COMPENDIUM GEOMETRIAE ELEMENTARIS,

QUOD

IN USUM

AUDITORUM SUORUM

EDIDIT

FRANCISCUS TRENTEL
In Alma Universitate Wirceburgensi
Professor Matheseos.

WIRCEBURGI,
Typis JOANNIS JACOBI STAHEL,
Univers. Bibliop.

1775.

CAPUT I.

De figuris planis.

ARTICULUS I.

Aequalitas figurarum planarum.

1. DEFINITIO. *Geometria* eſt ſcientia demonſtrans proprietates quantitatis continuæ, ſeu extenſæ. Quamvis autem recte ab aliis dividatur practica a theoretica: hic tamen utraque conjuncta eſt, ut theoriæ ſeveritas jucunda praxeos utilitate mitigetur. Porro extenſio quantitatis vel eſt *longa* tantum, & dicitur *linea*: vel eſt *longa* & *lata* tantum, & vocatur *ſuperficies*: vel eſt *longa*, *lata* & *profunda*, eritque *Corpus* vel *ſolidum*. Initium omnis extenſionis eſt *punctum*, cujus pars nulla eſt. Ex fluxu puncti generatur linea: ex fluxu lineæ ſuperficies: ex fluxu ſuperficiei ſolidum. *Linea recta*, quam ſimpliciter *rectam* vocabimus, nullum habet flexum: *linea curva* eſt, quæ a recta deficit. *Superficies plana*, ſeu ſimpliciter *planum* eſt, cujus nulla pars aut altior altera eſt, aut magis depreſſa: *convexa*, qualis eſt globi: *concava*, qualis videtur eſſe Cœli.

2. COROLLARIA. I. Recta ab uno puncto ad aliud non niſi unica duci poteſt.

II. Duo puncta determinant rectæ poſitionem.

III. Recta ſab uno puncto ad aliud eſt via breviſſima. Diſtantiam igitur duorum punctorum recta metitur.

3. PROBLEMATA. I. *Examinare regulam*, ſeu inſtrumentum, cujus ope in charta ducitur recta. Ab uno ad aliud punctum ducatur ope regulæ recta: converſa dein regula iisdem punctis admoveatur, ducaturque iterum linea; quæ ſi cum priore ubique conveniat, regula erit adcurata.

II. *Ducere in campo rectam.* Ducitur hæc ope funis, aut catenæ tenſæ: vel deſignatur baculis terræ ita infixis, ut oculo admoto baculi ſequentes a prioribus tegantur. * Inſtrumentorum geometricorum conſtructio & uſus oculis potius exhiberi, quam verbis deſcribi debet.

4. DEFINITIO. *Circulus* eſt ſpatium curva linea clauſum, in quo omnes rectæ ex eodem puncto ad curvam ductæ ſunt æquales. Generatur circulus, dum, figura 1, recta AB circa medium punctum C gyratur, donec A perveniat in B, & B in A. Curva ADBE, per puncta A & B deſcripta, vocatur circuli *peripheria:* punctum C *centrum:* recta AB *diameter*; cumque recta quævis DE per centrum tranſiens ſit ipſa AB, erit quævis recta per centrum utrinque ad peripheriam ducta diameter; eruntque ejusdem circuli diametri omnes æquales: recta CA, CD, CB &c. ex centro ad peripheriam ducta eſt *ſemidiameter* ſeu *radius*; igitur radii ejusdem circuli ſunt æquales: *chorda* eſt quævis recta AE, utrinque terminata in peripheria: *arcus* eſt pars peripheriæ AE, vel ADBE, cui chorda AE *ſubtenditur: ſegmentum* circuli eſt pars circuli comprehenſa inter chordam & arcum; eſtque *majus*, uti ADBE, vel *minus*, uti AE: *ſector* circuli eſt ſpatium duobus radiis & arcu comprehenſum ACD: *tangens* eſt recta TS, attingens peripheriam in unico puncto D: *ſecans* eſt quævis recta dividens circulum in duas partes: *circuli concentrici* habent idem centrum C, fig. 2: *excentrici*, fig. 3, habent diverſa centra C & *c*.

5. AXIOMATA, præter allata in Algebra, ſunt: I. Quæ ſibi impoſita congruunt, ſunt æqualia. Congruere autem dicuntur, dum unum alterum nec excedit, nec ab altero exceditur.

II. Quo-

II. Quorum dimidia ſunt æqualia, ea tota ſunt æqualia: & viciſſim. Idem verum eſt de quibusvis partibus ſimilibus, earumque totis.

6. THEOREMA. *Diameter dividit circulum in duas partes æquales.* fig. 4.

DEMONSTRATIO. Imponatur pars ABI alteri ABO: nullum punctum cadet aut ſupra in m, aut infra in n: ducta enim recta Cm, erit radius circuli CO$=$C$m=$Cn; id eſt, pars æqualis toti: ergo pars ABI congruit parti ABO: ergo æquantur.

7. THEOREMA. *Duæ rectæ nequeunt habere ſegmentum commune.* fig. 5.

DEMONSTRATIO. Sint rectæ AB & AD, quarum ſit commune ſegmentum AC: ex C tanquam centro ducatur circulus, erunt ab & ad diametri: igitur (6) $x+y=z$; & $z+x=y$; unde $y=z-x=z+x$; quod abſurdum eſt.

8. DEFINITIO. *Angulus* rectilineus eſt duarum rectarum in uno puncto ſibi occurrentium ad ſe invicem inclinatio, E. g., fig. 9. angulus A, B, C &c. Dum, fig. 6. plures anguli in eodem puncto O concurrunt, quilibet tribus literis indicatur, quarum media ſit in illo puncto; E. g. angulus AOD, BOE, BOD. Quodſi ſingulis hujumodi augulis inſcriptæ ſint ſingulæ literulæ, his ſolis indicantur; ita eſt augulus AOD$=m$, BOE$=r$, BOD$=n+r$ &c.

Porro dum recta DO alteri AB ita inſiſtit, ut anguli contigui AOD, BOD fiant æquales, hi anguli vocantur *recti*, & linea DO *perpendicularis* ad AB. Angulus r minor recto eſt *acutus*: angulus v major recto eſt *obtuſus*.

9. HYPOTHESIS. Cujusvis circuli peripheria dividitur in 360 *gradus*, ſeu partes æquales: quivis gradus in 60 *minuta prima*: quodlibet horum in 60 *minuta ſecunda*, & ſic deinceps. Aſtronomi præterea 30 gradus vocant *ſignum*. Exprimuntur hæ partes hoc modo: $3^{s}.\ 15^{o}.\ \overset{\prime}{30}.\ \overset{\prime\prime}{24}.\ \overset{\prime\prime\prime}{8}.$ id eſt: tria ſigna: 15 gradus: 30 minuta prima: 24 minuta ſecunda: 8 minuta tertia. Unde patet, quid ſit arcus E. g. 60 graduum &c.

10. COROLLARIA I. Fig. 2. Circulorum concentricorum arcus AE & *ae* ſunt totidem graduum. Sit enim AE = EF = FB = 60°, erit quivis horum arcuum ſexta pars peripheriæ: Congruent autem ſectores AEC, EFC, FBC: ergo & arcus *ae*, *ef*, *fb*: cum ergo omnes ſimul ſint dimidia peripheria, quivis erit peripheriæ ſexta pars = 60°.

II. Cum inclinatio duarum rectarum AC, EC exhiberi poſſit per arcum AE vel *ae*: anguli cujusvis ACE *menſura* recte dicetur arcus ex puncto C, in quo rectæ concurrunt, quocunque radio ductus: ita anguli ACE menſura erit arcus AE, vel *ae*; eritque angulus totidem graduum, quot arcus, ejus menſura.

III. Fig. 6. Cum ſit angulus rectus AOD = BOD, utriusque autem menſura ſit ſemipheria = 180°: erit menſura anguli recti quadrans peripheriæ = 90°. Quodſi rectæ AB inſiſtat altera FO ita, ut anguli contigui *s* & *v* fiant inæquales: amborum tamen menſura erit ſemiperipheria = 180°. Demum ſi rectæ AB puncto eidem O inſiſtant plures rectæ DO, EO, erit menſura omnium angulorum ſimul ſumptorum *m*, *n*, *r* iterum ſemiperipheria = 180°. Unde generaliter recta rectæ inſiſtens facit duos angulos aut rectos, aut duobus rectis æquales. Et ſi eidem rectæ puncto inſiſtant quotcunque rectæ, omnes anguli ſimul ſunt æquales duobus rectis. Quodſi ex eodem puncto O quaqua verſum ducantur plures rectæ OA, OD, OE, OB, OF; erunt omnes anguli ſimul, *m*, *n*, *r*, *s*, *v*, æquales quatuor rectis, cum eorum menſura ſit integra peripheria.

11. PROBLEMATA. I. Fig. 9. *Angulo dato A conſtituere æqualem a.* Ex A centro ducatur quovis radio A*m* arcus *mn*: eodem radio ex *a* centro ducatur arcus, in quo circino abſcindatur ex *r* punctum *s*, ut ſit *rs* = *mn*: erit, recta per *a* & *s* ducta, angulus *a* = A; cum utriusque menſura ſit æqualis, *mn* = *rs*. In campo pro radio aſſumitur funis, catena, vel pertica. Conſtituitur etiam in campo angulus ope ſemicirculi in gradus diviſi, & inſtructi regula mobili cum dioptris. &c.

II. *Metiri angulum datum, quot ſit graduum.* Menſura hæc in charta ſumitur ope minoris ſemicirculi in gradus rite diviſi, qui vulgo *transporteur* vocatur. In campo capi-

capitur menſura anguli ſemicirculo regula mobili inſtructo &c. Aſtronomi adcuratius capiunt angulos ope *quadrantis aſtronimici*; quod inſtrumentum etiam, ad praxes majoris momenti, in campo adhibetur.

12. THEOREMA. I. Fig. 7. *Si duæ rectæ, AB, CD, ſe ſecuerint, erunt anguli ad verticem O oppoſiti æquales*: $m = n$, $r = s$. II. Fig. 8. *Viciſſim ſi ex rectæ CD puncto O ducantur duæ rectæ OA, OB, ſitque angulus* $m = n$; *erit AOB una recta.*

DEMONSTRATIO I. Fig. 7. Eſt $m + r = 180^\circ$ (10. III.) uti & $n + r = 180^\circ$: unde $m + r = n + r$: ergo ablato communi r, manet $m = n$. Ita $r + m = 180^\circ = s + m$: ergo $r = s$.

II. Fig. 8. Sit AOE una recta: erit, ex I, $m = n + s$; & ex hypotheſi eſt $m = n$: ergo $n = n + s$, pars æqualis toti: igitur nulla AOE, ſed ſola AOB eſt una recta.

13. DEFINITIO. *Figura* proprie dicitur ſpatium undique clauſum, vel unica linea curva, uti circulus: vel una recta eſt altera curva, uti ſemicirculus: vel ſolis lineis rectis, & vocatur *polygonum*. *Polygonum regulare* eſt, cujus omnes rectæ, quæ *latera* vocantur, & omnes anguli ſunt æquales: ſecus eſt *irregulare*. *Polygonum circulo inſcriptum* eſt, cujus omnia latera ſunt chordæ circuli: *circulo circumſcriptum* eſt, cujus omnia latera tangunt circulum. Ex his intelligitur, quid ſit *circulus polygono in - & circumſcriptus*. Polygonum a numero laterum dicitur *triangulum*, *quadrilaterum*, *pentagonum*, *hexagonum* &c. Trianguli porro diviſio varia eſt:

I. *Ratione angulorum*. *Triangulum rectangulum*, Fig. 11. eſt ADC, quod unum angulum m rectum habet. Latus AC angulo recto oppoſitum vocatur *hypotenuſa*, reliqua latera dicuntur *crura*: crus alterutrum, E. g. AD ſi dicatur *baſis*, erit alterum DC cathetus; vel viciſſim. Fig. 25. *Triangulum obtusangulum*, ſeu *amblygonum* ABC habet unum angulum A obtuſum. Fig. 9. *Triangulum acutangulum*, ſeu *oxygonum* ABC habet omnes angulos acutos. Fig. 12. *Triangulum æquiangulum* ABC habet omnes angulos æquales. Fig. 9. *Triangula mutuo æquiangula* vocantur, in quibus ſinguli anguli ſingulis ſunt æquales, $A = a$, $B = b$, $C = c$.

II. *Ratione laterum.* Fig. 11. *Triangulum iſoſceles*, ſeu *æquicrurum* ABC habet duo crura AC, BC æqualia: latus tertium AB eſt baſis. Fig. 12. *Triangulum æquilaterum*, ſeu *iſopleurum* ABC habet tria latera æqualia. Omne igitur æquilaterum eſt iſoſceles, non viciſſim. Fig. 9. *Triangulum ſcalenum* ABC habet tria latera inæqualia. Demum Fig. 9. *triangula mutuo æquilatera* ABC, *abc* ſunt, quorum ſingula latera ſingulis ſunt æqualia; AB$=$*ab*, AC$=$*ac*, BC$=$*bc*. Porro evidens eſt, in quovis triangulo duo quævis latera ſimul eſſe majora tertio.

14. THEOREMA. Fig. 9. *Si in duobus triangulis, ABC, abc, fuerit unus angulus uni æqualis*, A$=$*a*, *& bina circa hunc angulum latera mutuo æqualia*, *AB*$=$*ab*, *AC*$=$*ac*: I *erunt tota triangula æqualia*: II *latus tertium erit æquale tertio*, *BC*$=$*bc*: III *anguli æqualibus lateribus oppoſiti æquabuntur*, *B*$=$*b*, C$=$*c*.

DEMONSTRATIO. I. Intelligatur latus *ab* imponi lateri AB, ut *a* cadat in A, *b* in B: neceſſario latus *ac* cadet in AC, ob A$=$*a*: cumque ſit *ac*$=$AC, punctum *c* cadet in C: igitur tota triangula congruunt, & æquantur. (5. I.) Igitur & II & III vera ſunt.

15. PROBLEMATA. I. *Dato triangulo ABC*, fig. 9. *conſtruere aliud æquale.* Fiat *ab*$=$AB: fiat & angulus *a*$=$A (11. I.) & *ac*$=$AC, erit *abc*$=$ABC (14. I.)

II. Fig. 10. *Metiri diſtantiam horizontalem AB duorum locorum A & B, quando ex A ad B non patet acceſſus.* Aſſumatur punctum O, ex quo pateat acceſſus ad A & B: defixo in O baculo menſuretur AO, quæ producatur in D, ut ſit AO$=$OD, & figatur in D baculus: menſuretur & BO, quæ producatur in C, ut ſit BO$=$OC: menſuretur denique recta CD, quæ erit æqualis quæſitæ AB. Nam in triangulis ABO, CDO, eſt $m=n$ (12. I.) AO$=$DO, uti BO$=$CO: igitur AB$=$CD (14. III.)

16. THEOREMA. Fig. 9. *Si duo triangula habuerint unum latus uni æquale*, *AB*$=$*ab*, *binosque angulos huic lateri adjacentes mutuo æquales*, *A*$=$*a*, *B*$=$*b*: I *tota erunt æqualia*: & II *angulus tertius erit æqualis tertio*, C$=$*c*: & III *latera æqualibus angulis oppoſita æquabuntur*, *AC*$=$*ac*, *BC*$=$*bc*.

DEMON-

DEMONSTRATIO. I. Latus *ab* impoſitum æquali AB congruet: cadetque, ob æqualitatem angulorum, latus *ac* in AC, *bc* in BC: ergo punctum *c* in C: igitur tota congruunt, & æquantur. Unde & II & III patent.

17. PROBLEMATA. I. Fig. 9. *Dato triangulo ABC aliud abc æquale conſtruere.* Fiat $ab = AB$: angulus $a = A$, $b = B$: erit $abc = ABC$ (16. I.)

II. Fig. 10. *Metiri diſtantiam locorum A & B horizontalem, quando ad B non patet ullus acceſſus.* Figatur in aliquo puncto O baculus, ex quo pateat acceſſus ad A, & proſpectus ad B: Menſuretur recta AO, uti & angulus A & m: producatur recta AO in D, ut fiat $AO = OD$: fiat angulus $D = A$: producatur DC, donec ex C videatur in una recta baculus O & locus B: erit recta menſurata $CD = AB$. In triangulis enim AOB, COD eſt $AO = OD$, $m = n$, $A = D$: ergo $DC = AB$ (16. III.)

18. THEOREMA. Fig. 11. *Trianguli iſoſcelis ABC anguli ad baſin ſunt æquales, $A = B$.*

DEMONSTRATIO. Intelligatur ex vertice C ducta recta CD biſecans angulum C: erit $o = i$, $AC = BC$, CD latus commune: ergo triangulum $ADC = BDC$, & angulus $A = B$ (14. I. III.)

19. COROLLARIA. I. Igitur eſt etiam $AD = BD$, & $m = n$ (14. II. III.) ſive: in iſoſcele recta CD biſecans angulum C, biſecat & baſin AB, & ad hanc eſt perpendicularis.

II. In Iſoſcele recta CD biſecans baſin biſecat totum triangulum, & eſt ad baſin perpendicularis; erit enim $AD = BD$, $AC = BC$, $A = B$: ergo eſt $ADC = BDC$, & $m = n$ (14. I. III.)

III. Triangulum æquilaterum, fig. 12. eſt æquiangulum; cum quodvis latus poſſit ſumi pro baſi iſoſceleos.

20. PROBLEMATA. I. Fig. 11. *Supra baſin datam AB conſtituere triangulum iſoſceles.* Quovis radio, qui dimidia baſi major ſit, ex A & B ceu centris deſcribantur arcus ſe interſecantes in C; erit enim $AC = BC$. * In campo ſumantur duo funes AC, BC æquales &c.

II. Fig. 12. *Supra basin datam AB constituere triangulum æquilaterum & æquiangulum.* Ex A & B radio, qui basi sit æqualis, describantur, ut prius, arcus in C se intersecantes; erunt AB, AC, BC radii æquales; & $A=B=C$ (19. III.)

21. THEOREMA. *In triangulis mutuo æquilateris anguli æqualibus lateribus oppositi sunt æquales: totaque triangula æquantur.*

DEMONSTRATIO. *Primum*, fig. 13. conjungantur latera duo æqualia BC, *bc*: si AB & *ab* facient unam rectam, erit AaC isosceles, & $A=a$. *Dein* si latera AB, *ab* cadant, ut in figura 14., ducta recta Aa erit AaC isosceles, & $m=n$: erit & in isoscele AaB $i=o$: igitur $m+i=n+o$, seu $A=a$. *Demum* cadant latera AB *ab*, ut in figura 15., ducta recta Aa, erit AaC isosceles, & $A=a$ seu $m+i=n+o$: sed in isoscele AaB est $m=n$: hi ergo ex prioribus subtracti relinquunt $i=o$. Igitur semper anguli oppositi æqualibus lateribus æquantur. Cumque jam & latera & anguli omnes sint mutuo æquales, tota triangula sunt æqualia (14. vel 16.)

22. PROBLEMATA. I. Fig. 9. *Dato triangulo ABC constituere aliud æquale.* Fiat $ab=AB$: Ex *a* radio AC, ex *b* radio BC ducantur arcus se in *c* secantes: erit $abc=ABC$; sunt enim mutuo æquilatera. Eodem modo tria quævis latera, quorum bina semper reliquo sint majora, conjungentur in triangulum.

II. Fig. 9. *Dato angulo A constituere æqualem.* Ducta quavis recta BC, fiat triangulum $abc=ABC$, ex I. erit $a=A$ (21.)

III. Fig. 16. *Datum angulum C bifariam secare.* Ex C abscindantur in cruribus partes æquales CA, CB: ex A & B centris ducantur arcus se in D secantes: recta CD bisecabit angulum C; sunt enim triangula ACD, BCD mutuo æquilatera: ergo $i=o$ (21). Quodsi infra A & B desit spatium pro D: fiant, uti in fig. 17, arcus se in *i* secantes, C*i* bisecabit angulum C. Nam in triangulis mutuo æquilateris AC*i*, BC*i* est $r=s$.

IV. Fig. 16. *Datam rectam AB bisecare.* Ex A & B quovis radio ducantur arcus se in C, & alii vel priore vel alio

alio radio in D interſecantes: recta CD biſecabit rectam AB. Eſt enim $i = o$ in triangulis mutuo æquilateris ACD, BCD: & AC=BC: & CO latus commune: ergo in triangulis AOC, BOC æqualibus eſt AO=BO (14. II). Idem obtinebitur, in fig. 17, per arcus in C & *i* ſe interſecantes: recta enim C*i*D biſecabit angulum C, ex III., ergo & baſin AB in iſoſcele ABC (19. I).

V. Fig. 16. *In dato rectæ AB puncto O erigere perpendicularem.* Ex O abſcindantur utrinque partes rectæ datæ æquales, ut ſit OA=OB: ex centris A & B quovis radio ducantur arcus: e puncto interſectionis C ducta CO erit perpendicularis. In triangulis enim mutuo æquilateris AOC, BOC erit $m = n$.

VI. Fig. 16. *E dato puncto C extra rectam AB poſito ad hanc demittere perpendicularem.* Ex centro C aſſumatur radius, qui ſecet rectam AB in duobus quibuslibet punctis A & B: ex his tanquam centris quovis radio quæratur punctum interſectionis arcuum D: recta CD, vel CO erit perpendicularis, ut patet ex V. Porro rectæ AB, CD ſeſe ad angulos rectos ſecantes vocantur *crux orthogona.* Idem obtinebitur, in fig. 17., ſi pro puncto D quæratur punctum *i*. * Mechanice ducuntur perpendiculares ope *gnomonis* ſeu *normæ*; vel ope ſemicirculi in gradus diviſi. In campo radiis circuli ſubſtituuntur funes &c.

23. DEFINITIO. *Lineæ parallelæ* ſunt rectæ, quæ, quantumcunque productæ, ſemper æqualiter a ſe diſtant. Concipiuntur generari, ſi, in fig. 18., recta AC perpendicularis ad AB intelligatur, ſitu ſemper perpendiculari, moveri ſupra AB; punctum C deſcribet rectam CD parallelam ad AB; cum in quovis puncto eadem ſit diſtantia, nemper perpendicularis AC. * Unde intra easdem parallelas omnes perpendiculares FE, BD &c. ſunt æquales, cum poſſint haberi pro eadem AC promota.

24. LEMMATA. I. Fig. 18. *Perpendicularis EF ad unam parallelam CD eſt etiam talis ad alteram AB.* Fiat EC=CD: ex C & D demittantur CA, DB iterum perpendiculares ad CD: ductis AE, BE, erunt triangula ACE, BDE æqualia; cum ſit angulus rectus C=D, EC=ED, AC=BD (23): igitur & $m = n$, & AE=BE: Cumque ſit rectus $m + o = n + i$, erit $o = i$: EF

eſt

eſt latus commune: ergo etiam eſt triangulum AFE$=$ BFE, & in his $r=s$: ergo FE eſt perpendicularis etiam ad AB.

II. Fig. 19. *Duæ perpendiculares AC, BD abſcindunt ex parallelis partes AB, CD æquales.* Sit enim AB $>$ ED: fiat ergo AE$=$CD: ductis CE, CB, erit triangulum ACE $=$BCD, cum ſit rectus A$=$D, AC$=$BD, & ex hypotheſi AE$=$CD: ergo ob CE$=$CB erit BEC iſoſceles: ducta ergo ex vertice C recta CF ad baſin biſectam, erit ad hanc perpendicularis (19. II.): ergo CF erit etiam perpendicularis ad alteram parallelam CD, ex I: ergo angulus rectus ACD$=$FCD, totum parti; quod abſurdum eſt: igitur non AE, ſed AB æquatur rectæ CD.

25. THEOREMA. Fig. 20. *Recta AE ſecans duas parallelas AB, CD, facit* I. *angulos internos alternos æquales, $m=n$, $r+s=i+o$:* II *externum v æqualem interno ad easdem partes oppoſito n:* III *duos internos ad easdem ſecantis partes $r+s$ & n æquales duobus rectis*: IV. *Et ſi recta, ſecans duas lineas, unum ex his tribus fecerit, erunt duæ illæ lineæ parallelæ.*

DEMONSTRATIO. I. Ductis ex A & D perpendiculis AC, DB, erunt triangula ACD, ABD mutuo æquilatera; cum ſit AC$=$BD (23): AB$=$CD (24. II). AD latus commune: igitur eſt $m=n$: cumque ſit $m+r+s=180^\circ=n+i+o$: erit, ablatis æqualibus m & n, angulus $r+s=i+o$.

II. Eſt $v=m$, $m=n$, ex I: ergo $v=n$.

III. Eſt $m+r+s=180^\circ$: ergo pro m ſubſtituendo æqualem n, erit $n+r+s=180^\circ$. Ita & $m+i+o=180^\circ$.

IV. Fig. 21. Sit *primum* $m=n$: erit CD parallela ad AB; ducatur enim quævis alia KL parallela per punctum I: erit ex I. $m+v=n$; eſt autem, ex hypotheſi, $m=n$: ergo $m=m+v$, pars æqualis toti. Sit *dein* $s=n$; erit iterum CD parallela ad AB; ducatur enim, ut prius, alia KL; erit, ex II, $s+o=n$; ſed ponebatur $s=n$: ergo erit $s=s+o$, pars æqualis toti. Sit demum $n+r+o=180^\circ$; ſi CD non eſt parallela ad AB, erit iterum talis KL: ergo, ex III, erit $n+r=180^\circ$:

erat

erat autem $n+r+o=180^\circ$; igitur $n+r=n+r+o$, pars iterum æqualis toti: igitur nulla KL, ſed ſola CD eſt ad AB parallela.

26. COROLLARIA I. Fig. 20. Duæ perpendiculares AC, BD, inſiſtentes eidem rectæ AB, ſunt inter ſe parallelæ; ſunt enim duo anguli ad easdem partes ſecantis AB æquales duobus rectis. (25. IV).

II. Fig. 22. Rectæ AB, CD, parallelæ ad tertiam KL, ſunt parallelæ inter ſe; ducta enim ſecante, erit $m=n=r=s$: & hinc $m=s$: ergo AB, CD ſunt parallelæ. (24. IV).

27. PROBLEMA. Fig. 23. *Datæ rectæ AB per punctum I ducere parallelam.* Ducta per punctum I quavis obliqua ſecante EF, fiat angulus $m=n$: erit CD quæſita parallela. (25. IV).

28. THEOREMA. Fig. 24. *In quovis triangulo ABC, producto quolibet latere Eg. AC in E, erit angulus externus BCE æqualis duobus internis oppoſitis n & s.* II. *Tres vero anguli interni $i+n+s$ ſimul æquantur duobus rectis.*

DEMONSTRATIO. I. Ducta CD parallela ad AB, eſt $r=s$, $m=n$, ſive angulus BCE$=n+s$.

II. Eſt $i+r+m=180^\circ$: ergo ſubſtituendo æquales erit $i+s+n=180^\circ$.

29. COROLLARIA. I. In triangulo non niſi unicus angulus poteſt eſſe rectus, aut obtuſus: & tum ceteri ſunt acuti.

II. In triangulo rectangulo ſumma reliquorum angulorum æquatur recto: in obtuſangulo ſumma acutorum angulorum eſt minor recto.

III. Cognito uno trianguli angulo, cognoſcitur ſumma reliquorum: & viciſſim.

IV. In Iſoſcele rectangulo quivis angulus ad baſin eſt ſemirectus$=45^\circ$.

V. Si

V. Si in duobus triangulis duo anguli fuerint mutuo æquales, etiam tertius tertio æquabitur. Unde si in duobus triangulis unum latus uni, & duo anguli etiam lateri non adjacentes duobus mutuo fuerint æquales, triangula æquabuntur; cum eo ipso & anguli æquali lateri adjacentes sint æquales. (16).

VI. Si trianguli duo anguli fuerint æquales, erit isosceles; & latera his angulis opposita erunt æqualia. Sit enim, fig. 11., $A=B$; ducta CD ad basin perpendiculari, erit & $m=n$, &, ex V, $o=i$, CD latus commune: ergo erit triangulum $ADC=BDC$, & $AC=BC$. (16. I. III.)

VII. Triangulum igitur æquiangulum est æquilaterum.

VIII. Fig. 11. In isoscele recta CD ad basin perpendicularis & basin & totum triangulum bisecat, est enim $AC=BC$, CD latus commune, cumque sit $A=B$, $m=n$, erit & $o=i$. (14).

IX. In isoscele cognito uno angulo interno vel externo, cognoscuntur singuli reliqui.

X. In isoscele angulus ad verticem externus est duplus cujusvis anguli interni ad basin.

XI. Trianguli æquianguli, aut æquilateri quivis angulus est 60°.

30. PROBLEMATA. I. *Invenire altitudinem solis supra horizontem* $=45^\circ$. Dicitur altitudo hæc arcus circuli e sole ad horizontem ductus ex centro terræ $=45^\circ$. Cum vero terra ad distantiam solis relata non sit, nisi punctum; erit centrum dicti arcus quodlibet terræ punctum. Fiat ergo planum horizontale lapideum vel metallinum, in quo describatur quovis radio circulus: in ejus centro erigatur perpendiculariter stilus æqualis radio. Quando umbra stili attinget peripheriam circuli, erit sol supra horizontem 45° elevatus. Sit, fig. 26. triangulum ABD: AB umbra projecta a stilo æquali BD: ergo angulus $A=n=45^\circ$ (29. IV.) AD erit radius solis, qui productus pertinget ad solem; si igitur ex sole ad lineam horizontalem AB productam ex centro A ducatur arcus, ejus mensura erit angulus $A=n=45^\circ$.

II. Ex

II. *Ex umbra solis projecta in planum horizontale metiri altitudinem perpendicularem quamcunque.* Observetur, ex I, altitudo solis $= 45°$. Cum eo momento longitudo umbræ sit æqualis altitudini stili: idem continget in umbra projecta ab altitudine quavis perpendiculari, E. g. turri, arbore &c. longitudo igitur umbræ mensurata erit ipsa altitudo perpendicularis.

31. THEOREMA. Fig. 25. *In quovis triangulo ABC* I. *angulus major est, qui opponitur lateri majori:* II. *vicissim latus majus est, quod opponitur majori angulo.*

DEMONSTRATIO. I. Sit latus $BC > AB$; erit angulus $A > C$. Fiat enim $BD = BA$: erit in isoscele ABD $m = n$: cumque externus n sit æqualis internis $C + i$, erit n, igitur & $m > C$: ergo potius $m + r$ id est $A > C$.

II. Sit angulus $A > C$: non erit $AB = BC$; foret enim & $A = C$: dein nec erit $AB > BC$; alias latus minus BC opponeretur majori angulo A, contra I: reliquum igitur est, esse $AB < BC$, & $BC > AB$.

32. COROLLARIA. I. In triangulo rectangulo hypotenusa est latus maximum.

II. Fig. 16. Perpendicularis CO ex puncto C ad rectam AB est omnium brevissima, quæ ex eodem puncto C ad eam rectam duci possunt; quævis enim alia CA est hypotenusa. Unica igitur perpendicularis ex puncto C ad rectam AB duci potest.

III. Recte igitur *altitudo trianguli* est perpendicularis ex angulo ad latus oppositum, si opus sit, producendum.

33. DEFINITIO. *Figuræ quadrilateræ variæ sunt:*

I. *Quadratum* est figura quatuor laterum æqualium, cujus anguli omnes sunt recti. Fig. 26. Generatur quadratum, si recta AC ducatur in æqualem AB; hoc est, si AC situ semper perpendiculari peragret æqualem AB. Latus autem quadrati est ejusdem *radix.*

II. *Rhombus* est figura quatuor laterum æqualium, cujus anguli sunt obliqui. Fig. 27.

III. Rectan-

III. *Rectangulum* eſt figura quatuor angulorum rectorum, cujus oppoſita ſolum latera ſunt æqualia. Fig. 28.

IV. *Rhomboides* habet ſolum oppoſita latera æqualia, & angulos obliquos. Fig. 29.

V. *Trapezium* eſt figura quatuor laterum inæqualium Fig. 30.

VI. *Parallelogrammum* eſt figura quadrilatera, cujus oppoſita quævis latera ſunt ad ſe parallela. *Altitudo* parallelogrammi eſt perpendicularis ex una parallela ad oppoſitam. In his omnibus figuris *diagonalis* ſeu *diameter* eſt recta AD ex angulis oppoſitis ducta. Indicantur hæ figuræ per binas literas AD, vel BC diagonaliter oppoſitas.

34. COROLLARIUM. Quadratum, rhombus, rectangulum & rhomboides ſunt parallelogramma. Ducta enim in his omnibus diagonali AD, triangula ABD, ACD ſunt mutuo æquilatera; & $m = n$, $r = s$: igitur (28. IV.) latera oppoſita ſunt parallela.

35. PROBLEMATA. I. Fig. 26. *In data recta AB conſtituere quadratum.* Erigatur in A perpendicularis AC = AB: ex centris B & C, radio AB ducantur arcus ſe in D ſecantes: erit AD quadratum. Ducta enim diagonali AD, in triangulis mutuo æquilateris ABD, ACD eſt $m = n$, $r = s$; cumque ſit rectus A $= n + s$, erit & D $= m + r$ rectus: rectus item erit $m + s$: igitur & C: rectus demum eſt $n + r$: igitur & B. Idem efficies, ſi in A & B erigas perpendiculares AC, BD, æquales rectæ AB; ducta CD erit AD quadratum. Ex quo facile intelligitur modus conſtruendi rectangulum ſub datis lateribus.

II. Fig. 27. *Data recta AB, & angulo A, conſtruere rhombum.* Fiat AC = AB ſub dato angulo A: ex centris B & C ducantur arcus ſe in D ſecantes: ductis BD, CD, erit AD rhombus, ut patet ex definitione (33. II). Patet hinc modus conſtruendi rhomboidem, Fig. 29. datis rectis AB, AC & angulo A.

36. THEOREMA. I. *Quodvis parallelogrammum dividitur per diagonalem in duo triangula æqualia*: II *habetque æqualia latera oppoſita*: *uti* & III *oppoſitos angulos.*

DEMON-

DEMONSTRATIO. I. Fig. 26. 27. 28. 29. Triangula ABD, ACD habent latus AD commune, $m = n$, $r = s$: ergo ſunt æqualia. Igitur &

II. AB = CD, AC = BD: &

III. $m + r = n + s$, ſeu A = D: & hinc (29. V.) B = C.

37. COROLLARIA. I. Parallelæ inter parallelas ſunt æquales; conſtituunt enim parallelogrammum.

II. Duæ rectæ, jungentes duas parallelas æquales, ſunt & ipſæ parallelæ æquales. Fig. 29. ſint AB, CD parallelæ æquales; erunt & tales rectæ AC, BD; ducta enim AD, erit ABD = ACD, ob $m = n$, AB = CD, & AD latus commune: igitur & $r = s$, & hinc AC, BD parallelæ ſunt æquales.

III. Fig. 29. Si duæ rectæ æquales AB, CD jungant duas alias æquales AC, BD; conſtituent parallelogrammum; erunt enim ABD, ACD mutuo æquilatera: ergo $m = n$, $r = s$. &c.

38. PROBLEMATA. I. Fig. 31. *Invenire montis altitudinem perpendicularem IK.* Inſtrumentum, quod *libra* vel *libella aquatica* dicitur, ſtatuatur in G, ut per ejus dioptras videatur vertex montis J: figatur pertica in EF, ut per dioptras libellæ *G* videatur punctum F: ponatur dein libella in L, ut videatur infimum perticæ punctum E: pertica alia perpendiculariter, uti prima, figatur in CD, ut per libellam conſpiciatur punctum D. Eodem modo continuetur operatio usque ad pedem montis A: erit AB = NK, CD = MN, EF = IM, ſunt enim perpendiculares inter parallelas: ergo AB + CD + EF = IK. * Libellæ conſtructionem, & cautelas neceſſarias viva vox melius exponet.

II. *Reſolvere quæſtionem: an in ſuperficie montis poſſint ſtare plures arbores, ædificia &c. quam in plano horizontali monti ſubjecto?* Plurimi fieri id poſſe negant, eo quod arbores, ædificiorum parietes, & alia ejusmodi ſint parallela; patet autem ex ipſa fig. 31., in ſuperficie montis non poſſe erigi plures parallelas, quam in plano AK. Verum in rigore mathematico aliter ſe res habet. Et quidem ad arbores quod attinet, per accidens ob ramorum impedimenta, paucioribus locum eſſe in plano horizontali, quam in ſuperficie montis, figura 32. aperte oſtendit. De ædificiis vero, & ſimilibus videatur figura 33: AD ſit planum horizontale: ſuperficies montis ſit EF: cum ergo ædificiorum parietes excitentur ad filum, cui pondus adpenſum eſt; id filum, ut omnia gravia, ſemper tendet ad centrum terræ C: igitur parietes nequaquam erunt paralleli; cumque AD ſit minus ſpatium, quam EF; duo ædificia AB, BD, poterunt poni in E*m*, F*n*, ut ſit adhuc ſpatium *mn* vacuum &c. Quæ reſolutio facile adplicatur arboribus, plantis &c. In uſu tamen communi collium, & montium non adeo altorum, ratio non habetur; cum differentia a plano horizontali ſit perexigua.

39. THEOREMA. I. *Parallelogramma ejusdem baſeos, intra easdem parallelas, ſunt æqualia.* II. *Uti & ejusmodi triangula.* III. *Triangulum vero ejusdem baſeos & intra easdem parallelas cum parallelogrammo, eſt hujus dimidium.*

DEMONSTRATIO. I. Sint *primum*, fig. 34., parallelogramma AD, AE: erit $x=y=z$ (36. I.): igitur $x+y=y+z$. Sint *dein*, fig. 35., AD, AF: erunt triangula ACE, BDF mutuo æquilatera; eſt enim AC=BD, AE=BF; cumque ſit AB=CD=EF, addita parte DE, erit CE=DF: ſi igitur ex his triangulis æqualibus ACE, BDF, auferatur commune DE*o*, & addatur AB*o*, proveniet AD=AF. *Demum* ſint, fig. 36., AE, AF: erunt iterum triangula ACD, BEF, mutuo æquilatera & æqualia; nam eſt AC=BE, AD=BF; cumque ſit AB=CE =DF, ablato DE, erit CD=EF: ſi ergo utrique triangulo addatur trapezium ABED, erit AE=AF.

II. Fig. 37. Sint triangula ABC, ABD: ductis BE ad AC, & BF ad AD parallelis, erit parallelogramum AE= AF: ergo & eorum dimidia ABC, ABD.

III. Fig. 37. Sit triangulum ABC, parallelogrammum AF: BE parallela ad AC ducta, erit ABC dimidium parallelogrammi AE: ergo & æqualis AF.

40. COROLLARIA. I. Etiam parallelogramma, & triangula, æqualium baſium & altitudinum ſunt æqualia; baſes enim æquales poſſunt ſibi imponi: &, ſi eadem ſit altitu-

altitudo perpendicularis, possunt poni intra easdem parallelas.

II. Spatia æqualia non semper congruunt.

III. Spatia æqualia possunt claudi perimetro, seu circuitu inæquali, ut patet in figuris 34. 35. 36. Imo, manentibus spatiis æqualibus, perimeter potest augeri sine termino. * Ex circuitu igitur urbis, agri &c. magnitudo non debet æstimari.

41. PROBLEMATA. I. Fig. 36. *Parallelogrammum AF obliquangulum mutare in rectangulum æquale.* Ex B erigatur perpendicularis BE, ex A ducatur ei parallela AC usque ad FD productam: erit AE quæsitum rectangulum. Inde patet, quomodo, fig. 37. dato triangulo ABD constituatur triangulum æquale rectangulum ABC. Patet etiam, quomodo cuivis parallelogrammo AE, aut triangulo ABC, constituatur æquale AF, aut ABD, quod habeat datum angulum *m*.

II. Fig. 38. *Datum parallelogrammum AF mutare in triangulum æquale: & vicissim.* Producatur basis AE in B, ut sit AE = BE: ducta BC, erit triangulum ABC = AF; est enim AF = ED, dimidium totius AD, sicut & triangulum ABC. Vicissim ABC mutatur in AF, si basis AB bisecetur in E, & fiat AF.

III. Fig. 39. *Datum polygonum ABCDE mutare in triangulum æquale.* Omisso angulo E, ducatur AD, & huic ex E parallela EI usque ad AB productam: ducta DI, erit triangulum ADI = ADE; est enim utrumque ejusdem baseos AD, & intra easdem parallelas AD, EI. Eodem modo, omisso angulo C, ducatur BD, & parallela CF usque ad AB productam: ducta DF, erit, ut prius, triangulum BDF = BDC: igitur est jam triangulum IDF æquale dato polygono. Quodsi plures superessent anguli polygoni, eodem modo tollerentur.

IV. *Parallelogrammum datum dividere in quotvis partes æquales.* Sit *primum*, fig. 40, AD dividendum in quatuor partes: dividatur basis AB in totidem partes æquales: ex punctis divisionis ducantur lateri AC parallelæ EM, FN, IO: erit ob bases æquales, & eandem altitudinem, AM = EN = FO = ID. Sit *dein*, fig. 41, AD dividendum in quatuor partes ex puncto i dato : Dividatur, ut prius, ut ſit $Ar = Er = Fr = ID$: biſecentur Er, Fr, Ir, in o: ductis per o rectis ni, pm, qm parallelis, erit $AniC = AErC$; nam triangulum $Eno = iro$, ob $Eo = or$, angulos ad o æquales, & angulum $iro = nEo$, qui ſunt interni alterni : eodem modo oſtenditur eſſe $JD = DBqm$ &c. erunt ergo $AniC = npmi = pqmm = DBqm$.

V. *Datum triangulum dividere in quotvis partes æquales.* Sit *primum*, fig. 40., triangulum ABC ex angulo C dividendum in quatuor partes : diviſa baſi AB in totidem partes æquales, ductis CE, CF, CI, CB ad puncta diviſionis, erit $AEC = EFC = FIC = IBC$; ſunt enim triangula æqualium baſium, & ejusdem altitudinis. Sit *dein*, fig. 42., triangulum ABC dividendum in quatuor partes æquales ex puncto aliquo lateris AC dividatur latus AC, ut AD ſit ejus pars quarta : erit ADB quarta pars trianguli ABC : diviſo igitur latere BC in partes tres, ductisque DF, DE, erit $DBF = DFE = DEC$: igitur quodlibet horum triangulorum eſt pars quarta totius dati ABC. Sit *demum*, fig. 43, ABC dividendum in quatuor partex ex aliquo puncto intra triangulum ſito : fiat AE quarta pars lateris AB ; & AD quarta pars lateris AC : ducta Ei parallela ad AC, & Di parallela ad AB : ductis item ad punctum interſectionis i rectis Ai, Bi, Ci, erit AiC quarta pars totius ; eſt enim AEC quarta pars ; cum vero ſit $EiC = EiA$, quæ ſunt ejusdem baſis Ei, & intra easdem parallelas ; erit $ioC = EoA$: ergo $AEC = AiC$. Eodem modo, ducta recta DB oſtenderetur eſſe $AiB = ADB$, ſeu quartæ parti totius. Si ergo ex i ducatur ad BC biſectam recta iF, erit $AiC = AiB = BFi = CFi$.

VI. Fig. 44. *Datum polygonum ABCDE dividere in quotvis partes, E. g. tres, æquales.* Mutetur polygonum in triangulum æquale JDF, ex III., cujus trianguli baſis dividatur in tres partes æquales, $Im = mn = nF$: erit triangulum ImD tertia pars totius, uti & polygoni æqualis : eſt autem intra easdem parallelas triangulum $ADI = ADE$: ergo $AI = DEO$: ergo $AmDE = ImD$, ſeu tertia pars polygoni. Cum etiam mnD ſit tertia pars totius IDF : ducta on parallela ad BD, erit $onD = onB$, & hinc $mnD = mBoD$, ſeu tertia pars polygoni : igitur reſiduum oCD etiam eſt polygoni tertia pars, & $AmDEA = mBoD = oCD$.

42. THEO-

42. THEOREMA. Fig. 45. *In parallelogrammo quovis AC complementa eorum, quæ ſunt circa diagonalem, ſunt æqualia, ſeu $x=y$.*

DEMONSTRATIO. Eſt ABD=BCD (36. I.) ſive $M+y+o=N+x+i$: & $M=N$, $o=i$: ergo ablatis æqualibus erit $y=x$.

43. PROBLEMATA. I. Figura 45. *Datum parallelogrammum y mutare in aliud æquale ſub data recta BL.* Latus Er producatur in F, ut ſit $rF=BL$: perficiatur parallelogrammum AF: Ducatur diagonalis infinita BrD: producatur AE ad diagonalem in D: compleatur parallelogrammum DF & Dr: erit $x=y$ (42.).

II. *Quotcunque parallelogramma conjungere in unum omnibus æquale, ſub dato angulo, & ſub data recta.* Ponantur ſingula ſub dato angulo (41. I.), dein ſub data recta, ex I: demum conjungantur ad datam rectam.

III. *Triangula quotcunque mutare in parallelogrammum omnibus æquale, ſub dato angulo, & ſub data recta.* Mutentur ſingula in parallelogramma (41. II.) cetera fiant juxta II.

IV. *Polygona data mutare in parallelogrammum omnibus æquale, ſub dato angulo, & ſub data recta.* Mutentur ſingula polygona in ſingula triangula: (41. III.) cetera fiant juxta III. * Igitur quævis figuræ rectilineæ poſſunt mutari in æquale triangulum, aut parallelogrammum.

44. THEOREMA. *In triangulo rectangulo quadratum hypotenuſæ eſt æquale quadratis reliquorum laterum ſimul ſumptis.*

DEMONSTRATIO. Fig. 46. Ex trianguli DCE angulo recto E ducatur EO parallela lateri AD: erit parallelogrammum M= quadrato N, & OC=EF: ductis enim EB, FD, erit triangulum BCE=DCF, cum ſit BC=DC, CE=CF, & $n+i=m+i$, nam m & n ſunt recti: eſt autem triangulum BCE dimidium parallelogrammi OC, ejusdem nempe baſeos & altitudinis (39. III.) ex eadem ratione eſt triangulum CFD dimidium quadrati EF: igitur, cum dimidia æquentur, æquabitur & totum parallelogrammum OC quadrato EF. Eodem modo demonſtratur esse $M = N$: ergo quadratum hypotenusæ AC æquatur quadratis laterum simul sumptis $N + EF$.

45. COROLLARIUM. Si in duobus triangulis rectangulis hypotenusæ H, h fuerint æquales, uti & bases B, b: erunt & catheti C, c æquales. Erit enim $HH = BB + CC$, & $hh = bb + cc$: Est autem $HH = hh$; ergo $BB + CC = bb + cc$: & ablatis æqualibus BB, bb, erit $CC = cc$: æqualium autem quadratorum æqualia sunt latera: igitur $C = c$. Unde & tota triangula mutuo æquilatera sunt æqualia.

46. PROBLEMATA. I. Fig. 47. *Conjungere plura quadra de a, b, c, d, in unum omnibus æquale.* Lateri a jungatur ad angulum rectum B latus b: erit quadratum de $AC = aa + bb$: ita lateri AC jungatur ad angulum rectum latus c: erit quadratum de $AD = aa + bb + cc$: idem fiat porro in d: erit quadratum de $AE = aa + bb + cc + dd$ &c. (44). Facile ergo duplicatur, triplicatur quadratum.

II. *Invenire quadratum, quod sit duorum datorum differentia.* Fig. 47. Sint latera quadratorum datorum h majus, a minus: lateri minori a jungatur recta perpendicularis infinita BC; ex centro A radio, qui sit $= h$, abscindatur in BC punctum B: erit $BC = b$. Est autem $hh = aa + bb$: ergo $hh - aa = bb$: bb ergo est differentia quæsita.

III. Fig. 47. *In triangulo rectangulo ABC, datis duobus lateribus, invenire tertium.* Sint data $a + b$: erit $hh = aa + bb$: ergo $h = \sqrt{(aa + bb)}$. Sint data h & a: erit, ut prius $hh - aa = bb$: ergo $b = \sqrt{(hh - aa)}$. Quamvis autem hæc radix geometrice per lineam semper adcurate exprimi possit; in numeris tamen sæpe surda est; qualis semper est diagonalis quadrati. E. g. Fig. 26. sit latus quadrati $AB = BD = a$: erit quadratum de $AD = 2aa$; ergo latus $AD = \sqrt{2aa} = a\sqrt{2}$, quæ surda est.

47. THEOREMA. *In circulo I. chordæ æquales si fuerint, æquabuntur & arcus, quibus subtenduntur; & vicissim. II. Perpendicularis ex centro ad chordam, hanc bisecat, uti & arcum; vicissim recta ex centro chordam bisecans est ad hanc perpendicularis. III. Perpendicularis in medio chordæ erecta transit per centrum. IV. Si chordæ sint æquales, æquantur & perpendicula ex centro ad eas: & V. vicissim.*

DEMON-

DEMONSTRATIO. I. Fig. 48. Erunt triangula ABC, DEC mutuo æquilatera: ergo anguli ad C æquales: igitur & horum menſuræ, ſeu arcus AIB, DFE æquantur. Viciſſim ſi dicti arcus æquantur, æquantur anguli ad C: ſed & latera circa hos angulos ſunt æqualia: ergo & AB = DE.

II. Fig. 48. Cum ſit A = B, anguli ad O recti æquales, erit & $m = n$: eſt & AC = BC, & CO latus commune: igitur & AO = BO. Igitur & arcus AI = BI, menſuræ angulorum æqualium m & n. Viciſſim ſi ſit AO = BO, erunt triangula AOC, BOC mutuo æquilatera: ergo anguli ad O æquales & recti, & OC perpendicularis.

III. Cum OC ex centro ad chordam biſectam ſit ad hanc perpendicularis, ex II; ex O vero unica perpendicularis erigi poſſit, hæc ſemper tranſibit per centrum.

IV. Cum triangula ABC, DEC ſint mutuo æquilatera, erit A = D, AC = DC, AO = DO, quæ ſunt dimidia chordarum æqualium: ergo etiam CO = CO. * Chordæ igitur æquales a centro æqualiter diſtant.

V. Cum in triangulis rectangulis AOC, DOC, ſit hypotenuſa AC = DC, & baſis CO = CO: erit & cathetus AO = DO: ex eadem ratione eſt AO = BO, DO = EO: ergo AB = DE. * Chordæ igitur æqualiter a centro diſtantes ſunt æquales.

48. PROBLEMATA. I. Fig. 49. *Invenire dati circuli centrum.* In cujusvis chordæ EF puncto medio O erigatur perpendicularis, quæ tranſibit per centrum (47. III.): igitur IT erit diameter, ejusque punctum medium C erit centrum.

II. Fig. 54. *Arcum datum ABC perficere*: ducantur duæ quævis chordæ AB, BC: in earum medio m & n erigantur duæ perpendiculares: punctum interſectionis O erit centrum, per quod nempe tranſeunt ambæ perpendiculares: igitur radio AO perficietur arcus, ſeu ducetur reliquus ADC.

III. Fig, 54. *Per data tria puncta, A, B, C, in directum non jacentia, ducere circulum.* Conjungantur puncta rectis AB, BC, in quarum medio m, n erigantur perpendiculares in O ſe interſecantes mO, nO: erit triangu-

 lum

lum $AmO = BmO$, & $AO = BO$; uti & $BnO = CnO$, atque $BO = CO$: ergo circulus radio $AO = BO = CO$ ductus tranſibit per tria puncta data. * Cum ergo per tria puncta idem centrum inveniatur, circulus cum altero in tribus punctis conveniens eſt alteri æqualis. * Cuivis triangulo circulus circumſcribi poteſt.

49. THEOREMA. Fig. 49. I. *Perpendicularis TS ad extremum punctum radii CT eſt tangens.* II. *Radius CT ad punctum contactus ductus eſt ad tangentem TS perpendicularis.* III. *Perpendicularis ad tangentem ex puncto contactus ducta tranſit per centrum.*

DEMONSTRATIO. I. Præter punctum T aliud quodvis lineæ TS punctum D eſt extra circulum: ducta enim CD, utpote hypotenuſa, major eſt radio CT: ergo D eſt extra circulum: igitur TS eſt tangens.

II. Nulla recta CD, præter CT, poteſt duci perpendicularis ad tangentem TS: foret enim CT hypotenuſa: ergo major, quam CD: cum vero ſit $CT = Ci$, Ci pars foret major toto CD.

III. Radius CT ad punctum contactus T ductus eſt perpendicularis ad tangentem TS; ex II: ergo alia ex puncto T perpendicularis duci nequit.

50. PROBLEMA. Fig. 49. *Ex dato peripheriæ puncto T ducere tangentem.* Ducatur ad T radius CT, ad hunc perpendicularis TS; erit hæc tangens (49. I.)

51. THEOREMA. I. Fig. 50. *Diameter AB eſt chorda maxima: reliquæ BE, BF ſunt eo minores, quo magis a centro recedunt.* II. *Rectarum, ex puncto D extra circulum poſito ad concavam peripheriæ partem ductarum, maxima eſt DA, quæ tranſit per centrum: reliquæ eo minores, quo magis ab hac recedunt.* III. Fig. 51. *Recta DA, intra circulum ex puncto D extra centrum C poſito ad peripheriam ducta, minima eſt, quæ producta tranſit per centrum: reliquæ DE, DF eo majores, quo magis a minima DA recedunt.*

DEMONSTRATIO. I. Fig. 50. Eſt $BA = BC + CE > BE$. *Dein* eſt $Ci + iE > CE$; ſeu $Ci + iE > Ci + iF$: &, ablata parte communi Ci, eſt $iE > iF$;

eſt

eſt vero $Bi+iF > BF$: ergo multo magis eſt $Bi+iE = BE > BF$.

II. Fig. 50. Eſt $DA = DC + CH > DH$. *Dein* eſt $CO + OH > CH$, ſive $CO + OH > CO + OK$: & ablata parte communi CO, eſt $OH > OK$: eſt autem $DO + OK > DK$: ergo potius erit $DO + OH = DH > DK$. * Tangens ergo DT eſt omnium ex puncto D minima.

III. Fig. 51. Eſt $CE = CA = CD + DA < CD + DE$: ergo, ablata parte communi CD, manet $DA < DE$. *Dein* eſt $CF = CE = CO + OE < CO + OF$: & ablata parte communi CO, eſt $OE < OF$: ergo & $DO + OE < DO + OF$: ſed eſt $DE < DO + OE$: ergo multo magis $DE < DO + OF$, ſive $DE < DF$.

52. THEOREMA. *Anguli ad peripheriam menſura eſt dimidius arcus, cui inſiſtit.*

DEMONSTRATIO. Sit *primum* fig. 52. angulus $ABE = s$, inſiſtens arcui AE, cujus crus unum AB ſit diameter: ducto radio CE, erit externus r duplus interni s: igitur arcus AE menſura anguli r eſt dupla menſura anguli s: igitur menſura anguli s eſt dimidium arcus AE. Sit *dein* angulus DBE, intra cujus crura poſſit duci diameter AB: erit r duplus anguli s, & m duplus anguli n: ergo arcus DE, qui eſt menſura angulorum $r+m$, eſt dupla menſura angulorum $s+n = B$: ergo vera menſura totius B eſt dimidius arcus DE. Sit *demum*, fig. 53. angulus m, intra cujus crura duci diameter nequeat: ducatur extra ejus crura diameter AB: erit, ex primo, dimidius arcus AE menſura anguli $ABE = m+r$: cumque dimidius arcus AD ſit jam menſura anguli r: erit reliqui arcus DE dimidium menſura reliqui anguli m.

53. COROLLARIA. I. Igitur angulus ad centrum eſt duplus anguli ad peripheriam, ſi uterque inſiſtat eidem arcui. II. Fig. 53. Angulus in ſemicirculo quivis F, I, eſt rectus; inſiſtit enim ſemicirculo: igitur ejus menſura eſt $90°$. Fig. 54. Angulus A inſiſtens arcui BCD majori, quam $180°$, major eſt recto, ſeu obtuſus: C vero inſiſtens arcui BAD minori, quam $180°$, eſt acutus.

III. Fig. 54. Cujuscunque figuræ quadrilateræ circulo inſcriptæ ABCD, duo quivis anguli oppoſiti ſimul æquantur

tur duobus rectis, nam A & C, uti B & D simul insistunt toti circulo: ergo eorum mensura est 180°.

IV. Fig. 55. Anguli omnes C, D, E, F, I, insistentes eidem arcui AB sunt æquales. * Ex Optica constat, apparere objectum eodem modo, cum videtur sub eodem angulo: si ergo theatrum sit collocatum in AB, & spectatores in forma circulari in C, D, E, F, I, aptissima erit dispositio.

V. Fig. 49. Chordæ parallelæ AB, EF, abscindunt arcus AE, BF æquales; ducta enim BE, est angulus B $=$E: ergo & dimidii arcus, quibus insistunt: igitur & toti arcus AE, BF. Et vicissim.

VI. Fig. 49. Tangens HK & chorda EF parallelæ abscindunt arcus IE, IF æquales; ductis enim EI, FI, & CI, quæ erit perpendicularis ad HK, & ad EF (49. II): igitur EO$=$FO, anguli ad O recti æquales, & OI latus commune: ergo est triangulum EOI$=$FOI, & $m=n$. ergo & arcus EI, FI sunt æquales. Vicissim si sit arcus EI $=$FI, erit chorda EF tangenti HK parallela· ducta enim IO ad chordam EF perpendiculari, erit in triangulis EOI, FOI, $m=n$: anguli ad O recti, & angulus tertius tertio æqualis: latus vero IO commune: igitur & EO$=$FO: ergo perpendicularis IO ad chordam CF bisectam in O, producta transit per centrum: ergo CI radius est etiam perpendiculaais ad tangentem: & hinc EF, HK sunt perpendiculares ad CI: ergo parallelæ.

VII. Tangens HI cum chorda IE comprehendit angulum r, cujus mensura est dimidius arcus EI, qui chordæ EI subtenditur; ducta enim alia chorda EF tangenti parallela, erit $m=n=r$: ergo angulus r & n habent eandem mensuram, dimidium arcus EI, cui n insistit.

54. PROBLEMATA. I. Fig. 56. *Ex puncto D extra circulum dato ducere tangentem.* Ducatur recta DC jungens punctum datum cum centro: bisecetur hæc in A: ex A radio AC$=$AD ducatur circulus, secabit hic alterum in duobus punctis B & I: rectæ DB, DI erunt tangentes; nam, ductis radiis CB, CI, anguli B & I, in semicirculo, recti sunt: ergo BD, ID sunt ad radium perpendiculares,

lares: ergo tangentes. * Ex eodem igitur puncto D non nisi duæ tangentes duci possunt, & quidem æquales.

II. Fig. 57. *In extremo puncto B rectæ finitæ AB erigere perpendicularem.* Ex quovis puncto C extra datam rectam posito ducatur radio CB circulus, qui rectam AB, si opus est, productam versus A, secet in alio etiam puncto I: ducatur per I & C diameter ID: erit BD quæsita perpendicularis; cum angulus B in semicirculo rectus sit.

III. Fig. 57. *Examinare gnomonem ABD.* Angulus B, qui deberet esse rectus, adplicetur peripheriæ semicirculi: quodsi tum gnomonis crura attingant extrema diametri ID, erit B rectus: secus a recto deficiet.

55. THEOREMA. I. Fig. 58. *Angulus $m = n$, qui oritur a duabus chordis AB, DC sese extra centrum secantibus, habet pro mensura semisummam arcuum AC, BD.* II. Fig. 59. *Angulus B a duabus secantibus AB, CB extra circulum comprehensus habet pro mensura semidifferentiam arcuum AC, DF: uti* & III. Fig. 60. *Angulus B comprehensus a secante AB & tangente TB, habet pro mensura semidifferentiam arcuum AET, TC.*

DEMONSTRATIO. I. Fig. 58. Ducta parallela BE ad DC, est augulus $m = B$, ejus mensura est dimidius arcus ACE: est autem $CE = BD$ (53. IV): ergo $ACE = AC + CE = AC + BD$, quæ est summa: ergo semisumma horum arcuum est mensura anguli $m = n = B$.

II. Fig. 59. Ducta DE parallela ad AB, erit $m = B$, cujus proin mensura est dimidius arcus $CE = CA - EA = CA - DF$, sive semidifferentia arcuum CA, DF.

III. Fig. 60. Ducta CE parallela ad TB, erit prior demonstratio II.

56. THEOREMA. Fig. 61. *Omnes interni anguli cujusvis polygoni ABCDE conficiunt bis tot rectos, demptis quatuor, quot sunt latera.* II. *Si singula latera producantur, omnes anguli externi conficiunt quatuor rectos.*

DEMONSTRATIO. E singulis angulis ad aliquod punctum O ducantur rectæ AO, BO, CO, DO, EO: erunt tot triangula, quot sunt latera, quorum omnes angu-

li

li conficiunt bis tot rectos, quot ſunt triangula, vel latera; ſunt autem circa O quatuor recti: his ergo demptis remanent anguli polygoni, bis tot recti, demptis quatuor, quot ſunt latera.

II. Quivis angulus internus cum adjacente externo æquatur duobus rectis; omnes igitur externi cum internis conficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera: ergo, demptis internis, remanent externi æquales quatuor rectis.

57. THEOREMA. I. *Quodvis polygonum regulare reſolvi poteſt in tot triangula iſoſcelia & æqualia, quot ſunt latera.* II. *Polygonum regulare circulo inſcriptum eſt æquale triangulo, cujus baſis ſit ſumma laterum, altitudo ſit perpendicularis ex centro ad unum latus.* III. *Circulus æquatur triangulo, cujus baſis ſit peripheria in rectam extenſa, altitudo radius.*

DEMONSTRATIO. I. Fig. 62. Biſecentur ſinguli anguli polygoni, ut ſit $m=n$, $r=s$: erit triangulum nOr, ob $n=r$, iſoſceles: eſt etiam $s=v$, & hinc sOv iſoſceles æquale priori; & ſic de ceteris. * Erit igitur $On=Or=Ov$ &c; & O centrum circuli, radio On circumſcribendi. * Igitur radiis ex centro circuli ad angulos polygoni regularis inſcripti ductis, polygonum dividitur in tot triangula isoscelia æqualia, quot ſunt latera.

II. Fig. 64. In triangulo agi, propter æquales baſes & eandem altitudinem eſt $abi=bci=cdi$ &c. ſunt vero etiam polygoni triangula ſingula æqualium baſium & ejusdem cum prioribus altitudinis; & hinc ſingula ſingulis æqualia: igitur & totum triangulum æquatur polygono.

III. Quo plura fiunt polygoni inſcripti latera, eo minus differunt ab arcubus, quibus ſubtenduntur, ut videre eſt in fig. 63. Si ergo cogitetur inſcribi polygonum infinitorum laterum; hæc infinite parum different a peripheria: igitur & perpendicularis, ex centro ad ejusmodi latus, jam non differet ab ipſo radio: circulus igitur æquatur triangulo in theoremate expreſſo.

58. PROBLEMATA. I. Fig. 62. *Dato polygono regulari circumſcribere circulum.* Biſectis duobus angulis $m+n$, $r+s$, invenietur centrum O, ex quo, radio

$On = Or = Or$ &c. descriptus circulus erit polygono circumscriptus (57. I).

II. Fig. 62. *Dato polygono regulari ABCDEF circulum inscribere.* Invento centro O (57. I demittatur perpendicularis OL ad unum latus; radio OL circulus polygono inscribetur; cum enim quævis OL ad singula latera sit æqualis, & perpendicularis; erunt latera polygoni tangentes, & circulus inscriptus.

III. Fig. 62. *Invenire polygoni regularis inscripti angulum ad centrum* nOr. Divisis 360° per numerum laterum polygoni, quotus dat arcum, cui latus nr subtenditur, qui arcus est mensura anguli quæsiti. * In hexagono igitur angulus ad centrum est 60°: igitur & $n = r = 60°$: est igitur triangulum nrO æquiangulum, ergo & æquilaterum: ergo latus hexagoni nr æquatur radio nO.

IV. Fig. 62. *Invenire angulum polygoni regularis* $m + n$. Subtracto ex 180° angulo ad centrum, remanent anguli ad basin $n + r$; cumque sit $m = n = r$, erit inventus angulus $m + r = n + r$.

V. *Dato circulo polygonum regulare inscribere.* Divisa peripheria per numerum laterum, habetur quotus, qui est arcus, cui chorda subtensa est latus polygoni inscribendi. * Igitur *hexagonum* inscribitur radio sexies in peripheria circumlato, ex III. * *Triangulum æquilaterum* inscribitur, ductis per alterna puncta hexagoni chordis. * *Quadratum* inscribitur, fig. 63, dum extrema puncta diametrorum ad sese perpendicularium chordis junguntur. * Porro, fig. 63, patet, diviso bifariam arcu CD, in E, haberi chordam CE=DE, quæ erit latus polygoni octo laterum: & generaliter e tali bisectione arcuum obtinentur polygona, in quibus numerus laterum duplus est priorum. * Circulo geometrice inscribi nequeunt, nisi quatuor polygona regularia, scilicet, ex dictis, triangulum & quadratum, &, ex dicendis, pentagonum & pentadecagonum; & in quibus numerus horum laterum crescit continenter in duplum.

VI. *Dato circulo polygonum regulare circumscribere,* Fig. 62. Inscribatur talis polygoni latus nr: ex centro ad id latus ducatur perpendicularis radius OL: ex puncto

L du

L ducatur tangens AB, occurrens radiis productis OA, OB; erit AB latus polygoni circumſcribendi &c. * Geometrice igitur ea duntaxat polygona circumſcribi, quæ inſcribi, circulo poſſunt, ex V.

VII. *Datum polygonum regulare mutare in triangulum æquale.* Reſolutio patet ex dictis, (57. II). * Dato igitur radio circuli, & peripheria, vel arcu, mutabitur etiam circulus vel ſector in triangulum æquale. (57. III).

59. DEFINITIO. Sicut *menſura longitudinis* eſt linea recta notæ longitudinis Eg. pertica, pes, digitus &c: ita *menſura ſuperficiei vel areæ* eſt quadratum notæ magnitudinis, Eg. pertica quadrata, pes, digitus quadratus &c. Dum ergo quæritur area alicujus figuræ; quæritur, quot perticas, pedes, digitos &c. quadratos contineat.

60. PROBLEMATA. I. Fig. 65. *Invenire aream quadrati AD.* Ducatur latus AB in æquale AC; ſive multiplicetur latus quadrati per ſeipſum: factum dabit aream quadrati. Eg. ſit AB=4. digitis: erit AD=16 digitis quadratis, quorum unus eſt AO: Dum nempe AB pervenerit in *m*, erunt in B*m* quatuor digiti quadrati; dum ulterius progreditur in *n*, erunt in B*n* 8. digiti quadrati &c.

II. Fig. 66. *Metiri aream rectanguli AD.* Ducatur baſis AB in altitudinem AC: factum erit area quæſita. Sit AB=4; AC=3 digitis; erit AD=12 digitis quadratis.

III. *Invenire aream cujusvis parallelogrammi.* Cum quodvis parallelogrammum ſit æquale rectangulo ejusdem baſeos & altitudinis: ducatur baſis in altitudinem.

IV. *Invenire aream trianguli.* Cum triangulum ſit dimidium parallelogrammi ejusdem baſeos & altitudinis: erit ſeu baſis in dimidiam altitudinem, ſeu altitudo ducta in dimidiam baſin, ſeu factum ex baſi in altitudinem diviſum per 2, area quæſita. * Cumque polygona quævis, uti & circulus, mutari in triangula queant, etiam horum area, ex dictis, invenietur.

ARTI-

ARTICULUS II.

Similitudo figurarum planarum.

61. DEFINITIO. *Figuræ ſimiles* ſunt, quæ habent totidem angulos æquales mutuo, & latera circa æquales angulos proportionalia. Eg. Fig. 68, triangula ABC, *abc* erunt ſimilia, ſi fuerint mutuo æquiangula, & *ab*: AB = *ac*: AC = *bc*: BC. * Latera, quæ ſibi in proportione reſpondent, Eg. *ab*, AB & *ac*, AC, & *bc*, BC, vocantur *homologa.*

62. HYPOTHESIS. *Ratio rationalis* eſt inter duas quantitates *commenſurabiles*, ſive, quæ habent menſuram communem; quæ proin ſemper numeris exprimi poſſunt, cum unitas ſit omnium numerorum communis menſura. *Ratio irrationalis* intercedit inter quantitates *incommenſurabiles*, quarum nulla eſt menſura communis; quæ numeris exprimi nequeunt. Quamvis autem inter magnitudines, Eg. inter latus quadrati & diagonalem, in rigore, ſit ratio irrationalis (45. III): ſupponemus nihilominus, inter quantitates, de quibus agemus, exiſtere rationem rationalem, & communem menſuram. Sint enim, fig. 67, AB, *ab*, in rigore incommenſurabiles: dividatur *ab* bifariam, harum partium quævis in duas alias æquales, & ſic intelligatur diviſio ſine fine continuari; pervenietur profecto ad partem, quæ *infinite parva* dicitur, quæ & ſuum totum *ab* adcurate, & rectam AB adeo propinque metietur, ut defectus ſit infinite parvus, adeoque nullius momenti. In Geometria autem utili ejusmodi minutiæ recte, ceu nihilum, ſpernitur.

63. AXIOMATA. I. Partes ſimiles ſunt, uti tota: & viciſſim.

II. Quantitates, quæ habent eandem rationem ad tertiam, vel ad æquales, ſunt æquales.

III. Rationes æquales uni tertiæ, vel pluribus æqualibus, ſunt æquales.

64. THEOREMA. Fig. 67. I. *Parallelogramma ejusdem altitudinis AD, ad ſunt uti baſes.* II. *Ejusdem vero baſeos ſunt ut altitudines.* III. *Etiam triangula ejus-*

dem

dem altitudinis ABC, abc sunt sicut bases: & ejusdem baseos, ut altitudines.

DEMONSTRATIO. I. Cogitetur inventa communis mensura basium AB, *ab* (62): sit hæc Eg *ae*, quæ bis inveniatur in *ab*, ter in AB: ex punctis divisionis ducantur parallelæ lateribus, *ef*, *eh*, *fi*: erit $Ah = ei = fD = af = ed$: ergo $AD : ad = 3 : 2 = AB : ab$.

II. Bases æquales possunt haberi pro altitudine, altitudines pro basibus; eritque, ut prius I.

III. Triangula sunt dimidia parallelogrammorum ejusdem altitudinis & baseos: ergo se habent, uti illa.

65. THEOREMA. Fig. 68. I. *In triangulo ABC, ducta parallela DE ad quodvis latus AB secat reliqua latera proportionaliter, ut sit $AD : DC = BE : ED$. II. Erit etiam $AC : DC = BC : EC$; vel $AC : BC = DC : EC$ &c.*

DEMONSTRATIO. I. Ductis AE, BD, erit ejusdem baseos & intra easdem parallelas $DEA = DEB$: igitur $DEA : X = DEB : X$; est autem (64. III) $DEA : X = AD : DC$; & $DEB : X = BE : EC$: igitur $AD : DC = BE : EC$ (63. III). Atque hinc

II. Erit componendo $AD + DC : DC = BE + EC : EC$, id est $AC : DC = BC : EC$; & alternando $AC : BC = DC : EC$; vel $DC : EC = AC : BC$ &c.

66. THEOREMA. Fig. 68. I. *Triangula mutuo æquiangula ABC, abc sunt similia.* II. *Si triangula habuerint omnia latera proportionalia, erunt æquiangula & similia.* III. *Si etiam habuerint duo latera circa æqualem angulum proportionalia, erunt iterum æquiangula & similia.* IV. Fig. 69. *Si in triangulis similibus ABC, abc ducantur ex angulo æquali C, c, perpendicula CD, cd; erunt & hæc proportionalia lateribus.*

DEMONSTRATIO. I. Fig. 68. Ex C abscindatur $CD = ca$, & $CE = cb$: ducta DE erit triangulum $DEC = abc$, ob $C = c$, & latera circa hunc angulum æqualia: ergo $o = a$, $i = b$: cumque sit etiam $A = a$, $B = b$; erit

erit $o = A$; hinc DE parallela ad AB: igitur (65.) est AC: DC = BC : EC; sive AC : ac = BC : bc; vel ac : bc = AC : BC. * Eodem modo ostenditur esse ab : AB = ac : AC = bc : BC &c.

II. Fiat CD = ca, ducaturque DE parallela ad AB; erit AC : DC = BC : EC, sive AC : ac = BC EC; est vero, ex hypothesi, AC : ac = BC : bc: igitur (63. III.) BC : EC = BC : bc: ergo (63. II.) EC = bc. Cumque triangula ABC, DEC sint æquiangula, erit etiam, ex I, AC : DC = AB : DE, sive AC : ac = AB : DE; est vero, ex hypothesi AC : ac = AB : ab: igitur, ut prius, DE = ab: ergo DEC, abc mutuo æquilatera sunt & æquiangula; cumque DEC & ABC sint æquiangula & similia, talia erunt etiam abc & ABC.

III. Fiant iterum CD = ca, DE ad AB parallela: demonstrabitur, ut prius II, esse CE = cb: igitur DEC = abc: & ABC, abc æquiangula erunt, & similia.

IV. Fig. 69. In triangulis ADC, adc est, præter angulum rectum, etiam A = a: hinc tertius tertio æquatur, & tota hæc triangula æquiangula sunt, & similia: igitur CD : cd = CA : ca = AB . ab = BC : bc &c.

67. PROBLEMATA. I. Fig. 70. *Datam rectam AB dividere in quotvis partes æquales, E. g. tres.* Jungatur rectæ datæ sub quovis angulo recta infinita AC, in qua tres quæcunque partes æquales abscindantur Ad, de, ef: ducantur fB, eique parallelæ per divisionis puncta en, dm: erit (65. II.) fe : fA = Bn : BA = 1 : 3: ergo Bn est tertia pars rectæ AB. Ita etiam est ed : dA = nm : mA: Cum ergo sit ed = dA, erit & nm = mA: igitur Am = mn = nB &c. * Idem obtinebitur in fig. 71.; si rectæ datæ AB ducatur parallela quævis infinita CD, in qua fiat Ce = ef = fg, ita, ut ductis CAH, gBH fiat triangulum: ductis enim eH, fH, erit Ao = oi = iB; Nam Ce : Ao = eH : oH = ef : oi = fH : iH = fg : iB; sive Ce : Ao = ef : oi = fg : iB; quarum rationum antecedentes cum sint æquales ex constructione, erunt & consequentes æquales &c.

II. Fig. 72. *Datam rectam AB dividere in quotvis partes E. g. tres, quæ sint in data ratione, E. g.* Am : mn =

1 : 2, & $mn : nB = 2 : 3$. Ut prius I. recta infinita AC dividatur in data ratione, fiatque $Ad = 1$, $de = 2Ad = 2$, $ef = 3Ad = 3$: ductis parallelis fB, eu, dm erit AB secta in partes quæsitas, ut patet ex præcedente demonstratione, I.

III. Fig. 73. *Datis tribus rectis AB, BC, AD, invenire quartam proportionalem.* Jungantur duæ primæ datæ in unam rectam ABC, cui sub quovis angulo jungatur tertia AD, producenda: ductæ BD fiat parallela CE; erit DE quarta quæsita; nam AB : BC = AD : DE.

IV. Fig. 73. *Datis duabus rectis AB, BC, invenire tertiam proportionalem.* Manentibus omnibus, ut prius III, fiat AD = BC; erit DE tertia quæsita; nam AB : BC = AD : DE, vel AB : BC = BC : DE.

V. Fig. 74. *Construere scalam geometricam.* Ducatur recta Am, quæ dividatur in decem partes æquales, quarum partium una sit AC: jungatur ei quævis perpendicularis AB; & Bn parallela rectæ Am: tam AC, quam AB dividantur in decem partes æquales, fiantque cetera, ut figura exhibet. Erit ergo oi pars decima de $D1 = C1$; cum sit $Co : CD = oi : D1$. Erit ex eadem ratione rs dimidium $D1$ &c. Unde oi, pars centesima rectæ AC, & pars millesima rectæ totius Am. * Ex hac igitur scala habentur partes decimæ, centesimæ & millesimæ &c.

VI. Fig. 68. *Datis in uno triangulo abc duobus lateribus ab, bc; & in altero simili ABC dato uno latere AB homologo unius ex prioribus ab, invenire alterum homologum BC.* Erit $ab : bc = AB : BC$: ex primis ergo tribus cognitis invenietur quartum BC.

VII. Fig. 75. *In campo metiri linem horizontalem AB, ad cujus unum extremum A patet accessus.* In aliquo loco C, ex quo A & B videri, & A accedi potest, figatur baculus perpendiculariter: mensuretur semicirculo angulus m, & recta AC: capiatur & angulus A. Sit E. g. AC 85. pedum; transferatur in chartam recta ac 85. particularum ex scala geometrica desumptarum: fiat angulus $a = A$, $m = m$: erit abc triangulum æquiangulum & simile triangulo ABC: igitur videatur, quot partium scalæ sit recta ab E. g. 100; totidem pedum erit AB; nam est $ac : ab = AC :$ AB.

AB. * Quodſi in priore caſu fieret *ac* 34. particularum ſcalæ, & inveniretur *ab* 40. ejusdem partium; foret proportio eadem: $ac:ab=AC:AB$; ſive $34:40=85:AB$; foretque AB, ut prius, 100. pedum. Aſſumi igitur poteſt *ac* quotcunque particularum. * Hæc conſtructio trianguli ſimilis in charta eſt fundamentum ſequentium dimenſionum geometricarum.

VIII. Fig. 75. *Metiri diſtantiam horizontalem AB prorſus inacceſſam.* Menſuretur quævis commoda baſis CD, uti & anguli *m*, *n*, *r*, *s*; deſcribatur, ut prius VII, triangulum *acd* ſimile triangulo ACD, & *bdc* ſimile triangulo BDC. Cum jam ſit $cd:CD=ca:CA=cb:CB$; erunt triangula *abc*, ABC ſimilia; nam latera *ca*, CA, & *cb*, CB circa æqualem angulum *m* ſunt proportionalia: igitur erit $ca:CA=ab:AB$; vel $cd:CD=ab:AB$; vel $cd:ab=CD:AB$.

IX. Fig. 76. *Metiri altitudinem perpendicularem AB, dum patet ad B acceſſus horizontalis.* Menſuretur baſis BC, & angulus C; cum B ſit rectus, poterit, ut VII, triangulo ABC conſtrui ſimile in charta *abc*; eritque $bc:ab=BC:AB$. * Sine inſtrumento poteſt AB inveniri ex umbra projecta BC; ſi erigatur perpendiculariter baculus DE ita, ut ejus extremum E attingat radium ſolis AC; erit DE parallela rectæ AB, cum utraque ſit baſi BC perpendicularis; eritque $DC:DE=BC:AB$. * Iterum poſito baculo FI, & altero minore DE ita, ut oculus in E videat in una recta puncta E, I, A, erunt triangula IOE, AKE ſimilia; & $EO:EK=OI:AK$; eſt autem $EO=DF$, $EK=BD$, $OI=FI-DE$; inventæ ergo AK addatur $DE=BK$; & habetur quæſita AB. * Demum ponatur ſpeculum in C; ſi oculus in N poſitus videat in ſpeculo punctum A; erunt triangula ABC, CMN ſimilia; eſt enim rectus $B=M$, &, ex Optica, angulus incidentiæ *r* æqualis angulo reflexionis *s*; igitur $CM:MN=BC:AB$; CM, BC metiri licet, MN eſt altitudo oculi &c.

X. Fig. 77. *Metiri altitudinem perpendicularem AB prorſus inacceſſam.* Sumatur baſis CD talis, ut baculi erecti in C & D ſint in eadem recta cum AB, captis angulis ad C & D conſtruatur figuræ ABDC ſimilis &c. * Vel ſumatur quæcunque baſis horizontalis EF; captisque angulis ad E & F, fiat figuræ ABEF ſimilis &c.

 XI. *Ichno-*

XI. *Ichnographias perficere; seu locorum planorum perimetros metiri, & delineare schemata.* Sit *primum* perficienda *topographia*, seu loci non magni, E. g. agri ABCDE, delineatio, dum locus est pervius. Fig. 78. In aliquo puncto O capiantur anguli *i*, *m*, *n*, *r*, *s*, & mensurentur singula latera AO, BO, CO, DO, EO: dein in charta ex puncto O fiant ex ordine anguli prioribus æquales, & ducantur rectæ *a*O, *b*O, *c*O, *d*O, *e*O prioribus proportionales; erunt singula triangula singulis similia, & tota figura *abcde* similis priori. Sit *dein* locus ABCDE impervius, E. g. sylva; circuiri tamen possit. Capiantur anguli A, B, C, D, & mensurentur latera AB, BC, CD; non est necesse, metiri angulum E cum lateribus AE, DE. In charta jungantur ad angulos prioribus æquales latera prioribus proportionalia; erit *abcde* figura priori similis, ut facile patet. * Quid sit agendum, dum occurrit locus, cujus latera non sunt rectæ lineæ, ostendit figura 79. Sit denique delineanda *Chorographia*, seu schema integræ regionis. Fig. 80. Assumatur basis AB, e cujus extremis A & B saltem aliquot urbes, arces &c. C, D, E, F, G, H conspici queant. Captis angulis ad A & ad B, construantur triangula similia triangulis ABC, ABD, ABE, ABF, ABG, ABH, eritque descripta Chorographia; quæ schemata vocantur *chartæ* vel *mappæ geographicæ*. Porro cognito jam latere FE, captis angulis *m* & *n*, poterit inventæ figuræ addi triangulum simile triangulo FEI; atque hac ratione continuari descriptio regionis ad alia loca, quæ in A & B videri nequeunt. * Cautelæ in his omnibus adhibendæ sunt variæ; præcipue in eligenda basi cavendum, ne sit nimis exigua, nec nimis magna anguli etiam ne sint nimis acuti, nec nimium obtusi. &c. &c. * Quomodo hæ omnes dimensiones ope *mensulæ prætorianæ* fiant, quæ est planum quadratum charta candida obductum, cum regula mobili dioptris instructa, docet figura 81. Verum hæc, & plurima alia, E. g. usus *pyxidis magneticæ*, *quadrati geometrici* &c. oculis potius subjicienda sunt, quam verbis, ferme sine fructu, describenda Tironibus.

XII. *Invenire rationem diametri ad peripheriam sui circuli.* Fig. 62. Perimeter polygoni regularis circumscripti est major, inscripti minor, quam sit peripheria circuli; quodsi ergo inveniantur duo polygona in- & circumscriptum, quorum perimetri inter se infinite parum differant,

rant, minus adhuc different a peripheria, & pro hac tuto haberi possunt. Ludolphus a Ceulen assumpsit diametrum circuli æqualem unitati cum 35. zeris, qui numerus adeo immanis est, ut etiam in circulis maximis ejusmodi particula diametri nullius prorsus sit momenti. His positis sit, fig. 63. inscriptum quadratum, invenietur latus CD, si ex duplo quadrato radii extrahatur radix quadrata. Bisecto dein latere CD, invenietur latus CE, si ex quadratis $Ci + Ei$ extrahatur radix quadrata &c.: & sic porro, bisectione repetita, invenietur semper latus polygoni inscripti, & ejus perimeter in partibus diametri vel radii: igitur invenitur ratio diametri ad perimetrum talis polygoni inscripti. Invento polygono inscripto, invenitur circumscriptum, si, fig. 62., fiat $Oi:ni = OL:AL$ &c. Hac ratione ex bisectione laterum quadrati in- & circumscripti sexagies repetita, invenit Ludolphus perimetros polyonorum in- & circumscripti, quæ unica diametri particula inter se differebant: minus autem a peripheria circuli differebant: igitur habebatur ratio diametri ad peripheriam, non illa in summo rigore, quæ a nullo adhuc inventa est, sed quæ in omni usu, etiam astronomico, pro vera haberi possit. Verum, cum hæc ratio, ob ingentes numeros, in calculo sit ferme inutilis; a variis variæ rationes in minoribus numeris inventæ sunt: E.g. $100:314$. vel $1000:3141$. Propius ad Ludolphianam accedit hæc Metii $113:355$. * Cum inventa ratio sit eadem in quibusvis circulis, quin timendus sit error notabilis; erunt diametri, igitur & radii circulorum, ut eorum peripheriæ; & vicissim. * Data igitur diametro D invenitur peripheria P, vel vicissim, si fiat $113:355 = D:P$. * Data igitur diametro, vel radio invenitur etiam area circuli (58. VII.)

68. THEOREMA. I. Fig. 82. *Si in triangulo rectangulo ADI ex angulo recto in hypotenusam ducatur perpendicularis BI; secabit hæc totum triangulum in partes toti, & inter se similes: eritque eadem perpendicularis media proportionalis inter segmenta hypotenusæ AB, BD.*

II. Fig. 83. *Si e puncto B ad circulum ducatur tangens BE, & secans BA; erit tangens BE media proportionalis inter totam secantem AB, & ejus partem extra circulum BD.*

DEMONSTRATIO. I. Fig. 82. Totum ADI & pars ABI sunt triangula rectangula, & habent angulum A com-

communem: ergo etiam $m = s$. Ita & totum ADI, & altera pars BDI præter rectum, habent angulum m communem: ergo & $n = r$: igitur partes toti similes, sunt similes inter se: adeoque est AB:BI = BI:BD.

II. Fig. 83. Ductis AE, DE, triangula ABE, BDE habent angulum B communem; præterea est angulus BED = A, cum utriusque mensura sit dimidius arcus DE (53. V. & 52.): igitur sunt similia, & est AB:BE = BE:BD.

69. PROBLEMATA. I. *Inter datas duas rectas, AB, BD, invenire mediam proportionalem.* Fig. 82. Jungantur datæ in unam rectam AD, supra quam, ceu diametrum, describatur semicirculus: ex B erigatur BI perpendicularis, quæ erit media quæsita; ductis enim AI, DI, est triangulum ADI rectangulum in I; cum I sit angulus, insistens semicirculo, rectus: igitur est AB : BI = BI : BD. (68. I.) * Sint iterum, fig. 83. rectæ datæ AB, DB: ex AB abscindatur BD, supra AD diametrum describatur circulus, ad quem ducta ex B tangens BE est media proportionalis quæsita. (68. II.)

II. Fig. 83. *Datam rectam BE secare media & extrema ratione; id est, in duas partes, ut tota sit partem majorem, sicut hæc ad partem minorem.* Radio CE, qui sit dimidium datæ BE, ducatur circulus: in E erigatur tangens = BE: ex B per centrum C ducatur secans AB, & fiat Bm = BD; erit (68. II.) AB:BE = BE:BD; & AB — BE:BE = BE — BD:BD; sive, cum sit AD = BE, Bm = BD, erit Bm: BE = Em:Bm; demum BE:Bm = Bm:Em. * Sit BE = $x + y = 2a$, & $x > y$; erit $y = 2a - x$; unde prior proportio ita exprimetur: $2a : x = x : 2a - x$; ex qua eruitur $x = \sqrt{\left(\frac{5a^2}{4}\right)} - a$. Igitur etiam in numeris proxime invenitur x &c.

III. *Invenire, dato radio, latus decagoni regularis circulo inscripti.* Fig. 84. Radius AC secetur media & extrema ratione in D, ex II: pars major CD fiat chorda AB: ducta BD, erunt triangula ABC, ABD similia, (66. III.) cum circa æqualem angulum A latera sint proportionalia; nam est AC:AB = AB:AD: igitur est $o = r$; est autem externus $n = r + s$; cumque eadem triangula sint isoscelia, erit $n = 2r$, & $m = n = 2r$: ergo $m + n + o = 5r = 180°$:

&

& $10r = 360°$: ergo angulus r decies poteſt poni circa centrum C: igitur & arcus & chorda AB decies poteſt transferri in peripheria: ergo AB, pars major radii, media & extrema ratione ſecti, eſt latus decagoni quæſitum. * Ex decagono inſcripto habetur pentagonum, ſi ex alternis diviſionum punctis ducantur chordæ.

IV. *Invenire latus pentadecagoni regularis, ſeu polygoni quindecim laterum.* Fig. 85. Inſcribatur circulo triangulum æquilaterum ABC, & ex eodem puncto A pentagonum ADEFG: erit arcus BEFC tertia, & arcus EF quinta pars periphæriæ: ſubtracta quincta hac parte EF, ex illa tertia, remanent arcus $BE + CF = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$; cumque ſit $BE = CF$, erit $BE = \frac{1}{15}$, ſeu pars una decima quinta peripheriæ: igitur chorda BE eſt latus pentadecagoni quæſitum.

70. THEOREMA. Fig. 86. I. *Si fuerint quatuor rectæ proportionales, $A : a = b : B$; erit rectangulum M ſub extremis æquale rectangulo N ſub mediis.* II. *Si fuerint tres rectæ continue proportionales, ſeu $a = b$; erit rectangulum M ſub extremis æquale quadrato mediæ N.* III. *In rectangulis æqualibus M, N, baſes ſunt exciproce, ut altitudines, ſeu eſt $A : a = b : B$.*

DEMONSTRATIO. I. Jungantur rectangula M, N ad angulum rectum, & compleatur rectangulum X, ut figura exhibet; erit $M : X = A : a$ (64. I.) & $N : X = b : B$; cum ergo ſit $A : a = b : B$; erit $M : X = N : X$, & $M = N$.

II. Cum ſit $a = b$, erit quadratum mediæ $N = M$, uti prius I.

III. Eſt $M : X = A : a$, & $N : X = b : B$; ſed, ob $M = N$, eſt $M : X = N : X$; igitur $A : a = b : B$.

71. PROBLEMATA. I. Fig. 82. *Datum rectangulum AE convertere in quadratum æquale.* Jungatur lateri AB latus $BD = BE$; ducto ſuper AD diametrum ſemicirculo, erit perpendicularis BI latus quadrati quæſiti; nam eſt $\div$ AB, BI, BE (69. I.): igitur erit $AE = BI^2$ (70. II.)

II. *Mutare quamvis figuram rectilineam, uti & circulum, in quadratum æquale.* Mutentur hæ figuræ in triangulum

gulum, hoc in rectangulum, istud demum in quadratum, ex I.

72. THEOREMA. I. *Rectangula sunt in ratione composita basium & altitudinum: uti & quævis parallelogramma: & quævis triangula.* II. *Si hæ figuræ fuerint similes, erunt in ratione duplicata basium, vel altitudinum: triangula vero similia etiam in ratione duplicata quorumvis laterum homologorum.* III. *Polygona quævis similia sunt in ratione duplicata laterum homologorum: & circulo inscripta etiam in ratione duplicata radiorum.* IV. *Circuli sunt in ratione duplicata vel radiorum, vel diametrorum, vel periphericarum, vel arcuum similium: uti & sectores similes.* V. *Quævis demum polygona similia irregularia sunt in ratione duplicata quorumlibet laterum homologorum.*

DEMONSTRATIO. I. Fig. 86. Est $M:X=A:a$; & $X:N=B:b$; & componendo $MX:NX=AB:ab$, sive $M:N=AB:ab$; si ergo B & b sint bases, A & a altitudines; erit ratio $AB:ab$ composita basium & altitudinum. * Cumque parallelogramma quævis sint æqualia rectangulis ejusdem baseos & altitudinis; triangula vero sint dimidia parallelogrammorum ejusdem secum baseos & altitudinis; erunt hæc omnia, uti rectangula, in eadem ratione composita basium & altitudinum.

II. In his figuris similibus est $A:a=B:b$: ergo ratio ex his composita $AB:ab=AA:aa=BB:bb$. Cumque in triangulis similibus sint altitudines, ut latera homologa (66. IV.) erit ratio duplicata altitudinum æqualis rationi duplicatæ laterum homologorum.

III. Fig. 87. Est triangulum ABO simile abo; cum anguli ad centrum, igitur & ad basin sint æquales: cum ergo eadem sint partes similes suorum polygonorum, hæc polygona erunt, ut triangula, in ratione duplicata dicta.

IV. Circuli sunt polygona similia infinitorum laterum: ergo sunt, ut ista, in ratione duplicata radiorum, diametrorum, peripheriarum, arcuum similium, quæ rationes omnes sunt æquales. Sectores igitur similes sunt, ceu partes circulorum similes, ut ipsi circuli &c.

V. Fig. 88. Ductis ex angulo æquali A & a rectis AC, AD, & ac, ad, erunt triangula ABC, abc, similia,

ob

ob latera circa æqualem angulum B, *b* proportionalia; idem facile oſtendetur de reliquis triangulis ACD, *acd*, & ADE, *ade*: igitur & tota polygona ſunt, uti ſingula triangula ſimilia, in ratione duplicata quorumvis laterum homologorum.

73. PROBLEMATA. I. *Figuræ datæ rectilineæ conſtruere ſimilem.* Fig. 88. Dato polygono ABCDE fit ſimile minus *amnrs*, ſi *mn* ad ED, *nr* ad DC, *rs* ad CB ducantur parallelæ. Viciſſim dato minori fit majus ſimile. * Pari modo fit figura datæ ſimilis in figura 78. * Vide etiam dicta ſuperius (67. VII). * Alia facilis methodus eſt ope *cameræ obſcuræ* &c. * Demum pro figuris quibusvis ſervit ſchema fig. 89.

II. *Conjungere datas figuras ſimiles in unam omnibus æqualem & ſimilem.* Conjungantur latera homologa duarum ad angulum rectum, & ſupra ductam hypotenuſam conſtruatur figura ſimilis: erit hæc æqualis duabus laterum; ſunt enim tales figuræ in ratione duplicata laterum homologorum, id eſt, ut quadrata horum laterum; cum ergo quadratum hypotenuſæ æquetur quadratis laterum; idem erit in quibusvis figuris ſimilibus. Atque ita porro plures ſemper figuræ ſimiles conjungi poſſunt. (46. I) * Ex his invenitur figura ſimilis, quæ ſit datæ duplum, triplum, & quodvis multiplum. * In figura 90. ſemicirculus ABF=ABC æquatur binis ſemicirculis ADC & BEC: ſi ergo utrinque auferantur partes *i* & *o*, remanet triangulum ABC=X+Y, quæ vocantur *lunulæ Hippocratis* &c.

CAPUT II.

Trigonometria plana.

74. DEFINITIO. *Trigonometria* eſt ſcientia & ars, datis tribus trianguli partibus invenien-di reliquas. Partes autem hæ ſunt latera & anguli. Agimus hic de *Trigonometria plana*, quæ ad triangula plana pertinet; eſt enim etiam alia *ſphærica*, quæ de triangulis in ſuperficie ſphæræ deſcriptis tractat.

ARTICULUS I.

Inventio ſinuum, tangentium & ſecantium.

75. DEFINITIO. Fig. 91. *Sinus rectus* alicujus arcus AI, vel anguli *m*, cujus menſura ſit is arcus, eſt recta ID ex puncto peripheriæ I ad radium AC perpendicularis. * Omnis igitur ſinus rectus, qui ſimpliciter ſinus dicitur, eſt dimidia chorda. * Quodſi ſemiperipheria ABH intelligatur diviſa in gradus, minuta prima, & minuta ſecunda: poterunt duci ex ſingulis punctis ſinus; vorum omnium maximus erit ipſe radius BC, qui ideo dicitur *ſinus totus*. Præterea in utroque quadrante ABC, BHC erunt iidem ſinus: igitur inveniendi tantum ſunt ſinus, qui eſſe poſſunt in quadrante, ſcilicet ab uno minuto ſecundo ad 90°, ſive radium. * Cum ſinus ID pertineat ad arcum AI ſimul, & ad arcum IBH, ſive ad angulos *m* & ICH; patet ſinum anguli obtuſi eſſe eundem, qui eſt *anguli ſupplementi*, ſive reliqui ad duos rectos; E. g. ſinus anguli 130° eſt ſinus anguli $180° - 130° = 50°$. * Sinus *complementi* vel *coſinus* arcus AI vel anguli *m* eſt ſinus IE, qui ſcilicet eſt ſinus arcus BI vel anguli *r*; complet nempe arcus BI cum arcu AI quadrantem circuli, & *r* cum *m* angulum rectum. Eſt igitur ſemper ſinus ID coſinus $CD = IE$. * *Sinus verſus* arcus AI vel anguli *m* eſt AD, quæ eſt pars radii intercepta inter ſinum ID & arcum. * *Tangens* arcus AI vel anguli *m* eſt AT perpendicularis radio, producta occurrens rectæ ex centro per I ductæ, quæ ejusdem arcus vel anguli *ſecans* vocatur. * *Cotangens* arcus AI vel anguli *m* eſt BF, ſcilicet tangens arcus BI vel anguli *r*, quæ ſunt priorum complementa ad quadrantem, ſeu ad angulum rectum.

76. HYPOTHESIS. Intelligatur quivis radius diviſus in partes æquales 10.000000. Jam inventus erit quivis ſinus, ſi reperiatur, quot partes radii contineat.

77. PROBLEMATA. I. Fig. 92. *Invenire ſinum* 45°. *AO.* Eſt $AB^2 = AC^2 + BC^2$: igitur $AB = \surd(AC^2 + BC^2)$ eſt autem tam AC, quam BC radius: dimidium inventæ chordæ AB eſt ſinus $45° = AO$.

II. Fig. 93. *Invenire ſinum* 30°. Sit chorda AD & angulus $ACD = 60°$, ſeu AD latus hexagoni æquale radio; erit AO ejus dimidium ſinus 30.°.

III. *In-*

III. *Invenire ſinum* 18°. Cum latus decagoni circulo inſcripti ſit chorda ſubtendens arcum vel angulum 36°: erit ejus dimidium ſinus 180°. Invenitur autem latus decagoni ex dictis (69. III).

IV. Fig. 91. *Dato ſinu ID invenire ejus coſinum IE.* E quadrato radii CI auferatur quadratum ſinus dati ID, remanet quadratum DC, cujus radix eſt coſinus quæſitus CD=IE. * Invento coſinu IE=DC habetur ſinus verſus AD, ſi e radio AC auferatur CD.

V. Fig. 94. *Dato ſinu DE quocunque arcus AD, invenire ſinum arcus dimidii AO.* Quæratur dati ſinus coſinus EC & ſinus verſus AE, ex IV: in triangulo rectangulo ADE, cognitis jam duobus lateribus DE, AE, invenitur tertium AD, cujus dimidium AO eſt ſinus quæſitus arcus dimidii AD.

VI. Fig. 94. *Dato ſinu AO arcus AF invenire ſinum DE arcus dupli AD.* Eſt AD=2AO: quæratur dati ſinus AO coſinus CO; ſunt autem triangula rectangula, ob communem angulum A, ſimilia AOC, AED: ergo AC: CO=AD: DE, cumque AC ſit radius, ex primis tribus terminis cognitis eruetur DE ſinus quæſitus.

VII. Fig. 95. *Datis ſinubus EH arcus EB, & DG arcus AD, invenire ſinum arcus intermedii DE.* Quæratur ſinus EH coſinus EF, & ſinus dati DG coſinus DI: ſubtracto KI=EH ex DI habetur KO, & ablato KF=DG ex EF, remanet KO: igitur in triangulo rectangulo DKE cognitis duobus lateribus DK, EK, invenitur tertium, chorda DE, cujus dimidium eſt ſinus dimidii arcus DE; quæratur demum ſinus dupli arcus, ex VI, qui erit quæſitus ſinus arcus intermedii DE.

VIII. *Invenire ſinus minutorum ab* 1′ *usque ad* 45′. Cum inventi ſint ſinus 30°, & 36°; qui eſt ſinus arcus dupli 18°; erit & inventus ſinus arcus intermedii 24°: & arcus dimidii 12°, & 6°, & 3°, & 1°. 30′, & 45′. Sit jam, fig. 96, *oi* ſinus 45′; arcus exiguus A*i* vix differet a lineola recta: eritque triangulum A*oi* rectangulum in *o*; dividatur ergo arcus A*i* in partes æquales 45, ut una harum partium ſit A*r*; erit *mr* ſinus unius minuti: ſiat

A*i*:

$Ai : Ar = oi : mr = 45 : 1$; invenietur mr ſinus unius minuti. * Facile erit, eadem methodo invenire ſinus $2'$, $3'$, $4'$ &c. Imo reperietur ſinus unius minuti ſecundi &c. * Porro ex inventis ſinubus ſi quærantur coſinus, ſinus arcus dimidii, dupli, & intermedii, habebuntur omnes ſinus, qui jam continentur in *canone ſinuum*, ſeu in tabulis typo impreſſis.

IX. Fig. 91. *Dato quovis ſinu ID arcus AI, invenire ejusdem arcus tangentem AT, & ſecantem CT.* Invento coſinu CD, fiat CD : CA = ID : AT, erit AT quæſita tangens. Si fiat CD : CA = CI : CT erit CT quæſita ſecans. * Eodem modo jam habebitur cotangens BF, ſi fiat CE : CB = IE : BF &c. * ſecantium nobis hic nullus erit uſus.

ARTICULUS II.

Reſolutio triangulorum rectangulorum.

78. THEOREMA. Fig. 97. *In quovis triangulo rectangulo ABC, quodvis latus poteſt ſumi pro radio.*

DEMONSTRATIO. Si enim hypotenuſa CB ducatur tanquam radio arcus IB, erit AB ſinus anguli C, & AC ejus coſinus, id eſt ſinus anguli B; Igitur ſi hypotenſa ſumitur pro radio, erunt crura ſinus angulorum oppoſitorum. * Quodſi AB fiat radius, quo ducatur arcus Ae, erit AC crus alterum tangens anguli B, & BC hypotenuſa erit ſecans. Ita ſi crus AC fuerit radius, ducto arcu Ad, erit AB tangens anguli C, hypotenuſa ſecans. Generaliter ergo, ſi unum crus fiat radius, erit crus alterum tangens anguli oppoſiti, & hypotenuſa ſecans.

79. PROBLEMA. *Reſolvere triangula rectangula, id eſt datis tribus partibus, invenire reliquas.* Varii ſunt caſus Fig. 97. qui omnes continentur in ſubjecto ſchemate, & formulæ ſequentes eruuntur ex præcedente Theoremate (78; ſemper autem angulus rectus A cognoſcitur; radius autem exprimitur per R.

Data

Data	Quærenda	Refolutio
AB, AC	B BC C	AB : AC = R : tang. B. fin. B : R = AC : BC. AC : AB = R : tang. C.
AB, BC	C B AC	BC : AB = R : fin. C. Habetur, invento C. R : fin B = BC · AC.
AC, BC	B C AB	BC : AC = R : fin. B. Habetur, invento B. R : fin. C = BC · AB.
AB, B	C AC BC	Habetur, dato B fin. C : fin. B = AB : AC. fin. C : R = AB : BC.
BC, B	C AB AC	Habetur, dato B. R : fin. C = BC : AB. R : fin. B = BC : AC.

ARTICULUS III.

Refolutio triangulorum non rectangulorum.

80. THEOREMA. *In quovis triangulo non rectangulo latera funt, uti finus angulorum oppofitorum.*

DEMONSTRATIO. Sit *primum* triangulum acutangulum ABC, Fig. 98. circumfcripto circulo, ducantur ad fingula latera, quæ erunt chordæ, perpendicula ex centro OD, OE, OF, & radii ad fingulos angulos, erit (53. I.) angulus $m = C$, cujus anguli m finus eft BD dimidium lateris AB: ita AE dimidium lateris AC eft finus anguli $n = B$: & CF dimidium lateris BC eft finus anguli $r = A$: five dimidia latera funt finus angulorum oppofitorum; cumque tota fint, ut dimidia: erunt latera ut finus angulorum oppofitorum. Sit *dein* triangulum ABC obtufangulum, Fig. 99. Circumfcripto circulo, & ductis AM, BM. erunt anguli $C + M = 180^\circ$ (53. III.): igitur M eft fupplementum anguli C, & idem utriusque finus; eft autem BD dimidium lateris AB finus anguli $BOD = M$: ergo & finus anguli C. Ita dimidium lateris AC eft finus anguli B; & dimidium lateris BC eft finus anguli A: igitur

iterum

iterum dimidia latera sunt sinus angulorum oppositorum; & ipsa latera sunt ut sinus horum angulorum.

81. THEOREMA. Fig. 100. *In triangulo ABC est summa laterum duorum AC + BC ad eorum differentiam BC − AC, sicut tangens semisummæ angulorum his lateribus oppositorum m + n est ad tangentem semidifferentiæ eorundem angulorum.*

DEMONSTRATIO. Latere majore BC ex C ducatur circulus: producatur AC in D & F: ducatur BD, BF, & ad hanc perpendicularis FG usque in AB productam in G. Erit AD = AC + BC; AF = CF − AC = BC − AC. Præterea est externus $s = m + n = o + i + n = 2\,o$: igitur o est semisumma angulorum m & n; cumque sit externus $m = o + i$, erit i semidifferentia angulorum m & n; constat enim ex Algebra, partem majorem esse æqualem semisummæ + semidifferentiæ duarum partium, in quas totum dividitur; cum igitur o sit semisumma angulorum m & n; & $o + i = m$, qui est major pars, quam n, utpote angulus majori lateri BC oppositus: erit i semidifferentia angulorum m & n. Jam vero in triangulo FBD angulus B, in semicirculo, est rectus: ergo assumpto radio BF, erit BD tangens anguli o, seu tangens semisummæ m & n. Ex eadem ratione in triangulo rectangulo BFG est FG tangens anguli i, semidifferentiæ angulorum m & n: His positis, triangula ABD, AFG sunt similia, cum anguli ad A sint æquales, & D = r; nam BD, FG perpendiculares ad BF, sunt parallelæ, ergo secans DF facit D = r. Igitur AD : AF = BD : FG.

82. THEOREMA. Fig. 101. *In triangulo ABC, si ex angulo C ad latus maximum AB demittatur perpendicularis CD, erit latus maximum AB ad summam reliquorum AC + BC; sicut horum differentia ad differentiam segmentorum lateris maximi BD − AD.*

DEMONSTRATIO. Producto latere AB in G, latere AC in E & F, atque ductis BE, FG, erunt trianguli ABE, AFG similia, ob angulos ad A æquales, & E = G, cum insistant eidem arcui BF: igitur AB : AE = AF : AG; est autem AE = AC + CE = AC + BC summa laterum: AF = CF − AC = BC − AC differentia laterum:

AG

AG=DG — AD=BD — AD differentia ſegmentorum lateris maximi.

83. PROBLEMA. *Reſolvere triangula obliquangula.* Varii caſus eſſe poſſunt.

I. Fig. 98. & 99. *Datis in triangulo ABC duobus lateribus AB, BC, & angulo A his lateribus non comprehenſo, invenire reliqua.* Ex dictis (80)erit BC : AB=ſin. A. ſin. B. Jam invento B, erit ſin. A: ſin. B=BC: AC.

II. *Dato uno latere AB & duobus angulis quibuslibet, invenire reliqua.* Angulus tertius notus erit. Dein erit ſin. C: ſin. A=AB: BC; & ſin C: ſin. B=AB: AC.

III. *Datis duobus lateribus AC, BC, cum angulo C his lateribus comprehenſo*, Fig. 100, *invenire reliqua.* Fiat AC+BC : BC—AC=Tang. ſemiſummæ angulorum *m* & *n*: Tang. ſemidifferentiæ *m* & *n*. Cum dato C ſciatur ſumma reliquorum, ſcitur & ſemiſumma, cujus proin tangens in canone ſinum & tangentium reperitur: in eodem canone inventa tangens ſemidifferentiæ angulorum *m* & *n* dabit ipſam hanc ſemidifferentiam, quæ addita ſemiſummæ dat angulum *m*=A (81.): unde jam ſcitur & B. Ergo, ut prius, I, erit ſin. B: ſin C=AC: AB.

IV. *Datis tribus lateribus invenire angulos.* Fig. 101. Inveniatur (101.) differentia AG; quæ addita lateri maximo AB dat chordam BG: hujus dimidium eſt BD. Cognitis jam in triangulo rectangulo BDC duobus lateribus BC, BD, invenitur (79.) angulus *m*, igitur & B. Eodem modo ex dimidia chorda BG=DG ſubtrahatur inventa differentia AG, habetur AD; cumque etiam in triangulo rectangula ACD notum ſit latus AC, invenietur (79) angulus *n*: igitur & A. Cogniti ergo jam habentur ſinguli anguli A, B, C.

V. *Datis ſex partibus, vel iis, ex præcedentibus, inventis, invenire trianguli altitudinem.* Cadat *primum*, Fig. 101. altitudo CD intra triangulum ABC; noſcuntur in triangulo rectangulo ADC angulus A, & latus AC; ergo (79) invenitur quæſita CD. Cadat *dein*, Fig. 102, altitudo CD extra triangulum ABC in baſin AB productam; notus erit ex *m* ejus ſupplementum *n*, & latus AC in tri-

angulo

angulo rectangulo ADC: ergo (79) invenietur & quæsita CD.

84. COROLLARIA. I. In triangulo datis duntaxat tribus angulis, habetur quidem ratio laterum ad se invicem, cum hæc sint ut sinus angulorum oppositorum: verum absoluta laterum magnitudo inveniri nequit; cum manentibus iisdem angulis, latera possint esse majora vel minora, ut patet in triangulis similibus.

II. Dimensiones omnes, quæ superius (67) geometrice institutæ sunt, jam etiam erui trigonometrice poterunt; cum nempe in triangulis illis semper tres partes fuerint cognitæ. Et methodus quidem trigonometrica longe adcuratior est, nec tot errorum periculis obnoxia, ut illa geometrica; cum in efformandis triangulis similibus in charta minimus error, det in trianguli majoris lateribus sæpe valde notabiles errores; in trigonometricis autem operationibus, iis triangulis similibus opus non est, ut patet. Quare in dimensionibus majoris momenti, E. g. in delineandis mappis geographicis, &c. semper trigonometrica resolutio adhibenda est.

III. Cum sinus & tangentes sint numeri valde magni, atque in resolutione triangulorum perpetuo adhibenda sit eorum multiplicatio & divisio; ingens harum operationum difficultas ferme sublata est, si sinuum & tangentium logarithmi adhibeantur; cum ita sola additione & subtractione opus sit. Tum vero & numerorum, quibus laterum magnitudo exprimitur, logarithmi sunt substituendi ipsis his numeris.

CAPUT

CAPUT III.

De ſolidis, ſeu Corporibus.

ARTICULUS I.

Aequalitas ſolidorum.

85. DEFINITIO. *Planum* ſeu ſuperficies plana eſt magnitudo longa tantum & lata, cujus nulla pars eſt altera altior aut magis depreſſa. Concipitur generari, ſi Fig. 103., rectæ AB jungatur perpendicularis AC, quæ circa immotam AB gyretur; figura ſic deſcripta CDEFG erit planum. * Recta AB perpendicularis tribus rectis ex eodem puncto A in plano ductis, eſt perpendicularis ipſi plano, & omnibus rectis in eodem plano ex A ductis. * Quodſi Fig. 111, rectangulum AC*io* circa latus *io* immotum gyretur, rectæ A*o*, C*i* deſcribent plana AB, CD parallela. Igitur perpendicularis quælibet ad unum planum eſt talis etiam ad alterum parallelum, & omnes perpendiculares inter plana parallela ſunt æquales; plana vero ſunt parallela, ſi tres ſaltem perpendiculares ex tribus punctis in una recta non jacentibus fuerint æquales * Fig. 104. Duorum planorum AD, BC inclinationem ad ſe invicem metitur angulus FIE, comprehenſus a crure FI ducto in plano BC perpendiculariter ad communem ſectionem planorum AB, & a crure EI ducto perpendiculariter ad eandem ſectionem AB in plano AD.

86. THEOREMA. I. Fig. 105. *Communis duorum planorum CD, EF, ſectio AB eſt linea recta.* II. Fig. 106. *Si planum IK ſecet alia duo plana parallela EF, GH, erunt communes ſectiones AB, CL rectæ parallelæ.*

DEMONSTRATIO. I. Fig. 105., ſi AB non eſt recta, ducatur ex A in B alia A*n*B in plano CD, & alia A*m*B in plano EF: hæ igitur duæ rectæ claudent ſpatium, quod eſt abſurdum: igitur ex A in B unica recta eſt AB ſectio communis planorum.

II. Fig. 106. Erigantur ex communi ſectione AB in plano IK duæ perpendiculares ad ſectionem communem

CL, nempe AC, BD, erunt hæ æquales (85) & parallelæ; igitur & parallelæ ſunt AB, CD.

87. DEFINITIO. *Solidum*, ſeu *corpus* eſt magnitudo longa, lata & profunda. *Regulare* terminatur planis regularibus æqualibus & ſimilibus: ſecus erit *irregulare*. Solida hæc planis terminata vocantur *polyedra*; ſpeciatim vero a numero laterum planorum, quibus terminantur, eſt aliud *tetraëdrum*, aliud *pentaëdrum*, *hexaëdrum* &c. * *Angulus ſolidus* rectilineus eſt, qui in ſolido fit a trium ſaltem planorum angulis in eodem puncto, extra idem planum concurrentibus. Fig. 107. angulus D ſolidus conſtituitur a planis angulis tribus ADB, ADC, BDC. Ex quo patet, omnes angulos planos unum ſolidum conſtituentes ſemper eſſe minores quatuor rectis; quatuor enim recti juncti in eodem puncto ſunt in eodem plano. Porro ex natura anguli ſolidi eruitur, non niſi quinque polyedra eſſe regularia: vel enim plana ſunt triangula æquilatera; tum enim in angulo ſolido poſſunt concurrere tria, quatuor, quinque, quorum ſcilicet menſura erit 180, 240, 300. graduum; non item ſex, quorum anguli conficiunt quatuor rectos; habentur ergo tria polyedra regularia, tetraëdrum, ogdaëdrum, icoſaëdrum, ſeu viginti laterum: vel plana ſunt quadrata; tum tria tantum poſſunt conjungi in angulum ſolidum, & habebitur hexaëdrum, ſeu cubus: vel demum plana ſunt pentagona regularia; & iterum tria ſolum in angulum ſolidum jungi poſſunt, orieturque dodecaëdrum, ſeu duodecim laterum. Reliquorum planorum regularium tres anguli non ſunt minores quatuor rectis; igitur angulum ſolidum efficere nequeunt. * Porro ſolida varia ſunt:

I. *Pyramis*, Fig. 107, eſt ſolidum, ad cujus baſeos ABC latera eriguntur triangula ABD, ACD, BCD in uno vertice D convenientia. Pyramis iſthæc eſt triangularis, quia baſis eſt triangulum; quæ etiam poteſt eſſe quodvis polygonum Fig. 108. * Altitudo pyramidis eſt perpendicularis D*k* ex vertice D ad baſin, ſi opus ſit, productam, ut EG in pyramide ABCE.

II. *Priſma*, Fig. 109, eſt ſolidum terminatum duabus baſibus ABC, DEF æqualibus & parallelis, & ceteris lateribus parallelogrammis AE, CD, BF. Iſthoc priſma a baſi vocatur triangulare, quæ poteſt eſſe etiam quodvis po-

lygonum

lygonum. Generatur ascensu basis ABC semper parallelo. * Altitudo est perpendicularis inter bases.

III. *Parallelepipedum*, Fig. 110, est solidum sex parallelogrammis clausum, quorum bina opposita sunt æqualia, similia & parallela. Generatur ascensu basis parallelogrammæ AD semper parallelo; est igitur prisma, cujus basis est parallelogrammum. * Altitudo est perpendicularis inter duo latera opposita, ceu bases; cum quævis opposita latera possint haberi pro basibus.

IV. *Cubus* est parallelepipedum, cujus omnia latera sunt idem quadratum. Generatur, Fig. 115, dum quadratum baseos AE ascendit semper parallele in recta basi perpendiculari AC=AB * Altitudo igitur est ipsum latus baseos AB=AC=BE, quod radix cubi dicitur.

V. *Cylindrus*, Fig. 111, est solidum clausum duabus basibus AB, CD, quæ sint circuli æquales paralleli, & superficie rotunda, descripta per rectam AC circa bases motam. Axis cylindri est recta *oi* centra basium jungens; quæ si fuerit ad bases perpendicularis, cylindrus vocatur *rectus*: secus erit *obliquus*, ut *abdc*. Generatur ascensu baseos circularis parallelo. Cylindrus rectus etiam generatur motu rectanguli AC*io* circa immotum latus *oi*. * Altitudo cylindri est perpendicularis ab una basi ad alteram, si opus sit, productam, ut in obliquo, *de*.

VI. Fig. 112. *Conus* est solidum clausum basi AB circulari, & superficie orta ex motu rectæ AC, fixæ in puncto C, circa basin. *Axis* coni est recta C*o* ex vertice coni C ad centrum baseos ducta; quæ si fuerit ad basin perpendicularis, erit *conus rectus*: secus erit *obliquus*. Conus rectus generatur etiam motu trianguli rectanguli A*o*C, circa cathetum *o*C immotam. * Altitudo est perpendicularis ex vertice ad basin, C*o* in recto, *ce* in obliquo.

VII. *Sphæra* est solidum unica superficie clausum, ad quam omnes radii ex eodem centro ducti sunt æquales. Generatur motu semicirculi circa diametrum immotam. * Ex Fig. 113. facile intelligitur, quid sit sphæra, aut conus AB*i* cylindro AD inscriptus; & quid sit cylindrus AD sphæræ, aut cono circumscriptus.

88. HYPOTHESIS. Propter summam in *stereometria*, seu doctrina solidorum, facilitatem, recte passim admittitur *methodus indivisibilium*, *cavalleriana* ab inventore dicta. Consideratur nempe punctum ceu magnitudo infinite parva, cum extensione in longum, latum & profundum infinite parva. Unde linea, ex his punctis, ceu elementis exurgens, præter longitudinem, jam intelligetur habere aliquam latitudinem & profunditatem pariter infinite parvam. Igitur & quævis superficies, & quodvis planum ex his lineis ceu elementis ortum habebit etiam profunditatem infinite parvam. Demum solidum consideratur ex ejusmodi planis æqualis & infinite parvæ profunditatis componi; quale planum erit & quævis sectio solidi per planum. Licet hæc methodus recedat a summo rigore, nullum tamen errorem sensibilem potest inducere. * Vocantur autem dicta elementa indivisibilia, quod in ulteriorem eorum divisionem non inquiratur.

89. THOREMA. Fig. 107. I. *Si pyramides triangulares ejusdem baseos & altitudinis ABCD, ABCE fuerint secta plano basi ABC parallelo; erunt sectiones mno, rvs triangula mutuo æquilatera, æqualia, & similia basi & inter se.* II. *Pyramides ergo triangulares ejusdem basis, & altitudinis sunt æquales: uti* & III. *Quæcunque pyramides æqualium basium & altitudinum.*

DEMONSTRATIO. I. Cum triangulum quodvis ABD, ACD, BCD sit planum secans plana parallela ABC, mno; erunt AB, mn, & AC, mo, & BC, no parallelæ. Cum pariter triangulum quodvis ABE, ACE, BCE sit planum secans plana parallela ABC, rvs; erunt AB, rv, & AC, rs, & BC, vs parallelæ. Demittantur ex verticibus D, E perpendicula ad basin communem ABC, nempe Dk, EG, quæ, ex hypothesi, sunt æqualia; uti & ki = GF, perpendicula inter plana parallela: Igitur & iD = FE. Sint autem mi & rF ductæ in plano secante, quæ erunt parallelæ ductis in basi Ak & AG (85). His positis erit $\left\{\begin{array}{l} kD : iD \; (= AD : mD) = AB : mn \\ GE : FE \; (= AE : rE) = AB : rv \end{array}\right\}$ Cumque sit $kD : iD = GE : FE$, erit & $AB : mn = AB : rv$, igitur est $mn = rv$. Eodem modo est $\left\{\begin{array}{l} kD : iD \; (= AD : mD) = AC : mo \\ GE : FE \; (= AE : rE) = AC : rs \end{array}\right\}$ inde, ut prius, habetur $mo = rs$.

De-

Demum est $\begin{cases} kD : iD \ (= AD : mD = BD : nD) = BC : no \\ GE : FE \ (= AE : rE = BE : vE) = BC : vs \end{cases}$

ergo iterum $no = vs$: Igitur sectiones mno, rvs sunt triangula mutuo æquilatera, æqualia & similia inter se, & basi.

II. Cum harum pyramidum eadem sit altitudo, patet, tot fieri posse sectiones æquales, quot sunt puncta in perpendiculari $Dk = EG$ (88): Cum igitur ita sint omnia elementa pyramidum æqualia, erunt & ipsæ pyramides æquales.

III. Fig. 108. Facile, ut I, demonstrabitur, sectionem basi parallelam, quæcunque hæc fuerit, fore basi similem: basis igitur, & sectio sunt in ratione duplicata laterum homologorum: est igitur $Fb : ps = FG^2 : pq^2 = FE^2 : pE^2 = kE^2 : tE^2 = iE^2 : oE^2$. Est autem & in altera pyramide $ABC : mnr = AB^2 : mn^2 = AD^2 : mD^2 = iD^2 : oD^2$; cumque sit, ex hypothesi, $iE = iD$, $oE = oD$; erunt omnes allatæ rationes æquales; igitur $Fb : ps = ABC : mnr$; est vero ex hypothesi $Fb = ABC$: ergo & $ps = mnr$. Quæ demonstratio cum sit eadem pro quibusvis sectionibus æque altis ad bases parallelis; omnes sectiones unius pyramidis erunt æquales omnibus alterius; seu pyramides ipsæ æquabuntur.

90. THEOREMA. I. *Prisma triangulare dividitur in tres pyramides æquales: & pyramis triangularis est tertia pars prismatis triangularis ejusdem baseos & altitudinis. Prismata igitur quævis æqualium basium & altitudinum sunt æqualia.* II. *Parallelepipedum dividitur in duo prismata triangularia æqualia: sunt ergo & parallelepipeda æqualium basium & altitudinum æqualia: uti &* III. *Cylindri, &* IV. *Coni: Conus autem est tertia pars cylindri ejusdem baseos & altitudinis.*

DEMONSTRATIO. I. Fig. 109. Ductis diagonalibus in lateribus parallelogramis AF, BF, BD, erunt duæ pyramides ACFB, ADFB triangulares æquales; nam bases ACF, ADF, sunt triangula æqualia, in quæ per diagonalem divisum est parallelogrammum latus ACFD; est præterea eadem altitudo, perpendicularis ex eodem vertice communi B in planum ACFD demissa. Consideretur jam hæc ipsa pyramis ADFB insistens basi ABD = BDE, cui infiftit tertia BDEF ; erunt pyramides iterum æquales, cum & bafes fint æquales, & eadem altitudo, fcilicet perpendicularis, ex vertice communi F in planum ABED, cujus dimidia funt bafes dictæ, demiffa. Igitur pyramis prima ACFB & tertia BDEF funt æquales eidem mediæ ADFB: igitur omnes tres funt æquales inter fe: igitur pyramis ACFB, vel ABCF, ejusdem bafeos ABC cum prifmate, & ejusdem altitudinis eft prifmatis tertia pars; eft autem communis altitudo, perpendicularis ex F in bafin ABC. * Cum quævis bafis polygona poffit dividi in triangula, in totidem prifmata triangularia dividi poterit ipfum prifma; eruntque fingula æqualia tribus pyramidibus æqualis bafis & altitudinis: igitur omnia hæc prifmata, feu totum prifma erit triplum omnium pyramidum; omnes autem pyramides erunt æquales uni, cujus bafis fit compofita ex bafibus omnium, & eadem prior altitudo communis: igitur quodvis prifma eft triplum pyramidis ejusdem fecum bafeos & altitudinis; cum vero pyramides quævis æqualis bafis & altitudinis fint æquales (89. III.): erunt & earum tripla, feu prifmata æqualium bafium & altitudinum æqualia.

II. Fig. 110. Ductis, in bafibus oppofitis parallelogrammis, diagonalibus BC, EG, planum BCGE dividet parallelepipedum in duo prifmata triangularia ABCGEF, BCDHEG, quæ ob bafes ABC, BCD æquales, & communem cum parallelepipedo altitudinem erunt æqualia, ex II. Eodem modo alterum quodvis parallelepipedum fecabitur in duo prifmata æqualia: Igitur fi bafes fuerint parallelepipedorum æquales, eademque altitudo, prifmata omnia erunt, æqualium bafium & altitudinum, æqualia: igitur & eorum dupla, feu ipfa parallelepipeda æquabuntur.

III. Fig. 111. Si bafes circulares æquales AB, *ab* confiderentur ut polygona æqualia infinitorum laterum, erunt cylindri AD, *ad* prifmata æqualium bafium & altitudinum: igitur æquantur, ex I.

IV. Fig. 112. Si bafes circulares æquales AB, *ab* confiderentur ceu polygona infinitorum laterum; erunt coni ABC, *abc* duæ pyramides æqualium bafium & altitudinum: igitur æquantur (89). * Cum ergo pyramis fit tertia pars prismatis æqualis bafeos & altitudinis; erit &

conus

conus tertia pars cylindri æqualis baſeos & altitudinis; uti conus ABi, Fig. 113, ſibi circumſcripti AD.

91. THEOREMA. I. *Sphæra eſt duæ tertiæ cylindri circumſcripti.* II. *Sphæra etiam æqualis eſt pyramidi, cujus baſis ſit ſphæræ ſuperficies in planum extenſa, altitudo radius.*

DEMONSTRATIO. I. Fig. 114. Sit quadrans circuli ABC, & AD quadratum, & ACD triangulum rectangulum; ducaturque recta quævis EF parallela ad AB: intelligatur figura ſic deſcripta gyrari circa rectam AC immotam: deſcribet quadratum AD cylindrum: quadrans ABC hemiſphærium cylindro inſcriptum: triangulum CDA conum cylindro inſcriptum, cujus vertex ſit in A. Denique recta EF deſcribet circulum, qui erit ſectio cylindri baſi AB parallela: recta Ei ſectionem circularem hemiſphærii: recta Eo ſectionem circularem coni. Ducatur jam radius $Ai = AB = EF$: cumque ſit $CD : CA = Eo : EA$, & $CD = CA$, erit $Eo = AE$. Eſt jam $Ai^2 = Ei^2 + EA^2 = Ei^2 + Eo^2$; ſive $EF^2 = Ei^2 + Eo^2$: circuli autem ſunt, ut quadrata radiorum; igitur circulus deſcriptus radio EF æquatur circulis deſcriptis radio Ei & radio Eo; id eſt, ſectio cylindri æquatur ſectionibus hemiſphærii & coni; cumque id de quibusvis ſectionibus baſi AB parallelis verum ſit; omnes ſectiones cylindri æquantur omnibus hemiſphærii & coni; ſive cylindrus æquatur hæmiſphærio & cono ſibi inſcriptis: Igitur ſi a cylindro hoc auferatur conus inſcriptus, qui eſt ejus pars tertia (90. IV.), remanet hemiſphærium, inſcriptum cylindro, æquale duabus ejus tertiis. Igitur & tota ſphæra eſt duæ tertiæ cylindri circumſcripti. * Ex geneſi etiam ſphæræ patet, circulum ſphæræ maximum eſſe eum, qui tranſit per centrum, deſcribitur enim radio AB, cum reliqui deſcribantur recta radio ſemper minore Ei. Unde & colligitur ſectionem quamvis ſphæræ per planum, eſſe circulum &c.

II. Si cogitetur ſphæræ ſuperficies diviſa in triangula æqualia infinite parva, hæc a planis triangulis ſenſibili quantitate non different. Intelligantur jam in ſingulis his triangulis erigi pyramides, quarum communis vertex erit ſphæræ centrum; ſphæra æquabitur his infinitis pyramidibus æqualibus inter ſe, eritque altitudo omnium ipſe radius. Erit autem, ſi baſes illæ ſingulæ conjungantur in unam planam, &

& erigatur pyramis una, cujus altitudo ſit radius ſphæræ, erit, inquam, hæc una æqualis omnibus illis infinite parvis: igitur ſphæra eſt æqualis dictæ pyramidi.

92. PROBLEMATA. *Invenire corporum ſoliditatem*:

I. *Cubi* AF, Fig. 115. Cum ſit $AB = AC = CG$: erit cubi ſoliditas, ſi AB ducatur in AC, & ortum quadratum AD ducatur in CG: E. g. ſit $AB = 3$, erit cubus $AF = 3 \times 3 \times 3 = 9$. Patet ex ipſa figura. Igitur etiam cubi ſoliditas eſt baſis AD ducta in altitudinem CG.

II. *Parallelepipedi* AF, Fig. 116. Si anguli omnes ſunt recti, ut in Figura, dabit latus $AB \times AC$ baſin AD, quæ ducta in altitudinem CG dat ſoliditatem parallelepipedi. Cum ergo parallelepipeda quævis ejusdem baſeos & altitudinis ſint æqualia, erit cujusque ſoliditas baſis ducta in altitudinem.

III. *Priſmatis*. Ex dictis, II., patet haberi iterum ſoliditatem ex baſi ducta in altitudinem.

IV. *Pyramidis*. Cum hæc ſit tertia pars priſmatis æqualis baſis & altitudinis; habebitur ejus ſoliditas, ſi factum ex baſi in altitudinem dividatur per 3: vel ſi baſis ducatur in tertiam partem altitudinis: vel ſi tertia pars baſeos ducatur in altitudinem.

V. *Cylindri*. Cum hic ſit priſma infinitorum laterum, baſis ducta in altitudinem dabit ejus ſoliditatem.

VI. *Coni*. Cum hic ſit tertia pars cylindri æqualis baſis & altitudinis; baſis ducta in tertiam partem altitudinis: vel altitudo ducta in tertiam partem baſeos dabit ſoliditatem.

VII. *Sphæræ*. Circulus maximus ductus in diametrum dat ſoliditatem cylindri circumſcripti, cujus duæ tertiæ ſunt ſphæra. * Si radius ſphæræ ſit $= R$, peripheria circuli maximi $= P$, erit circulus maximus $= \frac{PR}{2}$: & cylindrus ſphæræ circumſcriptus $= \frac{PR}{2} \times 2R = PR^2$: ergo ſphæra $= \frac{2PR^2}{3}$.

VIII.

VIII. Fig. 117. *Pyramidis truncatæ AF.* Sit altitudo integra Go; ductis Ao, Dr, & Di, erit $or=Di$; & $Ar : Ao = Dr : Go$. Inventa Go habetur & $Gi = Go - io$; cumque ex hypotheſi nota ſit baſis ABC, eique parallela DFE, habebitur & tota pyramis ABCG, & pars ſuperior DEFG, ex IV. ſuperior igitur pars DEFG ex pyramide integra ABCG ſubtracta relinquit pyramidem truncatam AF.

IX. Fig. 118. *Coni truncati CD.* Reſolutio patet ex præcedente VIII.

X. *Corporis irregularis.* Cum capacitas vaſis, E. g. cylindrici, ſit hujus cylindri ſoliditas; demptis nempe lateribus: ponatur corpus irregulare in vaſe notæ capacitatis, & reliquum impleatur aqua, vel arena: extracto dein corpore inveniatur quantitas aquæ vel arenæ, quæ ſubtracta ex capacitate vaſis relinquit ſoliditatem corporis irregularis.

93. PROBLEMATA. *Inuenire ſolidorum ſuperficiem.*

I. *Cubi, parallelepipedi, priſmatis, pyramidis.* Cum horum Corporum latera ſint plana rectilinea, ſingulorum areæ inventæ dabunt totam ſuperficiem.

II. *Cylindri.* Cum baſes circulares conſiderentur, ut polygona infinitorum laterum, erit reliqua ſuperficies rotunda æqualis infinitis parallelogrammis, $ACmn$ quorum baſes An ſint partes peripheriæ circularium baſium: igitur hæc rotunda ſuperficies habebitur, ſi peripheria baſeos circularis ducatur in altitudinem; demum huic facto addantur ambæ baſes circulares; vide Fig. 111.

III. *Coni recti.* Fig. 112. Si baſis circularis ſpectetur ceu polygonum; erunt in ſuperficie rotunda infinita triangula AmC, quæ pro rectilineis haberi poſſunt; cumque Am ſit talis trianguli baſis infinite parva, ejus altitudo non differet a latere AC: Igitur peripheria circuli AB ducta in rectam AC dabit factum, cujus dimidium erit ſuperficies coni rotunda; cui addita baſis circularis AB dat totam coni recti ſuperficiem. * Coni obliqui ſuperficiem inveniendi modus necdum repertus eſt.

IV. *Sphæræ.* Cum ſphæra ſit $=\frac{2PR^2}{3}$ (92. VII); & ſit etiam æqualis pyramidi, cujus baſis ſit ſuperficies, altitudo radius ſphæræ (91. II); fiat ſuperficies $=S$; erit ſphæra (92. IV.) $=\frac{SR}{3}$. Igitur $\frac{2PR^2}{3}=\frac{SR}{3}$; & $2PR^2=SR$; & demum $2PR=S$. * Cum ſit circulus maximus $=\frac{PR}{2}$ (92. VII.) erit $S=2PR=\frac{PR}{2}\times 4$; id eſt: ſphæræ ſuperficies æquatur quadruplo circuli maximi. * Præterea cum, Fig. 113, ſuperficies rotunda cylindri ſphæræ circumſcripti ſit $=P\times 2R=2PR$, ex II; erit & hæc æqualis ſuperficiei ſphæræ inſcriptæ.

94. THEOREMA. I. *Duæ quævis pyramides, duo priſmata, duo parallelepipeda, duo cylindri & duo coni ſunt ad ſe in ratione compoſita baſium & altitudinum.* II. *Si baſes ſint æquales, ſunt ut altitudines: & viciſſim.*

DEMONSTRATIO. I. Sint baſes duarum pyramidum B, *b*; altitudines A, *a*; erit prima pyramis $=\frac{AB}{3}$; altera $=\frac{ab}{3}$ (92. IV) igitur eſt illa ad hanc $=\frac{AB}{3}:\frac{ab}{3}=$ AB; *ab*; quæ eſt ratio compoſita baſium & altitudinum. Eadem erit demonſtratio de ceteris ſolidis.

II. Si ſit $B=b$, erit $AB:ab=A:a$; ita ſi ſit $A=a$, erit $AB:ab=B:b$. * Cylindri æqualium altitudinum erunt ut quadrata diametrorum baſium circularium; baſes enim iſtæ, utpote circuli, ſunt in ratione quadrata diametrorum. Ita & coni æqualium altitudinum.

95. DEFINITIO. Solida ejusdem generis, E. g. duæ pyramides, ſunt ſimilia, ſi baſes ſint plana ſimilia, & altitudines ſint ut latera baſium homologa. * Cubi igitur omnes ſunt ſimiles. * Cylindri etiam ſphæris circumſcripti ſimiles ſunt. * Latera homologa baſium, & altitudines, dicuntur latera radicalia ſolidorum.

96. THEOREMA. I. *Solida ſimilia ſunt ad ſe in ratione triplicata quorumvis laterum radicalium.* II. *Sphæræ etiam ſunt inter ſe in ratione triplicata diametrorum.*

DEMON-

DEMONSTRATIO. I. Cum folida fint in ratione compofita bafium & altitudinum, bafes autem fimilium fint fimiles, & in ratione duplicata laterum homologorum, quæ ipfa latera fint ut altitudines: ratio ex duplicata laterum homologorum bafeos & fimplice altitudinum compofita erit ratio triplicata laterum homologorum, vel etiam altitudinum.

II. Cylindri fphæris circumfcripti funt ut bafes ductæ in altitudines; bafes autem, utpote circuli, funt ut quadrata diametrorum, & altitudines funt ipfæ diametri: ergo cylindri funt in triplicata ratione diametrorum. Cum jam fphæræ fint ut cylindri circumfcripti, quorum nempe funt duæ tertiæ: etiam fphæræ erunt in ratione triplicata diametrorum; id eft, ut cubi diametrorum, vel radiorum &c.

97. PROBLEMATA. I. *Invenire rationem fphæræ ad cubum diametri.* Sit diameter $=D$, peripheria circuli maximi $=P$, erit circulus maximus $=\frac{PD}{4}$, & fphæra $= \frac{2PD^2}{12} = \frac{PD^2}{6}$ (92. VII). Cum jam fit $D:P = 113:355$ (67. XII) dicatur $113 = a$, $355 = b$, erit $D:P = a:b$, & $P = \frac{bD}{a}$: unde fphæra $= \frac{bD^3}{6a}$; data ergo diametro D habetur fphæra, & cubus D^3. Quodfi fiat $D = a$, erit fphæra $= \frac{bD^2}{6}$: igitur fphæra ad cubum diametri $= \frac{bD^2}{6} : D^3 = bD^2 : 6D^3 = b : 6D = 355:678$. * Si admittatur ratio diametri ad peripheriam $= 100:314$, erit ratio fphæræ ad cubum diametri $= 157:300$ &c.

II. Fig. 119. *Conftruere virgam pithometricam, & ejus ope metiri fluida vafis cylindricis & doliis contenta.* Paretur vas cylindricum AD notæ capacitatis E. g. unius menfuræ. Jungatur Diametro $CD = AB$ perpendicularis infinita DE, transferatur CD in D1, ducta hypotenufa C1 ex D in 2; & fic porro fiat $D3 = C2$, $D4 = C3$. Transferatur hæc linea DE in virgæ parandæ unum latus; quod vocabitur latus geometricum. In alterum virgæ latus, arithmeticum, transferatur linea AF, in qua altitudo vafis fæpius pofita eft, nempe $A1 = 1$, $2 = 2$, 3 &c. Eritque

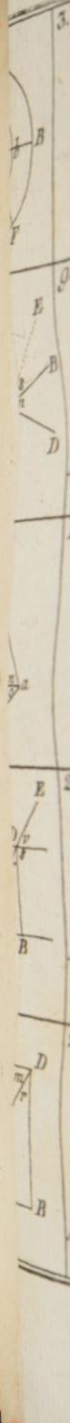
que parata virga pithometrica, cujus ufus fequens eft: fit vas aliud Cylindricum pq: menfuretur ejus diamer op latere geometrico virgæ: fit $op =$ D2. Si ponatur cylindrus pq ejusdem cum AD altitudinis, erit cylindrus pq: AD $= po^2 : CD^2$, quadratum rectæ D2 = C1 ad quadratum rectæ CD; eft autem quadratum rectæ C1 = D2 æquale quadratis de CD & de D1, ideft duobus quadratis de CD: igitur & cylindrus pq erit duplus cylindri AD. Sit jam vas aliud mp, cujus diameter op = D2, altitudo, latere arithmetico virgæ menfurata fit æqualis A2: erit mp: AD in ratione compofita bafium & altitudinum; cum ergo bafis cylindri pm fit dupla bafeos cylindri AD, & altitudo mo dupla AC, erit cylindrus pm quadruplus alterius AD, feu continebit vas pm quatuor menfuras; id quod facile obtinebitur, fi numerus lateris geometrici multiplicetur per numerum lateris arithmetici &c. * Porro dolium, Fig. 120, cum non fit cylindricum, eft tamen plerumque æquale cylindro $cdik$, qui habetur fi inter maximam diametrum dolii on & minimam ag affumatur media arithmetice proportionalis ci pro diametro bafeos circularis, & altitudo fit eadem, quæ dolii $ki = gh$: Si igitur diameter ci, menfurata latere geometrico virgæ, multiplicetur per altitudinem ki, menfuratam latere arithmetico virgæ, erit factum cylindrus æqualis capacitati dolii. * Cum vero dolia varie conficiantur, nec methodus indicata generalis fit: fecurius aqua, qua dolium repletur, vafe notæ capacitatis menfuratur; ut habeatur dolii capacitas; quod etiam in aliis vafis irregularibus obtinet.

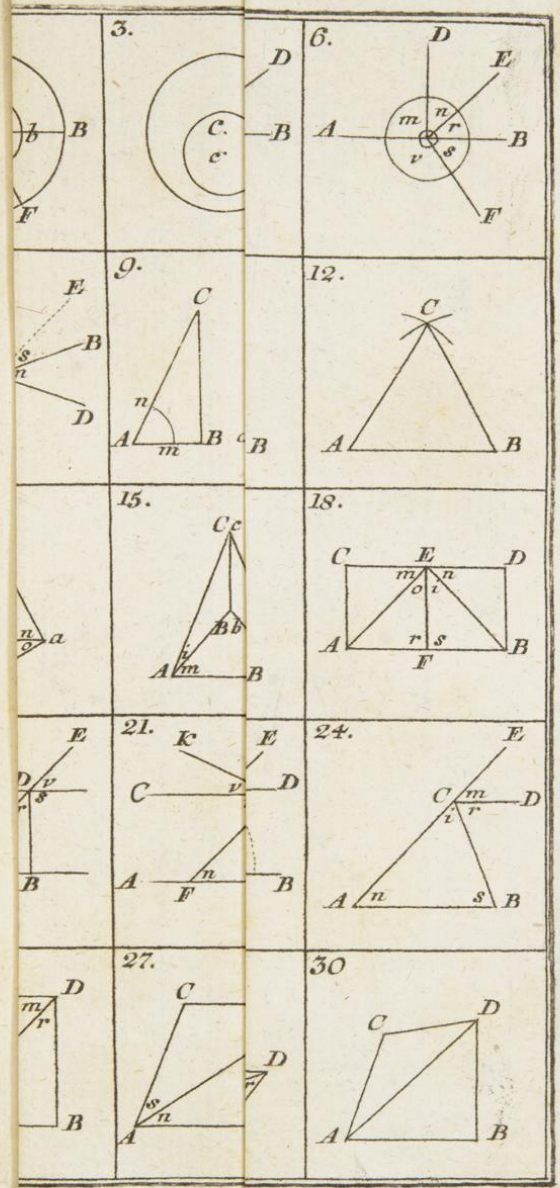
III. *Mutare datum cubum in fphæram æqualem: & viciffim.* Sit dati cubi latus $= c$, circuli maximi peripheria $= p$, radius $= r$, erit ex I. $p = \frac{2br}{a}$, & circulus maximus fphæræ $= \frac{2br}{a} \times \frac{r}{2} = \frac{br^2}{a}$, cylindrus fphæræ circumfcriptus $= \frac{br^2}{a} \times 2r = \frac{2br^3}{a}$; demum fphæra $= \frac{4br^3}{3a}$. Cum vero ex hypothefi debeat effe $c^3 = \frac{4br^3}{3a}$, erit $3ac^3 = 4br^3$, & $\frac{3ac^3}{4b} = r^3$; denique $r = \sqrt[3]{\frac{3ac^3}{4b}} = c\sqrt[3]{\frac{3a}{4b}}$, qui

radius

radius quærebatur; ejus enim ſphæra erit æqualis cubo dato. * Viciſſim ergo dato radio ſpæræ, invenietur latus cubi æqualis, ſeu ex priore formula erit $c = \sqrt[3]{\frac{4br^3}{3a}} = r\sqrt[3]{\frac{4b}{3a}}$.

IV. *Mutare quodvis ſolidum in cubum, vel ſphæram, æqualem.* Inventa corporis ſoliditate (92), vel ea data, extrahatur ex ea radix cubica, quæ erit latus cubi quæſiti. * Unde duplicatur cubus, triplicatur &c, cum ex ſoliditate bis, ter &c. ſumpta, extrahitur radix cubica &c. * Cum cubus mutari queat in ſphæram æqualem, ex III; etiam quodvis jam ſolidum mutari in ſphæram æqualem poterit.





3.
D
C.
c
B
b
B
F
6.
D
E
A
m n r
v s
B
F
9.
C
n
A m B
E
s
n
B
D
12.
C
A
B
15.
Cc
Bb
i
A m
B
n o a
18.
C E D
m n
o i
A r s B
F
21.
K E
C v D
A n B
F
E
D v s
r
B
24.
E
C m D
i r
A n s B
27.
C
D
r
s
n
A
D
m r
B
30
C D
A B

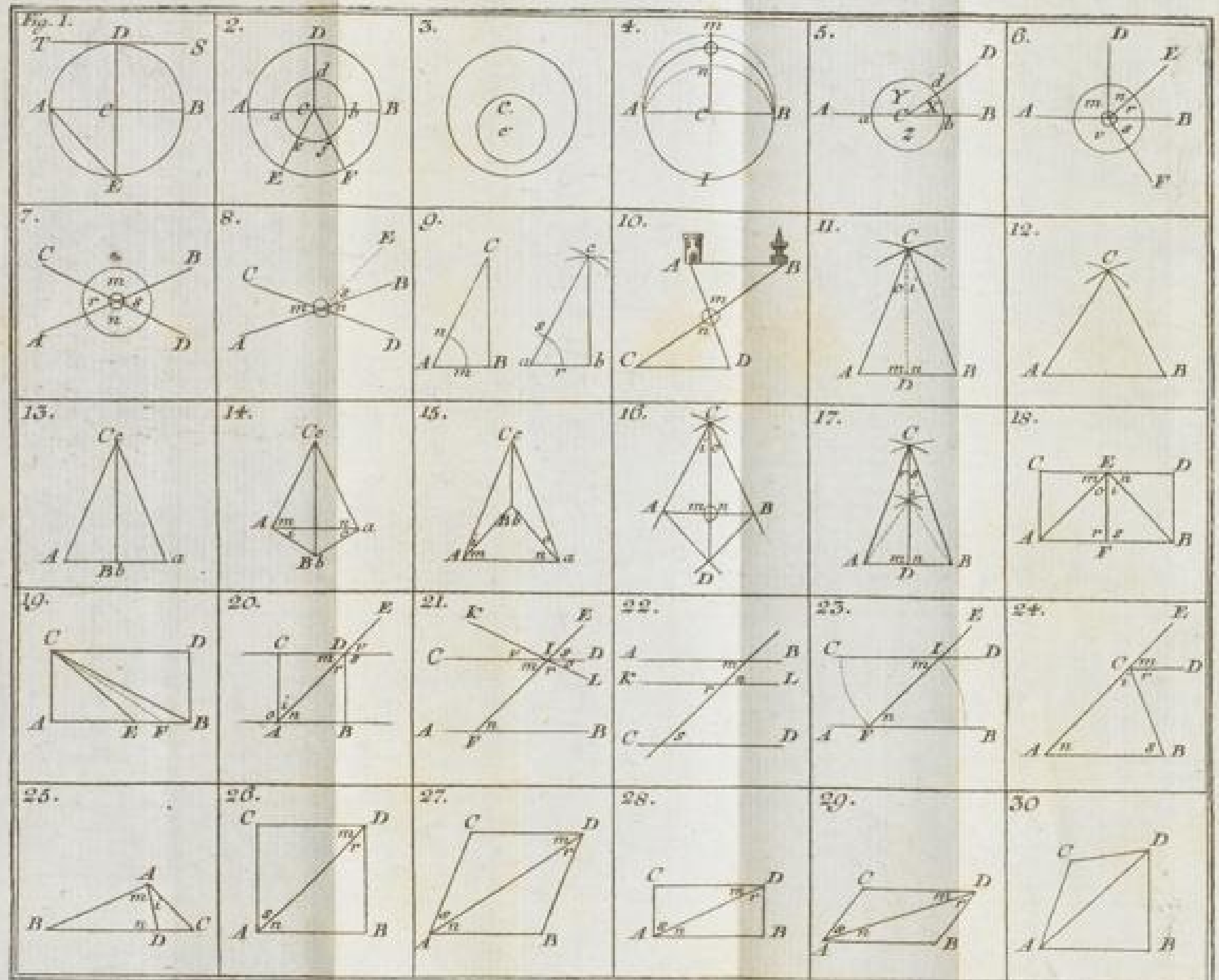
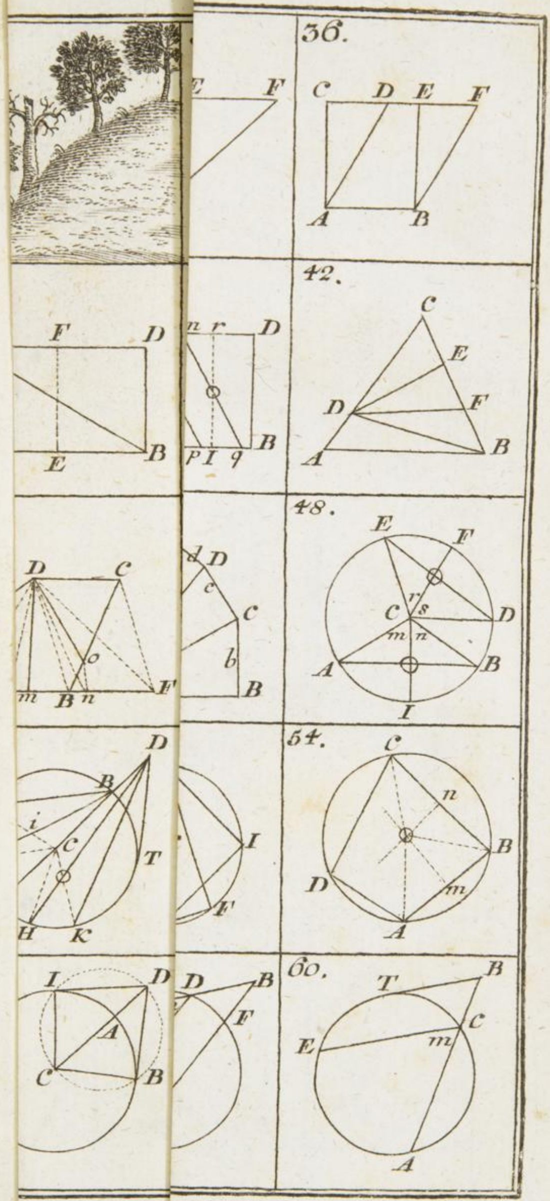


Fig. 1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30


36.
C D E F
A B
42.
C E D F A B
48.
E F r C s D m n A B I
54.
C n B D m A
60.
T B E C m A
F D E B P I q
n r D B
D C o m B n F
d D c C b B
D B i C T H K
I D A C B
D B F
E F
I

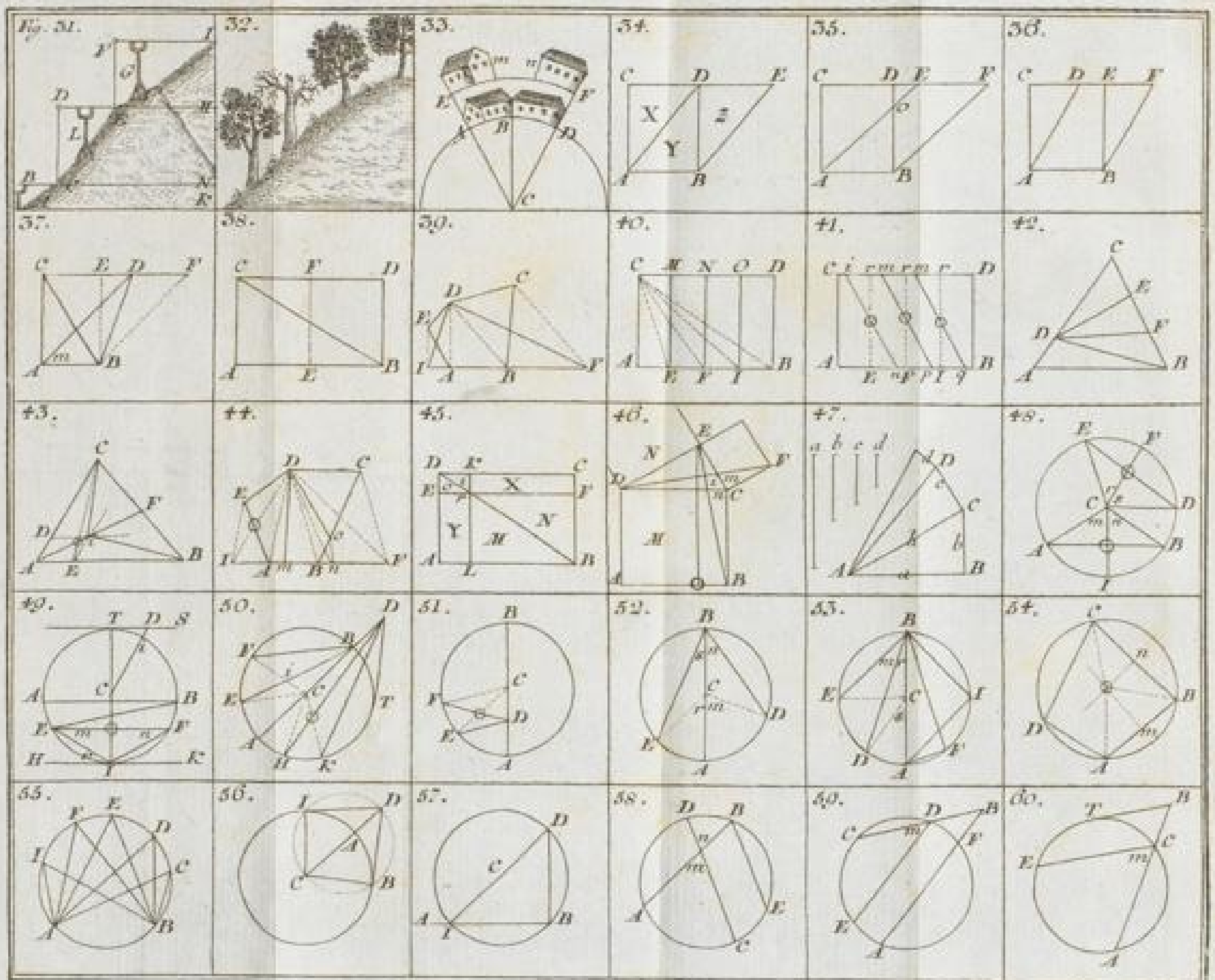
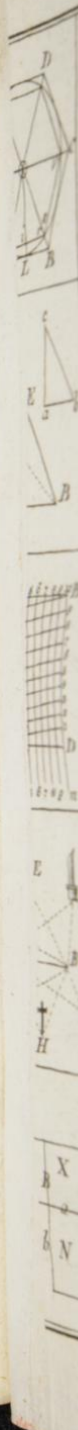
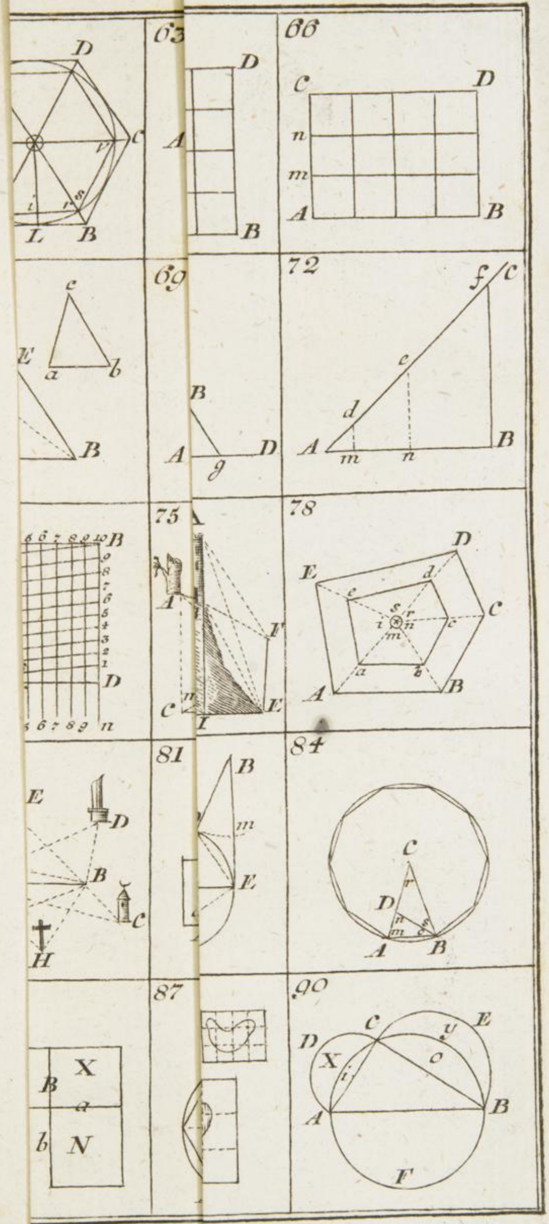


Fig. 31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
60.


D
L
B
E
B
D
E
H
X
B
b
N


63
66
69
72
75
78
81
84
87
90

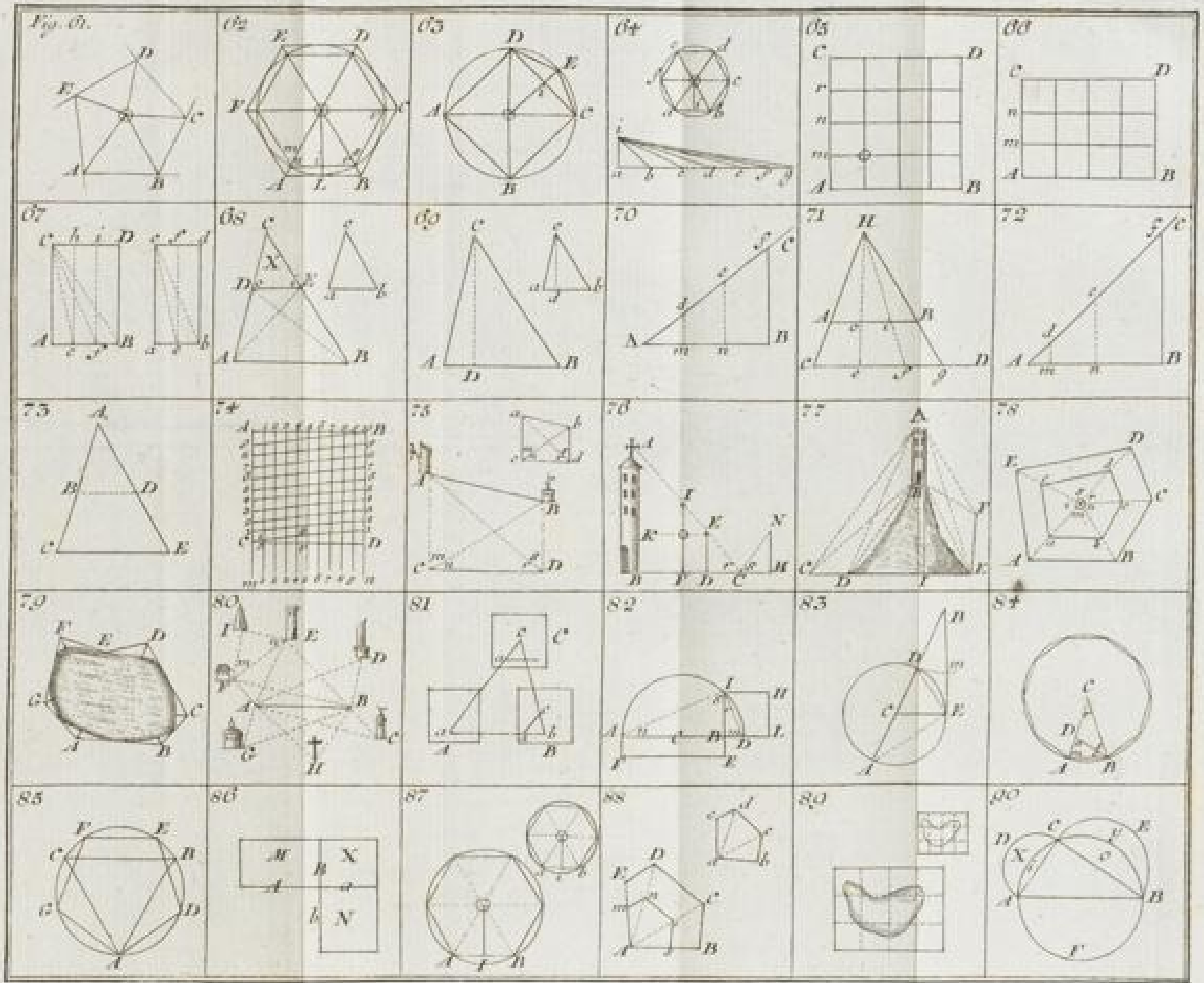
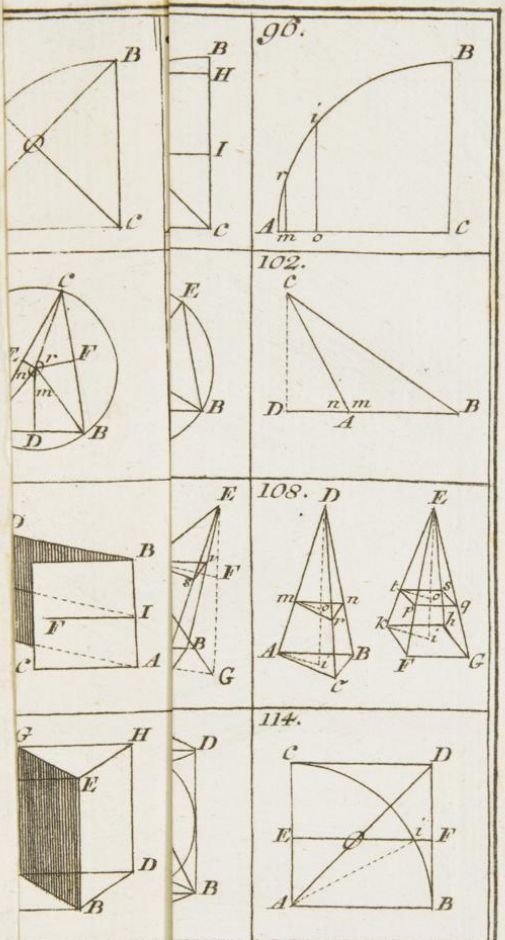


Fig. 61.
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90



96.
102.
108.
114.
120

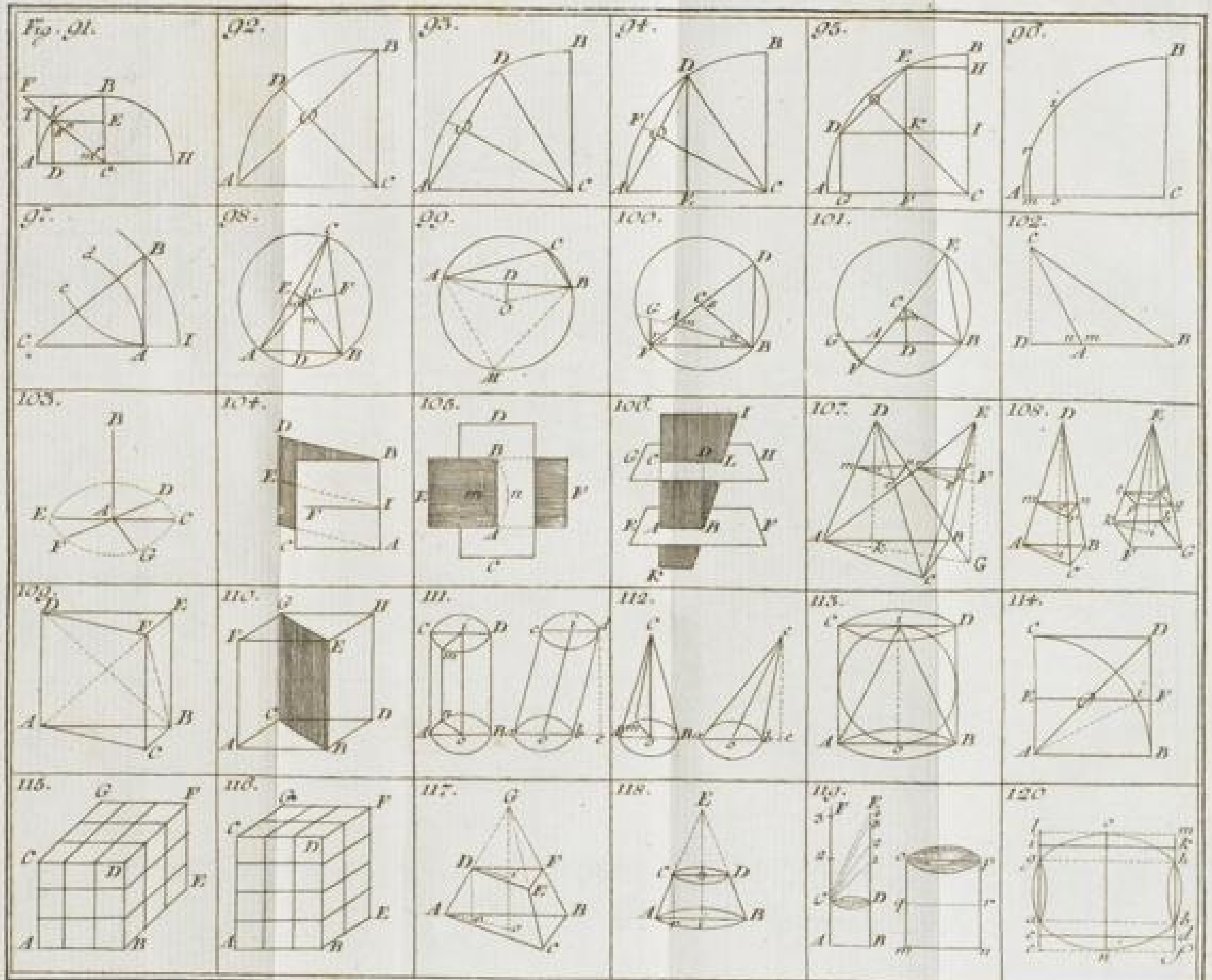


Fig. 91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.
99.
100.
101.
102.
103.
104.
105.
106.
107.
108.
109.
110.
111.
112.
113.
114.
115.
116.
117.
118.
119.
120.

CO

SEC

CON

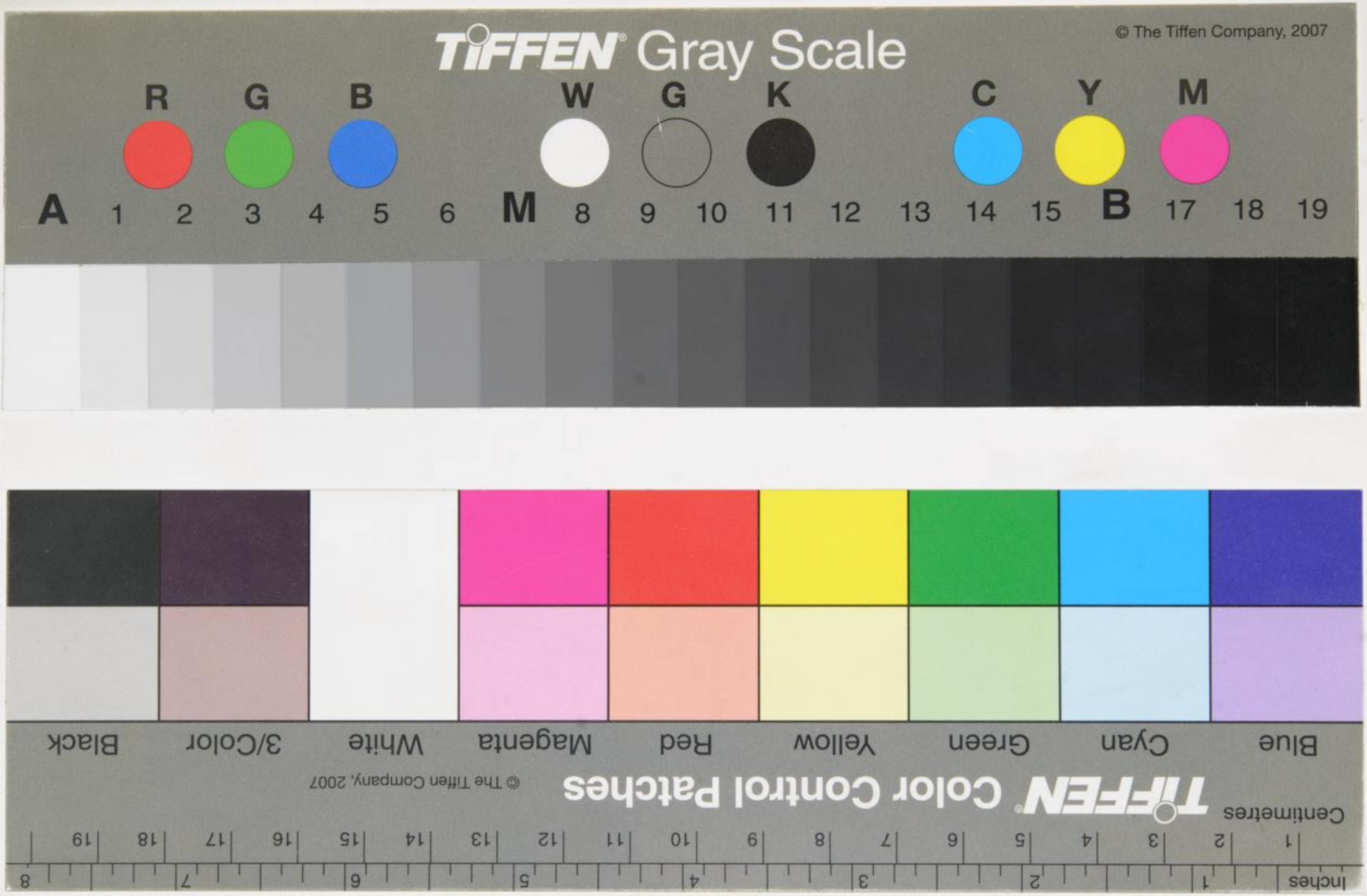
AVDIT

FRAN

In Alma V

Pr

Typis IO


TIFFEN Gray Scale
© The Tiffen Company, 2007
R G B W G K C Y M
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
TIFFEN Color Control Patches
Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black
© The Tiffen Company, 2007
Centimetres
Inches