei $= s$, erit ſumma terminorum vltimum praecedentium $= s - \omega$, numerus eorundem $= \omega - a$, ſumma quadratorum eorundem $s^2 - \omega^2$, ſumma cuborum $s^3 - \omega^3$; hinc priora theoremata facta ſubſtitutione, et adhibita reductione ſequentibus formulis exhibebuntur:

1) $\omega^2 = a^2 + 2s - \omega - a.$

2) $\omega^3 = a^3 + 3s -^2 3\omega^2 + 3s - 2\omega - a$

3) $\omega^4 = a^4 + 4s^3 - 4\omega^3 + 6s^2 - 6\omega^2 + 4s$
$- 3\omega - a.$

267. PROBLEMA. *Inuenire ſummam potentiarum numerorum naturalium ſeriem infinitam conſtituentium.*

RESOLVT. 1) Primum inueniatur ſumma primarum potentiarum, ſeu ipſorum numerorum naturalium ſeriem finitam conſtituentium, ſeu in formula prima ſuperiore quaeratur valor ſummae s, erit $s = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a.$ Quia vero ſeries infinita eſt, erit terminus vltimus $\omega = \infty$; hoc ergo valore ſubſtituto erit $s = \frac{1}{2}\infty^2 + \frac{1}{2}\infty - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\infty^2$ (259, 260) $= \frac{\infty \times \infty}{2}.$

2) Deinde inueniatur ſumma quadratorum numerorum naturalium ſeriem finitam conſtituentium, ſeu in formula ſecunda quaeratur ſumma quadratorum s^2, et ſimul pro s ſubſtituatur $\frac{1}{2}\infty^2$, erit $s^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \omega^2 - \frac{1}{2}\infty^2 + \frac{2}{3}\omega - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a$, ac pro ω ponendo ∞, erit $s^2 = \frac{1}{3}\infty^3 + \infty^2 - \frac{1}{2}\infty^2 + \frac{2}{3}\infty - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}\infty^3$
$= \frac{\infty^2 \times \infty}{3}.$

3) Denique inueniatur ſumma cuborum numerorum naturalium ſeriem finitam conſtituentium, ſeu in formula tertia quaeratur ſumma cuborum s^3, et pro s, ac s^2 ſubſtituantur valores iam reperti $\frac{1}{2}\infty^2$ et $\frac{1}{3}\infty^3$, erit $s^3 = \frac{1}{4}\omega^4$

$+ \omega^3 - \frac{1}{2} \infty^3 + \frac{3}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\infty^2 + \frac{3}{4}\omega - \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{4}a$; ac pro ω ponendo ∞, erit $s^3 = \frac{1}{4}\infty^4 + \infty^3 - \frac{1}{2}\infty^3 + \frac{3}{2}\infty^2 - \frac{1}{2}\infty^2 + \frac{3}{4}\infty - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}\infty^4 = \frac{\infty^3 \times \infty}{4}$. Habemus ergo has formulas:

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{\infty \times \infty}{2} \\ s^2 &= \frac{\infty^2 \times \infty}{3} \\ s^3 &= \frac{\infty^3 \times \infty}{4} \end{aligned}\right\} \text{ Generatim } s^m = \frac{\infty^m \times \infty}{m+1}$$

Quare confiderata lege, qua hae formulae progrediuntur, facile eruuntur fequentia theoremata:

1) Summa numerorum naturalium feriem infinitam conftituentium aequatur facto ex termino vltimo in numerum terminorum diuifo per 2.

2) Summa quadratorum aequatur facto ex quadrato termini vltimi in numerum terminorum diuifo per 3.

3) Summa cuborum aequatur facto ex cubo termini vltimi in numerum terminorum diuifo per 4.

4) Generatim fumma quarumuis potentiarum aequatur facto ex eadem potentia termini vltimi in numerum terminorum diuifo per exponentem potentiarum vnitate auctum.

268. PROBLEMA. *Inuenire summam radicum numerorum naturalium seriem infinitam constituentium.*

RESOLVT. Ex praecedente problemate habetur $s^m = \frac{\infty^m \times \infty}{m+1}$: si ergo loco m ponatur $\frac{1}{2}$, eadem formula repraesentabit summam radicum quadratarum; si pro m ponatur $\frac{1}{3}$, repraesentabit summam radicum cubicarum etc. (102) enascentur igitur hae formulae:

$$\left.\begin{array}{l} s^{\frac{1}{2}} = \sqrt{s} = \frac{2}{3}\infty^{\frac{1}{2}}\times\infty \\ s^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{s} = \frac{3}{4}\infty^{\frac{1}{3}}\times\infty \\ s^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{s} = \frac{4}{5}\infty^{\frac{1}{4}}\times\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Generatim} \\ s^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{s}\end{array}$$

$$= \frac{m}{m+1}\,\infty^{\frac{1}{m}}\times\infty.$$

Hinc autem eruuntur sequentia theoremata.

1) Summa radicum quadratarum numerorum naturalium seriem infinitam constituentium aequatur duabus tertiis partibus facti ex radice quadrata termini vltimi in numerum terminorum.

2) Summa radicum cubicarum aequatur tribus quartis partibus facti ex radice cubica termini vltimi in numerum terminorum.

2) Summa radicum quartarum aequatur quatuor quintis partibus facti ex radice quarta termini vltimi numerum terminorum.

4) Generatim summa quarumuis radicum aequatur fractioni habenti pro numeratore exponentem radicum, pro denominatore eundem exponentem vnitate auctum, ductae in eandem radicem termini vltimi, et in numerum terminorum.

Finis Elementorum Algebrae.

ELEMENTA GEOMETRIAE.

PROLEGOMENON.

269.

Geometria est scientia demonstrans proprietates quantitatis continuae, seu extensae.

270 Coroll. Quantitas extensa tres habere potest dimensiones, nimirum in longum, latum, et profundum. Quare geometria omnis aptissime tribuetur in partes totidem, quarum prima complectatur solam extensi longitudinem; altera eandem iunctam latitudini; postrema omnes tres simul dimensiones.

271. *Punctum* adpellatur, cuius pars nulla omnino eſt. *Linea* eſt longitudo absque vlla latitudine, et profunditate. *Superficies* eſt longitudo ſimul et latitudo absque vlla profunditate. *Solidum* denique, vel *corpus* eſt, quod patet in longum, latum, et profundum.

Fig. 2. SCHOLION. Vt vis harum definitionum perſpicue intelligatur, fingamus tabellam AB probe expolitam, cuius pars C imbuta ſit colore albo, D nigro, E rubro, F ceruleo. Limes KL exhibebit notionem lineae vtpote ſolam habens longitudinem absque vlla latitudine: nam ſi in partem alterutram tantulum declines, non iam in colorum limite, ſed in colore alterutro conſiſtes. Concurſio limitum KL et GH in I puncti ideam ſuggeret; neque enim vllam habet longitudinem, vel latitudinem. Quodſi tabella AB aliquam habeat craſſitudinem, limes interius dirimens partes C et D, ſiue ſectio iuxta rectam KI facta habebit longitudinem KI, et ſimul tantam latitudinem, quanta eſt tabellae craſſitudo: at profunditate prorſus carebit, et hinc ſuperficiem repraeſentabit.

272. Si punctum continuo motu fluere cogitetur, eo fluxu generabit lineam ſola longitudine gaudentem: linea ductu transuerſo mota gignet ſuperficiem: haec eodem motu ſolidum efficiet.

273. COROLL. I. Si punctum ita moueatur, vt in nullam partem deflectat, via eiusdem erit linea *recta*: ſin autem a via recta momentis ſingulis declinet, *curua* erit linea, quam percurret.

274. COROLL. 2. Adparet ergo lineam rectam esse omnium breuissimam, quae inter duo puncta duci possunt, et hinc aptissime exhibere eorundem inter se distantiam.

275. COROLL. 3. Non minus perspicuum est data duo puncta positione sua lineae rectae situm determinare; adeoque ab vno puncto ad aliud nonnisi vnicam rectam duci posse.

276. COROLL. 4. Denique non posse duas rectas se interfecare nisi in vnico puncto; secus haberent duo puncta communia, adeoque per duo puncta duae rectae ducerentur.

277. Si linea recta AB circa medium sui punctum immotum conuertatur relicto in situ AB sui vestigio, cum ad quamcumque aliam positionem *ab* deuenerit, inclinabitur ad situm pristinum AB in punctis *o*, et *x*, quae duarum rectarum ad sese inclinatio *angulus* nuncupatur; cuius magnitudo non a laterum CA et C*a* quantitate, sed a sola eorundem diuaricatione pendet. Fig. 3.

278. COROLL. Duo anguli AC*a*, *a*CB, quos recta *a*C alteri AB insistens vtrinque facit, vocantur *contigui*, vel *deinceps positi*: anguli autem *o* et *x*, vel anguli *a*CB, AC*b*, quos rectae AB et *ab* se in C interfecantes versus plagas oppositas efficiunt, *verticales*, aut ad *verticem oppositi* adpellantur.

279. Quum peracta dimidia conuersione punctum A peruenerit ad locum B, et punctum B ad locum A, recta mobilis AB verret interea spatium linea curua continua AαBβA conclusum, quod *circulus* dicitur, ipsa autem illa curua eius-

dem *peripheria*, punctum conuerſionis C *centrum*, pars quaeuis peripheriae A*a*, vel αB *arcus*, recta AB *diameter*, eius dimidium CA vel CB *ſemidiameter*, vel *radius*; generatim omnes rectae, quarum extrema in peripheria terminantur, *chordae*, vel *ſubtenſae*, ſpatium arcu et chorda comprehenſum *ſegmentum*, ſpatium duobus radiis et arcu concluſum *ſector* circuli nominatur.

280. COROLL. 1. Dum ea conuerſione circulus gignitur, eadem recta AB circa centrum C reuolui, adeoque omnes poſitiones *ab*, $\alpha\beta$ etc. ſucceſſiue obtinere concipitur: palam ergo eſt in eodem circulo omnes diametros ac proinde etiam omnes radios aequales eſſe: et hinc omnia puncta peripheriae a centro aeque diſtare (274): peripheriam item a diametro in duas aequales partes diuidi.

281. COROLL. 2. Circuli aequales ſibi debite impoſiti perfecte congruunt, et inſtar vnius haberi poſſunt: congruunt ergo etiam eorum radii, et diametri; quare in circulis aequalibus radii, ac diametri aequales ſunt.

SCHOLION. Circuli cuiusuis peripheria diuidi ſolet in 360 aequales partes, quae *gradus* adpellantur: gradus item ſinguli in 60 *minuta prima*, ac horum quoduis in 60 *minuta ſecunda*, et ſic porro. Partes autem iſtae breuitatis cauſſa hunc in modum ſcribuntur: $36^{\circ}, 48', 5'', 13'''$, etc. id eſt, 36 gradus; 48 minuta prima, 5 ſecunda, 13 tertia etc.

282. Dum recta mobilis AB receſſit ad ſitum *ab*, patet angulum *o*, vel *x* tanto maio-

rem, vel minorem fieri, quanto magis, vel minus recedit recta illa mobilis a situ AB, et hinc quantitatem huius recessus recte assumi pro mensura anguli; quantitas porro huius recessus coalescit ex summa progressuum momentaneorum, quos lineae mobilis quoduis punctum facit, quae summa rite exhibetur per arcum e vertice anguli tanquam centro inter anguli crura descriptum: ergo mensura anguli est eiusmodi arcus, cuius graduum numerus quantitatem anguli determinat.

283. COROLL. Omnes arcus Aa, Dd ex eodem anguli vertice intra eiusdem latera descripti totidem gradus continent, ac proinde pro anguli mensura assumi possunt. Si enim peripheria circuli maioris concipiatur diuisa in quotcunque partes aequales Aa, $a\alpha$ ductis a centro radiis Ca, $C\alpha$, iidem radii etiam peripheriam circuli minoris secabunt in totidem partes aequales Dd, $d\delta$: nam si sector ACa circa radium Ca conuertatur, arcus Aa congruet cum aequali $a\alpha$; ergo etiam arcus Dd congruet cum $d\delta$, et dum arcus Aa percursa tota peripheria redibit ad situm pristinum Aa, etiam arcus Dd redibit ad situm Dd: hinc quoties arcus Aa continetur in peripheria circuli maioris, seu in gradibus 360, toties etiam continetur arcus Dd in peripheria circuli minoris, seu in gradibus 360, ac proinde ambo totidem numero gradus tametsi magnitudine inaequales continent.

284. Quando recta mobilis AB obtinet situm $\alpha\beta$, in quo ad neutram partem magis inclinatur, vocatur $\alpha\beta$ respectu AB *perpendicularis*; et anguli $AC\alpha$, $BC\alpha$, quos vtrinque facit, adpellantur *recti*; angulus ACa recto minor *acutus*, angulus aCB recto maior *obtusus* audit.

285. Coroll. 1. Recta $\alpha\beta$ in vnico illo situ ad neutram partem propendet: hinc ad rectam AB ex eodem puncto C nequit in eadem superficie erigi nisi vnica perpendicularis.

286. Coroll. 2. Dum recta mobilis ad situm perpendicularem peruenit, eius extremum A describit quadrantem circuli $A\alpha$, seu $90°$: ergo angulus rectus est $90°$ (282): adeoque angulus acutus minor, obtusus maior est 90 gradibus.

Scholion. In hisce principiis tota innititur geometria, quibus addimus nonnulla axiomata, quorum vsum et in algebra iam habuimus, et porro habebimus in sequentibus. 1) Quae eidem aequalia sunt, etiam inter se aequalia sunt: et quod vno aequalium maius, aut minus est, etiam altero maius, aut minus est. 2) Si aequalibus idem, vel aequalia addas, aut demas, manebunt aequalia. 3) Si duae quantitates tertiam quampiam praecise totidem vicibus contineant, vel in eadem contineantur, aequales sunt: hinc aequalia manent aequalia, si per eandem quantitatem multiplicentur, aut diuidantur. 4) Duae quantitates, quae sibi impositae perfecte congruunt, aequales sunt; et con-

contra lineae aequales ſibi impoſitae congruunt. 5) Totum aequatur omnibus ſuis partibus ſimul, maius autem eſt ſingulis.

His accedunt quaedam poſtulata, quae fieri poſſe nemo non videt. 1) Ab vno puncto dato ad aliud datum poſſe duci lineam rectam. 2) Rectam quamuis poſſe vtrinque indefinite produci. 3) Per datum punctum poſſe duci rectam, quae a data recta vbique aequaliter diſtet. 3) E dato rectae puncto poſſe erigi, vel e dato extra rectam puncto poſſe demitti lineam perpendicularem. 5) Quamuis rectam finitam poſſe in duas aequales partes diuidi.

SECTIO I.

DE LINEIS ET ANGVLIS.

CAPVT I.

De lineis rectis ad se inuicem comparatis.

287. THEOREMA. *Anguli contigui* o, *et* m *quos recta* CD *alteri* AB *insistens*
Fig. 4. *vtrinque facit, simul continent* 180°, *ac proinde aequiualent duobus rectis.*

DEMONSTR. Demonstrationis caussa e communi angulorum vertice tanquam centro describatur supra rectam AB semiperipheria circuli ACB; angulum *o* mensurabit arcus AC, angulum *m* arcus CB (202); ergo vtrumque simul mensurabit arcus $AC + CB$: sed $AC + CB = 180^\circ$: ergo etiam $o + m = 180^\circ$.

288. COROLL. 1. Eodem modo patet esse $o + n = 180^\circ$, $n + x = 180^\circ$, $x + m = 180^\circ$.

289. COROLL. 2. Si ergo angulus *o* rectus est, tres etiam reliquos rectos esse oportebit. Si *o* acutus est, angulum contiguum *m* obtusum esse; si *o* obtusus est, eundem angulum *m* acutum esse necesse est (284).

290. COROLL. 3. Si duo quiuis anguli contigui in partes quotcunque diuidantur, perſpicuum eſt, omnes illos ſimul continere 180°; ſemper enim claudi poterunt, atque adeo menſurabuntur ſemiperipheria circuli.

291. COROLL. 4. Omnes anguli o, m, x, n, qui circa idem punctum fieri poſſunt, ſimul continent 360°, ſeu aequiualent quatuor rectis; ſemper enim claudi poterunt, atque adeo menſurabuntur integra peripheria circuli.

292. THEOREMA. *Si recta* CD *alteram* AB *ſecet, anguli verticales* o *et* x, *item* m *et* n *aequales erunt.*

DEMONSTR. Nam $o+m=180^\circ$: et $x+m=180^\circ$ (287): ergo etiam $o+m=x+m$; quare tollendo ab aequalibus idem m, erit $o=x$. Eodem modo oſtenditur eſſe $m=n$.

293. COROLL. Si ergo e quatuor illis angulis vnus quispiam innoteſcat, ceteri eo ipſo innoteſcunt. E. g. ſi notus ſit angulus o, notus hoc ipſo erit eiusdem verticalis x; et ſi o a 180° tollatur, innoteſcet angulus m, et eius verticalis n.

294. THEOREMA. *Si recta* AC *ita inſiſtat alteri* GF, *vt duo eiusdem puncta quaecunque* A *et* C *aequaliter diſtent a duobus alterius punctis* G *et* F, *erit hoc ipſo* AC *ad* GF *perpendicularis.* Fig. 5.

DEMONSTR. Nam ex hypotheſi puncta A et C aequaliter diſtant a punctis G, et F; ſed duo puncta determinant ſitum totius rectae AC (275); ergo tota recta AC, ſeu omnia eius puncta indidem aequaliter diſtant, ac proinde recta AC in neutram partem magis inclinatur: est adeo perpendicularis (284).

295. COROLL. 1. Quoniam anguli *m* et *n* recti sunt (cit.), erunt etiam anguli *o* et C recti (287): ergo etiam pars producta CE erit ad GF perpendicularis (274).

296. COROLL. 2. Et quia anguli *m* et *o*, item *n* et C recti sunt; si recta AE est perpendicularis ad GF, erit haec vicissim perpendicularis ad AE (cit.).

297. THEOREMA. *Si recta* AE *perpendicularis sit ad* GF, *et habeat quodcunque punctum* C *aequaliter distans a duobus alterius punctis* B *et* D, *omnia eius puncta indidem hoc ipso aequaliter distabunt.*

DEMONSTR. Si enim aliquod eius punctum e. g. A non aequaliter distaret a punctis B, et D, recta AC in loco A non haberet eandem inclinationem versus B et D, quam habet in loco C, ac proinde contra hypothesim non esset perpendicularis: ergo si est perpendicularis, et habeat etc.

298. THEOREMA. *Si e puncto* A *ad rectam* GF *ducantur quotcunque lineae* AG, AB, AC *etc.* *et* AC *sit perpendicularis, erit ea omnium illarum breuissima.*

DEMONSTR. Producatur AC in E, ita vt CE fiat = AC, et ducantur rectae EG, EB. Cum ex hypothesi AE sit perpendicularis ad GF, vicissim GF est ad AE perpendicularis (296), habetque ex constr. punctum C aequaliter distans a punctis A et E; ergo omnia eius puncta, adeoque etiam puncta G et B indidem aequaliter distant (297), seu AG = EG, et

$AB = EB$. Iam $AG + EG$, item $AB + EB > AE$ (274): ergo etiam $\frac{AG + EG}{2}$, item $\frac{AB + EB}{2} > \frac{AE}{2}$; ſed $\frac{AG + EG}{2} = AG$, $\frac{AB + EB}{2} = AB$, $\frac{AE}{2} = AC$: ergo AG item $AB > AC$: ergo AC eſt omnium breuiſſima.

299. COROLL. 1. Igitur e dato puncto A ad eandem rectam GF nonniſi vnica perpendicularis duci poteſt, cum repugnet plures duci breuiſſimas.

300. COROLL. 2. Si recta AC fuerit breuiſſima omnium rectarum, quae ex puncto A ad eandem rectam GF duci poſſunt, eſt hoc ipſo perpendicularis: alias duci poſſet alia quaepiam perpendicularis e. g. AB, quae etiam eſſet breuiſſima (298), et hinc duae poſſent duci breuiſſimae, nempe AC et AB, quod abſurdum eſt.

301. COROLL. 3. Cum diſtantia puncti A a data recta GF debeat eſſe fixa, et determinata, eam legitime metimur ope perpendicularis AC, quae ſemper eſt vnica (299), adeoque fixa.

302. COROLL. 4. Si recta EF in vnico puncto A occurrat peripheriae circuli, et omnia cetera puncta habeat extra peripheriam, ſeu ſi circulum tangat, erit radius CA ad eam perpendicularis. Si enim recta EF tangit circulum in vnico puncto A, vnicum illud pun- Fig. 6.

ctum habet in peripheria circuli, et cetera omnia eius puncta B, D etc. sunt extra circuli peripheriam: ergo punctum A est omnium eius punctorum centro C viciniſſimum, ſeu minimam habet a centro C diſtantiam, quae eſt CA: ergo recta CA eſt omnium CB, CD etc. breuiſſima, adeoque perpendicularis (300).

303. Coroll. 5. Et viciſſim, ſi radius CA ad rectam EF perpendicularis ſit, tangit EF circulum in A. Nam ex hypotheſi CA eſt perpendicularis: ergo eſt omnium CB, CD etc. breuiſſima (298), ergo punctum A eſt omnium B, D etc. centro C viciniſſimum; atqui punctum A vtpote extremum radii CA eſt in peripheria circuli; ergo cetera omnia B, D etc. cum ſint a centro C remotiora, ſunt extra peripheriam; hinc rectae EF vnicum punctum A eſt in peripheria, cetera ſunt extra: ergo circulum in A tangit.

Fig. 7. 304. Problema. *Rectam finitam* AB *in duas aequales partes perpendiculariter ſecare.*

Resolvt. E punctis extremis A et B tanquam centris deſcribantur arcus in C et D ſeſe interſecantes, ac eorum interſectiones iungantur recta CD; haec datam rectam bifariam et perpendiculariter ſecabit in puncto I.

Demonstr. Cum enim ex conſtructione ductae rectae CB, CA, DB, DA ſint radii aequalium circulorum, ſunt aequales inter ſe (281), adeoque rectae CD duo puncta C et D aequaliter diſtant a punctis A et B (274): eſt ergo recta CD ad AB perpendicularis (294), et omnia eius puncta (297), adeoque etiam punctum I aequaliter diſtat a punctis A et B, hoc eſt, AI=IB.

305. PROBLEMA. *E dato rectae AD puncto I perpendicularem erigere.* Fig. 8.

RESOLVT. Capiantur circino ex puncto I ſegmenta IO, IE aequalia; deinde centris O et E apertura circini vltra I deſcribantur arcus ſeſe in puncto C interſecantes, vnde ad I ducta recta CI erit quaeſita perpendicularis.

DEMONSTR. Nam ex conſtr. punctum I aequaliter diſtat a punctis O et E; et ob radios OC et EC aequalium circulorum aequales, etiam punctum C indidem aequaliter diſtat: ergo recta CI ad AD perpendicularis eſt (294).

306. PROBLEMA. *E dato extra rectam AD puncto C perpendicularem ad eandem demittere.*

RESOLVT. Poſito crure circini in dato puncto C deſcribatur arcus OE ſecans datam rectam in punctis O et E: tum ex iis tanquam centris circino vltra dimidium rectae OE aperto ducantur arcus ſeſe interſecantes in puncto F, erit recta CI per puncta C et F ducta quaeſita perpendicularis.

DEMONSTR. Patet enim, vt ante, puncta C et F aequaliter diſtare a punctis O et E.

SCHOLION. In campo circini loco adhiberi ſolet catena, vel funis circa clauum fixum mobilis, et altero extremo ſtylo ferreo inſtructus, qui ad funem tenſum debet eſſe perpendicularis. Ne vero funis humore imbutus inaequaliter tendatur, funiculi, e quibus conſit, debent contorqueri in gyros contrarios, funis autem ipſe oleo bullienti immergi, et quum exſiccatus fuerit, per liquatam ceram traduci.

Fig. 9. 307. Rectae AB et CD, quae a ſe vbique aequaliter diſtant, etiamſi infinite producantur, *parallelae* vocantur.

308. COROLL. Quare perpendicula inter duas parallelas intercepta inter ſe aequalia ſunt: metiuntur enim earum inter ſe diſtantias (301).

309. THEOREMA. *Si duas parallelas* AB *et* CD *ſecet recta quaepiam* EF, *anguli* x internus *et* o externus *ad eandem partem aequales ſunt.*

DEMONSTR. Concipiatur enim primum recta CD rectae AC impoſita eſſe, ita vt anguli x et o congruant: tum ceteris immotis eadem CD ſitu conſtanter parallelo ſenſim deſcendere; euidens eſt eundem angulum x, qui ante cum angulo o congruebat, penes lineam EF deſcenſurum eſſe, ac proinde angulo o vbique aequalem fore. Nam ſicubi angulus x maior, aut minor fieret, ibi neceſſe eſſet rectam CD ad AB inclinari, et proinde a ſitu parallelo deflectere. Eodem modo patet eſſe $n = r$, $y = s$, $m = t$.

310. COROLL. 1. Si ergo angulus o rectus eſt, rectum etiam eſſe oportebit angulum x: quare recta vni parallelarum perpendicularis, eſt alteri quoque perpendicularis (284).

311. COROLL. 2. Quoniam $o = x$ (309), et idem $o = y$ (292), erit $x = y$: id eſt, ſi duae parallelae a tertia recta ſecentur, anguli *alterni* aequales ſunt. Eodem modo patet eſſe $m = n$.

312. COROLL. 3. Cum ſit $m + y = 180°$ (288), et $y = x$ (311), erit $m + x = 180°$: id eſt anguli *interni* ad eandem partem ſimul aequantur duobus rectis. Eadem ratione oſtenditur eſſe $y + n = 180°$.

313. THEOREMA. *Viciſſim ſi duae rectae* AB *et* CD *a tertia quapiam* EF *ſectae faciant vel* 1) *angulos internum* x, *et externum* o *aequales, vel* 2) *angulos alternos* y *et* x *aequales, vel* 3) *duos internos* m *et* x *ſimul duobus rectis aequales, rectae* AB *et* CD *parallelae ſunt.* Fig. 10.

DEMONSTR. Sit enim 1) $o = x$; ſi AB non eſſet parallela rectae CD, poſſet eidem per punctum o duci alia quaepiam parallela ab, et tunc eſſet $o + r = x$ (309): ſed etiam ponitur $o = x$: ergo eſſet $o + r = o$, quod abſurdum eſt. Eadem eſt demonſtratio ſi recta ab alium quemcunque ſitum habeat. Ergo nulla alia praeter AB poteſt duci per punctum o parallela rectae CD, ac proinde AB parallela eſt.

2) Si ponatur $y = x$, cum etiam ſit $y = o$ (292) erit $o = x$, et hinc per demonſtrata AB eſt parallela rectae CD.

3) Si ponatur $m + x = 180°$, cum ſit etiam $m + o = 180°$ (287) erit $x = o$, hinc rurſus AB et CD, vt ante, parallelae ſunt.

314. COROLL. 1. Demonſtratione praeſentis theorematis id quoque euidenter efficitur, eidem rectae CD per idem punctum o non poſſe duci niſi vnicam parallelam.

315. COROLL. 2. Ex adem patent diuerſi modi datae rectae per datum punctum paralle-

lam ducendi. Nos commodissimum infra proferemus.

Fig. 9. 316. COROLL. 3. Si rectae AB et CD parallelae fuerint eidem tertiae GH, erit $o = z$ et $x = z$ (309), ac hinc $o = x$: adeoque eaedem rectae etiam inter se parallelae erunt (313).

CAPVT II.

De lineis rectis ad circulum relatis.

317. THEOREMA. *Chordae aequales in eodem circulo aequales arcus subtendunt, ita scilicet, vt cum quaeuis chorda binos vtrinque subtendat arcus, bini minores aequentur inter se, et bini maiores inter se.*

Fig. 11. DEMONSTR. Cogitetur totus sector ACB circa centrum C tamdiu conuerti, donec chorda AB cadat supra ab; congruet illic chorda AB cum sibi aequali ab, et hinc congruent extrema puncta A et a, B et b arcuum AB et ab, item arcuum $AbaB$ et $aBAb$; quare et arcus ipsi congruent: hinc arcus AB erit $= ab$, item arcus $AbaB = aBAb$ (282): chordae ergo aequales arcus aequales subtendunt.

318. COROLL. 1. Quia perpendicularis Cd congruet, seu eadem erit cum CD (285), meturque distantiam chordae a centro (301), patet chordas aequales in eodem circulo a centro aeque distare.

319. COROLL. 2. Chordae ergo inaequales in eodem circulo ſubtendunt inaequales arcus, et inaequaliter diſtant a centro; nimirum maioribus chordis maior arcus et minor diſtantia reſpondet.

320. COROLL. 3. Viciſſim arcubus aequalibus aequales chordae; maioribus maiores; minoribus minores reſpondent. Et chordae a centro aeque diſtantes aequales; magis diſtantes minores; minus diſtantes maiores ſunt: adeoque diameter chordarum omnium maxima eſt, et peripheriam bifariam diuidit.

321. COROLL. 4. Quoniam duo circuli aequales ſibi impoſiti congruunt, et inſtar vnius haberi poſſunt, praeſens theorema cum ſuis corollariis etiam ad circulos aequales pertinet.

322. THEOREMA. *Si per chordam* AB *diametro minorem ducatur recta* GD, *et adſint duo quaeuis ex hiſce quinque*, 1) *quod recta* GD *per centrum tranſeat*, 2) *quod ad chordam perpendicularis ſit* 3) *quod eandem in* E *bifariam ſecet*, 4) *quod arcum* ADB *in* D, *aut* 5) *angulum* ACB *bifariam ſecet*, *ſemper aderunt reliqua tria.* Fig. 12.

DEMONSTR. 1) Tranſeat recta GD per centrum, et ſit ad chordam perpendicularis, habet hoc ipſo vnum punctum C a punctis A et B aequaliter diſtans (280): ergo etiam puncta E et D indidem aequaliter diſtant (297); hinc AE = EB, et chorda AD = DB, adeoque arcus AD = DB (317), et angulus $m = n$ (282).

2) Sit GD ad chordam perpendicularis, eamque in E bifariam ſecet, erit vt ante arcus AD

$= DE$, angulus $m = n$: et quia $m + ACG = 180°$, et $n + BCG = 180°$ (287), erit $m + ACG = n + BCG$, vnde $ACG = BCG$, adeoque etiam arcus $AG = BG$ (282): ergo addendo his aequalia AD et BD erit $DA + AG = DB + BG$: quare GD diameter eſt (320), et conſequenter per centrum tranſit.

3) Tranſeat recta GD per centrum, et bifariam ſecet chordam, vel arcum, vel angulum C, habebit in quouis caſu duo puncta aequaliter diſtantia ab A et B, vnde cetera omnia ſponte conſequuntur. Eodem modo patent cetera, ſi recta GD chordam, et arcum, vel angulum bifariam ſecet.

Fig. 13. 323. PROBLEMA. *Ducere circulum per data tria puncta* A, B, D *non in directum ſita.*

RESOLVT. Iungantur data puncta rectis AB et BD, quae bifariam ſecentur per rectas EF et GH perpendiculares (304), earum communis interſectio C erit centrum circuli per data tria puncta transeuntis.

DEMONSTR. Cum enim rectae AB et BD ſint chordae quaeſiti circuli (279), perpendiculares EF et GH ambae per eius centrum transeunt (322); atqui ſolum punctum C eſt, per quod ambae tranſeunt (276): ergo punctum C eſt centrum. Idem oſtendi poteſt etiam ex eo, quod punctum C aequaliter diſtet a punctis A, B, D (297).

324. COROLL. 1. Eodem res redit, ſi datus arcus ABD continuandus, vel dati circuli centrum inueniendum, vel dato triangulo circulus circumſcribendus ſit.

325. COROLL. 2. Centrum C in infinitum recedet, nec vsquam iam erit, ſi data tria puncta in directum iaceant: hinc recta, quae puncta illa iungit, quodammodo aequiualebit arcui circuli infinite magni.

326. COROLL. 3. Quoniam datis tribus punctis nonniſi vnicum inuenitur centrum circuli per ea tranſeuntis (276), ſi duorum circulorum tria peripheriae puncta congruant, congruent reliqua omnia. Hinc duo circuli nequeunt ſibi in tribus punctis occurrere.

327. PROBLEMA. *Datum arcum* AB *in duas partes aequales diuidere.* Fig. 14.

RESOLVT. Ducatur chorda AB, et haec per rectam ED ſecetur bifariam, et perpendiculariter (304): diuidet ea arcum in duas aequales partes (322).

328. COROLL. Si angulus C bifariam ſecandus ſit, ducatur ex eius vertice tanquam centro inter duo latera arcus AB, fiatque centris A et B interſectio duorum arcuum in D, recta per verticem C et punctum D ducta diuidet arcum AB, adeoque etiam angulum C in duas partes: erit enim recta CD ad chordam AB perpendicularis (294), et per centrum C tranſibit; quare angulum C bifariam ſecabit (322).

329. THEOREMA. *Si ex eodem puncto* A *extra circuli centrum aſſumto ducantur quotcunque rectae* AB, AD, AE *ad partem peripheriae concauam, omnium maxima erit* AB, *quae per centrum* C *tranſit; ceterae eo minores, quo magis receſſerint a recta per centrum tranſeunte.* Fig. 15.

DEMONSTR. Ductis enim radiis CD, CE, erit AB = AC + CD > AD; item AC + CE ſeu AB > AE (274): eſt ergo AB omnium maxima. Deinde CF + FD > CD > CE; igitur vtrinque tollendo idem CF, erit FD > FE: ergo vtrique addendo AF, erit AF + FD, ſeu AD > AF + FE: cumque AF + FE ſit > AE, a potiori AD > AE.

330. COROLL. 1. Quoniam inter eiusmodi rectas tangens AT maxime recedit ab AB, erit ea omnium minima.

331. COROLL. 2. Viciſſim ſi AB fuerit omnium maxima, tranſit per centrum. Si enim non tranſiret, poſſet duci alia per centrum tranſiens, quae per demonſtr. eſſet maior quam AB contra hypotheſim.

332. COROLL. 3. Item ſi fuerit AD > AE AD minus recedit ab AB, quam recedat AE: alias ſi AD non minus recederet, non eſſet maior quam AE per demonſtr.

333. COROLL. 4. Si AD = AH, ambae aequaliter recedunt ab AB; alias contra hypotheſim ea minor vel maior eſſet, quae magis, vel minus recederet per demonſtr. Et contra ſi aequaliter recedunt, aequales ſunt; ſi enim alterutra maior, vel minor eſſet contra hypotheſim minus vel magis recederet (332).

334. COROLL. 5. Quoniam tres rectae ab eodem puncto A ductae nequeunt aequaliter recedere a recta AB, fieri non poteſt, vt ab eodem puncto A, quod non ſit centrum, ad concauam circuli peripheriam tres rectae aequales ducantur.

335. THEOREMA. *Omnium rectarum ab eodem puncto A, quod non sit centrum, ductarum minima est AG, quae producta transit per centrum: ceterae eo maiores, quo ab hac magis recedunt.*

DEMONSTR. Ductis enim radiis CK, CO, si punctum A sit intra circulum, erit KA + AC > KC > GC (274), et tollendo vtrinque AC, erit AK > AG. Item Or + rC > OC > KC; ergo tollendo vtrinque idem rC, erit Or > Kr; atqui Kr + rA > KA: ergo etiam Or + rA, seu OA > KA. Si vero punctum A sit extra circulum, erit AK + KC > AC, et ablatis vtrinque aequalibus KC, et GC, erit AK > AG. Similiter AO + OC > AK + KC: ergo etiam ablatis aequalibus OC, et KC, erit AO > AK.

336. COROLL. 1. Eodem, quo supra vsi fuimus, ratiocinandi genere ex hoc theoremate concludere licebit sequentia. 1) Tangentem AT omnium huiusmodi rectarum maximam esse. 2) Si recta AG sit omnium minima, eam productam per centrum transire. 3) Quae earum maiores sunt, magis ab AG recedere. 4) Quae aequaliter recedunt, aequales esse, et contra. 5) Non posse ex eodem puncto A, quod non sit centrum, tres rectas aequales duci ad circuli peripheriam.

337. COROLL. 2. Si ergo duo circuli se exterius, vel interius tangant in puncto B, recta AB ex centro vnius A ad punctum contactus B ducta transibit per centrum alterius C. Cum enim circuli se tangant in vnico puncto B, recta AB est minima omnium, quae ex centro Fig. 16.

A ad alterius circuli peripheriam duci poſſunt: quare tranſibit per eius centrum C (336).

338. COROLL. 3. Itaque centra duorum circulorum ſe contingentium, et punctum contactus iacent in eadem recta.

339. COROLL. 4. Hinc punctum contactus B facile determinatur, ſi centra circulorum A et C per rectam AC productam, ſi neceſſe fuerit, connectantur.

Fig. 17. 340. THEOREMA. *Angulus* ATB, *qui fit in peripheria circuli a tangente* AT, *et chorda* TB, *habet pro menſura dimidium arcus* TDB *ab eadem chorda ſubtenſi.*

DEMONSTR. Ductis enim diametris Dd, et Ee, quarum prior ſit chordae TB perpendicularis, poſterior parallela, ac ducto radio CT, erit angulus $o + x = 90^\circ$ (302), et $n + y = r$ (309) $= 90^\circ$ (284): ergo $o + x = n + y$, et vtrinque tollendo x et y aequales (311) erit $o = n$; atqui n habet pro menſura arcum TD (282), qui eſt pars dimidia arcus TDB (322); ergo etiam o, ſeu angulus ATB eandem menſuram habet.

341. COROLL. Quoniam menſura angulorum ATB + BTa eſt ſemiperipheria DTd (287), et per demonſtr. anguli ATB menſura eſt arcus TD, erit anguli BTa menſura arcus Td, hoc eſt, dimidium arcus TdB a chorda TB ex ea parte ſubtenſi (322).

Fig. 18. 342. THEOREMA. *Angulus* x, *quem in peripheria circuli duae chordae* TB *et* TD *comprehendunt, habet pro menſura dimidium arcus* BD, *cui eiusdem crura inſiſtunt.*

DE-

DEMONSTR. Si enim concipiatur ducta tangens Aa, anguli $o+x+n$ habent pro mensura semiperipheriam circuli (290), seu arcus $\frac{1}{2}$ TB $+\frac{1}{2}$ BD $+\frac{1}{2}$ DT; atqui o habet pro sua mensura $\frac{1}{2}$ TB, et n habet $\frac{1}{2}$ TD (340): ergo pro x manet $\frac{1}{2}$ BD.

343. COROLL. Angulus ad centrum C duplus est anguli x ad peripheriam eidem arcui BD insistentis. Nam anguli C mensura est totus arcus BD (282); anguli x est $\frac{1}{2}$ BD (342).

344. COROLL. 2. Si anguli quotcunque ad peripheriam siti eidem arcui insistant, omnes inter se aequales sunt: quemlibet enim mensurat dimidium eiusdem arcus (342).

345. COROLL. 3. Si angulus ad peripheriam verticem habeat in semicirculo, cruribus insistit alteri semicirculo, adeoque pro mensura habet dimidiam semiperipheriam, seu 90°, consequenter rectus est.

346. COROLL. 4. In quauis figura quadrilatera circulo inscripta TBFD anguli oppositi T et F, item B et D simul habent 180°. Nam ambo simul insistunt toti peripheriae, adeoque pro mensura habent semiperipheriam (342).

347. COROLL. 5. Chordae parallelae AB et CD aequales arcus intercipiunt in eodem circulo. Ducta enim recta BC anguli alterni o et x aequales erunt (311): ergo etiam eorum mensurae, seu dimidii arcus AC et BD (342), adeoque et integri inter se aequales erunt. Vicissim si arcus hi aequales sunt, aequantur etiam eorum dimidia, ac proinde et anguli alterni o Fig. 19.

et x, quos ea menſurant; et hinc chordae parallelae ſunt (313).

348. COROLL. 6. Chorda CD, et tangens EF inter ſe parallelae aequales arcus intercipiunt. Ducta enim recta DG anguli alterni x et y aequabuntur vt ante; adeoque etiam dimidii arcus CG, DG eosdem menſurantes (340, 342), et hinc ipſi quoque integri aequales erunt. Viciſſim ſi arcus hi aequales ſint, chordam, et tangentem fore inter ſe parallelas demonſtratur, vt ante.

Fig. 20. 349. PROBLEMA. *Datae rectae* AB *per datum, vel aſſumtum punctum* G *parallelam ducere.*

RESOLVT. Infixo crure circini in dato puncto G deſcribatur ad libitum arcus indefinitus CF, ac centro F eodem radio FG arcus GE; interuallo GE ex arcu CF reſecetur ſegmentum FD, recta GD per puncta G et D ducta erit parallela petita. Nam arcus GE, et DF aequales habent ex conſtr. chordas, ac proinde et ipſi aequales ſunt (321): quare angulus $o = x$ (282), adeoque rectae AB et GD parallelae ſunt (313).

Fig. 21. 350. PROBLEMA. *In datae rectae* AB *extremo puncto* B *perpendicularem erigere.*

RESOLVT. Aſſumto ſupra datam rectam vbicunque centro C, radio CB deſcribatur circulus occurrens rectae datae, et ſi neceſſe ſit productae, in A: deinde ex A per centrum C ducatur diameter AD: et puncta B et D connectantur linea DB, erit ea perpendicularis petita. Erit enim angulus ABD rectus (345).

351. PROBLEMA. *Ad datum in peripheria circuli punctum* B *tangentem ducere.* Fig. 22.

RESOLVT. Ducatur ad datum punctum radius CB, ac in eius extremo B erigatur perpendicularis BA (350); erit AB tangens petita (303).

352. PROBLEMA. *E dato extra peripheriam puncto* A *tangentem ad circulum ducere.*

RESOLVT. Connectatur datum punctum cum centro C per rectam AC, ſupra quam tanquam diametrum deſcriptus ſemicirculus occurret dati circuli peripheriae alicubi in B: connectantur ergo puncta A et B per rectam AB, erit ea tangens petita. Nam ducto radio CB angulus ABC rectus erit (345), et hinc AB tangens (303).

353. THEOREMA. *Angulus* ATB, *qui in peripheria circuli fit a chorda* TB, *et alia recta* AT, *quae producta ſecat circulum, habet pro menſura ſemiſummam arcuum a latere* TB, *et* AT *producto ſubtenſorum.* Fig. 23.

DEMONSTR. Nam anguli ATB + BTD habent pro menſura ſemiperipheriam, ſeu arcus $\frac{1}{2}$ TB + $\frac{1}{2}$ BD + $\frac{1}{2}$ DT (287); ſed angulus BTD ſibi vendicat arcum $\frac{1}{2}$ BD (342): ergo pro angulo ATB remanet $\frac{1}{2}$ TB + $\frac{1}{2}$ DT.

354. THEOREMA. *Angulus* x, *cuius vertex eſt intra circuli peripheriam extra centrum, habet pro menſura ſemiſummam arcuum* DB *et* CE *a lateribus productis interceptorum.* Fig. 24.

DEMONSTR. Ducta enim chorda EF lateri CB parallela erit angulus $x = o$ (309); atqui angulus o habet pro menſura arcum $\frac{1}{2}$ DB + $\frac{1}{2}$

BF (342), seu ob arcum BF = CE (347) arcum $\frac{1}{2}$ DB + $\frac{1}{2}$ CE: ergo et angulus x.

355. COROLL. Eodem modo patet angulum DAC habere pro mensura arcum $\frac{1}{2}$ DC + $\frac{1}{2}$ BE; nam anguli A et x simul habent pro mensura arcus $\frac{1}{2}$ DC + $\frac{1}{2}$ DB + $\frac{1}{2}$ BE + $\frac{1}{2}$ CE (287); atqui x sibi vendicat arcum $\frac{1}{2}$ DB + $\frac{1}{2}$ CE (354): ergo pro angulo DAC remanet $\frac{1}{2}$ DC + $\frac{1}{2}$ BE.

Fig. 25. 356. THEOREMA. *Angulus* DAB, *cuius vertex est extra circuli peripheriam, habet pro mensura semidifferentiam arcuum* DB *et* CE *a lateribus interceptorum.*

DEMONSTR. Ducta enim chorda CF lateri AB parallela, erit angulus BAD = FCD (309); atqui angulus FCD habet pro mensura arcum $\frac{1}{2}$ DF (342): ergo et angulus BAD. Est autem DF = DB — FB = DB — CE (347): ergo aequalia diuidendo per 2, $\frac{1}{2}$ DF = $\frac{1}{2}$ DB — $\frac{1}{2}$ CE.

357. COROLL. Si latus AB circa punctum A moueatur, donec veniat ad situm A*b*, et euadat tangens, arcus CE abibit in CN, arcus DB in DN, punctis E et B in N coeuntibus: quare angulus *b*AD habebit pro mensura semidifferentiam arcuum DN et CN. Si etiam latus alterum A*d* euadat tangens, arcus CN abibit in MCN, et arcus DN in MDN: igitur angulus *b*A*d* habebit pro mensura semidifferentiam arcuum MDN et MCN.

SCHOLION. Ex his adparet angulum vbi demumcunque situm innotescere, si producta eiusdem crura peripheriae circuli in datis punctis occurrant. Adparet item angulum, cuius menſura eſt dimidium arcus a lateribus intercepti, habere verticem in peripheria eius circuli, ad quem arcus ille pertinet: verticem anguli, cuius menſura maior eſt, intra peripheriam eſſe extra centrum: anguli denique, cuius menſura minor eſt, verticem extra peripheriam conſiſtere.

CAPVT III.

De lineis rectis quatenus ſpatium claudunt.

358. E notione lineae rectae facile intelligitur ad ſpatium aliquod claudendum tribus minimum rectis opus eſſe. Spatium lineis clauſum *figura*, vel *polygonum* adpellatur, cuius *latera* ſunt ipſae illae lineae. Speciatim autem *trigonum*, ſeu *triangulum* dicitur ſpatium, quod tribus; *tetragonum*, ſeu *quadrilaterum*, quod quatuor: *pentagonum*, quod quinque; *hexagonum*, quod ſex etc. lateribus, ac angulis terminatur. Porro hae figurae *regulares* ſunt, ſi omnia latera, et angulos aequales habeant: ſecus *irregulares* dicuntur. *Similes* item ſunt, ſi angulos ſimiliter poſitos aequales. et latera proportionalia habeant.

359. Triangulum dicitur *aequilaterum*, ſi omnia tria latera habeat inter ſe aequalia: *iſoſceles*, ſeu *aequicrurum*, ſi duo; *ſcalenum* vero, ſi omnia tria latera ſint inaequalia. Item *rectangu-*

lum triangulum eſt, quod habet vnum angulum rectum, cui oppoſitum latus *hypotenuſa*; latera autem angulum ipſum rectum efficientia *catheti* nuncupantur. Denique triangula adpellantur *ſimilia*, ſi ſinguli anguli vnius aequentur ſingulis alterius; latera vero eorum angulis aequalibus oppoſita *homologa* audiunt.

360. THEOREMA. *In quouis triangulo tres anguli ſimul continent* 180°, *ſeu aequiualent duobus rectis.*

Fig. 26. DEMONSTR. Poteſt enim per cuiusuis trianguli vertices duci, ſeu circumſcribi circulus (324), et tunc tres angulos A, B, C menſurabunt dimidia trium arcuum BC, CA, AB (342), adeoque ſemiperipheria, ſeu 180°.

361. COROLL. 1. Nequit ergo in triangulo eſſe angulus rectus, aut obtuſus niſi vnicus, et tunc reliqui duo hoc ipſo acuti ſunt, ſecus tres anguli ſimul haberent plus quam 180°.

362. COROLL. 2. In quouis triangulo rectangulo duo anguli acuti ſimul ſemper habent 90°: hinc ſi vnus habeat 45°, totidem habebit alter.

363. COROLL. 3. Data ſumma duorum angulorum innoteſcit tertius, ſi nempe data ſumma ſubtrahatur a 180°: et dato vno angulo innoteſcit ſumma duorum reliquorum, ſi datus a 180° ſubtrahatur.

364. COROLL. 4. Si duo anguli cuiusdam trianguli aut ſinguli, aut ſimul ſumti aequentur duobus alterius aut ſingulis, aut ſimul ſumtis, etiam tertius aequabitur tertio.

365. COROLL. 5. Si ex angulo quopiam A demittatur in latus oppositum BC perpendicularis, ea cadet intra triangulum, si anguli B et C eidem lateri adhaerentes acuti fuerint. Sit enim, si fieri possit, perpendicularis AD extra triangulum, erit in triangulo ADC angulus D rectus, angulus DCA obtusus, cum eius contiguus supponatur acutus (287); atqui hoc absurdum est (361): ergo nequit perpendicularis cadere extra triangulum. Fig. 27.

366. COROLL. 6. Si vero alteruter eorum angulorum, e. g. C, obtusus fuerit, perpendicularis extra triangulum cadet. Si enim intra caderet e. g. in AD, in triangulo ADC angulus D rectus foret, C obtusus, quod absurdum est (361). Fig. 28.

367. THEOREMA. *Si in triangulo quouis ABC latus vnum BC producatur, angulus externus ACD aequabitur duobus internis oppositis A et B simul sumtis.* Fig. 26.

DEMONSTR. Nam circumscripto circulo (324) angulorum A + B mensura erit arcus $\frac{1}{2}$ BC + $\frac{1}{2}$ AC (342); quae eadem est etiam mensura anguli ACD (353).

368. THEOREMA. *In quouis triangulo angulo maiori maius, minori minus latus opponitur; et contra.*

DEMONSTR. Circumscripto enim circulo (324) sit B > A, erit arcus $\frac{1}{2}$ AC > $\frac{1}{2}$ BC (342), et hinc AC > BC: ergo et chorda seu latus AC > BC (320). Sit vicissim latus AC > BC, erit etiam arcus AC > BC (319), et hinc $\frac{1}{2}$ AC > $\frac{1}{2}$ BC, adeoque angulus B > A (342).

369. COROLL. 1. Si ergo in triangulo quopiam duo anguli aequales ſint, etiam latera iisdem oppoſita aequalia ſunt, et contra. Nan circumſcripto circulo ſit B = C, erit arcus $\frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2}$ AB (342), et hinc AC = AB, adeoque etiam latus AC = AB (320): et contra.

370. COROLL. 2. Quare in triangulo aequilatero omnes tres anguli aequales ſunt, continetque quilibet 60° (360), et contra. Item ſi in triangulo quopiam duo anguli aequales ſunt, illud eſt iſoſceles.

Fig. 29. 371. PROBLEMA. *Altitudinem acceſſam AB ope vmbrae metiri.*

RESOLVT. Obſeruetur momentum, quo ſol S ſupra horizontem ad altitudinem 45° ſublatus eſt, noteturque eo momento cuſpis C vmbrae BC in plano horizontali, erit longitudo vmbrae BC aequalis altitudini quaeſitae AB.

DEMONSTR. Cum enim angulus B ex natura altitudinis rectus ſit, et C ex hypotheſi 45°, erit etiam A 45° (362), et hinc AB = BC (370).

372. COROLL. 1. Siquis in turris faſtigio A poſitus vnum quadrantis aenei in ſuos gradus diuiſi radium ſtatuat perpendiculariter iuxta altitudinem AB, altero abſcindat arcum 45°, et iuxta eius ductum notet in terra punctum C, erit, vt ante, AB = BC.

373. COROLL. 2. Si radio mobili quadrantis abſcindatur arcus 45°, tum verſus C ita ſenſim recedatur, vt radio fixo, ac horizonti pa-

rallelo conſpiciatur punctum B, radio vero mobili punctum A, erit rurſus AB = BC.

SCHOLION. Altitudo ſolis 45° etiam obſeruari poteſt deſcribendo in plano horizontali circulum, inque eius centro erigendo perpendiculariter ſtylum aequalem radio. Nam quum vmbra ſtyli huius praeciſe attigerit circuli peripheriam, erit tunc ſol 45° ſupra horizontem elatus. Cum enim tunc ſtylus AB vmbrae ſuae BC aequalis ſit (286), etiam anguli iisdem oppoſiti A et C aequales erunt (369), ac proinde quilibet habebit 45° (362).

374. THEOREMA. *Si in duobus triangulis* ABC, abc *duo latera cum angulo intercepto aequalia fuerint, e. g.* BC = bc, BA = ba, *et angulus* B = b, *tota triangula aequalia ſunt.* Fig. 30.

DEMONSTR. Si enim trianguli *abc* vertex *b* concipiatur ita imponi alterius vertici B, vt latus *bc* cadat ſupra BC, duo haec latera propter aequalitatem congruent, adeoque *b* cadente ſupra B, *c* cadet ſupra C: cumque anguli *b* et B aequales ponantur, etiam latus *ba* cadet ſupra BA, et propter aequalitatem cum eodem congruet, et hinc vertex *a* cadet ſupra A; congruent ergo tum anguli, tum latera omnia, tum denique triangula ipſa, ac proinde aequalia ſunt.

375. PROBLEMA. *Metiri diſtantiam duorum locorum* A *et* B, *quorum interuallum permeari haud poteſt.* Fig. 31.

RESOLVT. Eligatur ſtatio alicubi in C, vnde ambo loca videri, et accedi poſſint; tum menſurentur ope catenae diſtantiae AC et BC;

ac producantur in directum ita vt Cb fiat $=$AC, et Ca $=$ CB, erit hoc ipſo etiam ab $=$ AB (374): quare menſurata recta ab innoteſcit interuallum AB.

376. COROLL. Si ſpatii anguſtia non ſinat produci latera AC et BC quantum ſatis eſt, fiat e. g. $C\alpha = \frac{1}{2}CB$, et $C\beta = \frac{1}{2}CA$, erit etiam $\alpha\beta = \frac{1}{2}AB$ propter ſimilitudinem triangulorum ABC, $\alpha\beta$C, vti adparebit in ſequentibus.

Fig. 30. 377. THEOREMA. *Si in duobus triangulis* ABC, abc *duo anguli cum latere intercepto aequales fuerint, e. g.* B $=$ b, C $=$ c, BC $=$ bc, *et reliqua latera, et tota triangula aequalia ſunt.*

DEMONSTR. Nam latus bc lateri aequali BC impoſitum cum eodem congruet, adeoque puncto b cadente ſupra B, c cadet in C: et ob angulos b $=$ B, c $=$ C latus ba cadet ſupra BA, et ca ſupra CA; facile autem patet etiam punctum eorum extremum a cadere in A; quocunque enim alio cadere cogitemus, neceſſario mutabitur aequalitas angulorum b et B, vel c et C contra hypotheſim: quare tota triangula congruent, et hinc aequalia ſunt, ac ab $=$ AB, ac $=$ AC.

Fig. 32. 378. PROBLEMA. *Metiri diſtantiam duorum locorum* AB, *quorum vnus tantum* B *poteſt accedi.*

RESOLVT. Electa alicubi ſtatione in E fiat ex B ope quadrantis collineatio in A et E, vt innoteſcat angulus EBA, tum diſtantia BE ex E transferatur in C ita vt baculus in C defixus ſit in eadem recta cum E et B: deinde in C fiat collineatio ſub eodem angulo EBA verſus E et D, ita vt angulus C fiat aequalis angulo EBA;

denique per lineam CD tamdiu procedatur, donec baculus alicubi in D defixus in eadem recta ſit cum E et A, erit CD = AB. Nam ſi triangula ABE, CED ſibi rite imponerentur, CD cum AB congrueret (377).

SCHOLION. Diſtantias quascunque, et altitudines dimetiendi methodi complures occurrent in ſequentibus: has idcirco duntaxat hic inſinuauimus, vt tirones, qui horum theorematum vſus praeclariſſimos nondum ſentiunt, facilius inducant in animum harum veritatum fructus vltra ieiunam contemplationem omnino pertinere.

379. THEOREMA. *Si in duobus triangulis omnia latera aequalia fuerint, nempe* bc = BC, ba = BA, ca = CA, *etiam anguli, et tota triangula aequalia ſunt.* Fig. 30.

DEMONSTR. Deſcribantur enim centris B et C, item *b* et *c*, radiis BA et CA, ac *ba* et *ca* circuli ſeſe interſecantes in verticibus triangulorum A et *a*: deinde cogitetur triangulum *bca* vna cum ſuis circulis triangulo BCA ita imponi, vt latus *bc* cum latere BC aequali congruat, ſeu vt punctum *b* cadat in B, *c* in C; congruent hoc ipſo circuli minores aequales *b* et B, item maiores *c* et C, adeoque latus *ba* terminabitur alicubi in peripheria circuli B, et latus *ca* in peripheria circuli C; cum ergo ea latera ambo deſinant in idem punctum *a*, debet hoc punctum haerere in vtriusque circuli peripheria, ſeu cadere in communem eorum interſectionem A: quare latus *ba* cum BA, *ca* cum

CA, congruet: et hinc tota triangula aequalia ſunt.

380. Coroll. Si in triangulo iſoſceli ducta recta quapiam ex angulo aequalibus lateribus intercepto adfuerit vnum ex hisce tribus, 1) quod angulus in vertice ſecetur bifariam, 2) quod baſis ſeu latus angulo illi oppoſitum ſecetur bifariam, 3) quod eadem ſecetur ad angulos rectos, ſemper aderunt reliqua duo; nam ſemper diuidetur id triangulum in duo aequalia, ſecumque congruentia triangula, et quidem in primo caſu, et ſecundo per n. 374. in tertio per n. 374., vel 377. Item ſi in quopiam triangulo duo ex his adfuerint, erit id iſoſceles: iterum enim in duo aequalia, et ſecum congruentia triangula diuidetur.

Fig. 33. 381. Theorema. *Si duo triangula* ABC, abc *inter ſe ſimilia, ſeu aequiangula, ac inaequalia fuerint, minusque maiori ſic imponatur, vt angulo* a *cum aequali* A *congruente latera* ab *et* ac *cadant ſupra homologa* AB *et* AC, *tertium* bc *erit tertio* BC *parallelum.*

Demonstr. Eſt enim ex hypotheſi angulus $b = B$: ergo rectae *bc* et BC parallelae ſunt (313).

382. Coroll. Si angulus *b* imponeretur angulo B, parallela fierent latera *ac* et AC: ſi angulus *c* imponeretur angulo C, parallela fierent latera *ab* et AB, vt patet conſideranti.

383. Tetragonum habens latera oppoſita parallela dicitur *parallelogrammum*, et ſpeciatim *rectangulum*, ſi anguli omnes recti ſint, *quadratum* vero, ſi inſuper etiam latera omnia aequalia

sint. Si vero latera aequalia, at anguli inaequales fuerint, *rhombus*; si neque latera, neque anguli fuerint aequales, *rhomboides* adpellatur. Reliquae figurae quadrilaterae, quae non sunt parallelogramma, *trapezia* vocantur.

384. THEOREMA. *In quauis figura quadrilatera 1) si latera opposita fuerint parallela, erunt eadem aequalia. 2) Si aequalia fuerint, erunt eadem parallela. 3) Si bina opposita aequalia et parallela fuerint, etiam alia bina aequalia, et parallela erunt.* Fig. 34.

DEMONSTR. Ducta enim ad angulos oppositos recta AD, quae *diagonalis* dicitur, 1) si latera opposita AB et CD, item BD et AC parallela fuerint, erit angulus $o = x$, $m = n$ (311), latus AD = AD: ergo triangula ABD, ACD sibi imposita congruunt (377), et hinc AB = CD, BD = AC.

2) Si fuerit AB = CD, BD = AC, cum etiam sit AD = AD, triangula eadem rursus sibi imposita congruunt (379); et hinc angulus $o = x$, $m = n$, adeoque latera AB et CD, BD et AC parallela sunt (313).

3) Si denique latera AB et CD aequalia, et parallela fuerint, erit angulus $o = x$ (311), cumque sit AD = AD, iterum eadem triangula sibi imposita congruunt (374), et hinc BD = AC, angulus $n = m$; vnde BD et AC insuper parallela sunt (313).

385. COROLL. 1. Diagonalis diuidit parallelogrammum in duo triangula aequalia: et hinc triangulum est dimidium parallelogrammi eandem basim, et altitudinem habentis, vel quod

idem eſt, ſupra eandem baſim inter easdem parallelas conſtituti.

386. COROLL. 2. Si duo parallelogramma ſimilia, ſeu aequiangula ſunt, etiam triangula eorum ſcilicet dimidia ſimilia ſunt: quare duo triangula ſimilia ſemper ſpectari poſſunt tanquam dimidia duorum ſimilium parallelogrammorum.

Fig. 37. 387. THEOREMA. *Si duo triangula* ABC, ACD *eandem habeant altitudinem, ſeu perpendiculum e vertice* A *in latus oppoſitum demiſſum, erunt ea ad ſe inuicem vt baſes, ſeu vt* BC : CD.

DEMONSTR. Nam triangulum ABC aequatur ſummae infinitarum parallelarum BC, IN, HM, GL etc. et triangulum ACD ſummae infinitarum parallelarum CD, NR, MQ, LP etc. quae a baſi vſque ad verticem duci poſſunt. Porro hae parallelae a vertice A incipiendo creſcunt in progreſſione arithmetica, ſecundum eandem ſcilicet differentiam: cum enim eaedem a ſeſe infinite parum, adeoque aequaliter diſtent, in triangulis OpP, PqQ, QrR, RdD aequantur perpendicula, ſeu latera Op, Pq, Qr, Rd; item aequantur anguli recti p, q, r, d; et anguli OPp, PQq, QRr, RDd (309): ergo etiam aequantur anguli O, P, Q, R (364), et hinc triangula haec ſibi impoſita congruunt (377), ac proinde pP $=$ qQ $=$ rR $=$ dD. Eodem modo oſtenditur eſſe Gg $=$ Hh $=$ Ii $=$ Bb; item Ll $=$ Mm $=$ Nn $=$ Cc.

Iam in triangulo ABC ſecunda parallela GL eſt $=$ Gg $+$ gl $-$ Ll, ſeu pro gl ponendo FK (383) GL eſt $=$ Gg $+$ FK $-$ Ll: ergo tollendo FK, differentia inter parallelas

FK et GL eſt $Gg - Ll$; eodem modo differentia inter GL et HM eſt $Hh - Mm$; inter HM et IN eſt $Ii - Nn$ etc. atqui hae differentiae aequales ſunt, cum vbique ab aequalibus tollantur aequalia: ergo parallelae in triangulo ABC faciunt progreſſionem arithmeticam. Eodem modo patet in triangulo ACD differentias parallelarum $Ll + pP$, $Mm + qQ$ etc. eſſe aequales, adeoque et illic parallelas facere progreſſionem arithmeticam. Iam in his progreſſionibus parallelarum, in quibus numerus terminorum eſt perpendiculum AE (tot enim eſſe poſſunt parallelae, quot habet puncta id perpendiculum), terminus primus, ſeu prima parallela in A eſt $= o$, termini vltimi ſunt BC et CD: quare ſummae harum progreſſionum, ſeu triangula ABC, ACD ſunt ad inuicem, vt $AE \times \frac{1}{2} BC : AE \times \frac{1}{2} CD$ (228) $= \frac{1}{2} BC : \frac{1}{2} CD = BC : CD$.

388. THEOREMA. *Triangula* ABC *et* ABD *ſuper eadem baſi* AB *inter easdem parallelas* CD *et* EF *conſtituta, aequalia ſunt.* Fig. 36. No. 1.

DEMONSTR. Habent enim ambo eandem altitudinem, cum perpendicula CE et DF inter duas parallelas intercepta ſint aequalia (308): erunt ergo triangula vt baſes (387); ſed baſes ex hypotheſi aequales ſunt: igitur etiam triangula aequalia ſunt.

389. COROLL. 1. Duo parallelogramma ABCE, et ABFD ſuper eadem baſi AB inter easdem parallelas AB et CD conſtituta, ſunt dupla triangulorum ABC et ABD (385): quare cum haec triangula aequalia ſint (388), etiam illa parallelogramma aequalia ſunt. Fig. 36. No. 2.

Fig. 36. No. 3. 390. COROLL. 2. Si ergo duo parallelogramma ABCD et EFGH, vel duo triangula ABC et EFH aequales habeant bafes et altitudines, aequalia funt: nam et fupra eandem bafim, et inter easdem parallelas conftitui poffunt (308).

Fig. 37. 391. PROBLEMA. *Figuram quamuis rectilineam ABCDEF in aequale triangulum transformare.*

RESOLVT. Omiffo vno angulo B ducatur e proximis angulis diagonalis CA, et huic ex omiffo angulo B parallela BG occurrens lateri FA producto alicubi in G, et ducatur CG: aequalia erunt triangula ACB, ACG (390); fi ergo pro triangulo ACB fubftituatur triangulum ACG, data figura mutabitur in aliam GFEDCG vno latere iam minus habentem. Idem prorfus fiat ex parte anguli E, et prior figura abibit in IDCGI iam duobus lateribus pauciora habentem. In hac omiffo angulo D ducatur, vt ante, diagonalis CI, eique ex omiffo angulo D parallela DK occurrens lateri AF producto alicubi in K, tum ducatur CK; erit GCK triangulum petitum.

392. COROLL. Facile adparet hac arte minuendo fucceffiue laterum numerum omne polygonum poffe conuerti in aequale triangulum.

393. PROBLEMA. *Datum triangulum in partes quotcunque aequales diuidere.*

RESOLVT. 1) Si diuifio facienda fit per lineas ex aliquo angulo ductas, diuidatur latus oppofitum in totidem partes aequales: rectae ad fingula diuifionum puncta ductae diuident triangulum in totidem partes aequales (387).

2) Si

2) Si diuiſio facienda ſit per lineas ex aliquo latere e. g. AB ductas, diuidatur latus illud in totidem aequales partes, e. g. in 5, deinde ex primo diuiſionis puncto P ducatur recta PC, erit PCB pars quinta trianguli ACB (387): diuidatur deinde latus AC in partes aequales vna pauciores, e. g. in noſtro caſu in 4, ac ducantur rectae PD, PE, PF, erit diuiſum totum triangulum in partes 5: nam triangulum PAC continet ex BAC $\frac{4}{5}$ partes; ergo quaeuis pars, e. g. APF, continebit eiusdem $\frac{1}{5}$ partem. Fig. 38.

3) Si demum diuiſio facienda ſit ex aliquo puncto intra triangulum poſito, diuidantur duo latera BA et BC in totidem partes aequales e. g. in 5, et per prima diuiſionum puncta D et E ducantur rectae D*d*, E*e* parallelae lateribus BC et BA, quarum interſectio P ſi iungatur cum angulis A, B, et C, erit triangulum APB quinta pars totius ABC. Eſt enim BAE quinta eius pars (387), et BAE eſt = APB (388). Eodem modo patet triangulum BPC eſſe quintam partem. Quare ſi reliquum PAC in tres partes diuidatur per rectas PF et PG, erit totum triangulum ABC diuiſum in quinque partes aequales. Fig. 39.

394. PROBLEMA. *Datum polygonum* ABCDE *in partes quotcunque aequales diuidere.*

RESOLVT. Transformetur primum polygonum datum in aequale triangulum AFG (391), cuius baſis FG diuidatur in tot aequales partes, in quot polygonum diuidi debet, e. g. in 4, ductisque rectis AH, AK, AI ad ſingula puncta diuiſionum, erunt triangula FAH, HAK, KAI, Fig. 40.

IAG ſingula quarta pars trianguli FAG (393), adeoque etiam polygoni dati. Quia vero aliqua triangula extra polygonum exeunt, hoc pacto reducenda erunt. Cum aequentur triangula AFC, ABC (388), ſi vtrique addatur triangulum ACH, erit trapezium ABCH aequale triangulo AFH, ac proinde quarta pars polygoni. Ex altera parte ducta IR ad AD parallela, et ducta recta AR, aequabuntur triangula ARD, AID (cit.), item triangula AED, AGD (cit.): ſi ergo illa ab his ſubtrahantur, reſtabunt AER, AGI aequalia; atqui hoc eſt quarta pars polygoni: igitur et illud. Quare polygonum datum in 4 aequales partes ABCH, AHK, AKDR, ARE diuiſum eſt.

Fig. 41. 395. THEOREMA. *In quouis polygono ſumma omnium angulorum* A + B + C + D + E *aequatur bis tot rectis, quot ſunt latera, demtis quatuor.*

DEMONSTR. Nam ſi e puncto quouis P intra polygonum aſſumto ducantur rectae ad ſingulos angulos, patet polygonum reſolui in tot triangula, quot ſunt latera: quare cum quoduis triangulum contineat duos rectos (360), omnia ſimul continebunt bis tot rectos, quot ſunt triangula, ſeu latera. Verum anguli triangulorum circa punctum P, qui efficiunt ſimul 4 rectos (291), ad polygoni angulos non pertinent: his ergo ablatis remanent anguli polygoni aequales bis tot rectis, quot ſunt latera demtis quatuor.

Fig. 42. 396. THEOREMA. *Cuiuis polygono regulari* ABCDEF *poteſt circumſcribi circulus tranſiens per omnium angulorum vertices.*

DEMONSTR. Si enim anguli proximi A et B biſecentur; rectae biſecantes AG, BG concurrent alicubi in G, cum dimidii anguli A et B acuti ſint, et conſtituent triangulum iſoſceles AGC, in quo ob angulos ad A, et B aequales, eſt GA = GB (369). Ducatur ex G ad ſequentem angulum recta GC, erit ob AB=BC, BG = BG, et ob angulos ad B per conſtruct. vtrinque aequales, triangulum AGB = BGC (374), et hinc GB = GC, et angulus $o = x$; atqui o eſt dimidium totius A per conſtruct. ſeu totius C: ergo etiam x eſt dimidium eiusdem C, et hinc $x = y$. Ducatur porro recta GD ad ſequentem angulum: erit ob BC=CD, CG =CG, $x = y$, triangulum BCG = CGD (cit.), et hinc GB = GD. Habemus ergo GA=GB =GC=GD: ac eodem modo demonſtrantur his eſſe aequales GE, et GF: datur itaque intra polygonum punctum quoddam G, ex quo tanquam centro ſi radio GA deſcribatur circulus, is tranſeat per omnia puncta A, B, C etc.

397. COROLL. 1. Ex praeſentis theorematis demonſtratione perſpicuum eſt, per rectas e centro circuli circumſcripti ductas diuidi bifariam angulos polygoni regularis: illudque reſolui in tot triangula aequalia, et iſoſcelia, quot ſunt polygoni latera.

398. COROLL. 2. Vnumquodque latus polygoni regularis circulo inſcripti ſubtendit arcum tot gradus continentem, quot indicat quotus, qui prodit, ſi 360° per numerum laterum diuidantur (318).

399. Coroll. 3. Latus hexagoni regularis aequatur radio circuli circumſcripti. Nam ſi AB ſit latus hexagoni, in triangulo AGB angulus G eſt $60°$ (398): ergo anguli $A + B = 120°$ (363), et quia hi anguli inter ſe aequantur (397), quilibet eſt $60°$: quare $AB = AG$ (369).

400. Problema. *Dato polygouo regulari ABCDEF circulum circumſcribere.*

Resolvt. Biſecentur anguli proximi A et B per rectas AG et BG (328); erit in G centrum circuli radio GA circumſcribendi (396).

401. Problema. *Dato circulo polygonum regulare inſcribere.*

Resolvt. Diuidantur $360°$ per numerum laterum polygoni inſcribendi, tum capiantur in peripheria circuli tot gradus, quot indicat quotus: erit chorda eoſdem ſubtendens latus polygoni (398), quod proinde transferendum eſt ope circini in peripheriam, quoties fieri poteſt.

Scholion. Circuli peripheria geometrice, ſeu ope ſolius circini et regulae, diuidi poteſt in 4 partes aequales per duas diametros ſibi perpendiculares; tum in partes 6 per radium in peripheria circumlatum (399), adeoque etiam in partes 3, alterna ſcilicet diuiſionum puncta omittendo: denique in partes 5 ope eorum, quae capite ſequenti dicemus; et hinc etiam in partes 15; ſi enim e duabus quintis tollas tertiam peripheriae partem, reſtabit $\frac{1}{15}$: nam $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$. Poſſunt praeterea continua biſectione hae diuiſiones in infinitum continuari: vnde iam intelligitur, quaenam polygona regularia poſſint geometrice inſcribi circulo.

402. THEOREMA. *Cuiuis polygono regulari poteſt inſcribi circulus, qui omnia eius latera in medio tangat.*

DEMONSTR. Cum enim latera polygoni regularis ſint totidem chordae aequales in circulo circumſcripto, aequaliter diſtant a centro G (318): ergo ſi e centro G demittantur in eas perpendicula G*i*, erunt ea inter ſe aequalia (301), conſequenter circulus quouis perpendiculo G*i* deſcriptus tranſibit per omnia puncta *i*, quae erunt in mediis lateribus (322), et circulus tanget in iiſdem latera (303).

403. PROBLEMA. *Dato polygono regulari circulum inſcribere.*

RESOLVT. Ex inuento centro G (400) demittatur ad latus quodcunque AB perpendicularis G*i*, erit illa radius circuli inſcribendi (402).

404. PROBLEMA. *Dato circulo polygonum regulare circumſcribere.*

RESOLVT. Diuidantur 360° per numerum laterum polygoni circumſcribendi, capiaturque arcus *ab* tot graduum, quot indicat quotus, et biſecetur in puncto *i*, per quod ducatur tangens vtrinque occurrens radiis G*a*, et G*b* productis in A et B (351); erit AB latus polygoni circumſcribendi (402). Denique centro G radio GA deſcribatur circulus: ac in eo ope circini latus AB adplicetur, quoties poteſt.

SCHOLION. Rurſus adparet circulo geometrice circumſcribi non poſſe, niſi triangulum aequilaterum, quadratum, pentagonum, hexagonum, pentadecagonum, et in quibus numerus horum laterum creſcit continenter in duplum.

CAPVT IV.

De linearum Proportionibus.

Fig. 43. 405. THEOREMA. *Si intra triangulum* ABC *cuiuis lateri* BC *ducatur parallela* DE, *ſecabit haec reliqua trianguli latera proportionaliter ita vt ſit* AB: AD = AC: AE.

DEMONSTR. Ductis enim rectis DC et EB aequabuntur triangula DBE, DEC (388); quare addendo vtrique triangulum ADE, aequalia erunt triangula AEB et ADC, ac proinde ambo eandem habebunt rationem ad triangulum ADE: eſt vero triangulum AEB ad triangulum AED, ſicut AB: AD; et triangulum ADC ad idem AED, ſicut AC: AE (387): ergo AB: AD = AC: AE.

406. COROLL. 1. Erit ergo ſubtrahendo BD: AD = CE: AE (205). Et generatim quotcunque parallelae ducantur lateri BC, erunt ſegmenta vnius lateris ſegmentis alterius proportionalia; eorum enim ratio ſemper erit eadem, quae laterum AB et AC.

407. COROLL. 2. Viciſſim ſi ſit AB: AD = AC: AE, erit DE parallela lateri BC: ſi

enim non esset, posset eidem per punctum D duci alia parallela e. g. DG, et tunc esset AB: AD = AC: AG (405), et ex hypoth. AB: AD = AC: AE; et hinc AC: AG = AC: AE, ac altern. AC: AC = AG: AE; sed AC = AC; ergo foret etiam AG = AE, quod absurdum est.

408. Coroll. 3. Si duo triangula fuerint similia, siue aequiangula, latera homologa, seu aequalibus angulis opposita erunt proportionalia. Nam si minus maiori debite imponatur, latus tertium tertio parallelum erit (381), ac proinde habebitur casus praesentis theorematis (405).

409. Coroll. 4. Triangula isoscelia similia sunt, adeoque latera homologa habent proportionalia, si angulum a lateribus aequalibus comprehensum, vel angulum ad basim vnum vni aequalem habuerint; sunt enim hoc ipso in casu vtroque aequiangula.

410. Coroll. 5. Si singula vnius triangu- Fig. 44.
li latera fuerint singulis alterius parallela, erunt ea triangula similia. Si enim vnius duo latera *ca* et *cb* producantur, occurent lateri alterius non parallelo AB producto: erunt ergo anguli A et *a* ambo aequales angulo *x* (309), et anguli B et *b* ambo aequales angulo *y* (cit.): ergo erit A = *a*, B = *b*, adeoque C = *c* (364), ac proinde triangula similia sunt (359).

411. Coroll. 6. Si in triangulo quouis Fig. 45.
ABC angulus A per rectam AD bifariam secetur, erit BD: DC = BA: AC. Nam producto latere CA dum fiat AE = AB, ductaque

recta EB, erit angulus BAC $= x + y$ (367), seu ob $x = y$ (369) BAC $= 2x$, et hinc $\frac{1}{2}$ BAC $= o = x$, adeoque rectae EB et AD parallelae sunt (313); ergo BD: DC = AE, seu AB: AC (406).

Fig. 46. 412. Coroll. 7. Si duae rectae AB et CD occurrant quibusuis parallelis MN, OP, QR etc. secabuntur ab his proportionaliter. Si enim ducatur *eg* parallela ad AB, erit *ef*: *fg* = HI: IK (406), atqui *ef* = EF, et *fg* = FG (383): ergo EF: FG = HI: IK.

413. Problema. *Datis tribus lineis rectis inuenire quartam proportionalem.*

Fig. 43. Resolvt. Iungantur duae rectae indefinitae sub quouis angulo A, et in alterutra sumantur AB, AD aequales datis duabus primis rectis, tertiae vero datae fiat aequalis AC; tum iungantur puncta B et C recta BC, et huic per punctum D ducatur parallela DE (349), erit recta AE quarta proportionalis quaesita. Nam AB: AD = AC: AE (405).

414. Coroll. 1. Si ad datas duas tertia proportionalis petatur, secunda linea data, et in rectam AB translata, transferatur etiam loco tertiae in AC, cetera fiant vt ante.

415. Coroll. 2. Si recta AC in partes quotcunque aequales, aut in data quacunque ratione diuidenda sit, sumatur recta AB in eadem ratione iam diuisa, iungaturque ei sub quocunque angulo A, et extrema puncta B et C connectantur linea BC, cui per singula rectae AB diuisionum puncta agantur parallelae, diuident hae rectam AC in eadem illa ratione (406).

416. THEOREMA. *Si duo triangula* ABC, ade *circa aequales angulos* A *et* a *latera habuerint proportionalia, erunt eadem aequiangula.*

DEMONSTR. Si enim angulus a ita imponatur angulo A, vt latus ad cadat ſupra AB e. g. vſque in D, etiam latus ae, propter aequalitatem ſcilicet angulorum a et A, cadet ſupra AC e. g. vſque in E, eritque $AD = ad$, $AE = ae$, ac totum triangulum $ADE = ade$ (374): erit ergo ex hypotheſi $AB : AD = AC : AE$; hinc rectae DE et BC parallelae ſunt (407): quare angulus D ſeu $d = B$, angulus E ſeu $e = C$ (309).

417. THEOREMA. *Si duorum triangulorum* ABC, ade *omnia latera fuerint proportionalia, erunt eadem aequiangula.*

DEMONSTR. Fiat enim $AD = ad$, ac per punctum D ducatur DE parallela ad BC: erit $AB : AD = AC : AE$ (405); et ex hypotheſi $AB : ad$ ſeu $AD = AC : ae$: ergo $AC : AE = AC : ae$, et alternando $AC : AC = AE : ae$ (205); ſed $AC = AC$, ergo etiam $AE = ae$. Eodem modo oſtenditur eſſe $DE = de$. Quare triangula ade, ADE ſibi impoſita congruunt (379), et hinc angulus $a = A$, $d = D = B$, $e = E = C$ (309).

418. THEOREMA. *Segmenta chordarum* AB *et* CD *ſeſe in circulo vtcunque interſecantium ſunt reciproce proportionalia.* Fig. 47.

DEMONSTR. Ductis enim chordis AD et CB erit angulus $o = x$, $y = z$ (344); ac praeterea verticales ad E vtrinque aequales (292): ergo $AE : EC = ED : EB$ (408).

419. COROLL. Erit ergo AE×EB=EC ×ED (202): id est, factum ex vnius chordae segmentis aequatur facto ex alterius segmentis.

Fig. 48. 420. THEOREMA. *Perpendicularis* CE *e quouis peripheriae circuli puncto ad diametrum demissa est media proportionalis inter segmenta diametri* AE *et* EB.

DEMONSTR. Nam producta perpendiculari CE vsque ad peripheriam, erit AE:CE=ED:EB (418); sed ED=CE (322): ergo AE:CE=CE:EB.

421. PROBLEMA. *Inter duas datas rectas* AE *et* EB *inuenire mediam geometrice proportionalem.*

RESOLVT. Iungantur rectae datae in vnicam AB, qua in I bisecta describatur semicirculus, ac e puncto iuncturae E erigatur perpendicularis EC, donec occurrat peripheriae (305); erit haec media proportionalis petita (420).

Fig. 49. 422. THEOREMA. *Si e puncto quopiam* A *ducantur duae secantes* AB *et* AD, *erunt segmenta* AC *et* AE *extra circulum sita integris secantibus reciproce proportionalia.*

DEMONSTR. Ductis enim chordis CE et BD, in triangulis ACE, ABD praeter communem angulum A erit angulus ACE=ADB ob eandem mensuram ½ECB, et angulus AEC=ABD ob eandem mensuram ½CED (342, 353): ergo AB: AD=AE: AC (408).

Fig. 50. 423. COROLL. I. Si ex eodem puncto A vna secans, altera tangens ducatur, iterum aequiangula erunt triangula ACT, ABT, cum anguli ATC, ABT eandem habeant mensuram ½ TC (340, 342), et angulus A vtrique communis sit: ergo AC: AT=AT: AB, id est,

tangens est media proportionalis inter totam secantem AB, et eius segmentum AC.

424. COROLL. 2. Si ergo inter duas rectas AB et AC quaeratur media proportionalis, patet hinc noua methodus eam inueniendi. Nempe ex maiori AB debet resecari minor AC, et supra residuum CB tanquam diametrum duci circulus, atque ad hunc ex puncto A tangens (352), quae erit media proportionalis quaesita.

425. COROLL. 3. Si ex eodem puncto A duae tangentes ducantur ad circulum, erit $AC : AT = AT : AB$, et $AC : At = At : AB$, ergo $AC \times AB = AT^2 = At^2$ (202), et hinc $AT = At$ (164).

426. COROLL. 4. Si secans AB, aut recta quaeuis alia secetur bifariam in D, et non bifariam in C, erit quadratum segmenti CD intra sectiones comprehensi vna cum facto partium inaequalium AC et CB, aequale quadrato partis dimidiae AD. Est enim $AD^2 - CD^2 = (AD + CD) \times (AD - CD) = CB \times AC$: ergo $AD^2 = CD^2 + AC \times CB$. Et si rectae DE in A bifariam sectae adiiciatur EC, erit $AC^2 = AE^2 + CE \times CD$. Est enim $AC^2 - AE^2 = (AC + AE) \times (AC - AE) = DC \times CE$: ergo $AC^2 = AE^2 + CE \times CD$. Fig. 61.

427. PROBLEMA. *Datam rectam* AB *media, et extrema ratione secare, seu ita, vt pars maior* AD *sit media proportionalis inter totam* AB, *et partem minorem* BD. Fig. 51.

RESOLVT. Erigatur in B perpendicularis BC (350) quae sit $= \frac{1}{2}$ AB, ac ea tanquam radio e centro C describatur circulus, quem tanget recta BA in puncto B (303); tum ducta secante AF fiat AD = AE, erit recta AB in D media, et extrema ratione secta.

DEMONSTR. Est enim AF : AB = AB : AE (423), ergo subtrahendo AF—AB : AB = AB — AE : AE (205), atqui ex constr. AE = AD, et AF — AB = AF — EF, cum sit EF = 2BC = AB; his adeo substitutis erit AD : AB = DB : AD; vnde $AD^2 = AB \times DB$ (202), et hinc AB : AD = AD : DB (204).

Fig. 52. 428. PROBLEMA. *Construere triangulum isosceles* ABC, *in quo quilibet angulus ad basim* B *et* C *sit duplus anguli* A.

RESOLVT. Diuidatur recta quaecunque AB media, et extrema ratione in puncto D (427), et super minore segmento DB construatur triangulum isosceles BCD facta centris D et B intersectione in C radio AD, tum iungantur puncta A et C, item B et C, erit triangulum ABC tale, quale petebatur.

DEMONSTR. Est enim angulus $o = x + n$ (367), seu ob latera AD et DC ex constr. adeoque etiam angulos x et n aequales (369), erit $o = 2x$; sed $o = y$ (cit.), ergo $y = 2x$. Rursus per constr. AB : AD = AD : DB, ergo ob AD = DC = BC ex constr. erit AB : BC = BC : DB; vnde triangula ABC, DBC aequiangula sunt (416), et hinc $n + r$, seu totus angulus $C = o = y = 2x$, et AB = AC (369).

429. PROBLEMA. *Dato circulo decagonum regulare inscribere.*

RESOLVT. Radius circuli dati AB secetur in D media, et extrema ratione (427), erit segmentum maius AD latus decagoni regularis.

DEMONSTR. Nam constructo triangulo isosceli ABC iuxta problema praecedens, erunt anguli $A + B + C = 180^\circ (360) = \frac{5}{5} 180^\circ$, et quiuis angulus ad basim B vel $C = \frac{2}{5} 180^\circ = 72^\circ$, adeoque angulus $A = \frac{1}{5} 180^\circ = 36^\circ = \frac{360^\circ}{10}$: ergo BC seu AD est latus decagoni (398).

430. COROLL. Si ergo latus decagoni circumferendo peripheria circuli in 10 partes aequales diuidatur, et diuisionum puncta alternis omissis connectantur, habebitur pentagonum regulare circulo inscriptum.

431. THEOREMA. *Si ex vertice anguli recti* B *demittatur in hypotenusam perpendicularis* BD, *diuidet haec triangulum* ABC *in duo triangula* ABD, DBC *tam toti, quam sibi similia.* Fig. 53.

DEMONSTR. Nam in triangulis ABC, ABD praeter angulum communem A, anguli B et D recti, adeoque aequales sunt; hinc etiam tertius BCA aequatur tertio ABD (364). Eodem modo patet, aequiangula esse triangula ABC, DBC praeter angulum C communem rectos in B et D habentia: vnde patet etiam triangula ABD, DBC aequiangula, seu similia esse.

432. COROLL. 1. Est ergo conferendo triangula similia ABC et ABD, $AC : AB = AB : AD$ et hinc $AB^2 = AC \times AD$; et conferendo triangula ABC et BDC, $AC : BC = BC : DC$ (408), et hinc $BC^2 = AC \times CD$ (202): hoc est, chordae AB et BC sunt mediae proportionales inter diametrum, seu hypotenusam AC,

et eius ſegmenta AD aut DC chordis adiacentia. Vnde iterum adparet modus inter duas datas rectas mediam proportionalem inueniendi.

433. COROLL. 2. Si aequalibus $AB^2 = AC \times AD$ addantur aequalia $BC^2 = AC \times CD$, erit $AB^2 + BC^2 = AC \times AD + AC \times DC = AC \times (AD + DC) = AC \times AC = AC^2$: quare in quouis triangulo rectangulo quadratum hypotenuſae aequatur quadratis cathetorum ſimul ſumtis.

434. COROLL. 3. Viciſſim ſi fuerit $AC^2 = AB^2 + BC^2$, erit B angulus rectus. Erecta enim ad AB perpendiculari BE, quae ſit $= BC$, ductaque recta EA, erit $EA^2 = AB^2 + BE^2$ (433), ſeu pro BE^2 ponendo BC^2, $EA^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2$: ergo $EA = AC$. Vnde triangula AEB, ABC ſibi impoſita congruunt (379), et angulus ABE, qui ex conſtr. rectus eſt, aequatur angulo ABC; ergo etiam hic rectus eſt.

435. PROBLEMA. *Datis quotcunque quadratis vnum aequale conſtruere.*

Fig. 54. RESOLVT. Latera duorum quorumuis quadratorum AB et BC iungantur ſibi ad angulum rectum, ducaturque hypotenuſa AC; erit eius quadratum aequale quadratis rectarum AB et BC, ſeu $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (433). Rurſus rectae AC iungatur ad angulum rectum latus tertii quadrati CD, et ducatur hypotenuſa AD, erit $AD^2 = AC^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2$. Iterum rectae AD iungatur ad angulum rectum latus quarti quadrati DE, et ducatur hypotenuſa AE, erit $AE^2 = AD^2 + DE^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2$, et ſic porro.

436. COROLL. Si datum quadratum duplicandum, triplicandum etc. ſit, rectae AB, BC, CD etc. eiuſdem lateri aequales fieri debent.

437. THEOREMA. *Datis duobus quadratis conſtruere quadratum, quod ſit aequale eorundem differentiae.*

RESOLVT. Supra latus quadrati maioris AC tanquam diametrum deſcribatur ſemicirculus, ac in eo pro chorda adplicetur latus quadrati minoris AB, erit altera chorda BC latus quadrati quaeſiti. Cum enim in B ſit angulus rectus (345), erit $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (433), et hinc $AC^2 - AB^2 = BC^2$. Fig. 53.

SCHOLION. Latere inuento conſtruitur quadratum, ſi latus ſibi ad angulum rectum iungatur, eodemque tanquam radio ex vtroque extremo tanquam centro ducantur arcus ſe interſecantes, ac interſectio cum extremis iungatur.

438. THEOREMA. *Si ex figurarum ſimilium, ſeu aequales angulos, et latera homologa proportionalia habentium angulis aequalibus* A *et* a, *ac ſimiliter poſitis ducantur diagonales* AC *et* ac, AD *et* ad, *reſoluentur figurae in totidem triangula ſimilia.* Fig. 55.

DEMONSTR. Nam ob figurarum ſimilitudinem angulus B eſt $= b$, et $AB : ab = BC : bc$; ergo triangula ABC, *abc* ſimilia ſunt (416), vnde angulus $O = o$, et $AC : ac = BC : bc$. Porro ab aequalibus angulis C et *c* demendo aequales O et *o*, reſtabit $N = n$: et cum ſit $BC : bc = CD : cd$, erit quoque $AC : ac = CD : cd$; vnde etiam triangula ACD, *acd* ſimilia ſunt (cit). Eadem eſt demonſtratio pro reliquis triangulis.

439. COROLL. I. Viciſſim figurae conſtantes triangulis ſimilibus eodem numero, eodemque ordine diſpoſitis ſimiles ſunt. Nam et anguli correſpondentes aequales ſunt, et latera homologa proportionalia, nempe AB : *ab* $=$ BC : *bc* $=$ AC : *ac* $=$ CD : *cd* etc. Vnde polygona regularia totidem laterum ſimilia ſunt.

440. COROLL. 2. Cum latera polygonorum ſimilium ſint termini proportionales, erit ſumma antecedentium AB $+$ BC $+$ CD $+$ DE $+$ EA ad ſummam conſequentium *ab* $+$ *bc* $+$ *cd* $+$ *de* $+$ *ea*, vt duo quaeuis latera homologa, e. g. vt AB : *ab* (214), id eſt, peripheriae, ſeu perimetri figurarum ſimilium ſunt vt duo quaeuis latera homologa.

441. THEOREMA. *Perimetri polygonorum regularium totidem laterum ſunt vt radii circulorum iisdem circumſcriptorum.*

Fig. 56. DEMONSTR. Sint ED et *ed* latera eiuſmodi polygonorum, continebunt arcus EAD, *ead* totidem numero gradus (398); ſi ergo ex centro in latera demittantur perpendiculares CA et *ca*, erunt etiam arcus dimidii AD et *ad* totidem numero graduum (322): quare in triangulis BCD, *bcd* praeter rectos B et *b*, aequantur anguli C et *c*, ac proinde etiam anguli D et *d* (364): eſt igitur CD : *cd* $=$ BD : *bd* (408), ſiue cum tota ſint vt dimidia (210), et BD, *bd* ſint dimidia laterum ED et *ed* (322), erit CD : *cd* $=$ ED : *ed*; atqui etiam perimetri horum polygonorum vt pote ſimilium (439) ſunt vt ED : *ed* (440); ergo etiam ſunt vt CD : *cd*.

442. COROLL. Si numerus laterum polygonorum circulis inſcriptorum in infinitum augeatur, magnitudo autem in infinitum minuatur, polygonorum perimetri tandem cum peripheria circulorum circumſcriptorum congruent: quare circuli ſpectari poſſunt tanquam polygona regularia infinitorum laterum: ergo peripheriae circulorum ſunt vt radii (441), vel vt diametri (210).

443. PROBLEMA. *Dato cuiuis polygono* ABCDE *aliud ſimile conſtruere.*

RESOLVT. Datum, vel aſſumtum polygoni conſtruendi latus A*b* transferatur in latus homologum AB polygoni dati, ſi opus ſit, productum: tum ductis ex angulo A diagonalibus AC, et AD itidem ſi neceſſe ſit productis, per punctum *b* ducatur recta *bc* lateri BC parallela, per punctum *c* recta *cd* lateri CD parallela, per punctum *d* recta *dc* lateri DE parallela; obtinebitur polygonum A*bcde* ſimile polygono dato ABCDE (439), cum triangula ABC, A*bc*, et ACD, A*cd*, ac denique ADE, A*de* ſimilia ſint.

CAPVT V.

De Trigonometria.

444. Triangulum omne ſenis conſtat partibus, tribus nimirum lateribus, ac totidem angulis; quarum ſi tribus datis tres reliquae quaerantur, triangulum *reſolui* dicitur, et

pars geometriae eam resolutionem docens *trigonometria* adpellatur.

445. COROLL. Quoniam triangula vel rectis, vel curuis lineis continentur, patet duplicem esse trigonometriam. *Plana* vocatur, quae agit de triangulis in plano quopiam lineis rectis terminatis: *sphaerica* autem refertur ad triangula, quae in globi cuiusdam, seu sphaerae superficie fiunt a circulorum maximorum arcubus. Nos hoc loco de plana tantum agemus.

446. Perspicuum est angulos trianguli, seu arcus eosdem metientes non esse lateribus proportionales, nec posse proinde laterum ope directe inuestigari: quare angulis et arcubus subrogantur lineae quaedam rectae lateribus proportionales, quae arcus et angulos repraesentant, eorumque quasi vice in calculo funguntur, vnde et *functiones* adpellantur, quas iam singulatim explicabimus.

Fig. 58. 447. Si ex arcus cuiuspiam AB extremo alterutro B demittatur perpendicularis BD in diametrum transeuntem per alterum extremum A, erit ea *sinus rectus* eiusdem arcus AB, vel anguli ACB; pars vero diametri AD inter eum sinum, et arcum intercepta, erit *sinus versus* eiusdem. Si praeterea per extremum arcus ducatur tangens AT, donec occurrat rectae CT ex centro per alterum arcus extremum ductae, erit AT *tangens*, CT autem *secans* eiusdem arcus AB, vel anguli ACB.

448. COROLL. I. Duo ergo arcus AB et B*a*, qui simul efficiunt semiperipheriam circuli; aut duo anguli contigui ACB, *a*CB eosdem habent

ſinus rectos, tangentes, et ſecantes. Nam ſinus arcus aB, vel anguli aCB eſt BD, vel ad, tangens at, ſecans Ct (447); eſt vero ob triangula CBD, Cad, item CAT, Cat aequalia (377) $BD = ad$, $AT = at$, $CT = Ct$.

449. COROLL. 2. Si puncto B ab A ſucceſſiue digrediente creſcat arcus AB, et angulus ACB, patet ſinum quoque DB creſcere, vti et ſinum verſum AD, et reliquas functiones. Quum autem punctum B ad M peruenerit, arcus AB abibit in quadrantem AM, et angulus ACB in rectum ACM, ſinus vero BD congruet cum radio MC, eritque omnium maximus, vnde et *ſinus totus* vocatur; ſimiliter ſinus verſus AD congruet cum radio AC; at tangens AT cum ſecante CT euadet parallela, neque concurret vſpiam, hinc ambae infinitae erunt.

450. COROLL. 3. Sinus rectus eſt dimidium chordae arcus dupli. Nam arcus AB duplus eſt BAG (322), ac eius chorda BG; eſt vero BD $= \frac{1}{2}$ BG (cit.). Eodem modo patet eſſe $ad = \frac{1}{2} ag$.

451. COROLL. 4. Sinus anguli vel arcus $30°$ aequatur dimidio radio. Sit enim $BA = 30°$, erit $BAG = 60°$ (322); hinc eius chorda BG eſt latus hexagoni regularis, adeoque aequatur radio (399); cum ergo ſinus BD ſit $= \frac{1}{2}$ BG (450), patet eum aequari dimidio radio.

452. COROLL. 5. Tangens anguli, vel arcus $45°$, aequatur radio. Sit enim angulus $ACB = 45°$, erit etiam angulus $ATC = 45°$ (362), et hinc $AT = AC$ (369).

453. Id quod arcui cuipiam deeſt ad ſemiperipheriam, vel angulo ad duos rectos, dice-

mus eiusdem *ſupplementum* ; differentiam autem arcus a quadrante, et anguli a recto, ſiue deinde ab ipſo deficiat , ſiue ipſum excedat, vocabimus eiuſdem *complementum.* Vnde ſinus , tangens, ac ſecans complementi arcus, vel anguli eſt eiuſdem *coſinus* , *coſecans* , et *cotangens*. Ita arcus *a*B eſt ſupplementum reſpectu arcus AB ; BM eſt complementum arcuum AB et *a*B ; BI eſt eorundem coſinus, KM cotangens, CK coſecans. Vnde perſpicuum eſt arcuum AB et *a*B, ſeu angulorum contiguorum ACB et *a*CB eosdem eſſe coſinus , cotangentes, et coſecantes. En tabellam, quae memoriam adiuuet.

BD	*Sin. rect.*	
AT	*Tang.*	
CT	*Secans.*	
AD	*Sin. verſ.*	*Arcus* AB *vel*
BI=DC	*Coſinus.*	*anguli* ACB
MK	*Cotang.*	
CK	*Coſecans.*	
MI	*Coſin. Verſ.*	

454. COROLL. I. Quadratum radii aequatur ſummae quadratorum ſinus recti et coſinus : item differentiae quadratorum ſecantis, et tangentis.

Eſt enim $CB^2 = CD^2 + BD^2$, et $CA^2 = CT^2 - AT^2$ (433).

455. Coroll. 2. Idem radii quadratum aequatur facto e coſinu, ac ſecante; item facto ex tangente, et cotangente. Nam ob ſimilia triangula CDB et CAT, eſt $CD : CB = CA$ ſeu $CB : CT$, et hinc $CB^2 = CD \times CT$. Et cum in triangulis CAT et CMK praeter angulos rectos A et M aequentur alterni TCA, CKM, eſt $AT : CA = CM$ ſeu $CA : MK$, et hinc $CA^2 = AT \times MK$.

456. Coroll. 3. Si ergo duo quiuis eiuſdem circuli arcus ſumantur, erunt facta ex tangente et cotangente in vtroque aequalia quadrato radii, adeoque etiam inter ſe. Soluendo igitur ambo facta in proportionem patebit, tangentes duorum quorumuis arcuum eſſe in ratione reciproca cotangentium (204).

457. Coroll. 4. Cum ſit $CT^2 = CA^2 + AT^2$ (433), palam eſt quadratum ſecantis aequari quadratis radii ſimul, et tangentis.

458. Coroll. 5. In quouis arcu AB eſt CD ſeu $BI : BD = CA : AT$, ſeu coſinus ad ſinum, vt radius ad tangentem. Item $BD : BC = AT : TC$, ſeu ſinus ad radium, vt tangens ad ſecantem.

459. Coroll. 6. Si radius CA vtcunque mutetur, functiones omnes arcuum ſimilium, vel aequalium angulorum in eadem ratione mutantur, adeoque mutuam ad ſe inuicem rationem retinent. Nam vtcunque aucto, vel diminuto radio CA triangula omnia eoſdem retinebunt angulos, et hinc ratio radii, et functionum non turbabitur.

Fig. 59. 460. COROLL. 7. In quouis triangulo rectangulo ABC ſi hypotenuſa ſumatur pro radio, ſeu ſinu toto, quiuis cathetorum erit ſinus anguli ſibi oppoſiti, et coſinus adiacentis acuti: nimirum ſi radio AC deſcribantur arcus AD et CF, AB erit ſinus anguli C, coſinus anguli A; BC ſinus anguli A, coſinus anguli C. Quare ſinus totus eſt ad ſinum alterutrius anguli acuti, vt hypotenuſa ad latus eidem angulo oppoſitum: et ſinus totus eſt ad coſinum anguli acuti vtriuſlibet, vt hypotenuſa ad latus eidem angulo adiacens.

461. COROLL. 8. Sin autem alteruter cathetus ſumatur pro radio, ſeu ſinu toto, alter cathetus ſit tangens, hypotenuſa ſecans anguli acuti radio adiacentis: nimirum ſi radio CB deſcribatur arcus BM, erit AB tangens, AC ſecans arcus BM, ſeu anguli C (303.): ſi vero radio AB deſcribatur arcus BN, erit BC tangens, AC ſecans arcus BN, ſeu anguli A. Eſt adeo ſinus totus ad tangentem vnius anguli acuti, vt latus eidem angulo adiacens ad oppoſitum: et ſinus totus ad ſecantem vnius ex angulis acutis, vt latus eidem adiacens ad hypotenuſam.

462 THEOREMA. *In quouis triangulo latera ſunt vt ſinus angulorum iisdem oppoſitorum.*

DEMONSTR. Poteſt enim cuiuis triangulo circumſcribi circulus (324), et tunc latera euadunt chordae ſubtendentes arcus duplos eorum, qui metiuntur angulos oppoſitos (342): quare lateris cuiusuis dimidium erit ſinus anguli oppoſiti (450); cum ergo dimidia ſint vti tota

(210), patet latera fore vt ſinus angulorum oppoſitorum.

463. COROLL. Si angulus quiſpiam A obtuſus fuerit in triangulo ABC, ductis BD et CD angulus D erit ſupplementum anguli A (346), adeoque ambo eundem habent ſinum: eſt autem per demonſtr. $\frac{1}{2}$BC ſinus anguli D; igitur etiam eſt ſinus anguli A. Fig. 60.

464. THEOREMA. *In quouis triangulo* ABC *ſumma duorum quorumuis laterum* AC + AB *eſt ad eorundem differentiam* AC — AB *vt tangens ſemiſummae angulorum* B *et* C *iisdem oppoſitorum ad tangentem ſemidifferentiae eorundem.* Fig. 61.

DEMONSTR. Latere minore AB tanquam radio centro A deſcribatur circulus, latus vero alterum CA producatur, dum occurrat peripheriae in D, ducaturque per puncta D et B recta indefinita DF, cui occurrat in F recta CF chordae BE parallela; erit angulus DBE (345), adeoque etiam angulus DFC rectus (309).

Hiſce poſitis erit CA + AB = CA + AD = CD ſumma laterum; CA — AB = CA — AE = CE differentia eorundem: angulus *o* externus erit ſumma angulorum ABC, ACB (367), adeoque $\frac{1}{2}o$ = DEB (343) = DCF (309) erit eorundem ſemiſumma: quia vero angulus ACB < ABC (368), conſtabit ACB ex ſemiſumma demta ſemidifferentia (168 ex. 2).; atqui conſtat ex ACF — BCF, et ACF eſt ſemiſumma: ergo BCF eſt ſemidifferentia. Igitur ſi CF ſumatur pro radio, erit FD tangens ſemiſummae DCF, et FB tangens ſemidifferentiae BCF (461); eſt autem ob BE et FC parallelas, DC:

$DE = DF : DB$ (405), et hinc $DC : DC - DE = DF : DF - DB$ (205), hoc eſt, $DC : EC = DF : BF$.

Fig. 62. 465. THEOREMA. *Si in triangulo quouis* ABC *in latus maximum* BC *demittatur ex angulo oppoſito* A *perpendicularis* AM, *quae ſemper intra triangulum cadet* (365), *erit latus maximum* BC *ad ſummam reliquorum* $BA + AB$, *vt eorundem differentia* $CA - AB$ *ad differentiam ſegmentorum baſeos* $MC - MB$.

DEMONSTR. Centro A latere minimo AB deſcribatur circulus, erit producto, vt ante, latere CA, ſumma laterum $= CD$, differentia $= CE$; praeterea $MB = MN$ (322), et hinc $CM - MB = CM - MN = CN$, ſeu CN erit differentia ſegmentorum baſeos. Eſt vero $CB : CD = CE : CN$ (422).

466. COROLL. 1. Segmentum baſeos maius MC ſemper adiacet lateri maiori AC. Eſt enim $AC^2 = MC^2 + AM^2$, et $AB^2 = MB^2 + AM^2$ (433); ſi ergo $AC > AB$, etiam $MC^2 + AM^2 > MB^2 + AM^2$, et hinc $MC^2 > MB^2$, adeoque $MC > MB$.

467. COROLL. 2. Si $AB = AC$, differentia laterum, et ſegmentorum baſeos nulla eſt: ſin autem $AB = BC$, vel $AC = BC$, pro latere maximo aſſumi poteſt vtrumlibet aequalium laterum.

SCHOLION. Ex hiſce theorematis fluit triangulorum reſolutio, ac functionum omnium inueſtigatio. Verum vt hae functiones in promtu ſemper eſſent, arcubusque et angulis ſubſtitui poſſent, neceſſe fuit concinnare tabulas quaſdam, in quibus functiones ſingulorum graduum, atque minutorum ſaltem primorum continerentur, quae *tabulae ſinuum*, vel *canones functionum* adpellantur. Satis autem eſt tabulas id genus conſtruere vſque ad arcum, aut angulum 90°; nam poſt hunc, vt vidimus, eaedem iterum functiones redeunt. In his concinnandis radius, ſeu ſinus totus ponitur = 1 adiectis ſeptem, vel pluribus zeris eum in finem, vt functiones in fractionibus decimalibus eo accuratius determinari poſſint, quemadmodum diximus de logarithmorum conſtructione. Quare functiones inueſtigare aliud non eſt, quam inuenire, quotnam eiuſmodi particulas functio vnaquaeque habeat, in quas radius diuiſus concipitur: et quia radius quiuis ſiue maior, ſiue minor in eundem partium aequalium numerum diuiditur, vti peripheria circuli cuiuſuis in eundem graduum numerum, patet particulas maioris radii maiores eſſe, quam minoris. Hinc tabulae ſinuum, in quibus exhibetur, quotnam ex illis radii particulis functio quaelibet contineat, non exhibent abſolutam, ſed tantum comparatiuam earum magnitudinem, ſiue ſolam ad radium proportionem, quae ſufficit ad reſolutiones triangulorum, vti adparebit in ſequentibus. Quodſi functiones computatae ſint pro radio in partes plures diuiſo, eaedem facile eruentur pro quouis alio radio in partes pauciores diuiſo (459): e. g. datis functionibus pro radio 10000000 inuenientur eaedem pro radio 100000, ſi e datis illis duae poſtremae notae amputentur; eſt enim primus ille radius ad hunc, vt illae datae functiones ad eaſdem duabus poſtremis notis multatas, ſicuti perſpicuum fiet proportiones ipſas inſtituenti. Tabulae huiuſmodi compluribus methodis confieri poſſunt, et iam confectae proſtant: nos viam computandi compendiariam cum Boſcouichio hiſce problematis complectemur.

468. PROBLEMA. *Data tangente inuenire ſecantem, et ſinum.*

RESOLVT. E ſumma quadratorum radii et tangentis extracta radix quadrata dabit ſecantem (454): et quia eſt ſecans ad tangentem vt radius ad ſinum (458), ſinus innoteſcit.

Fig. 63. 469. PROBLEMA. *Datis tangentibus* AT *et* AV *duorum arcuum* AB *et* AD *quadrante minorum inuenire tangentem* AX *arcus* AE *medii arithmetice proportionalis.*

RESOLVT. Datis tangentibus AT et AV innoteſcunt ſecantes CT et CV (468). Iam ob arcus BE=DE recta CX bifariam ſecat angulum TCB; vnde habetur CT : CV = TX : XV (411), et componendo CT + CV : CV = TX + XV : XV (205): ſi ergo XV inuenta addatur datae tangenti minori AV, obtinebitur tangens quaeſita AX.

470. COROLL. 1. Si punctum D abeat in A, erit FV = o, et CV = CA, TV = TA; adeoque prior proportio abibit in hanc: CT + CA : CA = AT : AX, quae continet ſolutionem problematis, in quo data tangente alicuius arcus quaeratur tangens dimidii eiuſdem; nam tunc punctum E erit in medio arcus AB.

471. COROLL. 2. Si punctum B abeat in H, CT et VT euadent infinitae, hinc CT + CV = TV, ſeu TX + XV: ergo in proportione

n. 469 etiam CV = XV: hinc ſi ſecans arcus minoris CV addatur tangenti minori datae AV, habebitur tangens quaeſita AX.

472. COROLL. 3. Si et B abeat in H, et D in A, erit arcus medius proportionalis AE = 45°, adeoque eius tangens AX = CA (452).

473. PROBLEMA. *Datis functionibus duorum arcuum, quorum differentia perquam exigua ſit, inuenire functionem arcus cuiusuis intermedii.*

RESOLVT. Fiat haec proportio: vt differentia arcuum datorum ad differentiam arcus minoris et intermedii, ita differentia datarum functionum ad differentiam, quae eſt inter functionem arcus minoris, et intermedii; inuenta haec differentia addatur functioni arcus minoris ſi creſcentibus arcubus functio creſcit, id eſt, ſi functio ſit ſinus, tangens, aut ſecans; dematur, ſi decreſcit, id eſt, ſi functio ſit coſinus, cotangens, vel coſecans.

DEMONSTR. Referant enim rectae AB et AD datos duos arcus, ac perpendiculares BN et DL in caſu 1 exprimant functiones creſcentibus arcubus creſcentes, in caſu 2 decreſcentes, ſitque arcus intermedius AE, eius functio quaeſita EM. Erunt extrema functionum creſcentium, vel decreſcentium puncta L, M, N in linea quapiam continua, quae ſi curua ſit, arcus exiguus LN pro recta haberi poterit; hinc ducta LK parallela ad AB erit LK: LI, ſeu DB: DE = NK: MI, hoc eſt, differentiae arcuum erunt vt differentiae functionum, Fig. 64.

Porro MI in caſu primo addi debet ad LD, vt habeatur EM, in ſecundo demi.

Scholion. Horum problematum ope functiones omnium arcuum, et angulorum inueniri poſſunt determinato radio in particulis e. g. 10000000: ſufficit autem eas computare vſque ad arcum 45°: cum enim ceteri vſque ad 90° ſint horum complementa, functiones eorum facile eruuntur per n. 454, 455, 456, 458. Inuentis functionibus reperiuntur earum logarithmi per ea, quae de logarithmis alibi tradidimus. Tabulae porro, in quibus functiones cum ſuis logarithmis inſcribuntur, ſex habere columnas debent: in quarum prima ſcribuntur gradus, et minuta prima; in ſecunda ſinus; in tertia tangentes; in quarta ſecantes correſpondentes; in quinta logarithmi ſinuum; in ſexta logarithmi tangentium. Secantium logarithmi non apponuntur, nam e logarithmis ſinuum nullo negotio eliciuntur: cum enim quadratum radii diuiſum per coſinum exhibeat ſecantem (455), ſatis erit e duplo logarithmo radii (242) ſubtrahere logarithmum coſinus (241) vt ſecantis logarithmus obtineatur. Arcus autem in paginis ſiniſtris tabulae incipiunt a O°, et deſcendendo continenter creſcunt vſque ad 45°; at in paginis dextris initium ſumunt a 90°, et perpetuo decreſcunt vſque ad 45°: ita fit, vt cuiuis arcui inſcripto in vna pagina reſpondeat e regione in altera eius complementum, adeoque etiam coſinus, cotangens, et coſecans. Sed iam ad vſum ipſarum tabularum veniamus.

474. PROBLEMA. *Dato quouis arcu, aut angulo inuenire ope tabularum functionem eidem respondentem.*

RESOLVT. 1) Si datus arcus quadrante, aut datus angulus recto maior non fuerit, solosque gradus, et minuta prima continuerit, quaeratur in prima columna paginae finistrae, vel dextrae, aderit in eadem pagina eiusdem sinus, tangens, ac secans; in altera e regione cosinus, cotangens, et cosecans.

2) Si arcus quadrante, vel angulus recto maior fuerit, subtrahatur a 180°, et quaerantur, vt ante, functiones arcus, vel anguli residui; eaedem erunt functiones etiam arcus, vel anguli dati (448).

3) Si arcus vel angulus praeter gradus, et minuta prima etiam secunda contineat, quaeratur in tabulis functio arcus proxime maioris, et proxime minoris, capiaturque earum differentia, tum fiat, vt differentia duorum arcuum, vel angulorum proximorum in tabulis, nempe 1′, seu 60″ ad differentiam arcus vel anguli dati et proxime minoris in tabulis, seu ad minuta secunda, quae datus arcus, ves angulus continet, ita differentia functionum arcubus maiori et minori in tabulis respondentium ad differentiam functionum arcubus dato et proxime minori in tabulis respondentium (473): inuenta haec differentia addatur functioni arcus, aut anguli proxime minoris, si sinus, tangens, aut secans quaeritur; dematur, si cosinus, cotangens, aut cosecans quaeritur, et obtinebitur functio quaesita (cit.).

E. g. quaeratur ſinus reſpondens angulo 30°, 5′, 8″. Angulorum proxime maioris in tabulis 30°, 6′, et proxime minoris 30°, 5′ ſinus ſunt 5015108, et 5012591, quorum differentia eſt 2517; fiat ergo 60″: 8″ = 2517: x, erit x = 336 quam proxime, quod additum ſinui 30°, 5′ exhibebit ſinum 5012927 reſpondentem angulo 30°, 5′, 8″.

475. PROBLEMA. *Data functione inuenire arcum, vel angulum eidem reſpondentem.*

RESOLVT. 1) Si data functio reperiatur in tabulis, habebitur etiam e regione in columna prima arcus, vel angulus eidem reſpondens.*

2) Si non adſit in tabulis, capiatur differentia functionum proxime maioris, et minoris in tabulis, tum fiat, vt differentia harum functionum ad differentiam, qua data functio ſuperat proxime minorem in tabulis, ita 60″, ſeu differentia duorum arcuum vel angulorum proximorum in tabulis, ad numerum minutorum ſecundorum addendorum arcui vel angulo reſpondenti functioni minori, ſi ea ſit ſinus, tangens, aut ſecans; vel demendorum, ſi ſit coſinus, cotangens, vel coſecans (473): arcus ita repertus, vel angulus, aut etiam eius ſupplementum erit is, cui data functio reſpondet.

E. g. quaeratur arcus, vel angulus reſpondens ſinui 2985411 in tabulis haud comparenti. Si nus proxime maior in tabulis eſt 2987632 reſpondens arcui 17°, 23′; proxime minor eſt 2984856 reſpondens arcui 17°, 22′: fiat ergo, vt differentia horum ſinuum 2776 ad 555 differentiam ſinus dati, et proxime minoris in tabulis ita $17^\circ + 23' - 17^\circ - 22'$, ſeu $60''$ ad x; erit $x = 12''$, adeoque arcus, vel angulus, cui ſinus datus reſpondet, eſt 17°, $22'$, $12''$, vel eius ſupplementum 162°, $37'$, $48''$. Hinc ſpecies arcus, vel anguli quaeſiti aliunde iam nota eſſe debet.

476. PROBLEMA. *Triangulum rectangulum* ABC *reſoluere.* Fig. 65.

RESOLVT. Ex n. 460 et 471 formulae ſequentes eruuntur.

Data.	Quaerend.	Reſolutio Problematis.
AB, AC	B BC C	AB : AC = Sin. tot. ad tang. B. Sin. B : AC = Sin. tot. ad BC. AC : AB = Sin. tot. ad tang C.
AB, BC	C B AC	BC : Sin. tot. = AB : Sin. C. Habetur dat. rect. A. et inuent. C Sin. tot. ad BC = Sin. B : AC.
AC, BC	B C AB	BC : Sin. tot. = AC : Sin. B. Habetur inuento B. Sin. tot. ad BC = Sin. C : AB.
AB, B	C AC BC	Habetur datis recto A, et B. Sin. C : AB = Sin. B : AC. Sin. C : AB = Sin. tot. ad BC.
BC, B	C AB AC	Habetur vt ante. Sin. tot. ad BC = Sin. C : AB. Sin. tot. ad BC = Sin. B : AC.

Omnia problemata trianguli rectanguli ad haſce formulas reduci poſſunt, quorum pleraque etiam ope tangentium reſolui queunt, in quibus nos ſinus adhibuimus.

477. PROBLEMA. *Triangulum* ABC *non rectangulum reſoluere.* Fig. 66.

Resolvt. Ex n. 462, 464, et 465 formulae ſequentes eruuntur:

Data	Quaerend.	Reſolutio Problematis.
AB	A	BA : Sin. C=BC : Sin. A, vel ad eius ſupplem.
BC	B	Habetur inuento A.
C	AC	Sin. C : AB=Sin. B : AC.
A	C	Habetur datis A et B.
B	AB	Sin. B: AC.=Sin. C : AB
AC	BC	Sin. C: AB=Sin. A : BC
AB	A	BC + BA : BC — BA = tang. $\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$C : tang. $\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$C: inuenta ſemidifferentia addita ad ſemiſum. $\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$C dat angulum A.
BC	C	Inuenta ſemidifferentia ſubtracta ab $\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$C dat angulum C
B	AC	Sin. C : AB=Sin. B : AC.
AB	C	BC : AC + AB = AC — AB : DC—DB: ſi iam dimidio inuentae differentiae addatur dimidia baſis, obtinetur ſegmentum maius DC, quod a tota baſi ablatum relinquit ſegmentum minus BD. Hinc in triangulis rectangulis ADC, ADB reperiuntur anguli C et B, atque adeo innoteſcit etiam angulus A.
BC	B	
AC	A	

Scholion. Si in triangulo quopiam tres duntaxat anguli dentur, innoteſcunt quidem eorundem ſinus, adeoque inuenitur etiam proportio, quam habent latera quaeſita ad inuicem (462): at ipſa laterum quantitas abſoluta cognoſci nequit, niſi vnum ſaltem eorum detur.

CA-

CAPVT VI.

De nonnullis Praxibus geometricis, et trigonometricis.

478. PROBLEMA. *Scalam geometricam construere, quae contineat tres gradus progressionis decuplae.* Fig. 67.

RESOLVT. Ad rectam AC erigatur perpendicularis AB, quae diuidatur in partes aequales 10: ex puncto B ducatur BD parallela ad AC, ac in vtraque hac linea capiantur partes aequales 10, quarum interuallum AE vel BG transferatur in F et I, in C et D etc. quoties fieri potest. Puncta diuisionum in rectis AE et BG connectantur rectis transuersis a 9 ad 10, ab 8 ad 9, a 7 ad 8 etc. ductis; tum per puncta E et G, F et I, C et D ducantur rectae EG, FI, CD. Denique per omnia diuisionis rectae AB puncta ducantur parallelae ad rectam AC; erit scala perfecta, in qua rectae AE, A9, 99 sunt in progressione decupla decrescente.

DEMONSTR. Est enim ex constr. recta A9 pars decima rectae AE, vti et recta G1 rectae BG, quod vero eiusdem A9 pars decima sit lineola 99, facile ostenditur; similia enim sunt triangula B99, BA9 ob angulum B communem et latera 99, A9 parallela; hinc B9 : BA = 99 : A9, sed ex constr. B9 est decima pars rectae BA: ergo etiam 99 est decima pars rectae

A9. Eodem modo patet rectam 88 esse duas decimas, 77 tres decimas etc. partes rectae A9.

479. COROLL. Si ergo recta AE repraesentet perticam 10 pedes habentem, recta A9 repraesentabit pedem; recta 99 vnum digitum, 88 duos, 77 tres etc.

480. PROBLEMA. *Vnica circini advrtura desumere ex scala tres gradus progressionis geometricae, e. g. 2 pedes, 3 digitos, 7 lineas.*

RESOLVT. In triangulo 1EG inter lineolas transuersas basi G1 parallelas quaere lineoam 77, quae dabit 7 lineas: vltra hanc accipe 3 decades vsque ad O, quae dabunt 3 digitos; citra vero in eadem recta cape duas centenas vsque ad H, quae dabunt 2 pedes: apertura ergo circini OH tres petitos gradus comprehendit.

481. COROLL. Quodsi detur linea quaepiam ad scalam adplicanda, vt innotescat, quotnam eiusdem partes, et quales contineat, capiatur data recta circino, tum vnum circini crus successiue adplicetur ad diuisiones rectae EG, vel FI, vel CD etc. e. g. ad punctum H, ita vt crus alterum in eadem recta H7 accurate incidat in aliquod diuisionis punctum e. g. in O, ita innotescent partes scalae in data linea contentae: nempe in nostro casu recta HO continet duas centenas, tres decades, septem vnitates. Quodsi tota recta circino comprehendi nequeat, capiatur pars eius dimidia, tertia, quarta etc.: si enim constiterit quotnam scalae partes ea pars contineat, facile innotescet numerus partium scalae in tota recta contentarum.

482. PROBLEMA. *Metiri diſtantiam duorum locorum A et B acceſſorum.* Fig. 68.

RESOLVT. 1) *Ope menſulae geometricae.* Menſula obducatur charta candida probe extenſa, et collocetur ſitu horizontali in loco quopiam C, vnde locus vterque cerni, et accedi poſſit. Tum in puncto menſae C ſtationis loco imminente defigatur perpendiculariter acicula, et per regulam teleſcopio, vel pinnulis inſtructam, quae *dioptra* dicitur, fiat collineatio verſus loca A et B, et ducantur in menſula rectae indefinitae verſus eadem, in quas e ſcala transferantur diſtantiae locorum CA, et CB, nempe prior transferatur in C*a*, poſterior in C*b*, iungantur puncta *a* et *b* recta *ab*; haec ad ſcalam adplicata indicabit diſtantiam AB. Eſt enim ex conſtr. C*a*: CA = C*b*: CB; vnde ſimilia ſunt triangula C*ab* et CAB (416): hinc C*a*: CA = *ab*: AB (408): ſicut ergo C*a* ſuis particulis exhibet perticas, pedes, digitos etc. diſtantiae CA, ita *ab* exhibebit perticas, pedes, digitos etc. diſtantiae AB.

2) *Ope quadrantis.* Capiatur quadrans in gradus 90, vel ſemicirculus in 180 accurate diuiſus, in cuius extremo fixus ſit radius teleſcopio vel pinnulis inſtructus, radius alter circa centrum mobilis ſuas item pinnulas, ſeu dioptram, aut teleſcopium habeat. Collocetur hoc inſtrumentum ſitu horizontali in loco C, ita vt centrum ſtationi directe immineat; tum per radium fixum fiat collineatio verſus locum A, per radium mobilem verſus B, arcus inter duos radios interceptus indicabit angulum ACB (282): menſuratis igitur ope catenae, vel funis diſtantiis

AC et BC, inferatur: vt fumma laterum AC et BC ad eorundem differentiam, ita tangens femifummae angulorum A et B, quae datur inuento angulo C (363), ad tangentem femidifferentiae eorundem (464), cui in tabulis refpondebit ipfa femidifferentia, quae addita femifummae exhibebit angulum A vel B maiori lateri oppofitum (368). Deinde inferatur: vt finus anguli nunc inuenti ad latus fibi oppofitum, ita finus anguli C ad latus oppofitum AB (462).

Fig. 69. 483. PROBLEMA. *Metiri diftantiam duorum locorum* A *et* B, *quorum vnus tantum* A *poffit accedi.*

RESOLVT. 1) *Ope menfulae geometricae.* Eligatur ftatio in C, vnde locus vterque cerni, A vero etiam accedi poffit, loceturque illic menfula fitu horizontali, ac fiant, vt fupra, collineationes, et ducantur rectae indefinitae. Deinde diftantia CA ope catenae menfurata e fcala transferatur ex C in a: atque acicula ex C extracta defigatur in a, haftaque confpicua in C erecta transferatur menfula ad locum A, et collocetur fitu horizontali ita, vt punctum a loco A directe immineat, recta vero aC cum AC in directum iaceat. Fiat denique penes aciculam collineatio verfus locum B, et ducatur recta, quae rectam e ftatione C verfus B ductam fecet in puncto b; recta Ab fcalae adplicata indicabit fuis particulis numerum perticarum, pedum etc. diftantiae AB. Nam triangula ABC, Abc habent duos angulos communes, nempe A, et C ad c translatum: ergo tertius B$=b$ (364): et hinc Ac: AC$=$Ab : AB (408); ficut ergo Ac ex conftr. fuis particulis repraeſentat diſtantiam AC, ita A*b* repraeſentabit diſtantiam AB.

2. *Ope quadrantis*. Factis vti ſupra collineationibus menſurentur anguli ACB, et CAB, innoteſcet hoc ipſo tertius B (363): ſi ergo ope catenae menſuretur latus AC, ſtabit haec proportio: vt ſinus anguli B ad latus oppoſitum AC, ita ſinus anguli C ad latus oppoſitum AB (462).

484. PROBLEMA. *Metiri diſtantiam duorum locorum* A *et* B, *quorum neuter poſſit accedi.* Fig. 70.

RESOLVT. 1) *Ope menſulae geometricae*. Electis duabus ſtationibus C et *d*, e quarum vtraque cerni locus vterque poſſit, collocetur menſula in C, et factis rite collineationibus ducantur rectae indefinitae verſus A, B, et *d*. Deinde menſurata diſtantia C*d* transferatur e ſcala ab acicula C vſque in D, ac acicula ex C extracta defigatur in D, menſulaque ad ſtationem *d* translata ſic collocetur in ſitu horizontali, vt acicula quidem ſtationi *d* directe immineat, recta vero CD cum C*d* congruat. Denique penes aciculam rurſus fiant verſus C, A, et B collineationes, et ducantur rectae prioribus occurrentes in punctis *a* et *b*, quorum interuallum *ab* ad ſcalam adplicatum indicabit diſtantiam AB. Nam ob angulum *d* communem, et *c* ex C translatum, ſimilia ſunt triangula *dca*, *d*CA; hinc $dc : dC = ca : CA$; et eadem ex cauſſa ſimilia ſunt triangula *dcb*, *d*CB; hinc $dc : dC = cb : CB$, ergo etiam $ca : CA = cb : CB$, adeoque etiam triangula *acb* et ACB ſimilia ſunt (416): ſimilia ergo ſunt etiam polygona *dcab*, *d*CAB (439): ergo habetur haec proportio: $dc : dC = ab : AB$: (358.)

2) *Ope quadrantis.* Menſurentur, vt ſupra, anguli ACd, BCd, vnde innoteſcet etiam ACB: menſuretur item ope catenae latus Cd, ac in ſtatione d anguli BdC, AdC. Deinde fiat imprimis in triangulo BCd, in quo menſuratis angulis C et d, innoteſcit tertius B, haec proportio: vt ſinus anguli B ad latus oppoſitum Cd, ita ſinus anguli d, vel eius contigui, ſi obtuſus eſt, ad latus oppoſitum BC. Eodem calculo inuenitur latus AC in triangulo AdC. Denique in triangulo ACB habitis iam praeter angulum C etiam lateribus BC et AC, fiat reſolutio vt ſupra (482).

Fig. 71. 485. Coroll. Si loca inacceſſa A et B eiusmodi fuerint, vt nequeant inueniri duae ſtationes C et D, e quibus cerni ambo poſſint, eligatur ſtatio aliqua C, ex qua cerni poſſit locus A, et altera D, ex qua cerni poſſit locus B, menſureturque harum ſtationum diſtantia CD. Eligatur rurſus ſtatio quaepiam E, ex qua cerni queat locus A, et menſuretur diſtantia CE vna cum angulis ACE, AEC, et inueniatur diſtantia AC (483), atque ita concipiendo radium viſualem AD nota erunt in triangulo ACD latera CA et CD vna cum angulo intercepto C, qui menſurari poteſt; hinc autem innoteſcet latus AD, et angulus ADC (482). Eadem operatione in altera parte inſtituta reperietur DB. Si ergo ex angulo menſurato CDB tollatur inuentus ADC, habebuntur in triangulo ADB latera AD et DB vna cum angulo intercepto D; vnde erui poteſt AB (cit.).

Scholion. Si in poſtremis duobus problematis diſtantia AB nimis magna fuerit, e. g. duorum, aut trium milliarium, neceſſe eſt etiam diſtantiam

AC in Fig. 69, vel diſtantiam *Cd* in 70 eſſe maiorem, e. g. medii, vel integri milliaris, quae cum ſaepe ob varia impedimenta ope catenae menſurari haud poſſit, determinari poterit per n. 482, vel per n. 483. In omnibus vero hiſce, et ſequentibus triangulorum reſolutionibus loco laterum, et functionum adhiberi debent eorum logarithmi, vt calculus facilior reddatur.

486. PROBLEMA. *Metiri altitudinem acceſſam* AB. Fig. 27.

RESOLVT. 1) *Ope vmbrae.* Si planum circa datam altitudinem fuerit ſatis horizontale, baculus notae altitudinis *ba* defigatur in plano a ſole colluſtrato perpendiculariter, menſureturque tum eius, tum altitudinis quaeſitae vmbra eodem tempore, ac inferatur: vt vmbra baculi *bc* ad vmbram altitudinis BC, ita altitudo baculi ad altitudinem quaeſitam. Nam triangula *bac*, BAC ſimilia ſunt ob angulos ad *b* et B rectos, ac ad *c* et C aequales eidem angulo eleuationis ſolis ſupra horizontem.

2) *Ope vnius baculi.* Cape baculum MN, eius praeciſe longitudinis, vt terrae perpendiculariter infixus oculi tui altitudinem exaequet. Tum recede ab altitudine menſuranda tamdiu, donec ſupinus in terra iacens in ſitu NC per cacumen baculi M ad calces pedum perpendiculariter infixi videas punctum A; erit enim tunc BC = AB. Nam ob angulum ad C communem, et ad N ac B rectos ſimilia erunt triangula MNC, ABC; vnde NC : MN = BC : AB; atqui ex conſtr. NC = MN: ergo etiam BC = AB.

Fig. 73. 3) *Ope duorum baculorum.* Interuallo D*d* ante mensurato infige duos baculos CD et *cd* ita, vt per apices *c* et C videas punctum A; erit F*c* seu D*d* (383) ad E*c* = FC: EA, ob similia, vt ante, triangula *c*FC, *c*EA. Si ergo mensures differentiam baculorum FC, et distantiam E*c* seu B*d*, inuenies partem altitudinis AE, cui si addas *cd* = EB (cit.), habebis integram altitudinem AB.

Fig. 74. 4) *Ope mensulae geometricae.* Erigatur mensula in statione D verticaliter, ita vt latus eius FG parallelum sit horizonti DB: tum infixa acicula in puncto C stationi D imminente ducatur recta indefinita C*e* lateri FG parallela, et fiat immota mensula collineatio versus apicem A, ducaturque recta indefinita ab acicula C versus A; denique mensurata distantia CE ope scalae ex C transferatur in *e*, ac illic erigatur perpendicularis *ea*; haec ad scalam adplicata indicabit altitudinem AE. Nam patet similia esse triangula C*ea*, CEA, et hinc C*e*: CE = *ea*: EA: quare innotescit EA, cui si addatur EB, quae aequatur altitudini aciculae CD (383), obtinebitur AB.

5) *Ope quadrantis.* Quadrante verticaliter in D erecto, ita vt eius radius immobilis horizonti parallelus sit, et centrum C immineat stationi D, inuestigetur angulus C; deinde mensuretur distantia CE = DB: habebuntur in triangulo AEC praeter latus EC anguli C, et E rectus, adeoque etiam tertius A (363): fiat ergo haec proportio: sinus anguli A est ad latus oppositum EC, vt sinus anguli C ad latus oppositum AE (462), cui si addatur altitudo

centri quadrantis CD = EB, habebitur tota altitudo AB.

487. PROBLEMA. *Metiri altitudinem* AB *inaccessam.*

RESOLVT. 1) *Ope mensulae geometricae.* Collocetur mensula in statione D verticaliter, vt supra, et penes aciculam O ducatur recta O*r* indefinita lateri mensulae parallela, iuxta cuius directionem fiat collineatio in aliquod quaesitae altudinis punctum E; tum penes aciculam fiat collineatio versus A, et ducatur recta indefinita. Ex O in *r* transferatur e scala distantia stationum CD, ac relicto in D baculo transferatur mensula ad alteram stationem C, acicula in *r* defixa, et stationi C imminente. Tum per dioptras regulae ad rectam *ro* adplicatae respicienti baculus occurrat in D, et ex aduerso occurrat punctum E, ac immota mensula fiat penes aciculam collineatio versus A, ducaturque recta occurrens alteri e priore statione versus A ductae in puncto *a*; demissa ex *a* perpendicularis *ae* ad scalam adplicata indicabit partem altitudinis AE. Nam similia sunt triangula *rao*, *r*AO, item *rae*, *r*AE, ergo $ro : r\text{O}$ seu $\text{CD} = ra : r\text{A}$; et $ra : r\text{A} = ae : \text{AE}$; igitur $ro : \text{CD} = ae : \text{AE}$: inuenitur itaque AE, cui addenda est altitudo aciculae *r*C = EB, si puncta B, C, D fuerint in eadem recta, et obtinebitur integra altitudo AB. Fig. 75.

2) *Ope quadrantis.* Iisdem factis collineationibus mensurentur anguli O, et A*r*E, innotescet angulus A*r*O, et hinc etiam angulus *r*AO: fiat igitur: vt sinus anguli A ad latus oppositum *r*O, ita sinus anguli O ad latus oppositum A*r*:

quare in triangulo *r*AE habebitur latus A*r*, angulus A*r*E menſuratus, et rectus E; ſtabit igitur haec proportio: vt ſinus anguli recti E ad latus oppoſitum A*r*, ita ſinus anguli A*r*E ad latus oppoſitum AE; cetera fient vt ante.

Fig. 76. 488. COROLL. Si puncta B, C, et D non ſint in eadem recta, fiat penes aciculam collineatio etiam verſus punctum B, et ducatur recta indefinita, cui perpendicularis *a e* producta occurrat in *b*; indicabit *a b* in ſcala totam altitudinem AB, ob ſimilitudinem ſcilicet triangulorum *a*C*b*, ACB. Si quadrante fiat menſuratio, facta verſus E et B collineatione reperietur angulus ECB; notus eſt praeterea rectus in E, adeoque innoteſcit tertius B; latus item CE reſolutione trianguli AEC inuentum eſt: ex his autem eruitur pars quaeſitae altitudinis EB. Poteſt etiam erui ſimul tota altitudo AB, ſi reſoluatur totum triangulum ACB, in quo praeter latus AC iam inuentum innoteſcunt anguli omnes.

Fig. 77. 489. PROBLEMA. *Areae campeſtris* ABCDEFA *libere permeabilis ichnographiam perficere, id eſt, figuram ei areae ſimilem conſtruere.*

RESOLVT. 1) *Ope menſulae geometricae.* Collocetur menſula ſitu horizontali in angulo quopiam areae A, e quo ad reliquos omnes angulos proſpectus pateat: tum factis penes aciculam angulo A imminentem verſus eoſdem collineationibus ducantur rectae indefinitae, in quas e ſcala transferantur diſtantiae AB, AC, AD, AE, AF ope catenae menſurandae, ac puncta *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, in quibus eae diſtantiae translatae terminantur, connectantur, erit figura A*bcdef*A ſimilis areae propositae ABCDEFA. Nam singula triangula Abc, Acd etc. similia sunt suis correspondentibus ABC, ACD etc. (616): ergo figura parua maiori similis est (439). Eodem modo res peragitur, si mensula non in angulo, sed intra ipsam aream vbicunque collocetur.

2) *Ope quadrantis.* Centro quadrantis angulo A imminente mensurentur anguli BAC, CAD DAE, EAF, item distantiae AB, AC, AD, AE, AF ope catenae; tum constructis in charta iisdem angulis distantiae mensuratae transferantur e scala in A*b*, A*c*, A*d*, A*e*, A*f*, et puncta *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, connectantur; erit, vt ante, figura A*bcdef*A similis areae propositae ABCDEFA. Eadem erit operandi ratio, si statio non in angulo, sed intra ipsam aream vbiuis constituatur.

490. PROBLEMA. *Areae campestris* ABCDEF *imperuiae ichnographiam perficere.* Fig. 78.

RESOLVT. 1) *Ope mensulae geometricae.* Deligantur duo anguli proximi areae propositae A et B, e quibus ad singulos angulos prospectus pateat: collocetur mensula in primo angulo A situ horizontali, ac penes aciculam angulo imminentem ducantur versus ceteros angulos rectae indefinitae. Deinde mensurata ope catenae stationum distantia AB transferatur e scala in A*b*, et acicula in *b* defigatur, tum mensula translata in angulo B sic collocetur, vt acicula eidem immineat, et juxta rectam B*a* collineanti baculus in A relictus occurrat. Denique penes aciculam B factis versus angulos C, D, E, F collineationibus ducantur rectae prioribus occurrentes in punctis *c*, *d*, *e*, *f*: puncta haec connexa dabunt ichnographiam $BcdefaB$. Nam ob angulum ad B communem, et angulum in a cum menſula translatum ex A, ſimilia ſunt triangula acB et ACB, adB et ADB, aeB et AEB, afB et AFB: eſt ergo in primo pari aB : AB $=$ ac: AC: in ſecundo aB: AB $=$ ad: AD, ergo ac: AC $=$ ad: AD; vnde triangula acd, ACD ſimilia ſunt (416): eodem modo oſtenditur ſimilia eſſe triangula ade, ADE, item aef, AEF: quare figura $BcdefaB$ ſimilis eſt areae BCDEFAB (439).

2) *Ope quadrantis.* Factis in A et B collineationibus verſus omnes areae propoſitae angulos notentur omnes anguli in vtraque ſtatione; tum diſtantia ſtationum AB e ſcala deſumta transferatur in charta in rectam Ba, ac in extremis B et a conſtituantur anguli in vna, et altera ſtatione inuenti, dabunt, vt ante puncta interſectionum c, d, e, f figuram $BcdefaB$ areae propoſitae ſimilem.

491. PROBLEMA. *Ichnographiam regni, vel prouinciae ope trigonometriae perficere.*

Fig. 79. RESOLVT. Luſtratis regionis arcibus, vrbibus, ac montibus deligatur loco opportuno baſis AB eius longitudinis, quae notabilem habeat rationem ad diſtantias locorum in mappam referendorum, eaque ope problematum ſuperiorum accurate menſuretur: ab extremis autem baſeos A et B debet patere aſpectus ad complures arces, montes, vrbes, oppida etc. Tum in prima ſtatione ope quadrantis menſurentur omnes anguli, quos baſis AB efficit cum lineis verſus loca conſpicua C, D, E etc. directis, nempe anguli

BAC, BAD, BAE etc. omissis interea angulis, qui nimis obtusi, vel nimis acuti euaderent. Similiter explorentur in statione B anguli ABC, ABD, ABE etc. In omnibus his triangulis dato latere communi AB, et angulis eidem adiacentibus, reperiuntur ope sinuum distantiae AC, BC; AD, BD etc. atque ita positio punctorum C, D, E etc. determinatur, si nimirum iis distantiis e scala, ad quam basis AB adplicatur, desumtis centris A et B fiant arcus sese intersecantes. Porro vt loca omissa e. g. F, L etc. determinentur, assumatur pro basi distantia AE iam inuenta, ac exploratis angulis EAF, AEF inueniantur latera AF et EF, his e scala desumtis tanquam radiis ducti arcus e centris A et E designabunt sua intersectione positionem loci F. Eodem modo assumta basi BC definietur situs loci L, et sic porro de aliis locis in primis stationibus praetermissis. Figura hunc in modum constructa constabit totidem triangulis similibus, ac similiter positis, quot habet ipsa regio; erit proinde eidem similis.

SECTIO II.

DE SUPERFICIEBVS.

CAPVT I.

De genesi, et aequalitate superficierum.

Fig. 80. 492. Si concipiatur recta CD motu continuo ita deuenire ad situm AB, vt sibi semper parallela maneat, et vbique sui vestigium relinquat, totam parallelogrammi AD superficiem succesiue conteget. Vnde parallelogrammum gignitur continuo fluxu baseos per altitudinem.

493. THEOREMA. *Area cuiusuis trianguli est factum e dimidia basi in altitudinem.*

DEMONSTR. Si enim a vertice trianguli incipiendo concipiantur basi duci infinitae parallelae sibi infinite vicinae, summa earundem aequalis erit areae trianguli; atqui ea summa est factum ex dimidia basi in altitudinem (387): ergo.

494. COROLL. I. Quare cum parallelogrammum sit duplum trianguli eandem basim et altitudinem habentis (385), area parallelogrammi est factum ex tota basi in altitudinem.

495. COROLL. 2. Trapezium ABDC habens duo latera opposita AB et CD parallela, ducta diagonali AD resoluitur in duo triangula ADC, ABD aequales altitudines AE et FD habentia (308); atqui area trianguli ADC est $= \frac{1}{2}CD \times AE$; et area trianguli ABD est $= \frac{1}{2}AB \times DF = \frac{1}{2}AB \times AE$ (493): ergo area vtriusque simul, seu area huiusmodi trapezii aequatur facto ex semisumma laterum parallelorum $\frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}AB$ ducta in altitudinem AE, vel FD. Fig. 84.

496. COROLL. 3. Quoniam polygonum quoduis regulare constat tot aequalibus, et aeque altis triangulis, quot sunt latera (397), summa omnium triangulorum, adeoque area eiusmodi polygoni aequatur facto ex dimidio omnium basium, seu ex dimidia polygoni perimetro in communem triangulorum altitudinem, seu in perpendiculum e centro ad latus quoduis demissum (318).

497. COROLL. 4. Cum ergo circulus quiuis sit polygonum regulare infinitorum laterum, in quo perpendiculum e centro ad latus demissum sit ipse radius (442), area circuli aequatur facto ex dimidia peripheria in radium, vel ex peripheria in dimidium radium; et area sectoris circuli aequatur facto ex dimidio arcu sectorem terminante in radium, aut ex dimidio radio in eum arcum.

498. COROLL. 5. Hinc area circuli aequalis est areae trianguli habentis pro basi rectam aequalem peripheriae circuli, pro altitudine autem eiusdem radium (494): et area sectoris aequalis est areae trianguli eandem habentis al-

titudinem, pro bafi vero rectam aequalem arcui fectorem terminanti.

499. COROLL. 6. Figura quaeuis rectilinea refolui poteft in mera triangula: hinc area figurae inuenitur, fi areae omnium triangulorum feorfim inuentae in vnam fummam cogantur.

SCHOLION. Quemadmodum lineas metimur lineis, ita fuperficies metimur fuperficiebus, quarum magnitudo nobis fit cognita, e. g. vnius perticae, pedis, digiti etc. Eft autem fuperficies vnius perticae, pedis, digiti etc. eiufmodi fpatium, cuius tam longitudo, quam latitudo vnam perticam, pedem, digitum etc. contineat, quod quidem facile adparet effe quadratum. Hinc areae cuiufuis magnitudo tot e. g. pedum quadratorum effe dicitur, quot eiufmodi quadratis
Fig. 82. perfecte contegi poteft. Ita area parallelogrammi AD, fi AE vnum pedem defignet, fex pedum quadratorum effe dicitur, quia impofitis fex pedibus quadratis, qualis eft AI, perfecte contegitur. Vnde fi tam bafis, quam altitudo parallelogrammi diuidantur e. g. in pedes, et per fingula diuifionum vnius puncta ducantur alteri parallelae, formabunt hae tot feries pedum quadratorum, quot pedes funt in altitudine; et in quauis ferie tot erunt pedes quadrati, quot pedes funt in bafi; vt adeo numerus pedum in altitudine contentorum ductus in numerum pedum bafeos exprimat numerum pedum quadratorum in area contentorum.

500. PROBLEMA. *Dato cuiuis parallelogrammo aequale quadratum conftruere.*

RE-

RESOLVT. Inter altitudinem, quae ſit $= a$ et baſim $= b$ dati parallelogrammi quaeratur media proportionalis $= m$ (421), erit $a : m = m : b$; hinc $m^2 = ab$: eſt autem ab area parallelogrammi (494): ergo m eſt latus quadrati eidem aequalis.

501. PROBLEMA. *Dato triangulo aequale quadratum conſtruere.*

RESOLVT. Inter dimidiam trianguli altitudinem $\frac{1}{2}a$, et baſim b quaeratur media proportionalis m: erit $\frac{1}{2}ab = m^2$; eſt autem $\frac{1}{2}ab$ area trianguli (493): ergo m eſt latus quadrati eidem aequalis.

502. PROBLEMA. *Datae cuiuis figurae rectilineae aequale quadratum conſtruere.*

RESOLVT. Transformetur data figura in aequale triangulum (391), et huic conſtruatur aequale quadratum (501).

503. PROBLEMA. *Dato circulo aequale quadratum conſtruere.*

RESOLVT. Inter dimidium circuli radium $\frac{1}{2}r$, et peripheriam p quaeratur media proportionalis m, erit $\frac{1}{2}rp = m^2$; eſt autem $\frac{1}{2}rp$ area circuli (497): ergo m eſt latus quadrati eidem aequalis.

SCHOLION. Difficultas omnis in quadrando circulo huc demum recidit, vt inueniatur accurata ratio inter diametrum, et peripheriam circuli, qua inuenta, et data diametro vtique reperiri poſſet linea recta peripheriae accurate aequalis, ac proinde ope praeſentis problematis poſſet conſtrui quadratum circulo perfecte aequale, quod eſſet quadrare circulum. Ea ratio iam olim a veteribus inueſtigata fuit ope polygonorum regularium circulo inſcriptorum, et circumſcriptorum, quorum perimetri tanto magis accedunt ad circuli peripheriam, quanto magis creſcit numerus, et decreſcit magnitudo laterum. Et Archimedes quidem hac via deprehendit eam rationem eſſe fere vt $7 : 22$; at ea accurate nunquam fortaſſe inuenietur, et ſi etiam inueniretur, vſui haud magno eſſet propter ingentes numeros, quibus exprimeretur. Ea, quam Metius reperit, nempe vt $113 : 355$ adeo ad veram accedit, vt in peripheria, cuius diameter ſemialteram leucam continet, vna linea non aberret: quare in circulis minoribus eadem vti tuto licebit.

CAPVT II.

De comparatione ſuperficierum.

504. THEOREMA. *Areae quorumuis parallelogrammorum ſunt in ratione compoſita baſium, et altitudinum.*

DEMONSTR. Sint enim eorum altitudines A et a, baſes B et b, erunt areae vt $A \times B : a \times b$ (494); eſt autem haec ratio compoſita ex $A : a$ et $B : b$ (189).

505. COROLL. I. Si ergo baſes aequales ſint, erit $A \times B : a \times b = A : a$: ſi altitudines aequales ſint, erit $A \times B : a \times b = B : b$ (190),

hoc eſt, areae in primo caſu altitudinum, in ſecundo baſium rationem habent.

506. COROLL. 2. Cum dimidia ſint vt tota (210), triangula autem ſint dimidia parallelogrammorum easdem baſes, et altitudines habentium (385), praeſens theorema vna cum praecedente corollario etiam in triangulis obtinet. Conf. n. 387.

507. COROLL. 3. Si duo parallelogramma, vel triangula aequalia ſint, erit $A \times B = a \times b$, et hinc $A : a = b : B$ (204), hoc eſt, altitudines habent baſibus reciproce proportionales. Et viciſſim ſi fuerit $A : a = b : B$, erit $A \times B = a \times b$ (202), id eſt parallelogramma, vel triangula aequalia ſunt.

508. THEOREMA. *Areae parallelogrammorum* ABCD, abcd *ſimilium ſunt vt quadrata quorumuis laterum homologorum, ſeu ſimiliter poſitorum.* Fig. 83.

DEMONSTR. Demiſſis enim ex aequalibus angulis A et a perpendiculis AE, ae, ſimilia erunt triangula ABE, abe ob angulos ad E et e rectos, et ob $B = b$ propter figurarum ſimilitudinem: ergo $AE : ae = AB : ab$ (408): atqui ob figurarum ſimilitudinem $AB : ab = BC : bc$; quare $AE : ae = BC : bc$; ſunt autem parallelogramma in ratione compoſita ex $AE : ae$, et $BC : bc$ (504), ſeu ex $BC : bc$, et $BC : bc$; ergo ſunt vt $BC^2 : bc^2$ (192); vel cum ſit $BC : bc = AB : ab = AD : ad = DC : dc$, ſunt vt $AB^2 : ab^2$, vel vt $AD^2 : ad^2$, vel vt $DC^2 : dc^2$ (212).

509. COROLL. Cum ſimilia triangula ſpectari poſſint tanquam ſimilium parallelogrammorum dimidia (386), etiam triangulorum ſimilium

areae ſunt vt quadrata quorumuis laterum homologorum.

Fig. 55. 510. THEOREMA. *Areae quorumuis polygonorum ſimilium* ABCDE, abcde *ſunt vt quadrata quorumuis laterum homologorum.*

DEMONSTR. Ductis enim per aequales angulos A et *a* diagonalibus, ſimilia erunt triangula ABC et *abc*, ACD et *acd*, ADE et *ade* (438): eſt autem triangulum ABC : $abc = AB^2 : ab^2$; ACD : $acd = CD^2 : cd^2 = AB^2 : ab^2$; ADE : $ade = AE^2 : ae^2 = AB^2 : ab^2$ (509); ergo omnia triangula ſunt in eadem ratione $AB^2 : ab^2$: quare etiam ſummae omnium triangulorum, ſeu areae polygonorum ſunt vt $AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$ etc. (214).

511. COROLL. 1. Cum latera polygonorum regularium ſimilium homologa ſint vt radii circulorum iiſdem circumſcriptorum (441), erunt quadrata laterum homologorum vt quadrata radiorum (212): cum ergo eorum areae ſint vt quadrata laterum homologorum (510), erunt etiam vt quadrata radiorum circulorum iisdem circumſcriptorum.

512. COROLL. 2. Atqui circuli ſunt polygona regularia infinitorum laterum (442), et quidem ſimilia (439); ergo eorundem areae ſunt vt quadrata radiorum; vel cum radii ſint vt diametri (210), vt quadrata diametrorum 212).

Fig. 84. 513. COROLL. 3. Si ſupra ſingula trianguli rectanguli ABC latera deſcribantur figurae ſimiles, ea, quae conſtruetur ſupra hypotenuſam BC, exaequabit reliquas duas ſimul ſumtas.

Erit enim figura BC ad figuras AB + AC, vt $BC^2 : AB^2 + AC^2$ (510); ſed $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (433): ergo etiam figura BC = fig. AB + AC.

514. Coroll. 4. Si ſupra eiuſdem trian- Fig. 85.
guli rectanguli latera deſcribantur ſemicirculi, lunulae M + N aequabuntur triangulo ABC. Nam ſemicirculus BAC aequabitur ſemicirculis BDA, AEC ſimul ſumtis (513): ergo vtrinque ab aequalibus tollendo ſegmenta O + P, reſtabit triangulum ABC = M + N.

515 Problema. *Datis quotcunque figuris ſimilibus vnam aequalem, ac ſimilem conſtruere.*

Resolvt. Iungantur ad angulum rectum dua- Fig. 54.
rum latera homologa AB et BC, vel diametri, ſi figurae datae fuerint circuli; ducta hypotenuſa AC erit latus homologum figurae, quae ſola aequabit duas illas, quarum latera ſunt AB et BC; aut ſi figurae circuli fuerint, erit AC diameter circuli aequantis ambos ſimul circulos, quorum diametri ſunt AB et BC (513). Rurſus huic hypotenuſae iungatur ad angulum rectum latus homologum tertiae figurae, aut diameter tertii circuli, et ſic porro, quemadmodum alibi de quadratis diximus (435). Latere inuento conſtruatur figura vni datarum ſimilis (443).

516. Problema. *Datis duabus figuris ſimilibus conſtruere tertiam ſimilem, quae ſit aequalis earundem differentiae.*

Resolvt. Super latere figurae, vel diame- Fig. 53.
tro circuli maioris AC deſcribatur ſemicirculus, et in eo pro chorda adplicetur latus homolo-

gum figurae, aut diameter circuli minoris AB; erit altera chorda BC latus homologum figurae, aut diameter circuli petiti. Nam figura lateris, vel diametri AC aequalis eſt figuris laterum, vel diametrorum AB et BC ſimul ſumtis (513): ergo figura lateris, vel diametri BC aequatur differentiae datarum figurarum: inuento igitur latere BC conſtruatur figura vni datarum ſimilis (443).

CAPVT III.

De vario ſitu, et concurſibus Planorum.

Fig. 86. 517. Si recta AB, cui altera CN perpendiculariter inſiſtat, manente eodem ſitu, circa ſemetipſam conuerti concipiatur, recta CN motu ſuo deſcribet *planam* quamdam ſuperficiem, quae nuſpiam eminebit, aut dehiſcet, et quam impoſita linea recta omnibus ſuis punctis continget. Porro recta AC, quae omnibus rectis in eodem plano per punctum C ductis perpendicularis eſt, dicitur *plano ipſi perpendicularis*, quia hoc ipſo in nullam plani partem magis inclinatur.

518. Coroll. 1. Linea ergo recta per vnum plani punctum ducta, vel congruit tota cum plano, vel tota recedit ab eodem, nec poſſunt duo eius puncta in plano eſſe, quin omnia in eodem ſint; ſecus linea curuaretur vbi planum deſereret, et hinc contra hypotheſim non eſſet re-

cta. Quare nequit pars rectae esse in plano, pars supra illud eminere, aut infra illud dehiscere.

519. COROLL. 2. Duae rectae nonnisi in vnico puncto se intersecant. Si enim se in binis punctis secarent, segmentum inter duo illa puncta comprehensum esset vtrique commune, possetque per illud duci planum, in quo sit pars rectae, pars extra ipsum. Conf. n. 276.

520. COROLL. 3. Communis duorum planorum intersectio est linea recta. Cum enim singula intersectionis puncta debeant vtrique plano esse communia, tota linea intersectionis debet esse in vtroque plano; sed nisi recta sit, non erit in vtroque: nam vbi curuaretur, euidenter alterutrum planum desereret.

521. COROLL. 4. Nequit pars vna plani congruere cum altero plano, pars ab eodem diuergere; secus pars rectae in vno plano ductae esset in altero plano, pars non esset; quod repugnat (518).

522. COROLL. 5. Nequit pars vna trianguli esse in plano, pars altera supra illud eminere, vel infra dehiscere; secus pars duorum laterum esset in eodem illo plano, pars extra illud, quod absurdum est (cit.). Hinc tria puncta non in directum sita, per quae semper duci potest triangulum, determinant plani, in quo sunt, positionem.

523. COROLL. 6. Duae rectae sese intersecantes sunt in eodem plano. Si enim in vtraque recta *Ab* et *Ba* praeter punctum commune intersectionis C assumantur singula puncta α et β, Fig. 31.

triangulum $C\alpha\beta$ erit totum in eodem plano (522); ergo et ſegmenta $C\alpha$ et $C\beta$ rectarum Ab et Ba, et hinc ipſae rectae totae (518).

Fig. 86. 524. THEOREMA. *Si recta* AC *perpendicularis ſit duabus rectis* DH *et* GF *in eodem plano per eius extremum* C *ductis, hoc ipſo perpendicularis erit cuiuis alteri* MN *per idem punctum* C *in eodem plano ductae.*

DEMONSTR. Fiant enim CG = CH = CF = CD, et concipiantur duci rectae AH, AF, AD, AG, punctum A aequaliter diſtabit a punctis G, H, F, D (297): ergo ſi triangulum ACH circa latus immotum AC conuerti concipiatur, deſcribet punctum H peripheriam circuli per puncta F, D, et G tranſeuntis, item per duo puncta rectae MN, e. g. per M et N: et hinc AH congruet cum AN et AM, ac CH cum CN et CM: puncta ergo A et C aequaliter diſtabunt a punctis M et N, ac proinde recta AC eſt perpendicularis ad MN (294).

525. COROLL. 1. Quare ſi recta quaepiam perpendicularis ſit ad duas rectas in plano quopiam per eius extremum ductas, erit hoc ipſo perpendicularis etiam ad planum ipſum (517).

526. COROLL. 2. E puncto extra planum poſito nonniſi vnica perpendicularis poteſt ad planum demitti: ſi enim duae poſſent demitti e. g. AC et AH, ambae deberent eſſe perpendiculares ad eandem rectam CH earum extrema coniungentem (517), quod repugnat (299). Hinc puncti a plano diſtantiam metitur perpendicularis ex eodem ad planum demiſſa. Conf. n. 301.

527. COROLL. 3. Similiter ex eodem plani puncto e. g. C nequit erigi, nisi vnica perpendicularis; secus ex eodem rectae CH per id punctum transeuntis puncto possent erigi plures perpendiculares, quod absurdum est; quaeuis enim cum ea recta faceret angulum rectum, adeoque pars foret aequalis toti. Conf. n. 285.

528. THEOREMA. *Si ex eodem puncto A rectae AF erigantur tres perpendiculares AB, AC, AD, quarum nonnisi vnica potest esse in eodem plano cum recta AF (285), erunt omnes illae in vno plano.*

DEMONSTR. Ducto enim per rectas AC et AB plano BN, et per rectas FA et AD plano MA, vt ostendatur tertia perpendicularis AD esse in plano BN, probari debet eandem esse communem planorum MA et BN intersectionem, id quod perspicuum est, secus planum MA occurreret plano BN in aliqua recta AO infra, vel supra AD iacente, essetque recta AF etiam rectae AO perpendicularis (524), et hinc aequarentur anguli recti FAO, FAD, hoc est, pars et totum, quod absurdum est.

529. THEOREMA. *Angulum planum, seu mutuam duorum planorum inclinationem metitur arcus inter plana interceptus, cuius centrum est in ipsa planorum intersectione communi, et cuius planum est eidem intersectioni perpendiculare.*

DEMONSTR. Cogitetur enim planum quoddam AB alteri immobili BC impositum circa latus BD in plano immobili haerens conuerti, perspicuum est diuersas horum planorum inclinationes metiendas esse per numerum progres- Fig. 88

ſuum momentaneorum cuiusuis puncti e. g. E a puncto alterius plani correſpondente F: quare menſura inclinationum eſt arcus a puncto E decurſus, cuius centrum O eſt in communi interſectione BD. Quia vero idem centrum debet eſſe in plano ipſius arcus, neceſſe eſt, vt ſit in recta EO id planum generante; atqui ea recta generans eſt rectae BD, ſeu communi interſectioni perpendicularis (517), alias planum non generaret: igitur centrum eſt in communi interſectione rectae perpendicularis EO, et communis interſectionis BD, ſeu in illo rectae BD puncto, in quod incidunt quaelibet perpendiculares EO, e quouis arcus puncto ad BD demiſſae: quare planum arcus inclinationem metientis eſt perpendiculare communi planorum interſectioni BD.

530. Coroll. 1. Si ergo in duobus planis ad ſe inclinatis AB et BC e quouis mutuae interſectionis puncto O erigantur duae perpendiculares OE, et OF, angulus rectilineus EOF, erit menſura inclinationis planorum.

531. Coroll. 2. Si planum plano inſiſtat, efficit angulos contiguos duobus rectis aequales; nam arcus eosdem metientes complent ſemiperipheriam circuli.

532. Coroll. 3. Hinc ſi duo plana ſe interſecent, angulos ad verticem aequales comprehendent, qui omnes ſimul continebunt 360°; claudi enim poterunt circuli peripheria.

533. Theorema. *Si plana parallela* A, B, C *ſecentur plano quopiam* DELI, *lineae interſectionum* DE, FH, IL *erunt inter ſe parallelae.*

DEMONSTR. Cum enim plana parallela vtcunque producta ſemper a ſe aequaliter diſtent, etiam lineae illae interſectionum in iisdem ſitae ſemper a ſe aequaliter diſtabunt: ergo parallelae ſunt.

534. THEOREMA. *Si duo plana* B *et* C *eidem rectae* FI *perpendicularia ſuerint, erunt ea inter ſe parallela.*

DEMONSTR. Nam ducta recta IL, ac per rectas FI et IL plano ILHF, anguli ad I et F recti erunt, et hinc rectae IL et FH parallelae (313). Eadem eſt demonſtratio de quibusuis rectis per puncta I et F ductis: ergo nulla recta in vno plano ducta per punctum I concurret cum recta ducta in altero per punctum F; igitur plana ipſa producta nunquam concurrent: atque adeo parallela ſunt.

535. THEOREMA. *Recta* FI *vni planorum parallelorum* B *perpendicularis, eſt alteri quoque plano* C *perpendicularis.*

DEMONST. Ducto enim plano FHLI, erunt FH et IL parallelae (533); vnde angulus F = I (309): cum ergo F rectus ponatur, erit etiam I rectus, idque valet de omnibus rectis per puncta F et I in planis B et C ductis; ergo recta FI plano C perpendicularis eſt (517).

536. THEOREMA. *Si duas rectas* DI *et* EL *ſecent quotcunque plana parallela* A, B, C, *eorum ſegmenta ſunt proportionalia, nimirum* EH : HL = DF : FI.

DEMONSTR. Ducta enim EK rectae DI parallela, erit ob FH et IL parallelas (533) EH : HL = EG : GK (405); ſed EG = DF, et

GK = FI (383): ergo EH : HL = DF : FI.

SCHOLION. Quae in ſuperioribus dicta ſunt de angulis, quos efficit recta lineas parallelas ſecans, etiam ad plana parallela plano quopiam ſecta transferri poſſe facile quisque intelligit.

SECTIO III.

DE SOLIDIS.

CAPVT I.

De Solidorum geneſi, ſuperficie, et ſoliditate.

Fig. 90. 537. *Angulus ſolidus* facile concipitur, ſi e ſingulis polygoni cuiuspiam, aut trianguli BCD angulis ducantur. rectae ad quoduis punctum A extra trianguli planum poſitum: naſcetur enim in A angulus ſolidus, tot conſtans angulis planis BAC, BAD, DAC, quot ſunt polygoni, aut trianguli latera.

538. COROLL. 1. Tres minimum requiruntur anguli plani ad vnum ſolidum generandum. Tot enim requiruntur anguli plani ad vnum ſolidum generandum, quot ſunt polygoni, cui tanquam baſi inſiſtit angulus ſolidus, latera: at-

qui omne polygonum minimum trium debet esse laterum: ergo.

539. COROLL. 2. Summa angulorum planorum vnum solidum constituentium minor esse debet quatuor rectis. Si enim angulus solidus A versus basim complanari debeat, necesse est aperiri latus aliquod e. g. AD, vt nempe figura anguli solidi abeat in planam, in qua omnes anguli plani solidum constituentes vna cum apertura noua DAD faciunt quatuor rectos (291): quare sine illa apertura, seu nouo angulo accedente quatuor rectis minus continere debent, id quod ope anguli solidi e charta efformati facilius intelligitur. Fig. 91.

540. Solida superficiebus planis terminata generatim *polyedra* dicuntur; speciatim vero *tetraedra*, *pentaedra*, *hexaedra* etc. a numero planorum, quibus terminantur. Porro solidorum *volumen* aut *soliditas* est ipsum illud spatium, quod implent, atque superficie sua concludunt. Quodsi solidorum anguli e totidem aequalibus planis angulis generentur, et plana terminantia sint polygona regularia, et aequalia eiusdem speciei, erunt polyedra ipsa *regularia*.

541. THEOREMA. *Quinque tantum possunt haberi polyedra regularia: tria nimirum terminata triangulis aequilateris, vnum quadratis, vnum pentagonis.*

DEMONSTR. 1) Inter polygona regularia primum occurrit triangulum aequilaterum: cum ergo quiuis trianguli aequilateri angulus contineat 60° (370), tres simul continent 180°, quatuor 240°, quinque 300°: ex his ergo generari poteſt angulus ſolidus, non item e pluribus, qui iam ad 360°, et vltra aſſurgunt (539): quare tria tantum polyedra poſſunt terminari triangulis aequilateris, nimirum tetraedrum, octaedrum, et icoſaedrum, ſeu viginti angulorum.

2) Inter polygona regularia poſt triangulum aequilaterum ſequitur quadratum, cuius angulus rectus eſt, ac proinde nonniſi tres id genus anguli poſſunt conflare vnum ſolidum (cit.): hinc vnicum polyedrum poteſt terminari quadratis nempe hexaedrum, ſeu cubus.

3) Quiuis pentagoni regularis angulus continet 108°: ergo tres tantum eiuſmodi anguli poſſunt conſtituere ſolidum (cit.): quare vnicum duntaxat polyedrum poteſt haberi pentagonis regularibus terminatum, ſcilicet dodecaedrum, ſeu 12 angulorum.

Reliquorum polygonorum regularium vel tres anguli (quot tamen requiruntur ad efformandum ſolidum) iam aſſurgunt ad 360°, vel vltra; quare ex iis nequit generari angulus ſolidus, adeoque nequit dari polyedrum aliis polygonis regularibus terminatum: ergo tantum quinque memorata poſſunt haberi.

Fig. 92. 542. Si polygonum quodcunque ABC concipiatur moueri motu continuo, et parallelo iuxta rectam quampiam A*a*, donec perueniat ad ſitum *abc*, generabitur ſolidum, quod *prisma* adpellatur. Recta M*m* baſium centra connectens *axis* prismatis dicitur, eſtque aequalis, et parallela lateribus A*a*, B*b*, C*c* ex ipſa prismatis geneſi. Recta quaeuis *c*C ex vna baſi ad alteram perpendicularis prismatis *altitudo* eſt.

543. COROLL. 1. Prisma ergo rectum est, si linea directrix Aa ad polygonum generans perpendicularis fuerit; secus obliquum erit.

544. COROLL. 2. In motu polygoni generantis quoduis latus AB, AC, BC describit parallelogramma Ab, Bc, Ac (492), ea vero parallelogrammum simul constituunt prismatis superficiem demtis basibus, eandemque habent altitudinem.

545. COROLL. 3. Singula plani generantis vestigia, seu prismatis elementa sunt polygona similia, et aequalia.

546. COROLL. 4. Altitudo prismatis recti est ipse axis. Altitudo porro generatim exprimit numerum elementorum parallelorum solidum constituentium; est enim altitudo distantia basium oppositarum, inter quas vtique nequeunt plura comprehendi elementa, quam sint puncta in recta distantiam earundem metiente.

547. COROLL. 5. Si in polygono generante numerus laterum infinite crescat, ac magnitudo infinite decrescat, polygonum abit in circulum, et prisma in *cylindrum*, qui proinde est prisma rotundum, seu infinitorum laterum infinite paruorum. Quae ergo hactenus de prismate dicta sunt, etiam in cylindrum valent.

548. COROLL. 6. Gignitur adeo cylinder motu parallelo circuli genitoris, cuius peripheria generat conuexam eiusdem superficiem.

SCHOLION. Prismatum diuersa sunt genera pro numero laterum polygoni generantis: alia nempe dicuntur *triangularia*, alia *quadrangularia*, alia *pentagona*, etc. Quodsi basis sit parallelogrammum, prisma nuncupatur *parallelepipedum;* ſin autem quadratum fuerit, et axis prismatis recti eiusdem quadrati lateri aequalis, *cubus* dicitur.

549. THEOREMA. *Superficies cuiusuis prismatis ſecluſis baſibus eſt factum ex perimetro baſeos, ſeu polygoni generantis in altitudinem.*

DEMONSTR. Prismatis enim ſuperficies coaleſcit e tot aeque altis parallelogrammis, quot ſunt baſeos, ſeu polygoni generantis latera (544); ea vero parallelogramma ſunt facta ex baſibus, ſeu ex perimetro polygoni generantis in communem altitudinem (494).

550. COROLL. 1. Cum ergo cylinder ſit prisma infinitorum, ac infinite paruorum laterum (547), eius quoque ſuperficies eſt factum ex peripheria baſeos in altitudinem.

551. COROLL. 2. Patet adeo methodus dati prismatis, vel cylindri ſuperficiem metiendi.

552. COROLL. 3. Quod ſi altitudo cylindri aequetur diametro baſeos, eius conuexa ſuperficies erit quadrupla baſeos. Si enim diameter baſeos ſit $= d$, peripheria $= p$, erit conuexa cylindri ſuperficies $= dp$ (550), et baſis $= \frac{1}{4}dp$ (497).

553. THEOREMA. *Soliditas cuiusuis prismatis aequatur facto ex baſi, ſeu polygono generante in altitudinem.*

DEMONSTR. Prisma enim coaleſcit e tot polygonis baſi aequalibus, quot ſunt puncta altitudinis (545, 546): vnde ſoliditas eius gignitur, dum baſis generans toties ponitur, quot ha-

habet altitudo puncta, ſeu quum baſis in altitudinem ducitur.

554. COROLL. 1. Cum cylinder ſit e genere prismatum (547), etiam cylindri cuiusuis ſoliditas aequatur facto ex baſi genitrice in altitudinem.

555. COROLL. 2. Patet ergo modus prismatis, aut cylindri ſoliditatem inueſtigandi.

556. COROLL. 3. Prismata vel cylindri eandem baſim, et altitudinem habentia aequalia ſunt.

557. Si polygonum quodcunque ABC iuxta rectam quampiam AD motu continuo, et parallelo ferri concipiatur, ita vt poſt ſingulos progreſſus momentaneos quoduis eius latus decreſcat parte ſui infiniteſima, ac in apice D euadat infinite paruum, ſeu abeat in punctum, naſcetur ſolidum, quod adpellatur *pyramis*, cuius *baſis* eſt illud ipſum polygonum generans, *vertex* punctum ſupremum D, *altitudo* recta e vertice ad baſim perpendicularis, *axis* recta DN centrum baſeos cum vertice coniungens. Quodſi motus polygoni ſiſti concipiatur, priusquam latera in punctum abeant, pyramis erit *truncata* baſibus ſupra, et infra parallelis. Fig. 93.

558. COROLL. 1. Quando polygonum hunc in modum mouetur, ſingula eiusdem latera AB, AC, BC generant totidem triangula ABD, ACD, BCD aeque alta, quae ſimul ſumta pyramidis ſuperficiem conſtituunt demta baſi.

559. COROLL. 2. Si aucto in infinitum numero, ac diminuta quantitate laterum, polygonum generans abeat in circulum, pyramis abi-

bit in *conum*, qui proinde eſt pyramis rotunda, ſeu infinitorum laterum.

560. COROLL. 3. Pyramis, aut conus rectus vel obliquus eſt, prout linea directrix, iuxta quam baſis moueri concipitur, fuerit ad planum baſeos perpendicularis, vel obliqua.

561. COROLL. 4. Conus praeterea truncatus gignitur, ſi trapezium habens latera oppoſita inaequalia, et ad vnum latus perpendicularia circa illud latus conuerti concipiatur.

562. THEOREMA. *Superficies pyramidis rectae demta baſi, aequatur facto ex ſemiperimetro baſeos in rectam e vertice ad quoduis baſeos latus perpendicularem.*

DEMONSTR. Conſtat enim ea ſuperficies totidem triangulis aeque altis, quot in baſi generante ſunt latera (558), haec autem omnia triangula aequantur facto ex dimidiis omnium baſibus, ſeu ex ſemiperimetro baſeos pyramidis in communem eorundem altitudinem, ſeu in rectam e vertice ad quoduis baſeos latus perpendicularem (493).

563. COROLL. 1. Quoniam conus eſt pyramis infinitorum laterum, in quo perpendiculum e vertice ad quoduis latus baſeos demiſſum eſt ipſum latus coni (559), ſuperficies coni recti demta baſi aequatur facto ex ſemiperipheria baſeos in latus coni.

564. COROLL. 2. Perſpicua ergo eſt ratio pyramidis, vel coni recti ſuperficiem metiendi.

SCHOLION. Si pyramis recta non fuerit, ſingula triangula ſuperficiem eius conſtituentia ſeorſim erunt metienda, et in vnam ſummam addenda. Coni obliqui ſuperficies ad calculum vocari hactenus non potuit.

565. THEOREMA. *Superficies coni recti eſt ad aream baſeos, vt latus coni ad radium baſeos.*

DEMONSTR. Sit enim latus coni $= l$, peripheria baſeos $= p$, radius $= r$, erit ſuperficies coni ad aream baſeos vt $\frac{1}{2}lp : \frac{1}{2}rp = \frac{1}{2}l : \frac{1}{2}r = l : r$ (563, 497).

566. THEOREMA. *Superficies coni recti aequatur circulo, cuius radius eſt medius proportionalis inter latus coni, et radium baſeos.*

DEMONSTR. Sit enim ſuperficies coni $= s$, area dicti circuli $= a$, radius eiusdem $= m$, peripheria $= n$, latus coni $= l$, radius baſeos $= r$, peripheria $= p$, erit $s : a = \frac{1}{2}lp : \frac{1}{2}mn = lp : mn$: eſt vero ex hypotheſi $l : m = m : r = n : p$ (442): ergo $lp = mn$ (202), et hinc $s = a$.

567. THEOREMA. *Superficies pyramidis rectae truncatae baſes parallelas habentis ſecluſis baſibus aequatur facto ex ſemiſumma perimetrorum baſium in perpendiculum inter duo baſium latera oppoſita interceptum.*

DEMONSTR. Nam ea ſuperficies coaleſcit e tot trapeziis baſes parallelas, et eandem altitudinem habentibus, quot ſunt baſium pyramidis latera; atqui area omnium horum trapeziorum aequatur facto ex ſemiſumma laterum parallelorum, ſeu perimetrorum baſium in communem altitudinem, ſiue in perpendiculum inter duo quaeuis baſium latera interceptum (495).

568. COROLL. 1. Cum ergo conus truncatus ad pyramidem truncatam referatur, coni truncati recti ſuperficies demtis baſibus aequa-

tur ſemiſummae peripheriarum baſium ductae in latus coni eiusdem.

569. Coroll. 2. Quoniam ſemiſumma perimetrorum baſium oppoſitarum aequatur perimetro, quae ſit media arithmetice proportionalis inter perimetros baſium (201), ſuperficies id genus pyramidis, vel coni aequatur facto e perpendiculo inter duo quaeuis baſium oppoſitarum latera intercepto, aut e latere coni truncati in perimetrum, quae ſit media arithmetice proportionalis inter perimetros baſium.

570. Theorema. *Soliditas cuiusuis pyramidis eſt tertia pars facti ex baſi in altitudinem.*

Demonstr. Quaeuis enim pyramis conſtat infinitis polygonis ſimilibus, quorum latera inchoando a vertice continenter vna parte infiniteſima creſcunt, ac proinde numerorum naturalium progreſſionem conſtituunt (557); ipſa autem illa polygona, cum ſint vt quadrata laterum homologorum (510), conſtituunt ſeriem quadratorum numerorum naturalium: hinc eorum ſumma, ſeu pyramidis ſoliditas rite exhibetur per ſummam ſeriei dictorum quadratorum; eſt vero ea ſumma aequalis tertiae parti facti ex quadrato vltimo in numerum terminorum (267): quare cum in ſerie hac polygonorum terminus vltimus ſit ipſa baſis, numerus polygonorum ipſa altitudo (546), ſoliditas pyramidis cuiusuis eſt tertia pars facti ex baſi in altitudinem.

571. Coroll. 1. Cum ergo conus ſit pyramis infinitorum laterum, eius quoque ſoliditas eſt tertia pars facti ex baſi in altitudinem.

572. COROLL. 2. Vnde pyramis eſt tertia pars prismatis, conus cylindri eandem baſim, et altitudinem habentis (553, 554).

573. COROLL. 3. In promtu ergo eſt modus ſoliditatem datae pyramidis, vel coni inueniendi. Quodſi pyramis, aut conus truncatus ſit, tollenda eſt ex integri ſoliditate partis reſectae ſoliditas et reſtabit ſoliditas trunci.

574. COROLL. 4. Pyramides, aut coni aequalem habentes baſim et altitudinem aequales ſunt.

575. Duplex poteſt eſſe globi geneſis. 1) Fig. 94.
Si ſemicirculus A*bd*G ſpectetur tanquam dimidium polygonum infinitorum laterum A*m*, *mb*, *bc* etc. ac e ſingulis angulis *m*, *b*, *c* etc. demittantur ad diametrum perpendiculares *m*A, *b*N, *c*N etc. area ſemicirculi abibit in infinita trapezia *mb*NA, *bc*NN etc. quae in ea reuolutione gignent totidem conos truncatos (561), quorum axes erunt portiones diametri AN, NN, NO etc. quique tanquam totidem elementa generabunt ſolidum, quod *ſphaera*, ſeu *globus* nominatur, cuius *axis* eſt diameter AG.

2) Si intra genitorem ſemicirculum ABDG concipiantur tot duci ſemiperipheriae concentricae, quot ſunt puncta in radio AO, facta reuolutione hae ſemiperipheriae gignent totidem ſuperficies ſphaericas, ſeu cruſtas infinite tenues, e quibus tota ſphaerae ſoliditas coaleſcet, et quarum radii a centro inchoando erunt in progreſſione numerorum naturalium.

576. THEOREMA. *Si ſphaera plano quopiam vtcunque ſecetur, planum ſectionis ſemper erit circulus.*

Fig. 95. DEMONSTR. Si enim ſectio tranſeat per centrum C, ductis per centrum C rectis AD et BE patet rectas CA, CB, CD, CE fore radios ſphaerae, atque adeo inter ſe aequales: quare ſectio per puncta A, B, D, E tranſiens erit circulus. Si vero ſectio *abde* per centrum non tranſeat, erigatur ad eius planum e centro ſphaerae perpendicularis Cc, occurrens eidem in puncto c, per quod ducantur rectae ad et be, item e centro C rectae Ca, Cb, Cd, Ce, erit Cc perpendicularis ad rectas ad et be (517). Iam in triangulis rectangulis Cca, Ccb, Ccd, Cce eſt $aC^2 = ac^2 + cC^2$, $bC^2 = bc^2 + cC^2$, $dC^2 = dc^2 + cC^2$, $eC^2 = ec^2 + cC^2$ (433); atqui $aC = bC = dC = eC$, cum ſint radii eiusdem ſphaerae: ergo etiam $aC^2 = bC^2 = dC^2 = eC^2$, et hinc etiam $ac^2 + cC^2 = bc^2 + cC^2 = dc^2 + cC^2 = ec^2 + cC^2$, ſeu tollendo ab aequalibus idem cC^2, erit $ac^2 = bc^2 = dc^2 = ec^2$, et hinc $ac = bc = dc = ec$: ergo puncta a, b, d, e aequaliter diſtant a puncto c, ac proinde planum ſectionis *abde* eſt circulus.

577. COROLL. Facile adparet circulum ſphaerae maximum eſſe, cuius planum per centrum ſphaerae tranſit: ceteros eo minores, quo magis recedunt ab eodem; decreſcunt enim eorum diametri, quae ſunt chordae circuli maximi (320).

578. THEOREMA. *Superficies cuiusuis ſphaerae aequatur facto ex peripheria circuli maximi in diametrum.*

Fig. 96. DEMONSTR. Sphaerae ſuperficies coaleſcit e ſuperficiebus infinitorum conorum truncato-

rum, quorum omnium axes ſimul aequales ſunt diametro ſphaerae (575). Sit ergo vnus eiusmodi conus BD*db*, MN radius ſectionis, cuius peripheria ſit media arithmetice proportionalis inter peripherias baſium coni; erit ſuperficies huius coni = BD × peripheria MN (569). Ducta perpendiculari BG ſimilia erunt triangula BDG, MCN ob angulos ad G et N rectos, et ad C et D aequales; nam angulus BDG ſeu BMN habet pro ſua menſura arcum MA (340), quem etiam habet angulus C: ergo BG ſeu AE : BD = MN : MC = periph. MN : periph. MC (442); vnde AE × periph. MC = BD × peripheria MN; id eſt, ſuperficies coni truncati BD*db* aequatur peripheriae circuli maximi, cuius nempe radius eſt MC, ductae in eius axem AE: igitur ſuperficies omnium eiusmodi conorum, ſeu totius ſphaerae aequatur peripheriae circuli maximi ductae in omnium axem, ſiue in diametrum ſphaerae.

579. COROLL. 1. Eſt adeo ſphaerae ſuperficies quadrupla circuli eiusdem maximi. Nam ſi diameter ſphaerae dicatur d, peripheria circuli maximi p, erit ſuperficies ſphaerae $= pd$, area circuli maximi $= \frac{1}{4}pd$ (497). Cum ergo areae circulorum ſint vt quadrata radiorum, vel diametrorum (512), in eadem ratione ſunt etiam ſphaerarum ſuperficies.

580. COROLL. 2. Superficies ſphaerae aequatur conuexae ſuperficiei cylindri habentis pro axe diametrum ſphaerae, et pro baſi circulum eiusdem maximum. Nam poſita diametro ſphaerae $= d$, et peripheria circuli maximi =

p, erit ſuperficies eiusmodi cylindri $= dp$ (550), et ſuperficies ſphaerae itidem $= dp$ (578). Si ergo ad eius cylindri conuexam ſuperficiem addantur baſes, tota cylindri ſuperficies continebit 6 circulos ſphaerae maximos, et ſphaerae ſuperficies continebit 4: erit ergo illa ad hanc vt $6 : 4 = 3 : 2$.

581. Coroll. 3. Superficies conuexa trunci ſphaerici duobus planis parallelis comprehenſi $MDdm$ aequatur facto ex eiusdem altitudine NE in peripheriam circuli maximi. Superficies item conuexa ſegmenti ſphaerici MAm aequatur facto ex eiusdem altitudine AN in peripheriam circuli maximi.

582. Coroll. 4. Sunt ergo ſegmentorum eiusdem ſphaerae ſuperficies vt eorundem altitudines (190). Quare dato ſphaerae radio, et ſegmenti altitudine inuenitur eiusdem ſuperficies inferendo: vt radius ad ſegmenti altitudinem, ita dimidia ſphaerae ſuperficies, ſeu duplum circuli maximi (579) ad ſegmenti ſuperficiem.

583. Theorema. *Soliditas cuiusuis ſphaerae aequatur tertiae parti facti e ſuperficie eiusdem in radium.*

Demonstr. Sphaerae enim ſoliditas coaleſcit ex innumeris ſuperficiebus ſphaericis concentricis, quarum radii a centro inchoando conſtituunt ſeriem numerorum naturalium (575); cum ergo eae ſuperficies ſint vt quadrata radiorum (579), erunt in ſerie quadratorum numerorum naturalium, ac proinde ſumma eorundem rite exhibetur per ſummam ſeriei quadratorum numerorum naturalium; eſt autem ea ſumma aequalis tertiae parti facti e quadrato vltimo in numerum terminorum (267): ergo cum in hac ſuperficierum concentricarum ſerie terminus vltimus ſit ipſa ſphaerae ſuperficies, et numerus terminorum ipſe radius, ſoliditas cuiusuis ſphaerae aequatur tertiae parti facti e ſuperficie eiusdem in radium.

584. COROLL. 1. Sphaera ergo aequatur cono, aut pyramidi, cuius altitudo ſit radius ſphaerae, baſis autem quadrupla circuli maximi, ſeu ſuperficies ſphaerae (570, 571).

585. COROLL. 2. Quoniam ſuperficies ſphaerae eſt quadrupla circuli maximi (579), ſi is circulus ponatur $= c$, diameter ſphaerae $= d$, erit ſphaerae ſoliditas $= \frac{1}{6}d \times 4c = \frac{4}{6}dc = \frac{2}{3}dc$.

586. COROLL. 3. Quare ſi cylindro, cuius axis, et diameter baſeos ſit aequalis diametro ſphaerae, cogitetur inſcripta ſphaera, et conus rectus, erunt horum trium corporum ſoliditates vt $\frac{3}{3}dc$, $\frac{2}{3}dc$, $\frac{1}{3}dc$, ſeu vt 3, 2, 1.

587. COROLL. 4. Ergo cylindri recti, et ſphaerae eidem inſcriptae tam ſuperficies, quam ſoliditates ſunt vt 3 : 2 (580).

588. COROLL. 5. Hemiſphaerium AFD duplum eſt coni AFD eandem baſim, et altitudinem habentis. Nam hemiſphaerium aequatur cono habenti pro baſi eiusdem ſuperficiem, ſeu duplum circuli maximi, et pro altitudine radium (584); eſt autem is conus ad hunc, vt baſis ad baſim (571), ſeu vt duo circuli maximi ad vnum. Fig. 95.

589. PROBLEMA. *Inuenire ſoliditatem ſectoris ſphaerici* Cafd.

RESOLVT. Inſtituatur haec proportio: vt ſe habet ſuperficies ſphaerae ad eiusdem ſoliditatem, ita ſe habet ſuperficies ſectoris inuenienda per n. 581 ad eius ſoliditatem. Sphaera enim et ſector aequantur duobus conis eandem habentibus altitudinem (584): quare eorum ſoliditates ſunt vt baſes (571), ſeu vt ſphaerae et ſectoris ſuperficies.

590. COROLL. Si a ſectore tollatur conus C*abde*, relinquitur ſoliditas ſegmenti ſphaerici *afd*. Huius autem coni altitudo habetur, ſi a radio ſphaerae *f*C dematur ſegmenti altitudo *fc*.

SCHOLION. Quemadmodum ſuperficies metimur ſuperficie quadam quadrata, ita ſoliditatem corporum menſuramus ſolido quodam cubico, totque perticarum, pedum, digitorum etc. cubicorum dicimus eſſe volumen corporis, quot eiusmodi cubi intra eius ambitum poſſunt contineri. Porro in quouis ſolido ſecundum trinam dimenſionem poſſunt concipi id genus cubi: nempe ſecundum baſeos longitudinem tot poſſunt collocari in quauis ſerie e. g. pedes cubici, quot pedum eſt ea longitudo; ſecundum latitudinem autem baſeos, et ſecundum ſolidi altitudinem tot poſſunt eſſe eiusmodi cuborum ſeries, quot ea latitudo, ac altitudo continet pedes. Nimirum ſi in aliquo prismate quadrangulari longitudo baſis ſit 5 pedum, latitudo 4, altitudo 8, erunt in quauis ſerie ſecundum longitudinem baſeos 5 pedes cubici, ſeries autem in baſi ipſa 4, ſecundum altitudinem

8 numerabuntur: conſtabit ergo prisma vniuerſe pedibus cubicis $5 \times 4 \times 8 = 160$.

CAPVT II.

De Solidorum comparatione.

591. THEOREMA. *Soliditates prismatum, et cylindrorum ſunt in ratione compoſita baſium, et altitudinum.*

DEMONSTR. Si enim altitudines eorundem dicantur A et a, baſes B et b, erunt eorum ſoliditates vt $A \times B : a \times b$ (553, 554), quae ratio eſt compoſita e rationibus $A : a$, $B : b$.

592. COROLL. 1. Cum ergo pyramis ſit tertia pars prismatis, conus cylindri eandem baſim, et altitudinem habentis (572), etiam pyramidum et conorum ſoliditates ſunt in eadem ratione compoſita (210).

593. COROLL. 2. Si ergo altitudines aequantur, baſium, ſi baſes, altitudinum rationem habent.

594. COROLL. 3. Si altitudines fuerint baſibus reciproce proportionales, recenſita ſolida aequalia ſunt, et contra.

595. Solida *ſimilia* dicimus, quae angulos ſolidos correſpondentes aequales habent, et totidem planis ſibi mutuo ſimilibus terminantur.

596. COROLL. 1. Ergo in ſolidis ſimilibus quaeuis homologa planorum correſpondentium latera proportionalia ſunt, cum ſint latera homologa figurarum ſimilium.

597. Coroll. 2. Duo quaeuis plana correſpondentia corporum ſimilium ſunt vt quadrata ſuorum (510), adeoque quorumuis aliorum laterum homologorum (596). Hinc etiam ſummae omnium planorum, id eſt, ſuperficies corporum ſimilium planis rectilineis terminatorum ſunt vt quadrata quorumuis laterum homologorum (214).

Fig. 97. 598. Theorema. *Prismatum ſimilium* AB *et* ab *altitudines* AF *et* af *ſunt vt duo quaeuis latera homologa baſium.*

Demonstr. Si enim ſuper eorundem baſes BED, *bed* concipiantur exſtructa eſſe duo alia prismata recta ſimilia BC et *bc*, quae easdem habeant cum prioribus altitudines, erit CD : *cd* = ED : *ed* (596); ſed CD = AF, et *cd* = *af* ex hypotheſi: ergo AF : *af* = ED : *ed* = BE : *be* = BD : *bd*.

599. Coroll. 1. Eadem plane ratione oſtenditur idem theorema obtinere etiam in pyramidibus ſimilibus.

600. Coroll. 2. Cumque baſes ſint figurae ſimiles (595), erunt earum perimetri vt duo quaeuis latera homologa (440), ac proinde vt prismatum, vel pyramidum altitudines.

601. Coroll. 3. Quare cum cylindri ſimiles ſint prismata ſimilia, et coni ſimiles ſint pyramides ſimiles infinitorum laterum, horum etiam altitudines ſunt vt peripheriae, ac proinde vt radii baſium (442).

602. Coroll. 4. Superficies prismatum, aut pyramidum ſimilium ſunt vt quadrata quo-

rumuis laterum homologorum (597): ergo etiam vt quadrata altitudinum (598).

603. COROLL. 5. Quia ergo cylindri ſimiles ad priſmata ſimilia, coni ſimiles ad pyramides ſimiles referuntur, horum etiam ſuperficies ſunt vt quadrata altitudinum, adeoque etiam vt quadrata radiorum baſium (601), vel vt baſes ipſae (512).

604. THEOREMA. *Soliditates priſmatum ſimilium* AB *et* ab *ſunt vt cubi quorumlibet laterum homologorum.*

DEMONSTR. Sunt enim hae ſoliditates in ratione compoſita baſium, et altitudinum (591), et baſes ſunt vt $ED^2 : ed^2$ (510) $= AF^2 : af^2$ (598): ergo ſoliditates ſunt vt $ED^2 \times AF : ed^2 \times af$, ſeu vt $ED^3 : ed^3 = AF^3 : af^3$.

605. COROLL. 1. Eadem plane eſt demonſtratio pro pyramidibus ſimilibus.

606. COROLL. 2. Cum ergo cylindri priſmatis ſimilibus, coni pyramidibus accenſeantur, etiam horum ſoliditates ſunt vt cubi altitudinum, ac proinde vt cubi radiorum baſium (601).

607. THEOREMA. *Soliditates ſphaerarum ſunt vt cubi radiorum, vel diametrorum.*

DEMONSTR. Sint enim duarum ſphaerarum diametri D et *d*, circuli earundem maximi C et *c*; erunt ſoliditates vt $\frac{2}{3}DC : \frac{2}{3}dc$ (585) $= DC : dc$, id eſt in ratione compoſita ex $D : d$ et $C : c$; atqui $C : c = D^2 : d^2$ (512); ergo ſoliditates ſunt vt $D \times D^2 : d \times d^2 = D^3 : d^3$.

Finis Elementorum Geometriae.

ELEMENTA
SECTIONVM
CONICARVM
EXTRA CONVM SPECTATARVM.

CAPVT I.
De ſectionibus conicis ad axes relatis.

608.

Fig. 98. Si e ſingulis curuae cuiusdam punctis M, *m* ducantur perpendiculares MD, *md* ad rectam quampiam AB poſitione datam, item aliae rectae MF, *m*F ad punctum aliquod F extra rectam AB ſitum, fueritque conſtanter $FM : MD = Fm : md$, eiusmodi curua *ſectio conica* adpellatur. Speciatim vero ſectio conica vocatur *parabola*, ſi fuerit $FM = MD$; *ellipſis* ſi $FM < MD$; *hyperbola* ſi $FM > MD$. Recta AB dicitur *directrix*, punctum F *focus*, ratio FM : MD *ratio determinans*, quia nempe haec determinat ſpeciem ſectionis conicae.

609. COROLL. 1. Quoniam ergo rectae FM et MD vel aequales inter ſe ſunt, vel illa hac minor, vel maior eſt, ſectio omnis conica vel parabola, vel ellipſis, vel hyperbola eſt.

610. COROLL. 2. Quodſi e punctis M et m rectae MH et mh ad directricem AB obliquae ducantur ſub aequalibus angulis H et h, ſitque $FM : Fm = MH : mh$, curua erit hoc ipſo ſectio conica: nam demiſſis perpendiculis MD et md ob ſimilia triangula MHD, mhd erit $MH : mh = MD : md$: ergo etiam erit $FM : MD = Fm : md$.

611. COROLL. 3. Si directrix AB infinite remota concipiatur, ita vt MD ſit $= \infty$, erit $MD = md$ (259), et hinc $FM = Fm$: ergo ſectio conica abibit in circulum, et focus F in eiusdem centrum.

SCHOLION. Curuae hae idcirco vocantur ſectiones conicae, quia e cono vtcunque non per verticem ſecto naſcuntur. Speciatim autem parabola nomen accepit ab ea aequalitate, quam inter ſe habent rectae FM et MD: ellipſis ab eo defectu, quo FM deficit ab MD: hyperbola ab eo exceſſu, quo FM ſuperat rectam MD; quanquam vocabulorum horum origo pluribus ex capitibus repeti poteſt, quemadmodum in ſequentibus adnotabimus.

612. PROBLEMA. *Datis foco, directricis poſitione, et ſpecie curuae, ſectionem conicam deſcribere.* Fig. 99. 100, 101.

RESOLVT. Per datum focum F ducatur recta Hh directrici AB perpendicularis, circa quam vtrinque fiant anguli gEh, hEi aequales, ac vel ambo ſemirecti, ſi parabola deſcribenda ſit in Fig. 99; vel ſemirecto minores, ſi ellipſis in Fig. 100; vel maiores, ſi hyperbola in Fig. 101. Deinde per focum F ducatur recta Tt faciens cum Hh angulum hFt ſemirectum, cui ſi aequalis fuerit internus hEi, rectae Tt, Ii erunt parallelae, vt in Fig. 99. Si minor, concurrent inferne in l, vt in Fig. 100. Si maior, concurrent ſuperne in l, vt in Fig. 101. Per punctum L ducatur recta LN, ac per punctum l recta ln directrici AB parallela: erunt puncta M et m vertices ſectionis conicae. Quodſi per quaeuis alia puncta rectae Gg plures id genus parallelae ducantur e. g. uV, OQ etc. cum in triangulis FVE, FuE anguli ad F ſint recti, et ad E ex conſtr. aequales, aequalia erunt ipſa triangula (377), et hinc $FV = Fu$: eadem de cauſſa $LM = MN$, $lm = mn$, $OR = RQ$. Denique centro F apertura RQ vel RO reſecentur in recta OQ puncta P et p, idemque fiat in quamplurimis parallelis; erit curua per haec puncta ducta ſectio conica petita.

Demonstr. Cum enim ex conſtr. angulus hFt ac proinde etiam eius verticalis LFM ſemirectus ſit, erit etiam FLM ſemirectus (362), hinc $FM = LM = MN$ (369). Eſt vero in triangulis ſimilibus EMN et ERQ, $MN : RQ = EM : ER$, ergo pro MN ponendo FM, et pro ER rectam PD (308), ſimulque alternando erit $FM : EM = RQ$ ſeu ex conſtr. $FP : PD$: quare curua erit ſectio conica (608). Iam ſi angulus MEN ſemirectus ſit, erit etiam MNE ſemirectus, et hinc MN ſeu $FM = ME$, adeo-

adeoque ſectio erit parabola (cit.). Si angulus MEN minor ſit ſemirecto, erit alter MNE maior ſemirecto (362), et hinc MN ſeu FM < ME (368); vnde ſectio ellipſis erit; ſin autem is angulus ſit maior ſemirecto, erit MNE ſemirecto minor, adeoque MN ſeu FM > ME: ergo ſectio hyperbola erit (608).

613. COROLL. 1. Quamdiu fuerit RQ > FR, tamdiu centro F interuallo RQ ſemper inuenientur hinc et inde duo puncta P et *p*; at vbi RQ euaſerit = FR, vnicum punctum *m*, vt in Fig 100, et 101, vbi fuerit RQ < FR, nullum omnino punctum inuenietur.

614. COROLL. 2. Eſt vero FR ſemper = RS ob angulos RFS, FSR ſemirectos, adeoque inter ſe aequales. Recta porro RS vel erit minor, quam recta RQ, vt in Fig. 100 inter puncta L et *l*; in Fig. 99, et 101 a puncto L verſus *t* vbique: vel cum ea congruet, vt in punctis L et *l*: vel euadet maior, vt vltra L et citra *l* in Fig. 100.

615. COROLL. 3. Ellipſis tota iacet citra directricem AB in Fig. 100. Quamdiu enim parallela OQ ducitur intra puncta L et *l*, ſemper RQ vel RO eſt > RS, ſeu FR, adeoque centro F interuallo RQ vel RO ſemper inueniuntur hinc et inde duo puncta P, *p*: at in punctis L et *l*, RQ fit = RS = FR, adeoque vnicum tantum ellipſeos punctum M vel *m* determinatur: denique extra puncta L et *l*, RQ vel RO fit < RS ſeu FR, ac proinde nullum ellipſeos punctum pertingit vltra M (613);

ſed neque pertingit vllum citra m: hinc ellipſis in eo puncto in ſeipſam redit.

616. COROLL. 4. Parabola vnicum habet ramum citra directricem infinite extenſum. Cum enim in ea rectae Ii et Tt parallelae ſint (612) in Fig. 99, punctum l infinite recedit, adeoque tota linea indefinita Lt iacet intra angulum gEi, et tota LT extra eundem, ac etiam extra eius verticalem GEI: ergo per totum interuallum Lt eſt $RQ > RS$; et per totum interuallum LT eſt $RQ < RS$; quare nullum parabolae punctum furſum vltra M, deorſum vero ſine fine poſſunt inueniri (613).

617. COROLL. 5. Hyperbola in Fig. 101 duos habet ramos, alterum citra, alterum vltra directricem AB infinite excurrentes. Nam in ea tota recta Lt iacet intra angulum gEi, adeoque ſemper $RQ > RS$. Punctum vero l cadit vltra directricem, et tota recta lT iacet intra angulum verticalem GEI, adeoque rurſus per totum ſpatium lT eſt $RQ > RS$: hinc tam intra ſpatium Lt, quam intra lT innumera inueniri poſſunt hyperbolae puncta (613). At per totum ſpatium Ll eſt $RQ < RS$; ergo intra rectas LN et ln nulla poſſunt hyperbolae puncta cadere (cit.).

618. Recta Mm inter vertices curuae intercepta *axis maior*, aut *tranſuerſus* dicitur; chorda uV per focum F tranſiens, ac directrici AB parallela *parameter* axis maioris; punctum axis medium C *centrum*; ſumma perpendicularium Cx et CX, quarum quaeuis ſit media proportionalis inter FM et Fm, ſeu inter binas foci F a

verticibus M et m diſtantias, *axis minor*, ſeu coniugatus; rectae Pp axi vtrilibet perpendiculares, et vtrinque in curuae perimetro terminatae *ordinatae*; ſegmenta axis inter ordinatas et vertices, aut inter ordinatas et centrum intercepta *abſciſſae* adpellantur. In ſequentibus, niſi expreſſe moneamus, abſciſſas a verticibus computabimus, quales in Fig. 100 ſunt MR et mR.

619. COROLL. 1. Si ergo axis maior ponatur $= 2a$, minor $= 2b$, diſtantia foci a vertice propiore $= c$, erunt in ellipſi diſtantiae foci F a verticibus FM $= c$, F$m = 2a - c$; in hyperbola FM $= c$, F$m = 2a + c$; hinc $b^2 = 2ac \mp c^2$; et $c^2 = \pm 2ac \mp b^2$, ſignis ſuperioribus in ellipſi, inferioribus in hyperbola ſeruientibus, id quod deinceps etiam in ſequentibus obſeruandum eſt.

620. COROLL. 2. Axis parabolae infinitus eſt (616). In eadem parameter axis uV eſt quadrupla diſtantiae foci a vertice. Nam in triangulo FEV ob angulos ad E et V ſemirectos FV $=$ EF $= 2$FM; vnde uV $= 4$FM. Fig. 99.

621. COROLL. 3. In quauis ſectione conica axis transuerſus bifariam ſecat ſuas ordinatas. Eſſet enim ordinata Pp chorda circuli centro F radio FP deſcripti (612); ergo a perpendiculari FR bifariam ſecatur (322).

622. COROLL. 4. Quadratum ſemiaxis minoris aequatur differentiae quadratorum ſemiaxis maioris, et diſtantiae foci a centro. Eſt enim CX$^2 =$ FM $\times$ Fm (618), et ob rectam Mm in C bifariam, in F non bifariam ſectam erit in ellipſi in Fig. 100 CM$^2 =$ CF$^2 +$ FM $\times$

Fm (426), et hinc $FM \times Fm = CX^2 = CM^2 - CF^2$. In hyperbola in Fig. 101 ob rectam Mm in C bifariam sectam, eique adiectam FM erit $CF^2 = CM^2 + FM \times Fm$ (cit.), et hinc $FM \times Fm = CX^2 = CF^2 - CM^2$.

623. COROLL. 5. Est ergo $CF^2 = CM^2 \mp CX^2$, seu quadratum distantiae foci a centro aequatur summae quadratorum semiaxium in hyperbola, differentiae eorundem in ellipsi.

Fig. 99. 624. THEOREMA. *In parabola quadratum semiordinatae aequatur facto ex parametro in abscissam.*

DEMONSTR. Cum enim recta OQ bifariam secta sit in puncto R (612), et non bifariam in puncto S, erit $RS^2 + OS \times SQ = RQ^2$ (426), sed $SQ = LN$ (383), $RQ = FP$ (612), et $RQ^2 = FP^2 = FR^2 + RP^2$ (433), quare his substitutis erit $RS^2 + OS \times LN = FR^2 + RP^2$: ergo vtrinque tollendo RS^2 et FR^2 aequalia (614) erit $OS \times LN = RP^2$. Ducatur iam recta LZ parallela ad Hh, erit angulus OLZ $= gEh$ semirectus, et hinc etiam LOZ semirectus (612), hinc $OZ = LZ$; eadem de caussa $LZ = ZS$; quare $OS = 2LZ = 2MR$, et $OS \times LN = 2MR \times LN = MR \times 2LN$: quare $RP^2 = MR \times 2LN$, seu cum sit $LN = FV$ (384), $RP^2 = MR \times uV$.

625. COROLL. 1. Ergo $MR : RP = RP : uV$ (204), hoc est, parameter est tertia proportionalis ad abscissam, et semiordinatam quamcunque.

626. COROLL. 2. Si vna semiordinata sit $= u$, eius abscissa $= t$, altera semiordinata $= y$, eius abscissa $= x$, parameter $= p$, erit $u^2 =$

pt, $y^2 = px$; ergo $u^2 : y^2 = pt : px = t : x$ (210); hoc eſt, quadrata ſemiordinatarum ſunt vt abſciſſae correſpondentes.

627. THEOREMA. *In ellipſi, et hyperbola quadratum ſemiordinatae axis maioris eſt ad factum abſciſſarum correſpondentium, vt quadratum ſemiaxis minoris ad quadratum ſemiaxis maioris.*

DEMONSTR. Ducta enim vt ante recta LZ erit ob triangula OLS, nLl ſimilia. Fig. 100. 101.

$$OS : nl = LS : Ll.$$

Eſt autem $ml = Fm$ ob angulos ad F et l ſemirectos, adeoqne $nl = 2Fm$, quo ſubſtituto erit

$$OS : 2Fm = LS : Ll.$$

Porro ob ſimilia triangula LzS, LZl habetur

$$LS : Ll = Lz : LZ = MR : Mm.$$

ergo conferendo duas poſtremas proportiones erit

$$1)\ OS : 2Fm = MR : Mm.$$

Rurſus in ſimilibus triangulis lSQ, lLN habetur

$$SQ : LN = Sl : Ll$$

erit ergo ob $LN = 2LM = 2FM$

$$SQ : 2FM = Sl : Ll.$$

Ad haec in ellipſi ob Zl parallelam ad zS: et in hyperbola ob ſimilia triangula LZl, LzS, habetur illic ſubtrahendo, hic componendo

$$Sl : Ll = Zz : LZ = mR : Mm:$$

ergo conferendo duas poſtremas proportiones erit

$$2)\ SQ : 2FM = mR : Mm.$$

Iam multiplicando proportiones n. 1 et 2, erit

$OS \times SQ : 4Fm \times FM = MR \times mR : Mm^2$; et altern.

$$OS \times SQ : MR \times mR = 4Fm \times FM : Mm^2,$$

ſeu

$$OS \times SQ : MR \times mR = Fm \times FM : \tfrac{1}{4}Mm^2$$
$$= Fm \times FM : MC^2.$$

Eſt vero $Fm \times FM = CX^2$ (618), ergo hoc ſubſtituto erit

3) $OS \times SQ : MR \times mR = CX^2 : MC^2$.

Denique cum OQ bifariam ſecta ſit in R, et non bifariam in S, erit $RS^2 + OS \times SQ = RQ^2$ (426) $= FP^2 = FR^2 + RP^2 = RS^2 + RP^2$; tollendo ergo vtrinque RS^2, erit $OS \times SQ = RP^2$; hoc ergo ſubſtituendo in proportione n. 3. erit

$$RP^2 : MR \times mR + CX^2 : MC^2.$$

628. Coroll. 1. Si ergo axis maior ſit $= 2a$, minor $= 2b$, $RP = y$, $MR = x$, erit mR in ellipſi $= 2a - x$, in hyperbola $= 2a + x$; hinc $y^2 : 2ax \mp x^2 = b^2 : a^2$;, et $y^2 = \frac{2b^2x}{a} \mp \frac{b^2x^2}{a^2}$. Adparet hinc rurſus origo vocabulorum ellipſeos, et hyperbolae.

629. Coroll. 2. Et quia ratio $b^2 : a^2$ conſtans eſt, erunt quadrata ſemiordinatarum, vt facta abſciſſarum correſpondentium.

630. Coroll. 3. Cum FV ſit ſemiordinata, erit $FV^2 : FM \times Fm$ ſeu $CX^2 = CX^2 : CM^2$ (527): ergo rectae FV, CX, CM, adeoque etiam earum duplae uV, xX, Mm ſunt continue proportionales (213): hoc eſt, parameter axis maioris eſt tertia proportionalis poſt axem maiorem, et minorem.

631. COROLL. 4. Quare $uV : Mm = uV^2 : xX^2 = xX^2 : Mm^2$ (215) $= b^2 : a^2$: ergo etiam $y^2 : 2ax \mp x^2 = uV : Mm$ (628), seu si parameter uV vocetur p, $= p : 2a$; hinc $y^2 = px \mp \frac{px^2}{2a}$. Adparet iterum ratio nominum ellipseos et hyperbolae.

632. COROLL. 5. Si abscissae a centro computentur, ita vt CR sit $= x$, erit $MR = a + x$, et $mR = a - x$ in ellipsi: et $MR = x - a$, $mR = x + a$ in hyperbola; quare $MR \times mR = \pm a^2 \mp x^2$; vnde $y^2 : \pm a^2 \mp x^2 = b^2 : a^2$ (627), et $y^2 = \pm b^2 \mp \frac{b^2 x^2}{a^2}$.

633. COROLL. 6. In ellipsi et hyperbola semiordinatae a centro aequaliter distantes aequales sunt. Nam binae abscissae vnius aequantur binis alterius, adeoque earum facta, et hinc semiordinatarum quadrata (629), consequenter ipsae etiam semiordinatae aequales sunt.

634. COROLL. 7. Axis coniugatus ellipseos vtrinque terminatur in eiusdem perimetro. Quadratum enim semiordinatae per centrum transeuntis y^2 est ad $CM \times Cm$ seu ad $CM^2 = CX^2 : CM^2$ (627), ergo $y^2 = CX^2$, et $y = CX$; terminatur autem y in perimetro (618), ergo et CX. Eodem modo patet alterum punctum x esse in perimetro.

635. THEOREMA. *Si super axe maiore ellipseos AB tanquam diametro describatur semicirculus, erit quaeuis semiordinata circuli ad correspondentem semiordinatam ellipseos, vt axis maior ad minorem.* Fig. 102.

Demonstr. Eſt enim $MP^2 : Np^2 = AP \times PB : Ap \times pB$ (420), et $mP^2 : np^2 = AP \times PB : Ap \times pB$ (629): ergo $MP^2 : Np^2 = mP^2 : np^2$, et alternando $MP^2 : mP^2 = Np^2 : np^2$, ſeu $MP : mP = Np : np$, ac loco MP ponendo AP, erit $AP : mP = 2AP : 2mP = Np : np$.

636. Problema. *Inuenire parametrum axis maioris in ellipſi, et hyperbola.*

Resolut. Cum ſit $y^2 = \frac{2b^2x}{a} \mp \frac{b^2x^2}{a^2}$ (628) et $b^2 = 2ac \mp c^2$ (619), ſi hic valor illic ſubſtituatur, erit $y^2 = 4cx \mp \frac{2c^2x}{a} \mp \frac{2cx^2}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}$. Quia vero parameter eſt ordinata per focum tranſiens (618), pro eius abſciſſa x ſubſtitui poteſt c, ſeu diſtantia foci a vertice: erit ergo $y^2 = 4c^2 \mp \frac{4c^3}{a} + \frac{c^4}{a^2}$, vnde extrahendo radicem, erit $y = 2c \mp \frac{c^2}{a}$, et $2y = p = 4c \mp \frac{2c^2}{a}$.

637. Theorema. *In ellipſi et hyperbola quaeuis recta per centrum ducta, et vtrinque in perimetro terminata in ipſo centro biſecatur.*

Fig. 103. 104. Demonstr. Ducatur enim recta CP ex centro C, ac ſemiordinata PR; tum fiat $Cr = CR$, et ducatur ſemiordinata rp, iunganturque puncta C et p recta Cp, erit $RP = rp$ (633), quare ob $Cr = CR$ per conſtr. et angulos ad R et r aequales, aequalia erunt triangula PCR, pCr

(374), ac proinde anguli ad C aequales, et $CP = Cp$. Cum ergo recta PC producta debeat efficere angulum ad verticem aequalem angulo $PCR = pCr$, debet necessario abire in rectam Cp, et terminari in p: ergo Pp est linea recta, et in centro bisecatur.

638. THEOREMA. *In ellipsi, et hyperbola axis coniugatus omnes suas ordinatas bisecat.*

DEMONSTR. Sit enim $CR = Cr$, erit $RP = rp$ (633); hinc $Pp = Rr$, eademque Pp est ordinata axis coniugati xX; praeterea $PI = RC$, et $pI = rC$: ergo etiam $PI = pI$. Eodem modo patet, rectam Gg esse eiusdem ordinatam, et bisecari in puncto i. Fig. 105. 106.

639. COROLL. Ordinatae axis coniugati à centro aequaliter distantes aequales sunt. Nam ob $PR = GR$ est $CI = Ci$, et tam Pp, quam $Gg = Rr$; ergo $Pp = Gg$.

640. THEOREMA. *In ellipsi quadratum semiordinatae axis coniugati est ad factum suarum abscissarum, vt quadratum semiaxis maioris ad quadratum semiaxis minoris.*

DEMONSTR. Est enim RP^2 seu $CI^2 : RM \times Rm = CX^2 : CM^2$ (627), et alternando, $CI^2 : CX^2 = RM \times Rm : CM^2$; atqui ob axem Mm bifariam sectum in C, et non bifariam in R est $CM^2 = CR^2 + RM \times Rm$ (426): ergo valorem hunc substituendo, et simul proportionem inuertendo erit $CX^2 : CI^2 = CR^2 + RM \times Rm : RM \times Rm$, tum subtrahendo $CX^2 - CI^2$ seu $IX \times Ix$ (cit.): $CX^2 = CR^2 : CM^2 = IP^2 : CM^2$; denique inuertendo simul et alternando, $IP^2 : IX \times Ix = CM^2 : CX^2$. Fig. 105.

641. THEOREMA. *In hyperbola quadratum semiordinatae axis coniugati est ad summam quadratorum semiaxis coniugati et abscissae a centro computatae, vt quadratum semiaxis maioris ad quadratum semiaxis minoris.*

Fig. 106. DEMONSTR. Est enim ob axem Mm bifariam sectum in C, et eidem adiectam MR, $CR^2 = CM^2 + RM \times Rm$ (426), et hinc $RM \times Rm = CR^2 - CM^2$: si ergo hic valor substituatur in proportione RP^2 seu $CI^2 : CX^2 = RM \times Rm : CM^2$ (627), erit $CI^2 : CX^2 = CR^2 - CM^2 : CM^2$, et componendo, $CI^2 + CX^2 : CX^2 = CR^2$ seu $IP^2 : CM^2$; denique inuertendo simul et alternando, $IP^2 : CI^2 + CX^2 = CM^2 : CX^2$.

Fig. 107. 642. Si per hyperbolae verticem ducatur recta AB ordinatae Mm parallela, et axi coniugato aequalis, nempe vt tam pars AD, quam pars DB semiaxi coniugato aequetur; tum per centrum C et per puncta A et B ducantur rectae indefinitae KN et GH: hae adpellantur *asymptoti* hyperbolae.

643. THEOREMA. *Asymptoti cum hyperbola nunquam concurrunt.*

DEMONSTR. 1) Sit axis maior $= a$, seu CD $= \frac{1}{2}a$, axis minor AB $= b$, seu AD $= \frac{1}{2}b$, parameter $= p$, erit $a : b = b : p$ (630), et hinc $ap = b^2$ (202), et $\frac{1}{4}ap = \frac{1}{4}b^2 = AD^2$, quare $AD = \sqrt{\frac{1}{4}ap}$. Sit porro abscissa DP $= x$, erit $CP = CD + DP = \frac{1}{2}a + x$; et ob triangula CDA et CPE similia erit $CD : DA = CP : PE$, seu $\frac{1}{2}a : \sqrt{\frac{1}{4}ap} = \frac{1}{2}a + x : PE$, vnde $\frac{1}{2}aPE = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ap} + x\sqrt{\frac{1}{4}ap}$ (202), et

$PE = \sqrt{\tfrac{1}{4}ap} + \frac{2x}{a}\sqrt{\tfrac{1}{4}ap}$, ac vtrinque eleuando ad quadratum $PE^2 = \tfrac{1}{4}ap + \frac{4x}{a} \cdot \tfrac{1}{4}ap + \frac{4x^2}{a^2} \cdot \tfrac{1}{4}ap$, seu reducendo ad minores terminos $PE^2 = \tfrac{1}{4}ap + px + \frac{px^2}{a}$.

2) Quaeratur iam PM^2 hoc pacto. Cum sit $PM^2 : RP \times DP = AD^2 : CD^2$ (627), seu $PM^2 : ax + x^2 = \tfrac{1}{4}b^2 : \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}ap : \tfrac{1}{4}a^2 = ap : a^2$, erit $a^2 PM^2 = a\,px = apx^2$ (202), et hinc $PM^2 = px + \frac{px^2}{a}$.

3) Si iam ex inuento valore PE^2 tollatur valor PM^2, erit $PE^2 - PM^2 = \tfrac{1}{4}ap = AD^2$. Si ergo asymptotus alicubi concurreret cum hyperbola, illic punctis E et M congruentibus fieret $PE = PM$, seu $PE^2 = PM^2$, adeoque $PE^2 - PM^2 = 0$, et hinc $AD^2 = 0$, quod absurdum est: ergo asymptotus cum hyperbola nusquam concurrit.

644. PROBLEMA. *Inuenire aequationem pro hyperbola intra asymptotos.*

RESOLVT. 1) Sit semiordinata quaecunque Pm, quae vtrinque producta occurrat asymptotis in E et e, sitque semiaxis maior $CD = a$, semiaxis minor $DB = b$, abscissa $CP = x$, $Pm = y$, $Pe = t$, erit $y^2 : x^2 - a^2 = b^2 : a^2$ (632). Item in triangulis CDB et CPe similibus $Pe : CP = DB : CD$, seu $t : x = b : a$, et $t^2 : x^2 = b^2 : a^2$; quare $y^2 : x^2 - a^2 = t^2 : x^2$, et $x^2 : x^2 - a^2 = t^2 : y^2$, ac subtrahendo $x^2 : a^2 = t^2 : t^2 -$

y^2, et altern. $x^2 : t^2 = a^2 : t^2 - y^2 = a^2 : b^2$; vnde $b^2 = t^2 - y^2$. Porro recta Ee secta est bifariam in puncto P, et non bifariam in puncto m; quare $Pe^2 = Pm^2 + mE \times me$ (426), seu $t^2 = y^2 + mE \times me$, adeoque $t^2 - y^2$ seu $b^2 = mE \times me$.

2) Ducantur iam rectae mn et DG asympto- to CK parallelae, similia erunt triangula mne et HDB; quare si ponatur $me = u$, $mn = z$, Cn $= Qm = s$, erit $u : z = b : DH = \frac{bz}{u}$; atqui supra fuit $b^2 = mE \times me$: ergo pro me ponendo u erit $b^2 = u \times mE$, et hinc $mE = \frac{b^2}{u}$. Denique in triangulis QmE et HDB similibus (410) erit DB : DH $= mE : Qm$, seu $b : \frac{bz}{u}$ $= \frac{b^2}{u} : s$; vnde $Qm = Cn = s = \frac{b^2 z}{u^2} =$ $\frac{b \times DH}{u}$: ergo $Cn \times mn$; seu $sz = DH \times \frac{bz}{u} = DH^2$: id est factum ex abscissa quauis in semiordinatam correspondentem constans est.

645. THEOREMA. *Ellipsis et hyperbola alium praeterea habent focum ac directricem a centro, et ab alternis verticibus aeque distantes, habentesque easdem plane proprietates, quas prior focus, et directrix.*

Fig. 105. 106. DEMONSTR. Fiat enim $Cf = CF$, $Ce =$ CE, et ducatur per punctum e recta ab perpendicularis axi maiori. Deinde concipiatur tota figura circa axem xX conuerti; abibit di-

rectrix AEB in aeb, vertex M in m, focus F in f, et quaeuis perimetri puncta erunt in iisdem locis, in quibus alia puncta ante fuerunt: ergo omnia, quae respectu omnium perimetri punctorum ad focum F, et directricem AB relatorum verificabantur, iam verificabuntur relate ad focum f, et directricem ab. Praeterea ob $CM = Cm$, $CF = Cf$, et $CE = Ce$, erit $ME = me$, $MF = mf$, ac $Me = mE$.

646. THEOREMA. *Si e binis focis ad idem perimetri punctum ducantur duae rectae, erit in ellipsi earum summa, in hyperbola earum differentia aequalis axi maiori.*

DEMONSTR. Ducantur enim e focis F et f ad quoduis perimetri punctum P rectae FP, fP, et recta PD axi maiori parallela occurrens directricibus in punctis D et d, erit

1) $FP : PD = FM : ME$ (608), et

2) $fP : Pd = fm : me = FM : ME$ (cit.)

ergo

3) $FP : PD = fP : Pd$; et hinc in ellipsi

4) $FP + fP : PD + Pd = FP : PD = FM : ME$ (214).

Atqui $PD + Pd = Dd = Ee$, hoc ergo substituto erit

I. $FP + fP : Ee = FM : ME$. Rursus

5) $FM : ME = Fm : mE$ (608), ergo

6) $FM + Fm : ME + mE = FM : ME$ (214)

Atqui $FM + Fm = Mm$, et $ME + mE = me + mE = Ee$; his ergo substitutis erit

II. $Mm : Ee = FM : ME$.

Conferendo iam proportiones I et II habemus

$FP + fP : Ee = Mm : Ee$: et altern.

$FP + fP : Mm = Ee : Ee$.

Sed $Ee = Ee$, ergo etiam $FP + fP = Mm$.

Pro hyperbola e proportione n. 3. habetur

$fP - FP : Pd - PD = FP : PD = FM : ME$ (214).

Atqui $Pd - PD = Dd = Ee$, hoc ergo ſubſtituto erit

I. $fP - FP : Ee = FM : ME$.

Ex proportione n. 5. habetur

$Fm - FM : mE - ME = FM : ME$ (214)

Atqui $Fm - FM = Mm$, et $mE - ME = mE - me = Ee$; his ergo ſubſtitutis erit

II. $Mm : Ee = FM : ME$.

Conferantur iam proportiones I. et II. vt ante.

Fig. 111. 647. Coroll. 1. Si ergo ſiat in ellipſi haec proportio: $fF : fM + FM = fM - FM : fP - FP$ (465), ſeu ponendo $FB = c$, $BP = x$, $AB = 2a$, $2a - 2c : 2a = fM - FM : 2a - c - x - x + c$, ſeu $2a - 2x$, ac diuidendo per 2, $a - c : a = \frac{1}{2}fM - \frac{1}{2}FM : a - x$: erit $\frac{1}{2}fM - \frac{1}{2}FM = a - c - x + \frac{cx}{a}$. Quodſi ergo haec ſemidifferentia tollatur a ſemiſumma a, erit (168 ex. 2) $FM = a - a + c + x - \frac{cx}{a} = c + x - \frac{cx}{a}$.

Fig. 107. 648. Coroll. 2. Si in hyperbola ſiat haec proportio: $fF : fM + FM = fM - FM : fP - FP$ (cit.) ſeu ponendo $DP = x$, $FD = c$, $DR = 2a$, $2a + 2c : fM + FM = 2a : 2a + 2x$, ac diuidendo per 2, $a + c : \frac{1}{2}fM + \frac{1}{2}FM$

$= a : a + x$, erit $\frac{1}{2}fM + \frac{1}{2}FM = a + c + x + \frac{cx}{a}$: si ergo hinc tollatur semidifferentia a, erit $FM = c + x + \frac{cx}{a}$.

649. PROBLEMA. *Motu continuo ellipsim describere.* Fig. 105.

RESOLVT. Capiatur filum aequale axi maiori Mm, ac eius extrema defigantur in focis F et f, tum stylo P filum semper probe tensum circumducatur: erit vestigium styli $MPXpm$ ellipsis; nam in quouis puncto P semper erit $FP + fP$ aequale toti filo, adeoque etiam axi maiori, et hinc quoduis punctum P erit in perimetro ellipsis (646).

650. PROBLEMA. *Motu continuo hyperbolam describere.*

RESOLVT. In focis F et f datis vel assumtis defigantur claui, quorum alteri F alligetur extremitas fili FPD, extremitate altera D regulae fD alligata, quae regula excedat filum quantitate axis AB. Alterum regulae extremum perforatum imponatur clauo f, et stylo P ad filum adplicato regula primum ad sinistram, deinde ad dextram emoueatur: eodemque modo pro altero hyperbolae ramo procedatur filo in f deligato, et regulae extremitate clauo F imposita: vestigium styli APM erit hyperbola. Nam ex hypothesi $fP + PD = FP + PD + AB$; hinc $fP = FP + AB$, adeoque $fP - FP = AB$; ergo quoduis punctum P erit in perimetro hyperbolae (646). Fig. 108.

651. PROBLEMA. *Motu continuo parabolam describere.*

Fig. 109. RESOLVT. Loco directricis adplicetur regula AB, eique admoueatur norma HDI, cuius breuius crus DI excurrat iuxta ipſam regulam, alteri vero DH affigatur in H extremitas fili HPF, cuius longitudo aequetur cruri normae longiori DH; alterum autem fili extremum defigatur in foco dato, vel aſſumto F: tum norma iuxta regulam AB progrediente detineatur filum ſtylo P penes normam diſtentum: erit veſtigium ſtyli MPN parabola. Nam ex conſtr. FP + PH = DP + PH: ergo FP = PD, adeoque quoduis punctum P erit in perimetro parabolae (608). Deſcripto arcu dimidio poterit conuerſione normae alterum dimidium eodem modo deſcribi.

652. PROBLEMA. *Datis axibus inuenire focos ellipſeos, aut hyperbolae: vel datis focis, et axe maiore minorem reperire.*

Fig. 105. RESOLVT. *Pro ellipſi.* Radio MC centro x ſecetur axis maior in punctis F et f, erunt haec foci. Erit enim $CF^2 = Fx^2 - Cx^2 = CM^2 - Cx^2$; adeoque CF eſt diſtantia foci a centro (623): ſi axis minor quaeratur, centro F radio MC ſecetur recta perpendicularis per centrum ducta in punctis X et x, erit xX axis quaeſitus (622); nam $Cx^2 = Fx^2 - CF^2 = CM^2 - CF^2$.

Fig. 106. *Pro hyperbola.* Interuallo MX centro C ſecetur axis maior in punctis F et f, erunt haec foci. Erit enim $MX^2 = CF^2 = CM^2 + CX^2$, adeocue CF diſtantia foci a centro (623).

Si

Si axis minor quaeratur, radio CF centro M fecetur recta perpendicularis per centrum ducta in punctis X et x, erit xX axis quaesitus (622); nam $CX^2 = MX^2 - CM^2 = CF^2 - CM^2$.

CAPVT II.

De sectionibus conicis ad tangentes relatis.

653. Sectionis conicae *tangens* est recta TS, cuius vnicum punctum M est in perimetro sectionis, cetera vero omnia extra eandem. Pars axis TP inter punctum concursus T cum tangente, et inter semiordinatam MP e puncto contactus M ad axem ductam intercepta *subtangens* dicitur. Recta MQ tangenti in puncto contactus perpendicularis, et in axe terminata *normalis* vocatur. Pars axis PQ inter normalem, et semiordinatam e puncto contactus ductam intercepta *subnormalis* adpellatur. Fig. 110. 111. 112.

654. PROBLEMA. *Ad datum parabolae punctum* M *tangentem ducere.* Fig. 110.

RESOLVT. E dato puncto M ducatur ad focum F recta MF, item alia MG axi parallela et = MF: tum angulus FMG ab his rectis comprehensus bisecetur per rectam TS, erit ea tangens, et CG directrix.

DEMONSTR. Nam 1) eam in vnico puncto M occurrere parabolae sic ostenditur. Sumatur quoduis aliud eiusdem punctum m, ductis rectis mF, mG, et mg ad CD perpendiculari, erunt in triangulis FMm, GMm anguli ad M aequales, vtpote aequalium FMT, GMT supplementa; praeterea $FM = MG$, et $Mm = Mm$: ergo $mF = mG$ (374); atqui $mG > mg$ (368), ergo etiam $mF > mg$, et hinc punctum m non est in parabola (608).

2) Punctum m extra parabolam esse sic ostenditur. Ducta recta Fg, ob $Fm > mg$ erit angulus $Fgm > mFg$ (368): si ergo fiat in F angulus $KFg = Fgm$, vt sane esse debet in parabola, recta KF magis deorsum cadit versus axem, quam recta mF; vt ergo recta mg attingat rectam KF, eique aequalis fiat, necesse est eam producere citra tangentem TS, adeoque punctum concursus, quod erit in parabola (608), inter tangentem et axem iacet: ergo punctum m est extra parabolam. Eadem est de quouis alio rectae TS puncto demonstratio.

655. Coroll. 1. Cum aequentur triangula FMI, GMI, recta FG a tangente in puncto I bifariam, et perpendiculariter secatur.

656. Coroll. 2. Erunt ergo QM et FG parallelae (313), et $FQ = GM = FM$.

657. Coroll. 3. Subtangens TP aequatur duplae abscissae seu $2AP$. Nam ob angulos alternos TMG, PTM aequales, item TMG, TMF itidem aequales, erit angulus $PTM = TMF$, et hinc $TF = FM$ (369) $= MG = CP$: si ergo ex aequalibus TF et CP tollatur idem CF, erit $TC = FP$, ac vtrinque addendo aequales CA et AF (608), erit $TA = AP$, et hinc $TP = 2AP$.

658. COROLL. 4. Normalis MQ eſt dupla perpendiculi FI e foco in tangentem demiſſi. Nam MQ = FG, et FG = 2FI (655): ergo MQ = 2FI.

659. COROLL. 5. Subnormalis PQ aequatur ſemiparametro axis. Nam in triangulis ſimilibus (417) CFG, PQM, cum ſit GF = MQ, et CG = PM, erit CF, ſeu ſemiparameter (620) = PQ.

660. COROLL. 6. Triangula TAI, INM aequalia ſunt, cum praeter omnes angulos aequales inſuper ſit TA ſeu AP (657) = NM. Si ergo vtrique triangulo addatur idem ſpatium APMI, erit triangulum PTM = rectangulo APMN.

661. PROBLEMA. *Ad datum ellipſeos punctum M tangentem ducere.* Fig. 111.

RESOLVT. Ducantur ex focis F et f ad punctum datum M rectae FM et fM, quarum poſterior producatur, donec ſit MR = FM; tum angulus FMR biſecetur per rectam TS, erit ea tangens.

DEMONSTR. Nam 1) eam in vnico puncto occurrere ellipſi ſic oſtenditur. Sumatur quoduis aliud eiusdem punctum m, ductis rectis Fm, fm, Rm, erunt in triangulis FMm, RMm praeter angulos ad M aequales etiam latera FM et RM, item Mm et Mm aequalia: ergo etiam Fm = mR (374): atqui fm + mR > fR (274), ſeu fm + Fm > fR ſeu > fM + FM, quae tamen ſummae in ellipſi deberent axi maiori (546), adeoque et ſibi aequales eſſe: ergo punctum m non eſt in ellipſi.

2) Esse vero idem punctum extra ellipsim ex eo ipso perspicuum est, quod $fm + Fm$ sit $> fM + FM$: si enim punctum m esset intra ellipsim, prior summa minor foret posteriore. Eadem est de quouis alio rectae TS puncto demonstratio.

Fig. 112. 662. PROBLEMA. *Ad datum hyperbolae punctum* M *tangentem ducere.*

RESOLVT. Ducantur ex focis F et f ad punctum datum M rectae FM, et fM, e quarum posteriore resecetur $MR = FM$; tum angulus FMR bisecetur per rectam TS, erit ea tangens.

DEMONSTR. Nam 1) eam in vnico puncto M occurrere hyperbolae sic ostenditur. Sumatur quoduis aliud eiusdem punctum m, ductis rectis Fm, fm, Rm, erunt in triangulis FMm, RMm anguli ad M aequales, vtpote aequalium FMT, TMR supplementa; praeterea ex constr. $FM = MR$, $Mm = Mm$: ergo etiam $Fm = Rm$ (374). Iam si punctum m esset in hyperbola, deberet esse $fm - Fm = fM - FM = fR$ (646); sed si $fm - Fm$ esset $= fR$, tunc fm esset $= fR + Fm = fR + Rm$, quod absurdum est (274): ergo punctum m non est in hyperbola.

2) Esse vero idem punctum extra hyperbolam sic demonstratur. Cum sit $fR + Rm > fm$, si fiat $mO = mR$; erit $fO < fR$; hinc differentia $fm - Fm = fm - Rm = fO$ est minor quam axis $AB = fR$: ac proinde recta Fm est iusto maior. Atqui si centro f radio fm describatur arcus mH, vt Fm minuatur relate

ad fm, oportet radium fm, ſeu punctum m accedere verſus H: cum enim punctum F ſit in radio fH, linea breuiſſima, quae ex F ad peripheriam mH duci poteſt, eſt FH, ceterae tanto maiores ſunt, quanto ab hac magis recedunt (335): vt ergo minuatur Fm relate ad fm, ſeu vt punctum m veniat ad hyperbolam, debet Fm cadere inter m et H: ergo nunc punctum m eſt extra hyperbolam. Eadem eſt de quouis alio rectae TS puncto demonſtratio.

663. COROLL. I. Anguli, quos in parabola rectae RM et FM, in ellipſi et hyperbola rectae fM et FM e binis focis ad punctum contactus M ductae faciunt cum tangente TS, aequales ſunt inter ſe. Nam in parabola angulus FMT $=$ TMG $=$ RMS. In ellipſi TMF $=$ TMR $= f$MS. In hyperbola FMR a tangente biſectus eſt; ergo DMS $= f$MT $=$ TMF. Fig. 110. 111, 112.

664. COROLL. 2. E Phyſica notum eſt lucem ſub eo angulo reflecti e ſpeculis, ſub quo in eadem incidit. Si ergo radii per rectas RM axi parallelas incidant in ſpeculum parabolicum, reflectentur ad focum F: et contra, ſi e foco F diuergentes incidant, exibunt e ſpeculo axi paralleli. Si radii e foco f ſpeculi elliptici venientes incidant in ſpeculum, colligentur in altero foco F, et contra. Si demum radii in ſpeculum hyperbolicum incidant directione DM ad focum f tendente, colligentur in altero foco F: et ſi e foco F diuergant, ea directione reflectentur a ſpeculo, ac ſi e foco f directe venirent.

665. Problema. *Inuenire ſubnormalem in ellipſi et hyperbola.*

Fig. 111, 112. Resolvt. Cum recta FR tangenti perpendicularis ſit (661, 662), erit parallela normali MQ, et hinc $fR : fF = RM$ ſeu $FM : FQ$; eſt autem fR aequalis axi maiori $= 2a$, $fF = 2a \mp 2c$, $FM = c + x \mp \frac{cx}{a}$ (647, 648), quare his ſubſtitutis erit $2a : 2a \mp 2c = c + x \mp \frac{cx}{a} : FQ$; vnde obtinetur $FQ = c + x \mp \frac{c^2}{a} \mp \frac{2cx}{a} + \frac{c^2 x}{a^2}$. Iam cum PQ ſit $= FQ - FP$, et $FP = x - c$, erit $PQ = 2c \mp \frac{c^2}{a} \mp \frac{2cx}{a} + \frac{c^2 x}{a^2}$. Quodſi pro c^2 ſubſtituatur $\mp 2ac \mp \frac{1}{2} ap$ (636), erit $PQ = \frac{1}{2} p \mp \frac{px}{2a}$.

666. Coroll. 1. Si pro p ſubſtituatur $\frac{2b^2}{a}$ (630), erit $PQ = \frac{b^2}{a} \mp \frac{b^2 x}{a^2}$.

667. Coroll. 2. Si abſciſſa a centro C computetur, ſitque $CP = x$, in praecedente formula loco x, quod in ea ſignificabat BP, ponendum erit $\pm a \mp x$, et habebitur $PQ = \frac{b^2 x}{a^2}$.

668. Coroll. 3. Cum ſit $MQ^2 = PM^2 + PQ^2$, pro PM^2 ponendo $\pm b^2 \mp \frac{b^2 x^2}{a^2}$ (632),

et pro PQ^2 ponendo quadratum formulae praecedentis $\frac{b^4x^2}{a^4}$, erit $MQ^2 = \pm b^2 \mp \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^4x^2}{a^4} = \frac{\pm a^4b^2 \mp a^2b^2x^2 + b^4x^2}{a^4}$.

669. PROBLEMA. *Inuenire subtangentem in ellipsi, et hyperbola.*

RESOLVT. Quoniam in triangulo rectangulo TMQ ex angulo recto M demissa est in hypotenusam perpendicularis MP, erit PQ: PM = PM: PT (431), vnde $PT = \frac{PM^2}{PQ}$: est autem $PM^2 = px \mp \frac{px^2}{2a}$ (631), et $PQ = \frac{1}{2}p \mp \frac{px}{2a}$ (665): ergo his valoribus substitutis, erit $PT = \frac{2ax \mp x^2}{a \mp x}$.

670. COROLL. 1. Cum sit $CP \mp PT = CT$, et $CP = a \mp x$, erit $CT = a \mp x \pm \frac{2ax - x^2}{a \mp x} = \frac{a^2 \mp 2ax + x^2 \pm 2ax - x^2}{a \mp x} = \frac{a^2}{a \mp x}$; hinc $CT \times CP = \frac{a^2}{a \mp x} \times a \mp x = a^2 = AC^2$.

671. COROLL. 2. Cum in postrema hac formula distantia foci a vertice, seu c non ingrediatur, patet eam etiam axi minori ellipseos vel hyperbolae accommodari posse, adeoque etiam relate ad illum CT × CP aequari quadrato semiaxis, si modo aduertatur parametrum axis minoris esse tertiam proportionalem post

axem minorem et maiorem, et iuxta hanc animaduerſionem fiat debita ſubſtitutio n. 669.

672. COROLL. 3. Si abſciſſa a centro computata CP ſit $= x$, in formula ſubtangentis $\frac{2ax \mp x^2}{a \mp x}$ loco x, quod in ea ſignificabat BP, ponendum erit $\pm a \mp x$; erit ergo PT $= \frac{\pm 2a^2 \mp 2ax \mp a^2 \pm 2ax \mp x^2}{a - a \pm x} = \frac{\pm a^2 \mp x^2}{x}$.

Fig. 113. 114. 673. THEOREMA. *Si in ellipſi ac hyperbola ex vtrouis foco demittatur in tangentem perpendicularis* FA *vel* fa, *erit recta* CA *vel* Ca *iungens eius extremum cum centro parallela rectae iungenti punctum contactus cum altero foco* fM *vel* FM.

DEMONSTR. Ponamus enim rectas CA, et fM parallelas eſſe, oſtendendum erit rectam FA eſſe ad tangentem perpendicularem. Ducatur FR iisdem parallela, et per centrum C recta alia tangenti parallela occurrens rectis Mf, MF, RF in punctis b, B, S, erit ob CF $=$ Cf triang. FSC $= f$Cb (377), hinc CS $=$ Cb, AM $=$ AR, FS $= fb$; cumque aequentur anguli FMT, fMt (663), et FRt ſit $= f$Mt, erit triangulum FRM iſoſceles, in quo FR $=$ FM (369); igitur triangula FAM, FAR ſibi impoſita congruunt (379), ac proinde anguli ad A vtrinque aequales, et recti ſunt, et hinc FA ad tangentem perpendicularis. Eadem eſt pro rectis FM et Ca demonſtratio.

674. COROLL. Recta CA, ac proinde etiam rectae RS, Mb, et MB aequantur ſemi-

axi maiori. Cum enim ſit $FS = fb$, et $FR = FM$ per demonſtr. in ellipſi ſumma $FM + Mb + bf$ ſeu axis maior (646) aequatur ſummae $FR + Mb + FS = SR + Mb$; ſed $SR = Mb$, ergo Mb et SR, adeoque etiam CA aequantur ſemiaxi maiori. Et quia in triangulo BMb anguli B et b aequantur alternis FMT, fMt inter ſe aequalibus (663), et ipſi aequales ſunt; vnde $MB = Mb$, et hinc etiam MB aequatur ſemiaxi maiori.

In hyperbola axis maior eſt $= fM - FM$ (646); ergo pro fM ponendo $fb + Mb = fb + MB = FS + MB$, et pro FM ponendo FR, erit axis maior $= FS + MB - FR = RS + MB$, atqui $RS = MB = Mb = CA$; ergo RS, MB, Mb, et CA aequantur ſemiaxi maiori.

675. THEOREMA *Si e puncto axis, in quo normalis ei occurrit, demittatur perpendicularis in rectam iungentem punctum contactus cum foco, erit eius rectae ſegmentum inter punctum contactus, et illud perpendiculum interceptum aequale ſemiparametro axis.*

DEMONSTR. *In parabola.* Triangula FMP, FBQ ob angulos ad B et P rectos, et angulum ad F communem, ac latus $FM = FQ$ (656) aequalia ſunt (377); hinc $FP = FB$, adeoque etiam reſidua PQ et BM aequalia ſunt; eſt autem PQ ſemiparameter axis (659): ergo et BM. Fig. 110.

In ellipſi. Ducta HE per centrum tangenti parallela, triangula MBQ, MRE ob angulos ad B et R rectos, ac ad M communem ſimila ſunt; hinc $MB : MQ = MR : ME = MR :$ Fig. 115.

AC (674): ergo $MB \times AC = MQ \times MR$. Praeterea ducta e centro in tangentem perpendiculari CI, triangula MQP, CIT similia sunt ob angulos ad P et I rectos, ac ad M et C aequales, tollendo nempe ex alternis CMP, MCT aequales CMR, MCI: ergo CI seu $MR : CT = MP$ seu $CX : MQ$: hinc $MQ \times MR = CT \times CX = CL^2$ (671): ergo $MB \times AC = CL^2$; atqui CL^2 debet aequari facto ex semiaxe maiore in semiparametrum eiusdem (630), et AC est semiaxis maior: ergo MB est semiparameter axis maioris.

Fig. 116. *In hyperbola.* Eadem de caussa similia sunt triangula MBQ, MRE, vnde MR : ME seu AC (674) $= MB : MQ$; ergo $MQ \times MR = MB \times AC = CL^2$ vt ante: quare MB est semiparameter axis maioris.

CAPVT III.

De sectionibus conicis ad diametros relatis.

676. *Diameter* sectionis conicae est quaeuis recta per centrum transiens, et vtrinque in perimetro terminata. Cum vero parabolae centrum a vertice infinite distet (620) eius diameter est quaeuis recta e quouis eius puncto ducta, et axi parallela. *Diameter coniugata* dicitur respectu alterius diametri, si sit parallela tangenti per alterius extremum ductae, quales sunt AB et MN in Fig. 119 et 120.

Semiordinatae diametrorum ſunt rectae in diametro, et perimetro ſectionis terminatae, et tangenti per extremum diametrorum tranſeunti parallelae.

677. THEOREMA. *Si in parabola per extremitatem axis* A, *et diametri* M *ducantur tangentes* AG *et* TM, *et his per quodcunque perimetri punctum* E, e, *vel* H *agantur parallelae, triangula his parallelis et axe comprehenſa aequabuntur rectangulis a tangente axis, eiusque parallela inter axem et diametrum comprehenſis,* Fig. 117.

DEMONSTR. 1) Si punctum E cadat ſupra M, ducta ſemiordinata MP erunt triangula ſimilia MPT, EDt inter ſe vt $MP^2 : ED^2$ (509) $=$ AP: AD (626); atqui etiam rectangula APMG, ADBG in eadem ratione ſunt (505): ergo triangula illa ſunt vt haec rectangula; ſed triangulum MPT aequatur rectangulo APMG (660); ergo etiam triangulum EDt $=$ ADBG.

2) Si punctum e cadat infra M, erunt triangula ſimilia MPT, eOt inter ſe vt MP^2: eO^2 $=$ AP: AO $=$ APMG: AOLG; ſed MPT $=$ APMG: ergo eOt $=$ AOLG.

3) Si punctum H cadat in aliud crus parabolae, erunt triangula ſimilia MPT, NHK vt MP^2: NH^2 $=$ MP^2: NR^2 $=$ AP: AN $=$ APMG: ANFG; ſed MPT $=$ APMG; ergo etiam NHK $=$ ANFG.

678. THEOREMA. *In eodem caſu triangulum comprehenſum a tangentium parallelis et diametro aequatur rectangulo, quod vna parallelarum efficit cum diametro, axe, et tangente diametri.*

DEMONSTR. 1) Si punctum E cadat ſupra M, cum TPM ſit = APMG (660), tollatur ab vtroque ſpatium DCMP, erit TCD = GMI + IADC; tollatur ab horum primo triangulum EDt, a ſecundo ſpatium ADBG, quae aequalia ſunt (677) reſtabit TCEt = BCM, quibus ſi addas CMSE, erit BES = TMSt.

2) Si punctum e cadat infra M, ex eOt, AOLG aequalibus (cit.) tolle EDt, ADBG aequalia (cit.), habebis DEeO = DOLB, e quibus ſi demas DESLO, obtinebis eSL = BES = TMSt.

3) Si punctum H cadat in aliud parabolae crus, cum ſit NKH = ANFG (cit.), tolle NKH ex HFQ, et eius loco adde ANFG, erit GAKQ = HFQ. Si ergo e priore demas GIM, et ſubſtituas aequale TIA (660), habebis HFQ = TMQK.

679. THEOREMA. *Diameter* MS *biſecat ſuas ordinatas.*

DEMONSTR. Cum enim triangula eSL et BES aequalia ſint (678), erit eL : BE = BS : SL (507), et cum eadem triangula etiam ſimilia ſint, erit eL : BE = SL : BS (408): ergo BS : SL = SL : BS, et hinc BS^2 = SL^2 (202), ac BS = SL, vnde etiam eS = ES (377), id quod in quauis alia ordinata obtinet.

680. THEOREMA. *In parabola quadrata ſemiordinatarum ad quamuis diametrum ſunt vt abſciſſae.*

DEMONST. Nam triangula ſimilia BES, FHQ ſunt inter ſe vt SE^2 : QH^2 (509); atqui triangulum BES = TMSt, et FHQ = TMQK

(678); ergo etiam haec parallelogramma ſunt inter ſe vt $SE^2 : QH^2$; ſed eadem etiam ſunt vt $MS : MQ$ (505): ergo $SE^2 : QH^2 = MS : MQ$.

681. COROLL. Ratio haec non mutabitur, ſi abſciſſae ducantur in rectam quamdam conſtantem (190), quae ſi ſit tertia proportionalis ad quamcunque abſciſſam, et eius ſemiordinatam, erit quadratum ſemiordinatae aequale facto ex abſciſſa in eam rectam, quam vocamus *diametri parametrum* (625): vnde quadratum ſemiordinatae diametri aequatur facto ex parametro in abſciſſam: et quadrata ſemiordinatarum ſunt vt abſciſſae.

682. THEOREMA. *Parameter diametri aequatur quadruplae diſtantiae foci a vertice diametri.*

DEMONSTR. Sit enim parameter axis $= p$, parameter diametri $= q$, ducaturque ex vertice parabolae ad diametrum ſemiordinata RA, erit $RA = MT$, et $MR = TA = AP$ (657); atqui $MT^2 = MP^2 + TP^2 = px + 4x^2$ (624, 657), et $p = 4NA$ (620), $x = AP$; ergo MT^2 ſeu $RA^2 = 4NA \times AP + 4AP^2$; ſed RA^2 etiam $= MR \times q$ (681) $= AP \times q$; ergo $4NA \times AP + 4AP^2 = AP \times q$, et diuidendo per AP; $4NA + 4AP = 4DM = 4MF = q$. Fig. 118.

683. COROLL. Easdem adeo proprietates habet parabola relate ad diametrum, quas relate ad axem habere in ſuperioribus vidimus.

684. THEOREMA. *Si ab extremis punctis diametrorum coniugatarum* MN *et* BA *ducantur ſemiordinatae* MP *et* BD *ad axem maiorem ellipſis vel hyperbolae, quadratum abſciſſae vnius a centro computa-* Fig. 119. 120.

tae CD^2 *aequabitur facto abscissarum alterius semiordinatae* $RP \times rP$.

DEMONSTR. Sit axis $Rr = 2a$, $CP = x$, $CD = u$, erit $rD = a \pm u$, $RD = a \mp u$. Est autem in ellipsi $RP \times rP : RD \times rD = PM^2 : BD^2$ (629), seu $a^2 - x^2 : a^2 - u^2 = PM^2 : BD^2$ et in hyperbolis MH et GN, vbi Rr est axis maior, est $PM^2 : RP \times rP = CQ^2 : CR^2$ (627); et in hyperbolis AS et BL, vbi Rr est axis coniugatus, est $BD^2 : CR^2 + CD^2 = CQ : CR^2$ (641): ergo $RP \times rP : CR^2 + CD^2 = PM^2 : BD^2$ (641), seu $x^2 - a^2 : a^2 + u^2 = PM^2 : BD^2$; atqui ob triangula TPM, BCD similia est $PM^2 : BD^2 = TP^2 : CD^2$: ergo etiam $\pm a^2 \mp x^2 : a^2 \mp u^2 = TP^2 : CD^2 = \frac{(\pm a^2 \mp x^2)^2}{x^2}$ (672): u^2; ergo $(\pm a^2 \mp x^2)\, u^2 = (a^2 \mp u^2) \times \frac{(\pm a^2 \mp x^2)^2}{x^2}$, et diuidendo per $\pm a^2 \mp x^2$, $u^2 = (a^2 \mp u^2) \times \frac{(\pm a^2 \mp x^2)}{x^2}$, tollendo factionem, et reipsa multiplicando, $u^2 x^2 = \pm a^4 - a^2 u^2 \mp a^2 x^2 + u^2 x^2$, tollendo vtrinque $u^2 x^2$, tum omnia diuidendo per a^2 erit $o = \pm a^2 - u^2 \mp x^2$; vnde $u^2 = \pm a^2 \mp x^2 = RP \times rP$. Eodem modo ostenditur esse $RD \times rD = CP^2$.

685. COROLL. I. Cum ergo in ellipsi sit $a^2 : b^2 = RD \times rD : BD^2$ (627) CP^2 seu $x^2 : BD^2$, erit $BD^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}$. Est autem $CM^2 = CP^2 + PM^2 = x^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$ (632): et CB^2

$= CD^2 + BD^2 = a^2 - x^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}$. Hinc $CM^2 + CB^2 = b^2 + a^2$.

686. COROLL. 2. Cum in hyperbola ſit $a^2 : b^2 = CR^2 + CD^2 : BD^2$ (641) ſeu $= a^2 - a^2 + x^2 : BD^2$ (684) $= x^2 : BD^2$ erit $BD^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}$. Eſt autem $CM^2 = CP^2 + PM^2 = x^2 - b^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}$ (632), et $CB^2 = CD^2 + BD^2 = x^2 - a^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}$. Hinc $CB^2 - CM^2 = b^2 - a^2$.

687. COROLL. 3. Quoniam $CM^2 = CP^2 + MP^2 = x^2 \pm b^2 \mp \frac{b^2 x^2}{a^2}$; erit $CB^2 = \frac{b^2 x^2 \mp a^2 x^2 \pm a^4}{a^2}$; nempe pro ellipſi ex $CM^2 + CB^2 = b^2 + a^2$ tollendo CM^2: in hyperbola ad $CB^2 - CM^2 = b^2 - a^2$ addendo CM^2.

688. COROLL. 4. Cum ergo fuerit $MQ : CL = CL : MR$, ſeu $MQ^2 : CL^2 = CL^2 : MR^2$ (675), et ſit $MQ^2 = \pm \frac{a^4 b^2 \mp a^2 b^2 x^2 + b^4 x^2}{a^4}$ (668), et $CL^2 = b^2$, erit $MR^2 = \frac{a^4 b^2}{b^2 x^2 \pm a^4 \mp a^2 x^2}$. Fig. 115. 116.
Si ergo MR^2 ducatur in CD^2 (quod in priore corollario fuit CB^2), cuius valor priore corollario eſt inuentus, erit $MR^2 \times CD^2 = a^2 b^2 = CA^2 \times CL^2$: hinc $MR : CL = CA : CD$, adeoque $MR = \frac{CL \times CA}{CD}$.

689. THEOREMA. *In ellipsi et hyperbola quadratum semiordinatae ad diametrum adplicatae est ad factum suarum abscissarum, vt quadratum semidiametri coniugatae ad quadratum semidiametri propriae, seu* $FO^2 : MF \times FN = CB^2 : CM^2$.

Fig. 119. 120. DEMONSTR. Ductis ad axem maiorem semiordinatis MP, BD, OI, demittantur ex puncto F perpendiculares FK et FE. Sit porro $EI = FK = m$, $CE = n$, $CM = d$, erit $IR = IE + ER = m \pm a \mp n$, et $rI = rE \mp IE = a \mp m + n$; hinc $IR \times rI = 2mn \pm a^2 \mp m^2 \mp n^2$. Ad haec ob similia triangula CPM, CEF erit $CP : CM = CE : CF$, seu $x : d = n : CF$; ergo $CF = \frac{dn}{x}$; quare $MF = \pm MC \mp CF = \pm d \mp \frac{dn}{x}$; et $FN = CN + CF = d + \frac{dn}{x}$ (637): ergo $MF \times FN = \pm d^2 \mp \frac{d^2 n^2}{x^2} = \pm CM^2 \mp CF^2$.

His positis duo valores quaerendi sunt de OI^2, et inter se comparandi.

Igitur 1) $OI = IK + KO$: est vero in triangulis CPM, CEF similibus $CP : PM = CE : EF$ seu IK, hoc est $x : y = n : IK$; vnde $IK = \frac{ny}{x}$: et in triangulis TPM, KFO similibus (410) $PT : PM = FK : KO$, seu $\frac{\pm a^2 \mp x^2}{x} : y = m : KO$ (672), vnde $KO = \frac{mxy}{\pm a^2 \mp x^2}$: est ergo iam

$$OI^2 = (IK + KO)^2 = \frac{n^2 y^2}{x^2} + \frac{2mny^2}{\pm a^2 \mp x^2} + \frac{m^2 x^2 y^2}{(\pm a^2 \mp x^2)^2}.$$

2) Est $PR \times rP : RI \times rI = PM^2 : OI^2$ (629) seu $\pm a^2 \mp x^2 : 2mn \pm a^2 \mp m^2 \mp n^2 = y^2 : OI^2$, vnde $OI^2 = \frac{(2mn \pm a^2 \mp m^2 \mp n^2)y^2}{\pm a^2 \mp x^2}$; ergo hunc valorem comparando cum supra inuento erit

$$\frac{(2mn \pm a^2 \mp m^2 \mp n^2)}{\pm a^2 \mp x^2} y^2 = \frac{n^2 y^2}{x^2} + \frac{2mny^2}{\pm a^2 \mp x^2}$$

$$+ \frac{m^2 x^2 y^2}{(\pm a^2 \mp x^2)^2}$$: diuidendo per y^2 erit

$$\frac{2mn \pm a^2 \mp m^2 \mp n^2}{\pm a^2 \mp x^2} = \frac{n^2}{x^2} + \frac{2mn}{\pm a^2 \mp x^2}$$

$$+ \frac{m^2 x^2}{(\pm a^2 \mp x^2)^2}$$; tollendo vtrinque

$$\frac{2mn}{\pm a^2 \mp x^2}$$ erit

$$\frac{\pm a^2 \mp m^2 \mp n^2}{\pm a^2 \mp x^2} = \frac{n^2}{x^2} + \frac{m^2 x^2}{(\pm a^2 \mp x^2)^2}$$

multiplicando per $\pm a^2 \mp x^2$ erit

$$\pm a^2 \mp m^2 \mp n^2 = \pm \frac{a^2 n^2}{x^2} \mp n^2 +$$

$$\frac{m^2 x^2}{\pm a^2 \mp x^2}$$: tollendo vtrinque $\mp n^2$, erit

$$\pm a^2 \mp m^2 = \pm \frac{a^2 n^2}{x^2} + \frac{m^2 x^2}{\pm a^2 \mp x^2}$$: multiplicando per $\pm a^2 \mp x^2$, erit

$$a^4 - a^2 x^2 - a^2 m^2 + m^2 x^2 = \frac{a^4 n^2}{x^2} - a^2 n^2 + m^2 x^2;$$

tollendo vtrinque $m^2 x^2$, erit

$$a^4 - a^2x^2 - a^2m^2 = \frac{a^4n^2}{x^2} - a^2n^2$$; diuidendo per a^2 erit

$a^2 - x^2 - m^2 = \frac{a^2 n^2}{x^2} - n^2$; transponendo m^2 vt folum fit, erit

$$a^2 - x^2 + n^2 - \frac{a^2 n^2}{x^2} = m^2 = FK^2;$$

Iam dico $MF \times FN : CM^2 = FK^2 : CD^2$; nam fubftitutis valoribus $\pm d^2 \mp \frac{d^2 n^2}{x^2}$: $d^2 = a^2 - x^2 + n^2 - \frac{a^2 n^2}{x^2}$: $\pm a^2 \mp x^2$ (684), erit factum extremorum aequale facto mediorum, ac proinde factores reciproce proportionales (204). Quia vero triangula FKO, CBD fimilia funt (410), erunt latera homologa, adeoque etiam eorum quadrata proportionalia, feu $FO^2 : CB^2 = FK^2 : CD^2$: ergo etiam $FO^2 : CB^2 = MF \times FN : CM^2$, et alternando $FO^2 ; MF \times FN = CB^2 : CM^2$.

690. Coroll. Cum ratio $CB^2 : CM^2$ fit conftans, patet quadrata femiordinatarum effe vt facta abfciffarum correfpondentium, adeoque easdem effe ellipfeos ac hyperbolae proprietates relate ad diametros, quae funt relate ad axem maiorem. Conf. n. 629.

CAPVT IV.

De variis ſectiones conicas deſcribendi methodis.

691. Methodos quasdam deſcribendi ſectiones conicas iam in ſuperioribus exhibuimus n. 612, 649, 650, 651: quia vero pro varietate datorum varia earundem eſt deſcriptio, quasdam praeterea hoc loco proponere viſum eſt.

692. PROBLEMA. *Data parametro parabolam deſcribere.*

RESOLVT. 1) Ducta recta indefinita ND erigatur alicubi in B perpendicularis pariter indefinita BG, in quam ex B in A, et ex A in F transferatur quarta pars datae parametri, erit parabolae vertex in A, focus in F, directrix ND, e cuius quamplurimis punctis D ducantur ad BA parallelae indefinitae, ac e foco F ad puncta D rectae FD; tum fiant anguli DFM aequales angulis FDM, naſcentur triangula FMD aequicrura, per quorum vertices M ducta curua erit parabola. Idem fiat ex altera axis AG parte. Fig. 121.

DEMONSTR. Cum enim ſit vbique FM = MD (369), puncta M erunt in parabola (608).

2) Iungantur ſibi mutuo perpendiculariter rectae indefinitae ND et BG, et ſtatuatur ver- Fig. 122.

tex Parabolae in puncto iuncturae A, fiatque AB aequalis datae parametro: deinde centris in recta BG pro arbitrio assumtis circino semper vsque ad B aperto ducantur quam plurimi circuli secantes rectas ND et BG in punctis R et P, ac assumtis lateribus AR et AP compleantur rectangula ARMP; erit curua per angulos M transiens Parabola.

DEMONSTR. Est enim quaelibet AR adeoque quaelibet PM media proportionalis inter parametrum AB, et abscissam AP (420), adeoque quaelibet PM est semiordinata Parabolae (625), et hinc puncta omnia M sunt in Parabola (617).

Fig. 123. 3) Iunctis, vt ante, rectis indefinitis ND et BG, fiant AB et AF aequales quartae parti parametri datae: deinde per puncta quamplurima P rectae BG infra A assumta ducantur ad rectam ND parallelae indefinitae MM, ac centro F apertura PB secetur parallela per illud punctum P ducta vtrinque in punctis M et M, idque fiat in quamplurimis parallelis: curua per punctum A tanquam verticem, et per puncta M traducta erit Parabola.

DEMONSTR. Ducta enim per punctum B recta HK parallela ad ND erit directrix ob AF = AB (608), et ex constr. FM = PB = MQ; vnde patet puncta M et punctum A esse in Parabola (ibid.).

SCHOLION. Si Parabola circa diametrum describenda sit, semiordinatae eiusdem eodem modo inuenientur; sed non sub angulo recto, verum sub dato vel assumto adplicandae erunt ad rectam BG, quae tunc non axis, sed diameter futura est.

693. PROBLEMA. *Datis axibus ellipsim describere.*

RESOLVT. 1) Sint axes AB et CD sese bifariam et perpendiculariter secantes in centro O; radio OA describatur circulus, in quo ducantur quamplurimae ordinatae NN; deinde ad rectas OG, OC, et quamlibet PN quaerantur quartae proportionales ex P transferendae in M: curua per puncta A, C, B, D, item per omnia M traducta erit ellipsis. Fig. 124

DEMONSTR. Cum enim ex constr. sit quaelibet PN ad correspondentem PM sicut AO: OC, patet rectas PM esse semiordinatas ellipseos, cuius semiaxes sunt AO et OC (635).

2) Iunctis, vt ante, axibus AB et CD, semiaxe maiore AO tanquam radio centro C intersecetur axis maior in punctis F et F, erit FC + FC = AB, et hinc puncta F et F erunt foci (652), quibus inuentis describatur ellipsis vt supra n. 649.

3) Inuentis, vt ante, focis F et F diuidatur axis maior AB vtcunque in duas partes inaequales, ac partibus hisce tanquam radiis e centris F et F ducantur arcus se intersecantes e. g. in puncto M, atque eodem pacto determinentur quamplurima puncta M: erit curua per haec puncta transiens ellipsis.

DEMONSTR. Erit enim semper ex constr. FM + FM = AB, et hinc puncta M iacebunt in Ellipsi (646).

694. PROBLEMA. *Datis focis, et axe alterutro ellipſim deſcribere.*

RESOLVT. Si detur axis maior, deſcribetur ellipſis, vt ſupra n. 649. Si detur axis minor CD, cum ſit FC + FC = AB, innoteſcet etiam axis maior, adeoque rurſus, vt ante, deſcribetur ellipſis.

695. PROBLEMA. *Data parametro, et axe alterutro ellipſim deſcribere.*

RESOLVT. Cum parameter ſit tertia proportionalis poſt eum axem, cuius eſt parameter, et poſt alterum (630), data parametro, et vno axe, inuenitur etiam alter; et hinc ellipſis deſcribi poteſt, vt ſupra n. 693.

Fig. 126. 696. PROBLEMA. *Datis diametris coniugatis* FN *et* HK *ellipſim deſcribere.*

RESOLVT. Per verticem prioris F ducatur recta indefinita RT poſteriori HK parallela, ad quam in F erigatur perpendicularis FI = OH, ac centro I radio IF ducatur circulus, et centra I ac O iungantur recta IO, qua in S bifariam diuiſa erigatur perpendiculum SE occurrens rectae RT in puncto E: tum diſtantia EI = EO transferatur ex E in T et R, ducanturque rectae RO et TO, quae in O formabunt angulum rectum, qui foret in ſemicirculo tranſeunte per puncta R, O, T ob ER = ET = EO. Vt iam in rectis TO et RO ſemiaxes Ellipſeos determinentur, ducantur rectae IR et IT occurrentes peripheriae circuli antea ducti in punctis V et Q, e quibus ducantur rectae VC et QA parallelae ad IO occurrentes rectis RO et TO in punctis C et A, erunt OC et OA femiaxes Ellipfeos, quibus datis Ellipfis defcribi poteft, vt fupra n. 693.

DEMONSTR. 1) Ductis AG et QL ad HO parallelis, demonftrandum eft punctum A fore in Ellipfi, quae eadem erit demonftratio etiam pro puncto C, vnde confequens erit rectas OA et OC fibi perpendiculares fore femiaxes Ellipfeos.

2) Vt autem hoc ipfum demonftretur, probandum eft rectam GA effe femiordinatam diametri FN, feu conuenire eidem effentialem aliquam femiordinatae proprietatem. Ponamus ergo rectam GA effe reapfe femiordinatam, erit $FO^2 : HO^2 = FG \times GN : GA^2$ (689), et $FG \times GN = FO^2 - GO^2$ (ibid.); ergo $FO^2 : HO^2 = FO^2 - GO^2 : GA^2$; quare $GA^2 =$

$$\frac{(FO^2 - GO^2) \times HO^2}{FO^2} = HO^2 - \frac{GO^2 \times HO^2}{FO^2};$$

patet ergo rectam GA fore femiordinatam, fi poftrema haec aequatio vera fit; eam autem veram effe fic oftendimus.

3) In triangulis OTI, ATQ, OAG, ITF, IQL fimilibus eft $OF : OG = IF : IL$: recta LG parallela eft ad IO (407), adeoque etiam ad QA, et hinc $AG = QL$. Porro in fuperiori proportione pro IF ponendo HO erit $OF : OG = HO : IL$, vnde $IL^2 = \frac{OG^2 \times HO^2}{FO^2}$; atqui in triangulo rectangulo QLI eft QL^2 feu $AG^2 = IQ^2 - IL^2 = HO^2 - IL^2$: ergo AG^2

$= HO^2 - \frac{GO^2 \times HO^2}{FO^2}$, et hinc GA eſt ſemi-ordinata diametri FN.

Fig. 126. 697. PROBLEMA. *Datis axibus* AB *et* CD *Hyperbolam deſcribere.*

RESOLVT. Producatur axis maior AB vtrinque indefinite, ac in puncto A erigatur perpendicularis indefinita AR; deinde a vertice A inchoando fiant partes aequales AP, PP, PP etc., ac centro O radiis OP deſcribantur circuli occurrentes rectae AR in punctis R; tum ad rectas AB, CD, et AR inueniantur quartae proportionales PM, eriganturque perpendiculariter in punctis P: curua per verticem A et puncta M tranſiens erit Hyperbola. Idem fiat ex altera axis parte.

DEMONSTR. Eſt enim quodlibet $AR^2 = AP \times Ap$ (420); et quia quaelibet AP eſt $= Bp$, erit quaelibet $Ap = BP$, et hinc $AP \times Ap = AP \times BP = AR^2$. Eſt vero ex conſtr. PM: AR = CD: AB: ergo quaelibet PM ſic ſunt ad inuicem ſicut quaelibet AR ad inuicem, adeoque etiam PM^2 ſic ſunt ad inuicem vt AR^2, ſeu vt $AP \times BP$: quare rectae PM ſunt ſemiordinatae Hyperbolae (639), adeoque puncta M in Hyperbola.

698. COROLL. Quoniam datis axibus Hyperbolae datur etiam parameter (630), datis ſolis axibus etiam ſequentes deſcriptiones habebunt locum. Datis axibus dantur foci (652), et hinc habet locum deſcriptio n. 650.

699. PROBLEMA. *Data parametro, et alterutro axe deſcribere Hyperbolam.*

Resolvt. 1) Si data parametro inueniatur alter axis, praecedens deſcriptio poterit adhiberi.

2) Inuento altero axe (630) quaerantur foci hoc modo. Sit axis maior $AB = a$, parameter eiusdem $= p$, et ponatur eſſe focus in F, erit $FN = \frac{1}{2}p$ (618). Eſt vero $p : CD = CD : a$ (630), et hinc $p : a = CD^2 : a^2$ (215) $= FN^2 : BF \times AF$ (627) $= \frac{1}{4}p^2 : ax + x^2$; vnde $\frac{1}{4}ap^2 = apx + px^2$ (202), ſeu $x^2 + ax = \frac{1}{4}ap$; hinc $x = \sqrt{(\frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a$ (173); eſt autem $\sqrt{\frac{1}{4}ap} = OD$ (630): fiat ergo $AG = OD$ et parallela, erit $OG = \sqrt{(\frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}a^2)}$: quare ſi radio OG centro O interſecetur axis AB productus in puncto F, erit $AF = OF - OA = \sqrt{(\frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a = x$, et hinc F focus; ac ſi fiat $Of = OF$ erit f alter focus, quibus inuentis deſcribi poteſt Hyperbola (650). Fig. 127.

3) Inuentis focis centro f interuallo $fM > AB$ ducatur arcus, et facta $fH = AB$, interuallo reliquo HM centro F interſecetur idem arcus in puncto M; ac ſimili modo determinentur quamplurima puncta M ex vtraque axis AB parte, erunt eadem in Hyperbola.

Demonstr. Erit enim ſemper ex conſtr. $fM - FM = fH = AB$, adeoque puncta M iacebunt in Hyperbola (646).

4) Inuentis focis F et f, axi maiori AB iungatur ſub quouis angulo acuto recta indefinita fN, ac radiis fP vltra punctum A pertinentibus ducantur arcus concentrici PN, factaque $fH = AB$, reſiduis HN tanquam radiis e cen- Fg 128.

tro F interſecentur priores arcus in punctis M, quod ipſum fiat etiam ex altera axis AB parte: erunt puncta M in Hyperbola.

DEMONSTR. Eſt enim ex conſtr. ſemper $fN - HN = AB$, et HN ſemper $= FM$, ac $fN = fM$ cum ſint radii eiusdem circuli: quare $fM - FM = AB$; vnde puncta M iacent in Hyperbola (646).

Fig. 129. 700. PROBLEMA. *Data aſymptotorum* CB *et* CD *poſitione, per datum punctum* Q *Hyperbolam intra easdem deſcribere.*

RESOLVT. Per datum punctum Q ducantur rectae QN et QR aſymptotis parallelae: ob datum punctum Q, et aſymptotorum poſitionem notae erunt rectae QR et $QN = CR$. Sumantur ergo in aſymptoto CD quamplurimae abſciſſae CP, tum ad rectas CP, CR, RQ quaerantur quartae proportionales PM, transferendae e punctis P in rectas ad QR parallelas, erunt puncta M in Hyperbola.

DEMONSTR. Cum enim ex conſtr. $CP : CR = RQ : PM$, erit $CR \times RQ = CP \times PM$, ſeu factum ex abſciſſa in ſemiordinarum erit conſtans: ergo puncta M ſunt in Hyperbola (644).

701. COROLL. Si intra aſymptotos poſitione datas deſcribenda ſit Hyperbola rectanguli dati, cui nempe aequari debeat factum ex abſciſſa in ſemiordinatam, fiat CR aequalis vni lateri rectanguli dati, RQ alteri; cetera fiant vt ſupra. Si deſcribenda ſit hyperbola dati quadrati, CR et RQ aequales fieri debent.

702. PROBLEMA. *Per data tria puncta* A, B, *C, non in directum sita circa datum focum* F *sectionem conicam describere.* Fig. 130.

RESOLVT. Ductis rectis BA et CB, item FA, FB, et FC, fiat FA : FB = AE : BE, et FB : FC = BK : CK; seu FB — FA : FB = BE — AE id est BA : BE, et FC — FB : FC = CK — BK id est CB : CK; erit recta per puncta E et K ducta directrix, qua positione data, et dato foco F describi potest sectio conica (612).

DEMONSTR. Demissis enim perpendiculis AG, BI, et CH similia erunt triangula AEG et BEI; vnde AG : BI = AE : BE = FA : FB; item similia erunt triangula BKI et CKH; vnde BI : CH = BK : CK = FB : FC : sunt adeo hae perpendiculares AG, BI, CH vt rectae FA, FB, FC, et hinc recta KD est directrix sectionis conicae per puncta A, B, C transeuntis (608).

SCHOLION. Pauca haec, quae de sectionibus conicis delibauimus, sufficiant tironibus. Siqui eorum vltra elementa eniti voluerint, in promtu habebunt Hospitalium, Boscouichium, Lechium, Scherfferum, et alios, qui haec copiose pertractant: adire etiam poterunt librum nostrum de calculo Differentiali, et alterum de Resolutionibus Aequationum, vbi non pauca reperient ad sectiones conicas pertinentia.

Finis Elementorum Sectionum Conicarum.

INDEX CAPITVM.

ELEMENTA
ALGEBRAE.

SECTIO I.

De primis quantitatum integrarum, et fractarum Calculis.

Pag.

SECTIO II.

De Compositione, et Resolutione Potentiarum.

SECTIO III.

De Problematis, et Aequationibus.

SECTIO IV.

De variis quantitatum Relationibus.

ELEMENTA GEOMETRIAE.

SECTIO I.

De Lineis et Angulis.

SECTIO II.

De Superficiebus.

SECTIO III.

De Solidis.

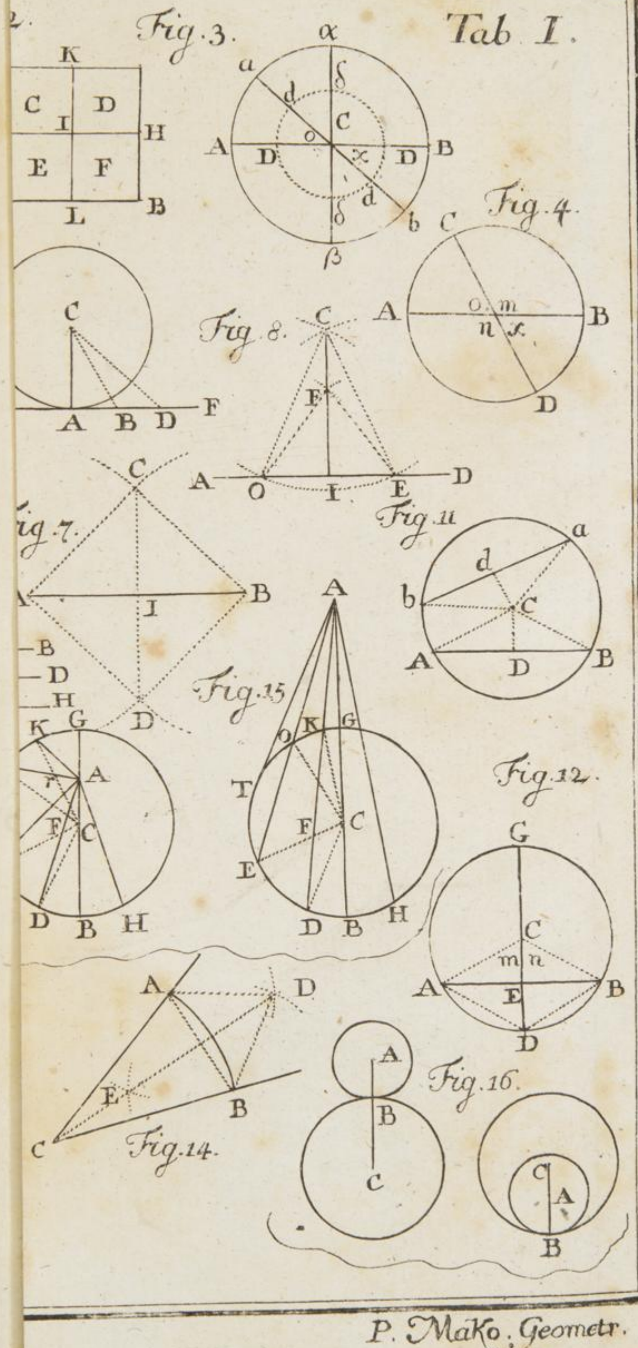
ELEMENTA SECTIONUM CONICARUM

Extra Conum Spectatarum.

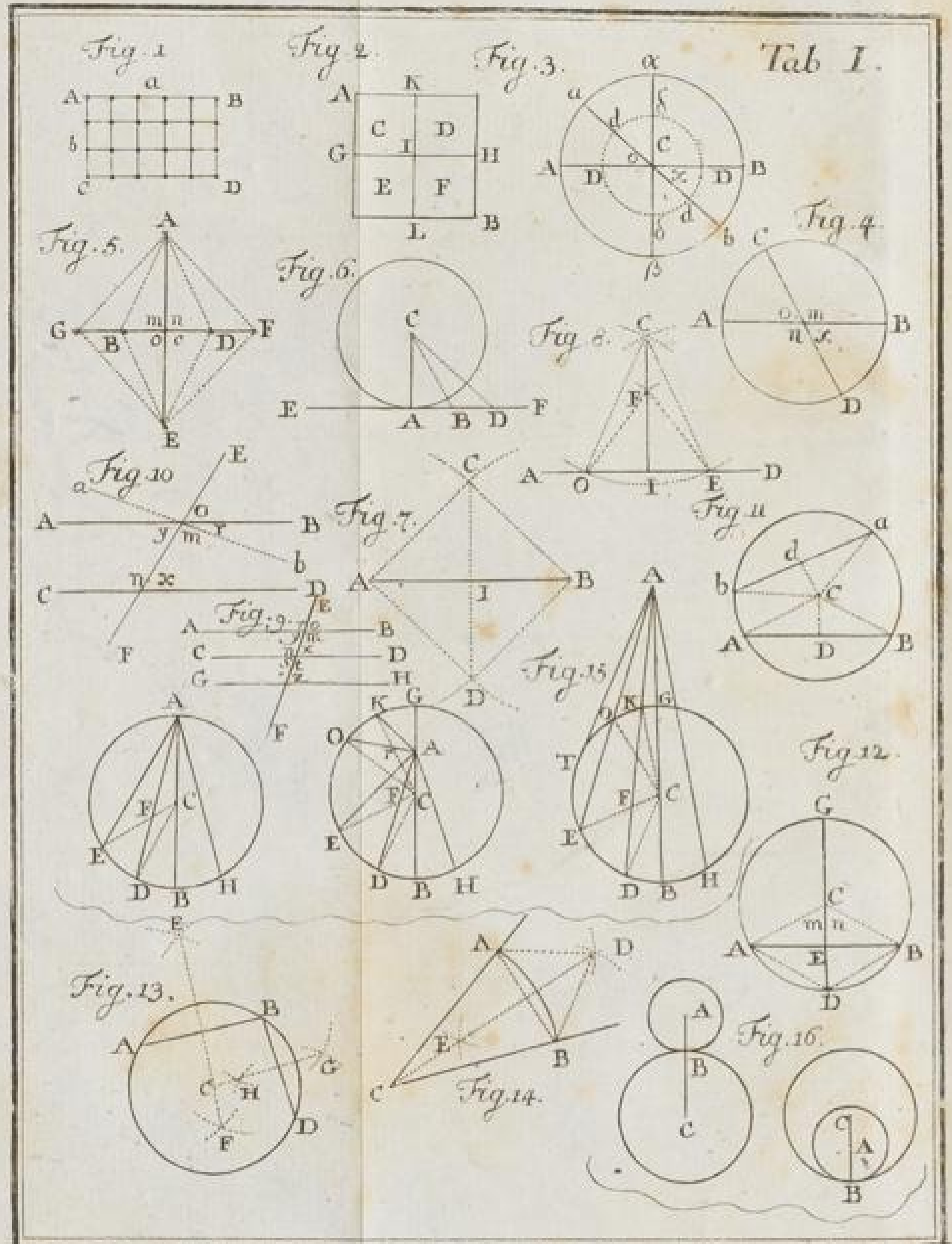
ERRATA.

Pag.	lin.	*Errores*	*Corrigendi*
116	4	$b^{\frac{3}{3}}$ - - -	$b^{\frac{2}{3}}$ - - -
122	23	$\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c}{d}}=\sqrt[m]{\frac{ac}{b^m d}}$	$\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}=\sqrt[m]{\frac{a^m c}{b^m d}}$
123	12	$\sqrt[\frac{n}{r}]{\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{e}{d}}\right)}$	$\sqrt[\frac{n}{r}]{\left(\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}\right)}$
143	4	$-ay$ - - -	$-2ay$ - -
173	29	$:bm$ - - -	$b:bm$ - - -
215	5	s^m- - - -	$s^m=$ - - -
273	19	*de* - - -	*de* - - - -
280	8	BA+AB -	CA+AB. -

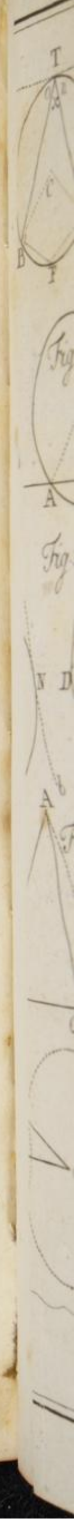
Tab I.



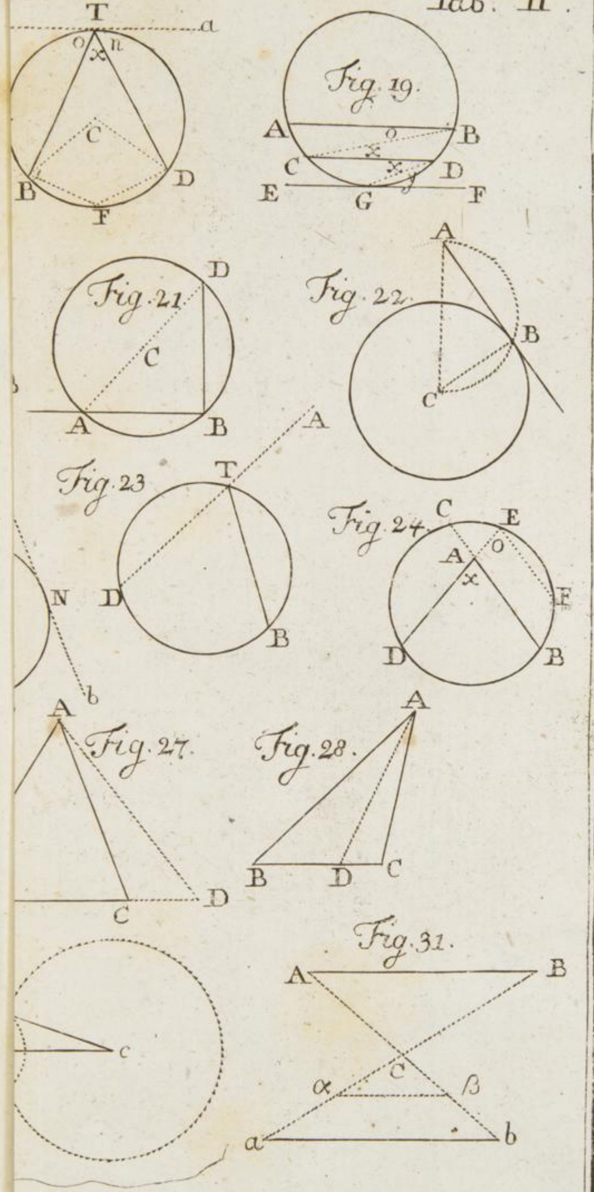
P. Mako. Geometr.



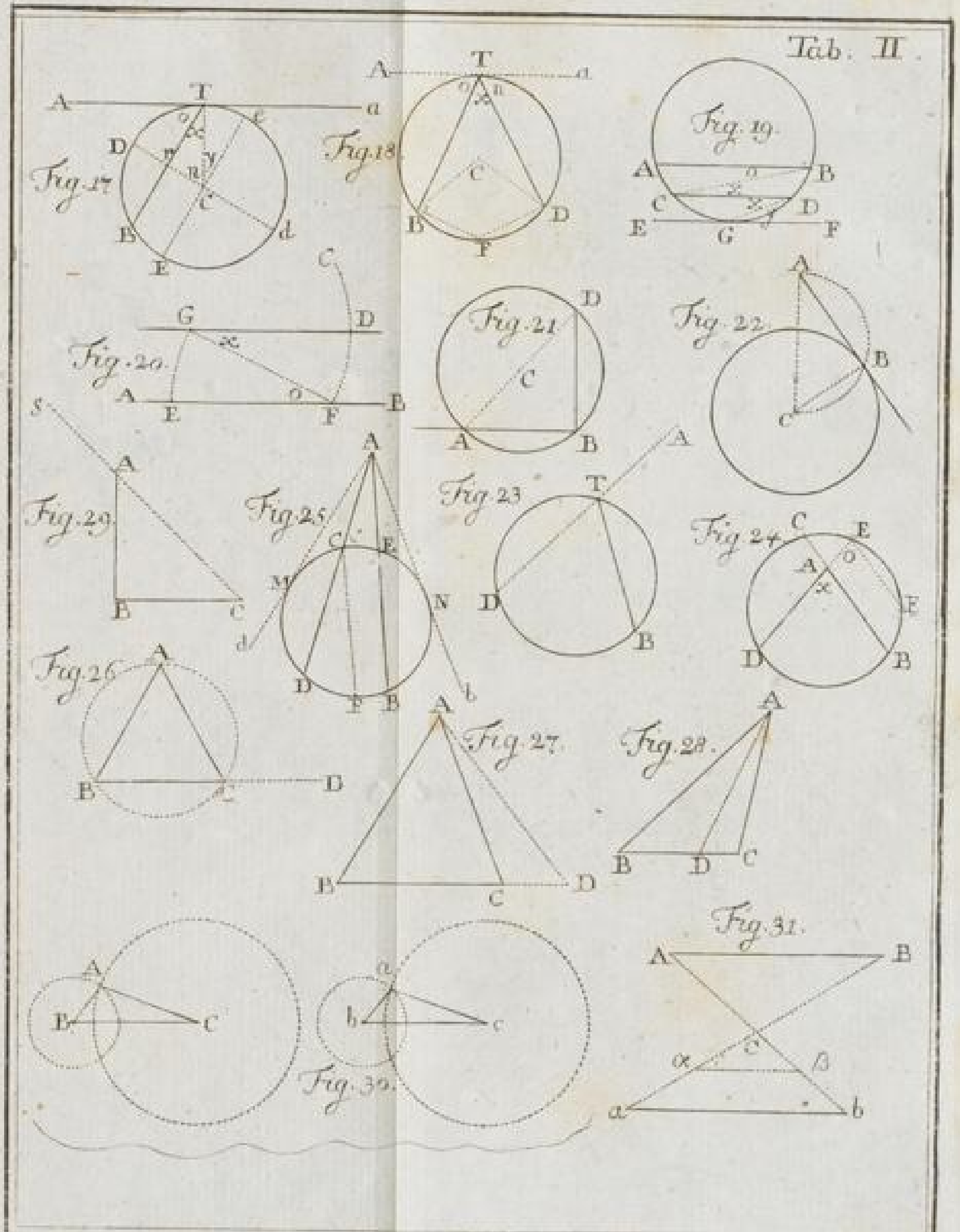
P. Mako, Geometr.



Tab. II.

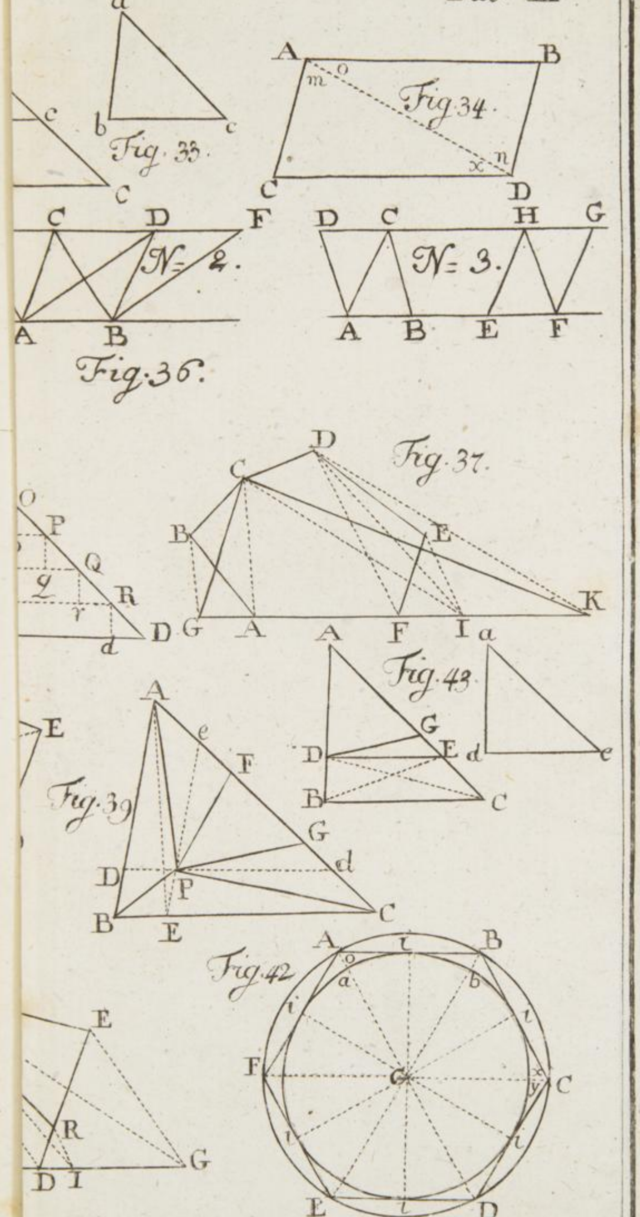


P. Mako Geometr.

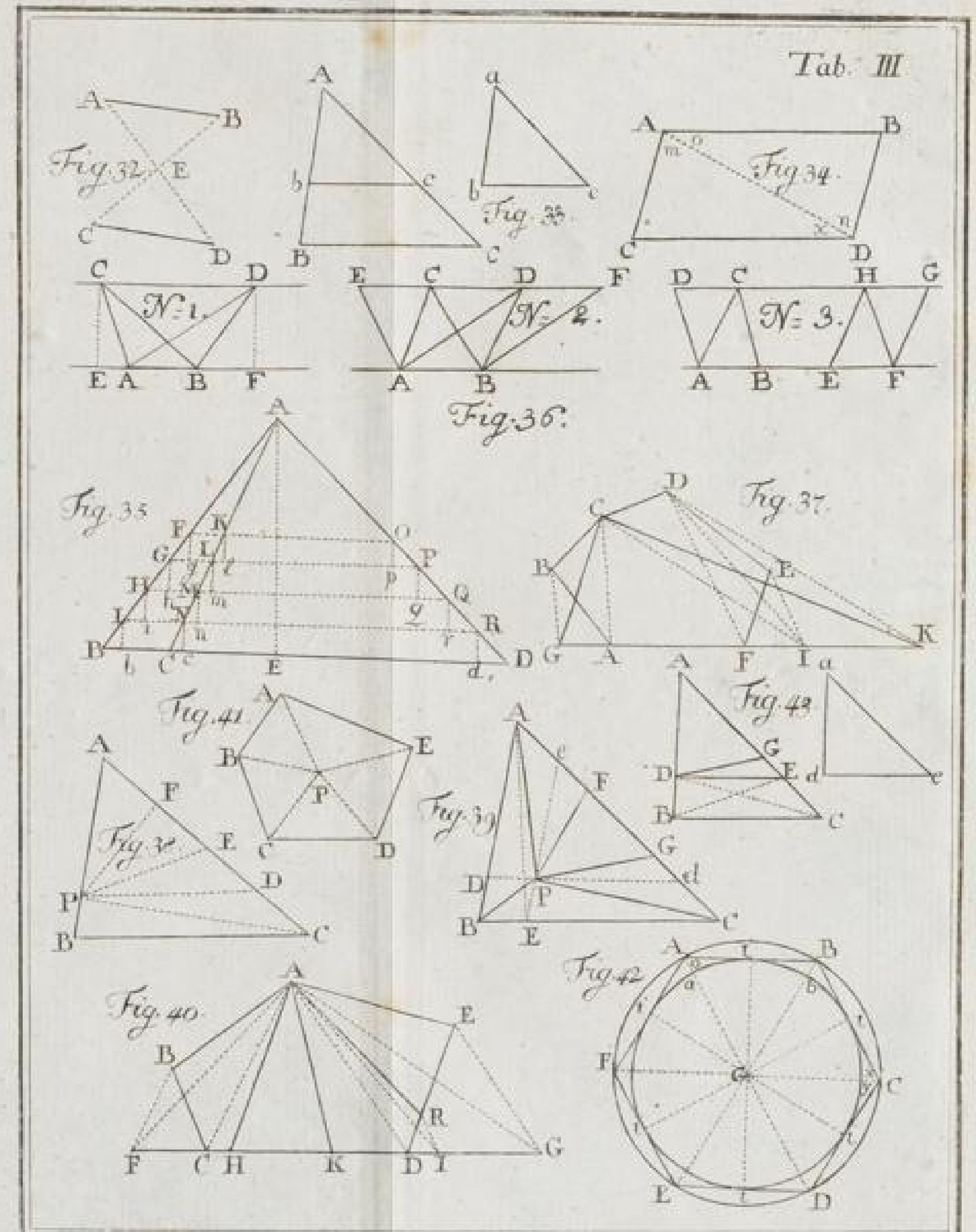


P. Mako Geometr.

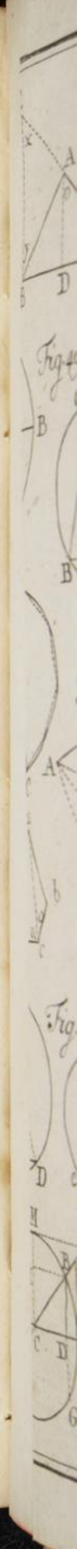
Tab. III

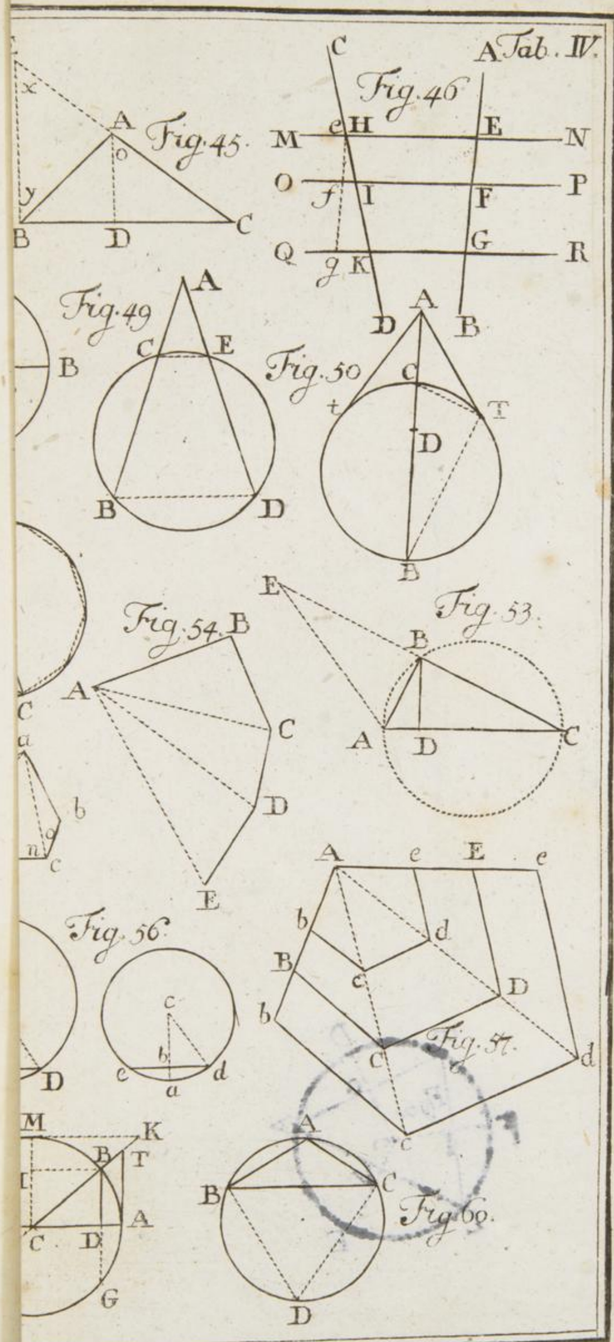


P. Mako Geom.

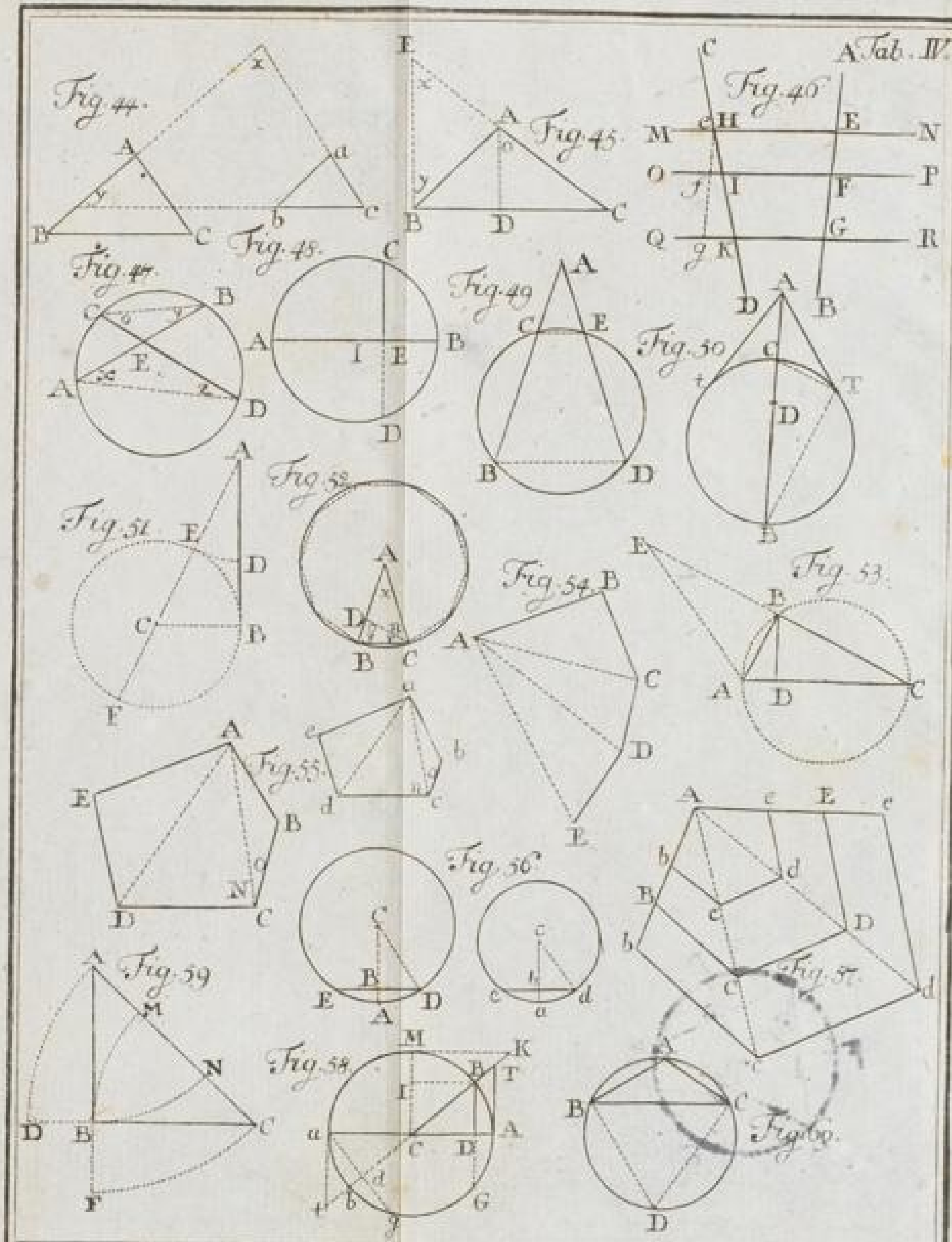

Tab. III
Fig. 32
Fig. 33
Fig. 34
N: 1.
N: 2.
N: 3.
Fig. 36.
Fig. 35
Fig. 37.
Fig. 41
Fig. 43
Fig. 38
Fig. 39
Fig. 40
Fig. 42

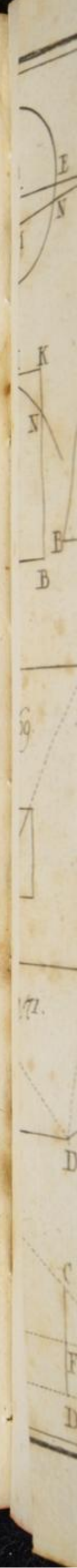
P. Mako Geom.



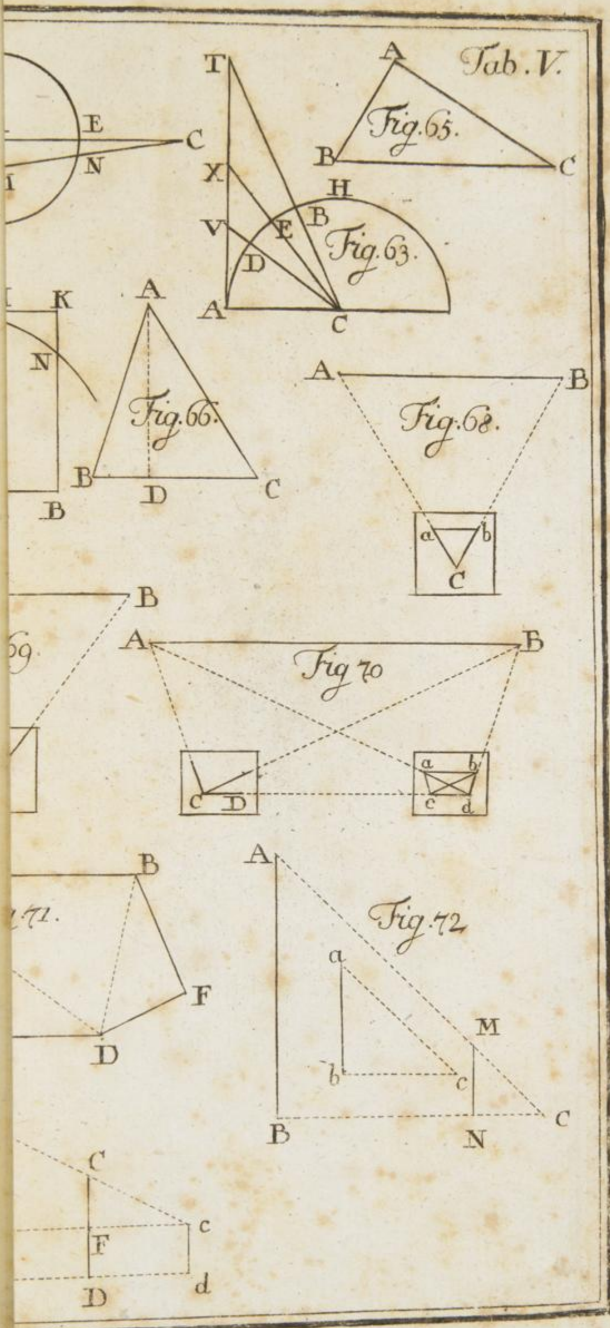


P. Mako Geometr.

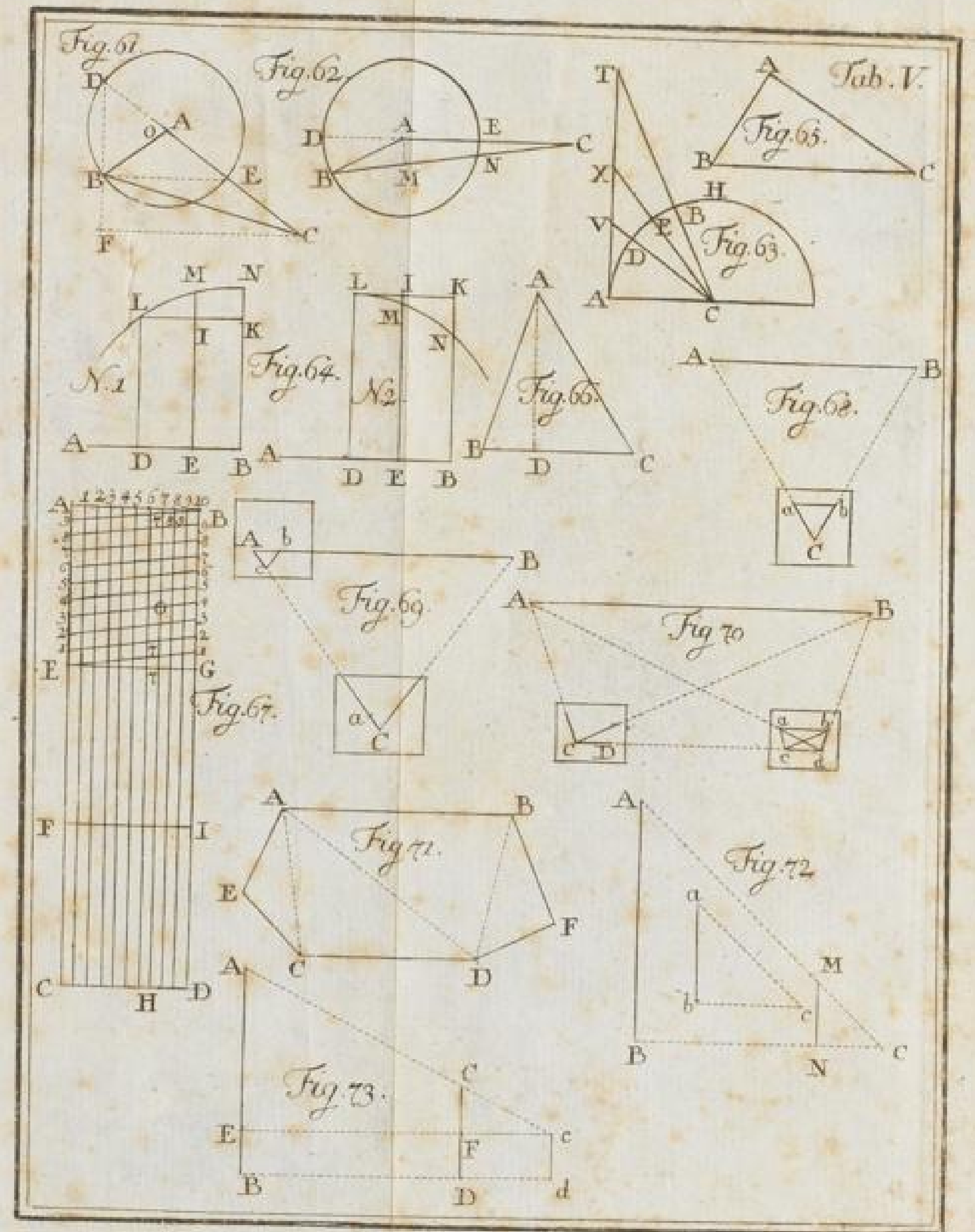

Tab. IV
Fig. 44
Fig. 45
Fig. 46
Fig. 47
Fig. 48
Fig. 49
Fig. 50
Fig. 51
Fig. 52
Fig. 53
Fig. 54
Fig. 55
Fig. 56
Fig. 57
Fig. 58
Fig. 59
Fig. 60



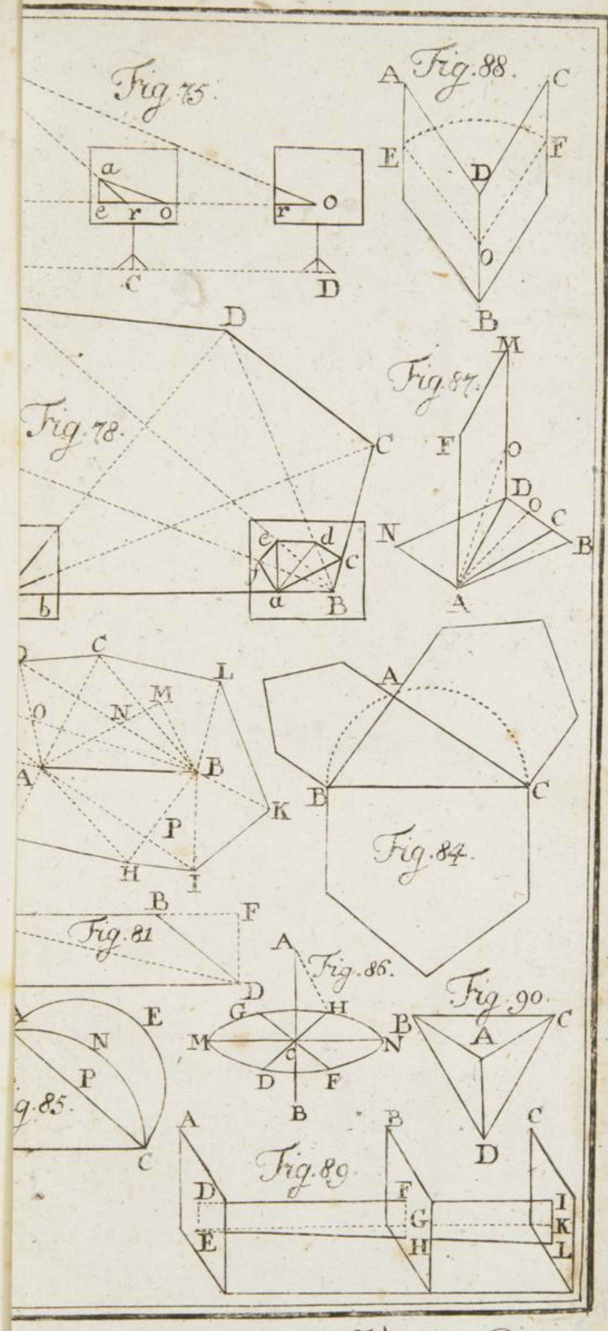
Tab. V.



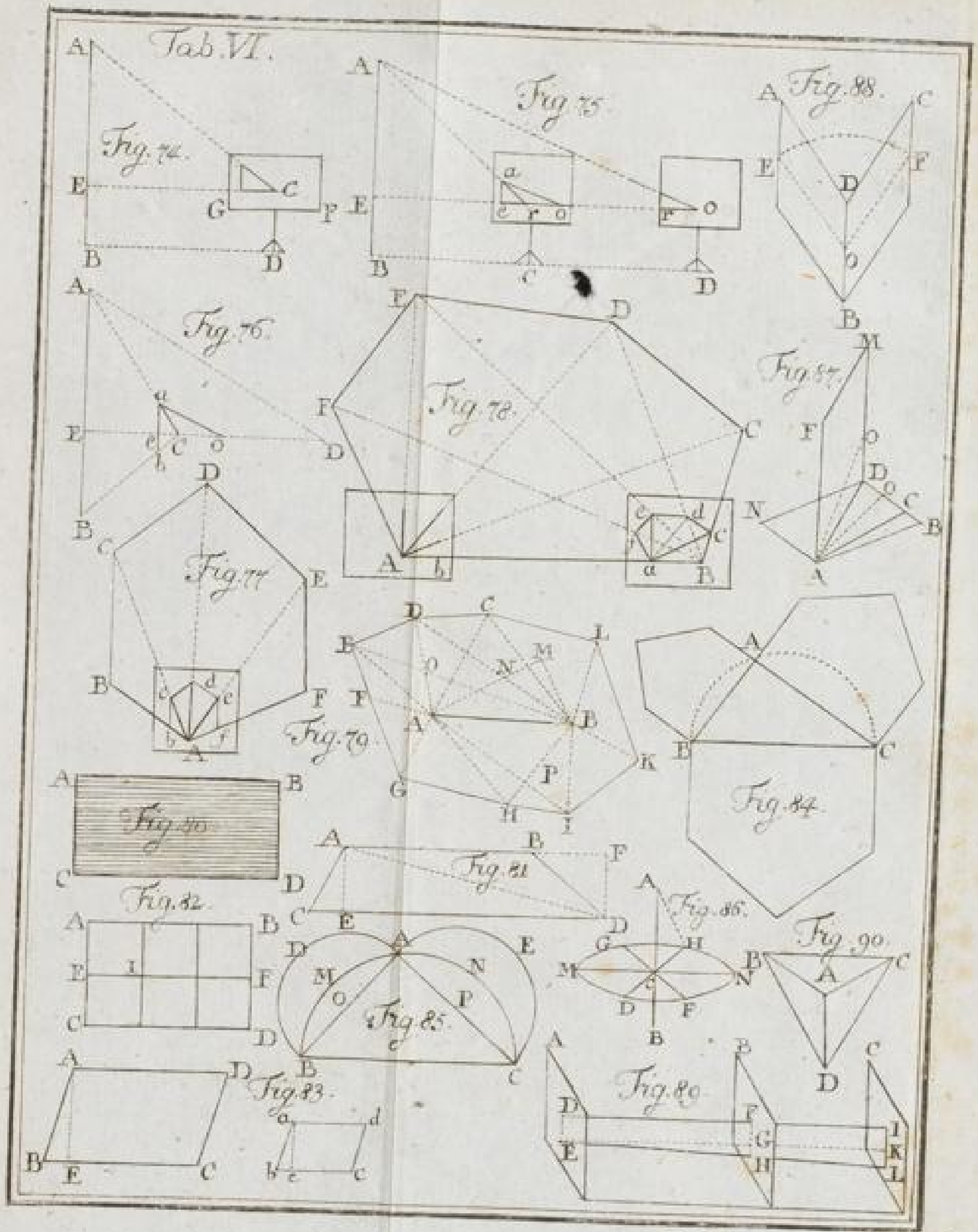
P. Mako Geometr.



P. Mako Geometr.



P. Mako Geom.


Tab. VI.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.

P. Mako Geom.

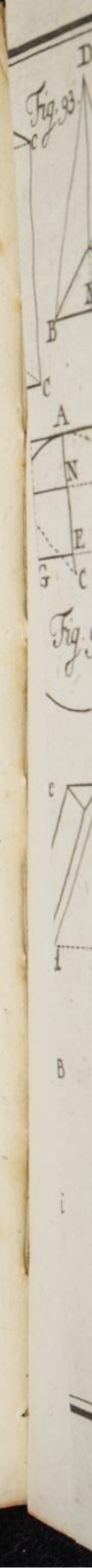
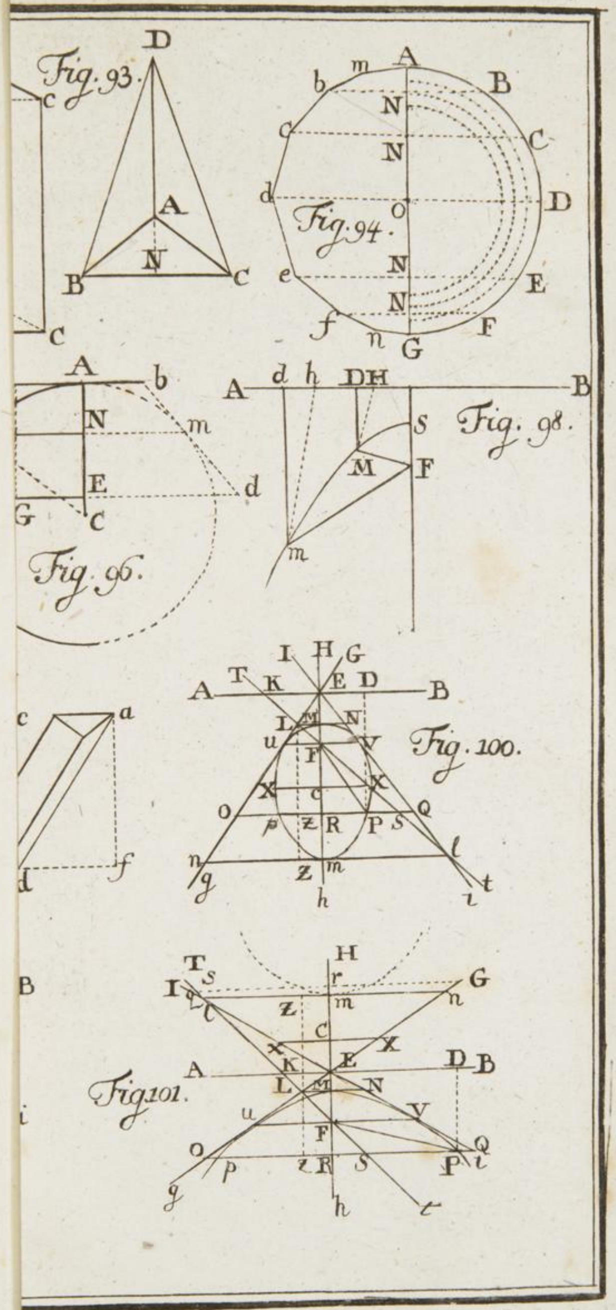
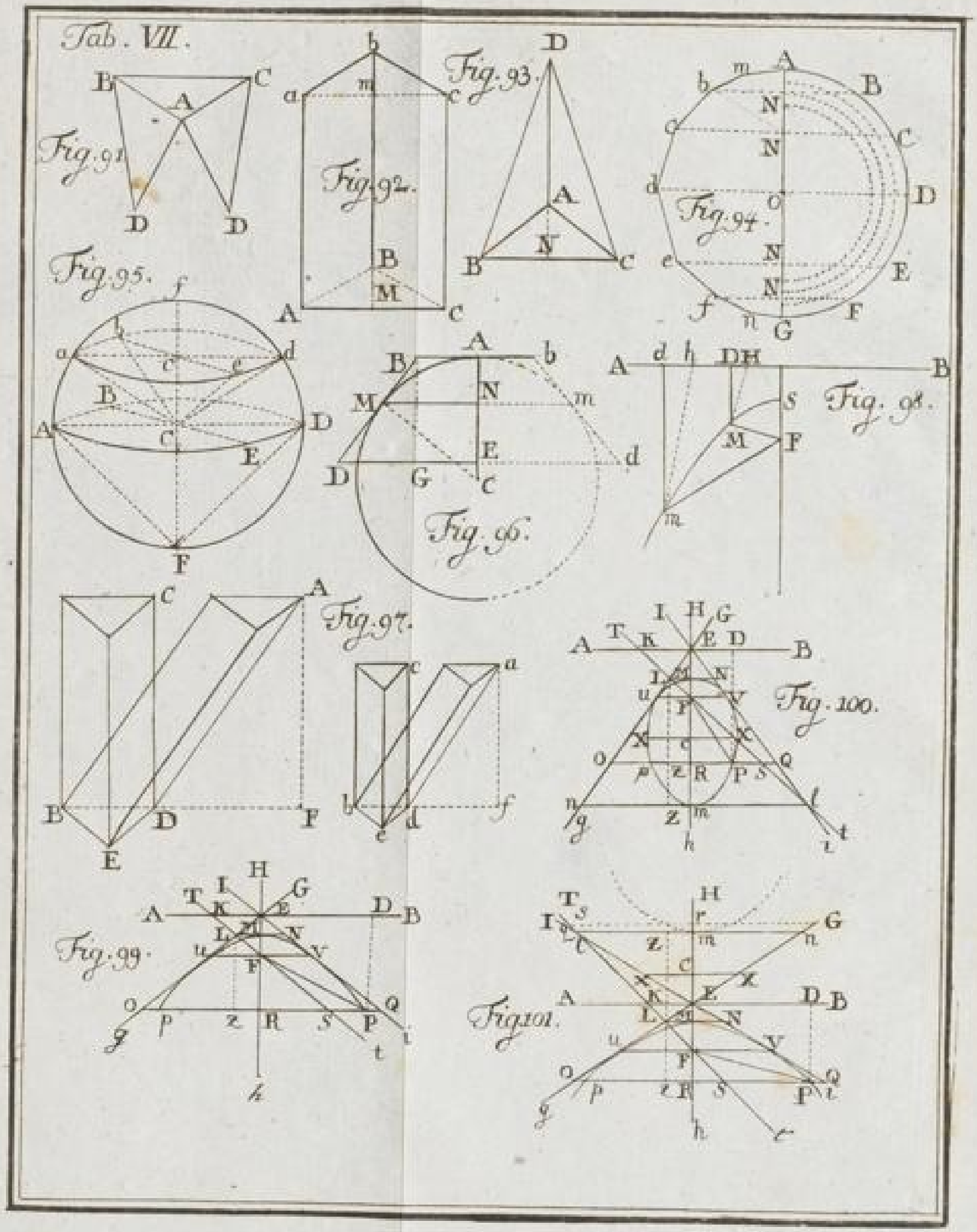


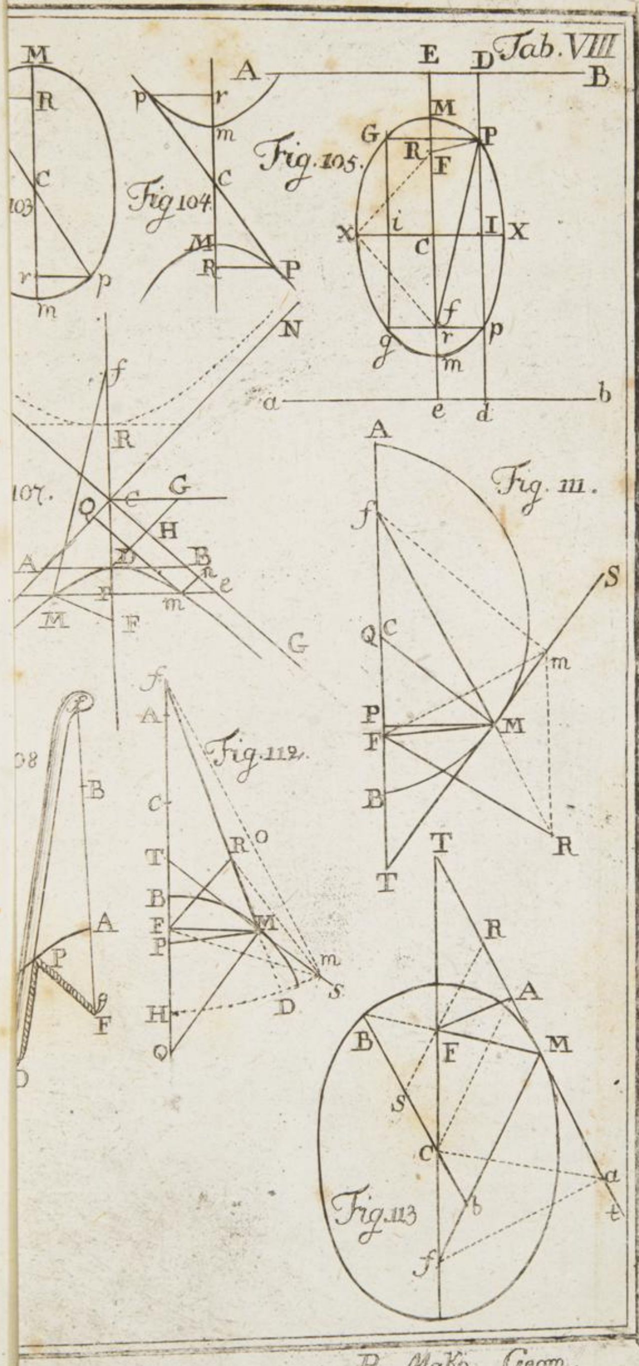
Fig. 93



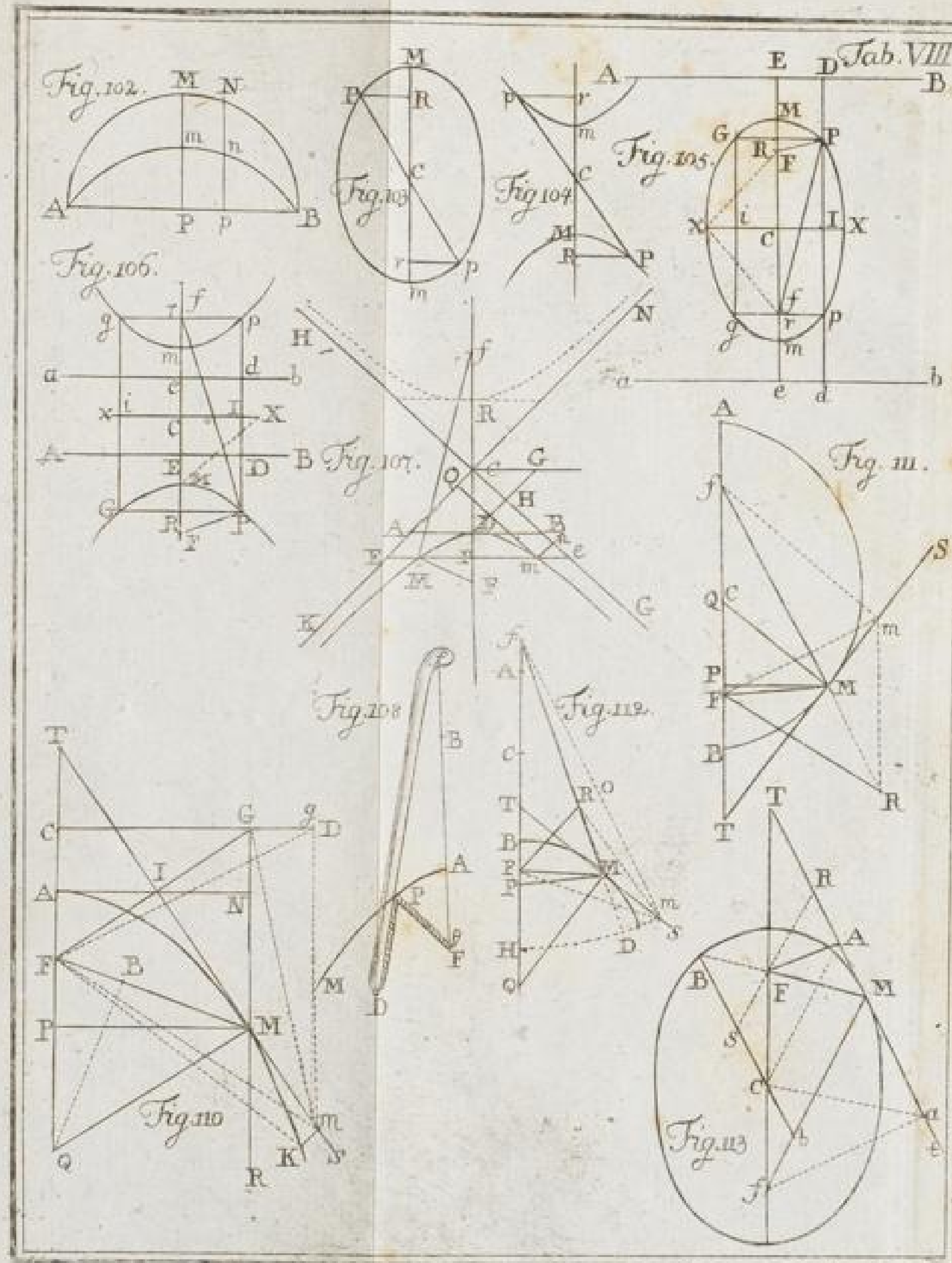
P. Mako. Geom.


Tab. VII.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.

P. Mako Geom.

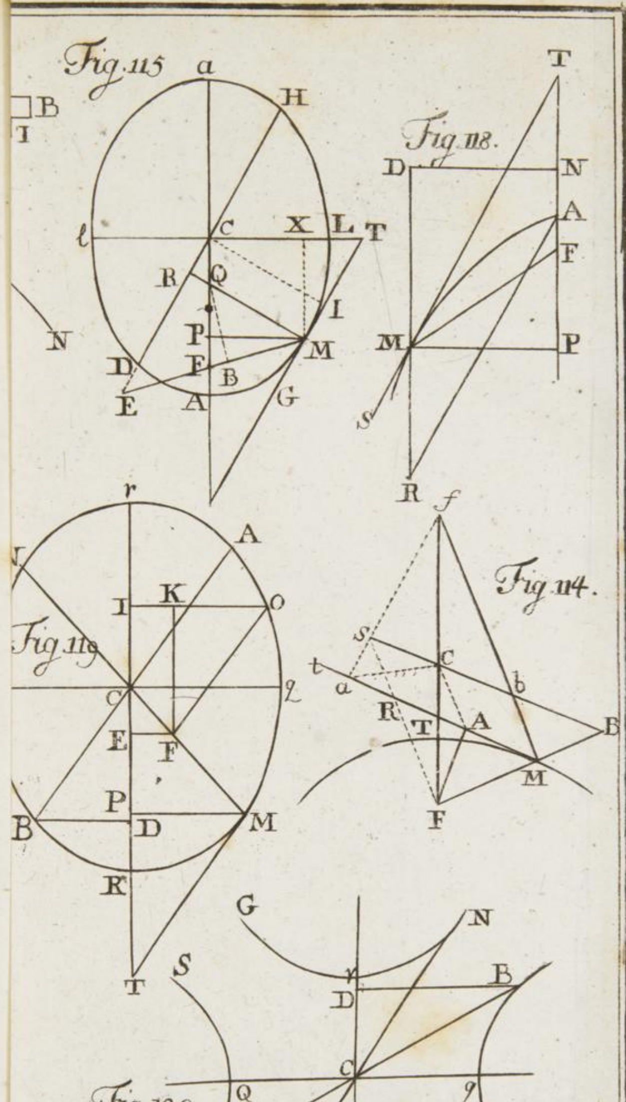


P. Mako Geom.

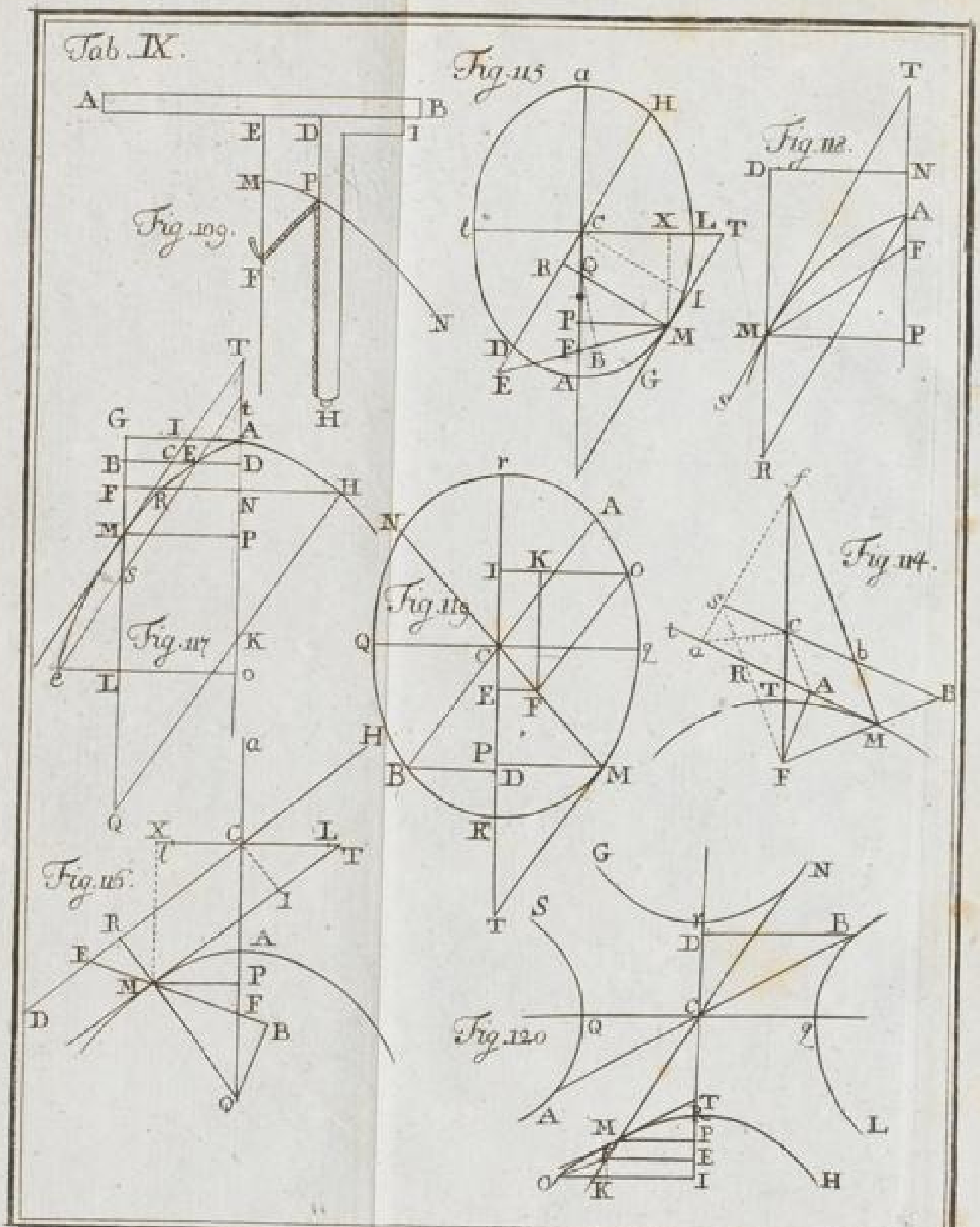

Tab. VIII
Fig. 102.
Fig. 103
Fig. 104
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108
Fig. 110
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113

P. Mako Geom.


Fig. 115
Fig. 116

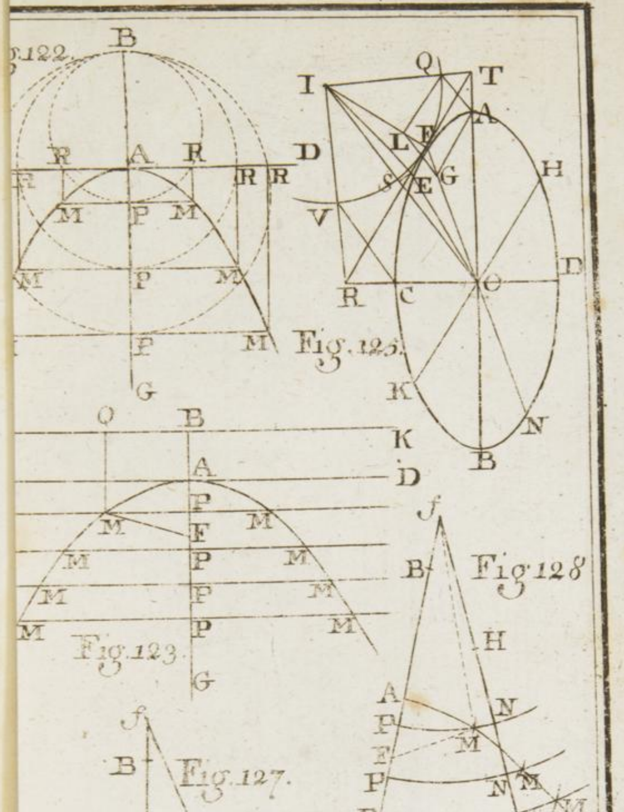


P. Mako Geom.

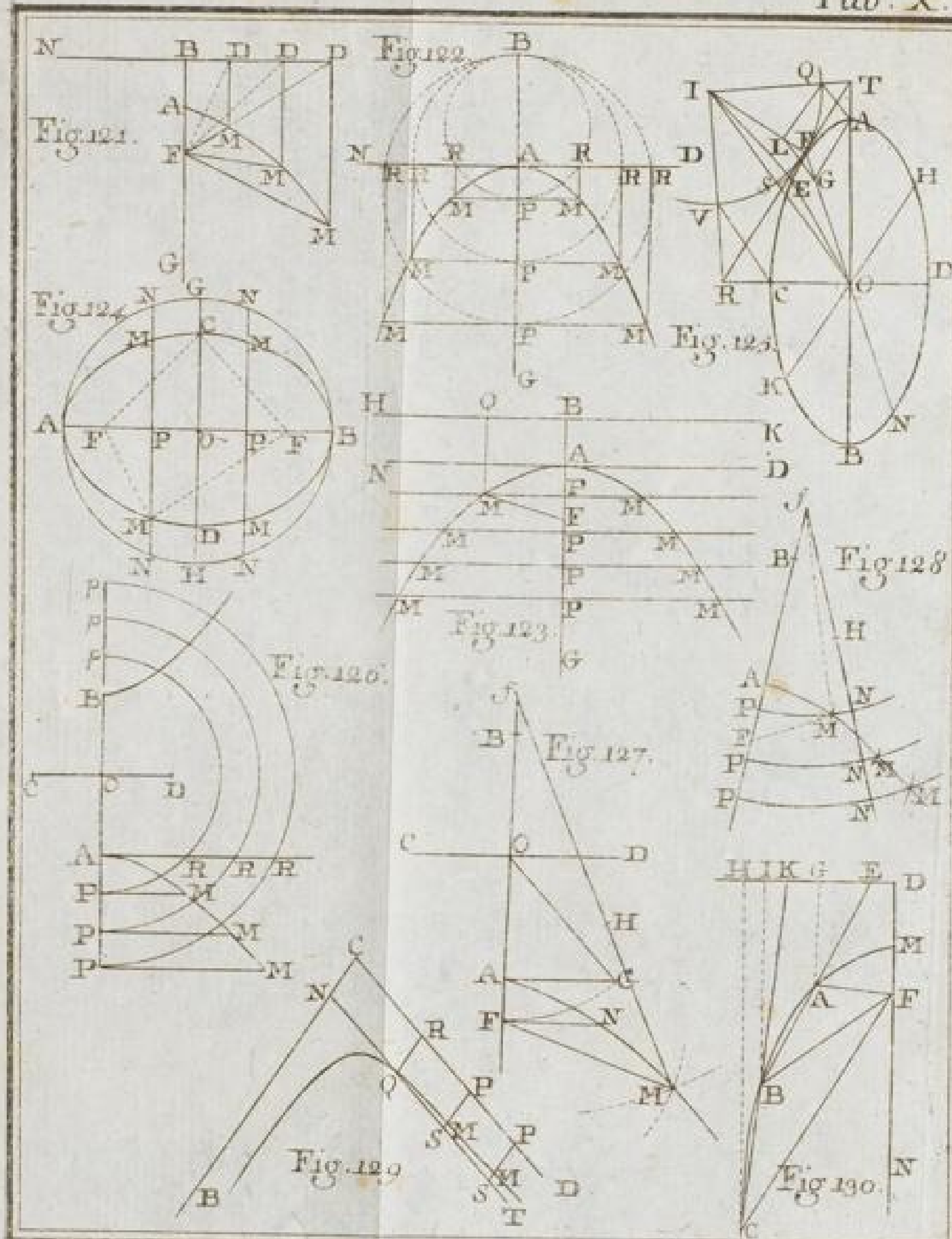

Tab. IX.
Fig. 109.
Fig. 115
Fig. 118.
Fig. 117
Fig. 119
Fig. 114.
Fig. 116.
Fig. 120

P. Mako Geom.

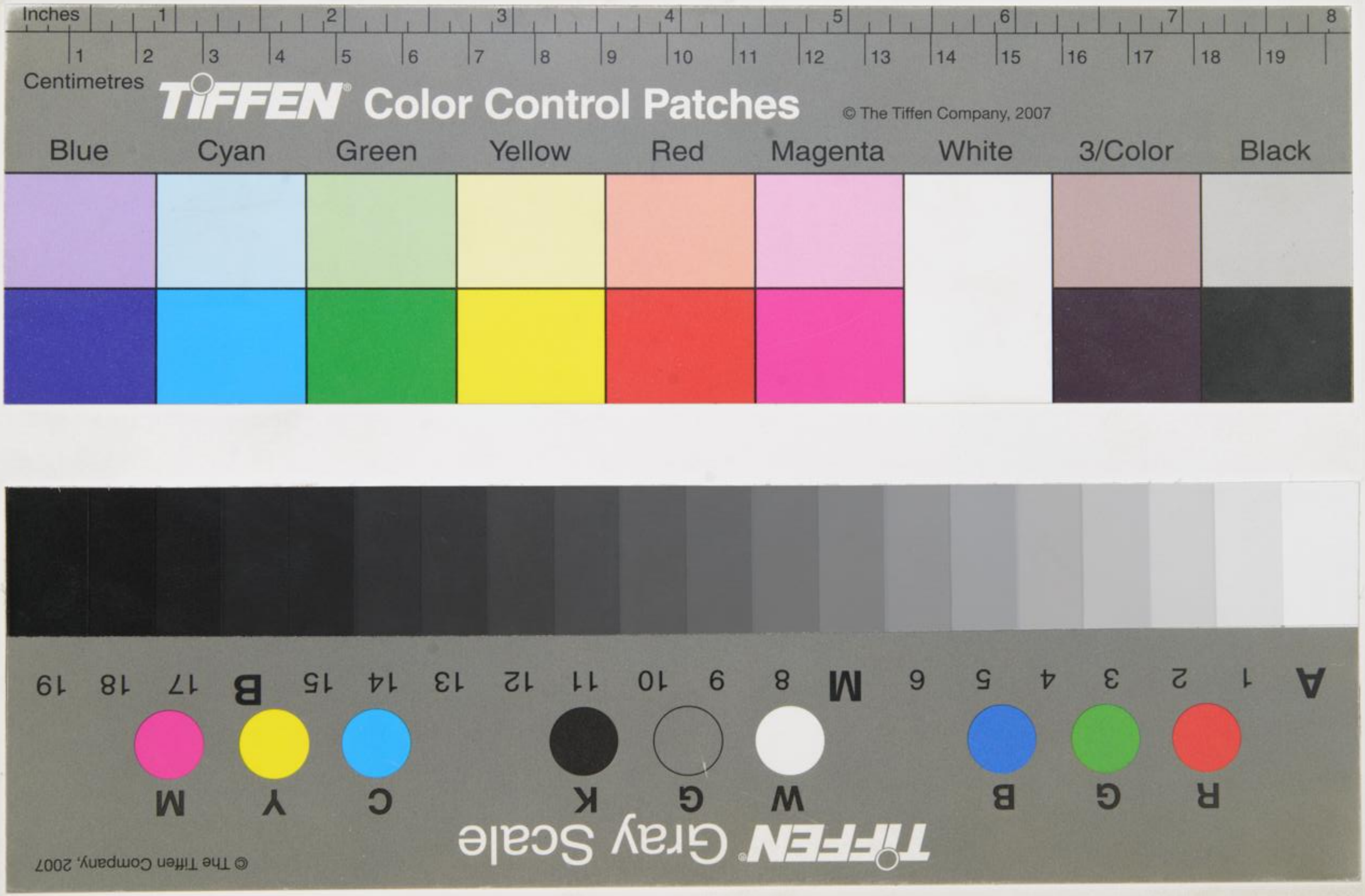
Tab. X.



P. Makó Geometr.



P. Makó Geometr.


Inches
Centimetres
TIFFEN Color Control Patches
© The Tiffen Company, 2007
Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black
TIFFEN Gray Scale
© The Tiffen Company, 2007