Anwendung der Summenformel von Mac-Laurin auf harmonische Reihen.

Zunächst mag eine elementare Methode zur independenten Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen gegeben werden.

Bezeichnet C_p^n die Anzahl der Combinationen von p Elementen zur n^{ten} Classe ohne Wiederholungen, so ist zunächst

$$p^2 = 2!\, C_p^2 + C_p^1$$

und durch beiderseitige Multiplication mit p

$$p^3 = [(p-2) + 2]\, 2!\, C_p^2 + [(p-1) + 1]\, C_p^1$$

$$= 3!\, C_p^3 + 2!\,(2+1)\, C_p^2 + C_p^1$$

da

$$(p-i)\, C_p^i = (i+1)\, C_p^{i+1}$$

Setzt man nun

$$1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + m = S_1^m,$$

$$1 + 2\,(1 + 2) + 3\,(1 + 2 + 3) + \cdots + m\,(1 + 2 + \cdots + m)$$

d. i. $$1 + 2\, S_1^2 + 3\, S_1^3 + \cdots\cdots\cdots\cdots + m\, S_1^m = S_2^m,$$

$$1+2[1+2\,S_1^2] + 3\,[1+2\,S_1^2+3\,S_1^3] + \cdots + m[1+2\,S_1^2+\cdots+m\,S_1^m]$$

d. i. $$1+2\, S_2^2+3\, S_2^3+\cdots\cdots\cdots + m\, S_2^m = S_3^m$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

....

allgemein $$1 + 2\, S^2_r + 3\, S^3_r + \cdots\cdots\cdots + m\, S^m_r = S^m_{r+1}\,,$$

wo immer $$i\, S^i_r + S^{i-1}_{r+1} = S^i_{r+1}\,,$$

wenn
$$\left.\begin{array}{l} S^1_0 = S^2_0 = \cdots\cdots = S^i_0 \\ S^1_1 = S^1_2 = \cdots\cdots = S^1_r \end{array}\right\} = 1$$

gesetzt wird, so kommt durch Einführung dieser Symbole

$$p^4 = 4!\; C^4_p + 3!\; S^3_1\, C^3_p + 2!\; S^2_2\, C^2_p + C^1_p$$

....

Das durch höhere Induction leicht beweisbare Bildungsgesetz ist allgemein dargestellt durch $p^m =$

$$m!\; C^m_p + (m-1)!\; S^{m-1}_1\, C^{m-1}_p + (m-2)!\; S^{m-2}_2\, C^{m-2}_p + \cdots\cdots + 2!\; S^2_{m-2}\, C^2_p + C^1_p$$

Lässt man hierin p alle Werte der ganzen Zahlen von 1 bis p annehmen und addiert sämmtliche auf diese Weise entstehenden Gleichungen, so kommt mittels der Relation

$$C^m_p + C^m_{p-1} + C^m_{p-2} + \cdots\cdots + C^m_m + \cdots\cdots + C^m_1 = C^{m+1}_{p+1}$$

die Formel

$$\sum_{1}^{p}{}_{(i)}\, i^m = m!\; C^{m+1}_{p+1} + (m-1)!\; S^{m-1}_1\, C^m_{p+1} + (m-2)!\; S^{m-2}_2\, C^{m-1}_{p+1} + \cdots\cdots$$
$$+ 2!\; S^2_{m-2}\, C^3_{p+1} + 1!\; C^2_{p+1}$$

oder mit $$m!\; C^m_p = A^m_p$$

$$\sum_{1}^{p}{}_{(i)}\, i^m = \frac{1}{m+1} A^{m+1}_{p+1} + \frac{S^{m-1}_1}{m} A^m_{p+1} + \frac{S^{m-2}_2}{m-1} A^{m-1}_{p+1} + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{S^2_{m-2}}{3} A^3_{p+1} + \frac{1}{2} A^2_{p+1}$$

Die allgemeine Formel für die Summe der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis p ist also

$$\sum_{(i)\,1}^{p} i^{2n} = \frac{1}{2n+1}\overset{2n+1}{A}_{p+1} + \frac{\overset{2n-1}{S_1}}{2n}\overset{2n}{A}_{p+1} + \frac{\overset{2n-2}{S_2}}{2n-1}\overset{2n-1}{A}_{p+1} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\overset{2}{S}_{2n-2}}{3}\overset{3}{A}_{p+1} + \frac{1}{2}\overset{2}{A}_{p+1}$$

(Vgl. Gl. 6 auf S. 9 der Prog.-Abh. v. J. 1879.)

Nun ist die n^{te} Bernoulli'sche Zahl B_{2n-1} der Coefficient des letzten Gliedes in der Summenformel der $2n^{ten}$ Potenzen der natürlichen Zahlen. Es sind sohin alle A aufzulösen und die Coefficienten der Glieder, die p^1 enthalten, zu vereinigen.

Da das allgemeine Glied $\overset{i}{A}_{p+1}$ für alle $i \geqq 2$, wofern $0! = 1$ gilt, den Term

$$(-1)^i\,(i-2)!\;p$$

enthält, so erhält man sofort

$$B_{2n-1} = (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{2} + \sum_{(i)\,0}^{2n-2}(-1)^{i+1}\,\frac{(2n-1-i)!}{2n+1-i}\,\overset{2n-i}{S_i}\right]$$

Der Vorzeichenfactor muss angebracht werden, weil der letzte Term der nach fallenden Potenzen geordneten Summenformel für die $2n^{ten}$ Potenzen der Zahlen von 1 bis p bei $\left\{\begin{matrix}\text{geraden}\\ \text{ungeraden}\end{matrix}\right\}$ n $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist.

* * *

Nach Dirichlet gilt die Gleichung

$$\underset{(k=2l-1=\infty)}{\mathrm{Lim}}\int_{-\pi+g}^{q\pi+g'}\varphi(t)\,\frac{\sin kt}{\sin t}\,dt = \pi\left[\varphi(0)+\varphi(\pi)+\varphi(2\pi)+\cdots\cdots + \varphi(q\pi)\right],$$

wo die Grenze $g-\pi$ beliebig negativ, aber an sich $<\pi$, also

$$0<\pi-g=\theta\pi<\pi \qquad (0<\theta<+1)$$

und $\quad 0<g'<\pi$.

Nimmt man $a + \frac{ht}{\pi} = u$ d. i. $t = \frac{\pi}{h}(u-a)$,

$\varphi(t) = F(a + \frac{ht}{\pi}) = F(u)$, so wird die untere Grenze für u

$$= a - \frac{h}{\pi}(\pi - g) = A, \text{ wobei } A < a$$

und zwar $$a - A = \frac{h}{\pi}(\pi - g) = \theta\, h < h$$

und die obere $$= a + \frac{h}{\pi}(q\pi + g') = a + hq + \frac{hg'}{\pi} = B\,,$$

wobei $$B - qh = a + \frac{hg'}{\pi} < a + h$$

also auch $$(B - qh) - a < h$$

Ist $\left.\begin{matrix}-\pi + g\\ g'\end{matrix}\right\} = 0$, so ist in der Summe $\frac{1}{2}\,\varphi(0)$ und $\frac{1}{2}\,\varphi(q\pi)$ zu setzen.

Da nun $$\frac{\sin(2l-1)t}{\sin t} = 1 + 2\sum_{1}^{l-1}{}_{(r)} \cos 2rt\,,$$

so hat man durch Einführung des Argumentes u

$$1)\qquad F(a) + F(a+h) + \cdots\cdots + F(a+qh) = \frac{1}{h}\int_A^B F(u)\,du$$

$$+ \frac{2}{h}\sum_{1}^{\infty}{}_{(r)}\int_A^B F(u)\cos 2\pi r\,\frac{u-a}{h}\,du$$

Diese Gleichung, in welcher F ein beliebiges Functionszeichen ist, gilt, solange $\int F(u)\,du$ zwischen allen möglichen Integrationsgrenzen, die zwischen A und B incl. fallen, endlich und stetig bleibt.

Stellt man noch die Bedingung, dass dieselbe für alle Werte von a, die zwischen A und B − qh liegen, gelten soll, so muss

$$(B - qh) - A \leqq h \text{ oder } B - A \leqq (q+1)\,h \qquad \text{sein.*)}$$

Entwickelt man das zweite Glied auf der rechten Seite, so ergeben sich mit Rücksicht auf die Relation

$$\frac{2\,S_{2k}}{(2\pi)^{2k}} = \frac{B_{2k-1}}{(2k)!}$$

*) Scheibner: Über unendliche Reihen 37.

für die Correctur die 2 Formen

$$R = \sum_{1}^{n}{}_{(k)} (-1)^{k-1} \frac{B_{2k-1}\, h^{2k}}{(2k)!} \left[F^{2k-1}(b) - F^{2k-1}(a) \right]$$

$$+ \begin{cases} (-1)^{n+1} \cdot 2 \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2n+1} \sum_{1}^{\infty}{}_{(r)} \frac{1}{r^{2n+1}} \cdot \int_a^b F^{2n+1}(u) \sin 2\pi r \frac{u-a}{h}\, du\,, \\ (-1)^n \cdot 2 \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2n} \sum_{1}^{\infty}{}_{(r)} \frac{1}{r^{2n}} \cdot \int_a^b F^{2n}(u) \cos 2\pi r \frac{u-a}{h}\, du \end{cases}$$

wenn t auf das Intervall zwischen o und $q\pi$, also u auf das J. zwischen a und $a+qh=b$ beschränkt wird.

Die Annahme $F(u) = u^\mu$, wobei μ eine beliebige reelle (oder complexe) Zahl bezeichnen mag, gibt

$$2)\quad \frac{1}{2} a^\mu + (a+h)^\mu + (a+2h)^\mu + \cdots\cdots + (b-h)^\mu + \frac{1}{2} b^\mu$$

$$= \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{(\mu+1)\,h} + \sum_{1}^{n}{}_{(k)} (-1)^{k-1} \binom{\mu}{2k-1} \frac{B_{2k-1}\, h^{2k-1}}{2k} \cdot \left[b^{\mu-2k+1} - a^{\mu-2k+1} \right] + R_n$$

$$\text{wo } R_n = (-1)^n \frac{2h^{2n-1}}{(2\pi)^{2n}} \cdot [\mu]^{2n} \sum_{1}^{\infty}{}_{(r)} \frac{1}{r^{2n}} \int_a^b u^{\mu-2n} \cos 2\pi r \frac{u-a}{h}\, du$$

Es lassen sich unbeschränkt viele Functionen von u angeben, welche die Werte der einzelnen Glieder dieser Reihe annehmen, wenn man für u successive a, $a+h$, ... einsetzt. Denn hat man erst eine solche Function gefunden, z. B. u^μ, so braucht man zu ihr nur eine beliebige Function zu addieren, welche an allen diesen Stellen verschwindet. Diesem Zwecke würde genügen $u^\mu + c \cdot \sin \frac{(u-a)\pi}{h}$, wo c eine beliebige Constante bezeichnet.

Hiemit ist die Summation einer harmonischen Reihe im allgemeinen geleistet und es erübrigt nur noch den Wert von R_n zu beurtheilen. Der einfachste Fall liegt vor, wenn μ eine ganze, positive und gerade Zahl ist.

Es wird für $2n = \mu$

$$\int \cos 2\pi r \frac{u-a}{h}\, du = \frac{h}{2\pi r} \sin 2\pi r \frac{u-a}{h} \Big|_a^b = 0\,, \quad \text{somit } R_n = 0$$

Ist μ ungerade und positiv, so wird bei $2n+1 = \mu$

$$\int u \,.\, \cos 2\pi r \frac{u-a}{h}\, du = \frac{h}{2\pi r} u \,.\, \sin 2\pi r \frac{u-a}{h} + \left(\frac{h}{2\pi r}\right)^2 \cos 2\pi r \frac{u-a}{h}\Bigg|_a^b = 0$$

somit wieder $R_n = 0$

Ist μ beliebig reell, so ist jedesfalls

$$\left|\int u^{\mu-2n} \cos 2\pi r \frac{u-a}{h}\, du\right| < \int u^{\mu-2n}\, du = \frac{u^{\mu-2n+1}}{\mu-2n+1}$$

also $$|R_n| < \frac{h^{2n-1}}{2n} \binom{\mu}{2n-1} B_{2n-1} \left[b^{\mu-2n+1} - a^{\mu-2n+1}\right]$$

d. h. kleiner als das zuletzt berechnete Glied der Reihe, wobei übrigens die Größe von n willkürlich ist.

Nota I. Wenn $F^{2n}(u)$ d. h. jede Derivierte gerader Ordnung im Bereich der Integration von beständigem Zeichen ist, so ist das Ergänzungsglied der Correctur absolut

$$< 2 \,.\, \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2n} S_{2n} \int_a^b F^{2n}(u)\, du = \frac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} \int_a^b F^{2n}(u)\, du$$

und kann folglich $= \rho \dfrac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} \displaystyle\int_a^b F^{2n}(u)\, du$, wo ρ ein positiver oder negativer echter Bruch ist, gesetzt werden.

Führt man die Entwicklung der Correctur weiter, so erhält man die Beziehung

$$(-1)^{n-1} \rho \frac{B_{2n-1}}{(2n)!} \int_a^b F^{2n}(u)\, du = (-1)^n (1-\rho') \frac{B_{2n+1}\, h^2}{(2n+2)!} \int_a^b F^{2n+2}(u)\, du$$

woraus wegen $1-\rho' > 0$ folgt, dass $\rho \gtrless$ ist, je nachdem $F^{2n}(u)$ u. $F^{2n+2}(u)$ $\binom{\text{ungleiche}}{\text{gleiche}}$ Vorzeichen haben, so dass für den letzteren Fall die wahre Summe immer zwischen den Summen von n und n+1 Termen liegt.

Nota II. Für $h = 1$, $q = \infty$ und unter der Voraussetzung, dass $F(u)$, $F'(u)$, $F''(u)$, ... für $q = \infty$ verschwinden, wird einfacher $F(a) + F(a+1) + F(a+2) + \ldots$

$$= \int_a^\infty F(u)\, du + \frac{1}{2} F(a) - \frac{B_1}{2!} F'(a) + \frac{B_3}{4!} F'''(a) - \cdots\cdots$$

Es sollen nun die Ausdrücke untersucht werden, die sich ergeben, wenn man die Gliederzahl der harmonischen Reihe ins unendliche wachsen lässt. Eine unendlich wachsende positive ganze Zahl soll mit k bezeichnet werden.

Wird eine harmonische Reihe d. i. eine Reihe, welche nach gleich hohen Potenzen der natürlichen Zahlen fortschreitet, wobei die Glieder sowohl positiv als negativ genommen werden können, als unendliche gedacht, so ist sie nur dann convergent, wenn der Exponent negativ ist und zwar muss derselbe, falls alle Glieder positiv sind, an sich > 1 sein, somit ist die Convergenz der Reihe

$$1 + 2^{-\mu} + 3^{-\mu} + \cdots\cdots \quad , \text{wo } \mu \text{ an sich positiv,}$$

an die Bedingung $\mu > 1$ geknüpft. — Für $\mu = -\nu$ wächst das allgemeine Glied n^{ν} mit n über alle Grenzen, während für $\mu = 0$ lauter Einheiten zu summieren sind. — Für $\mu > 0$ nimmt allerdings $n^{-\mu}$ unbegrenzt ab; da jedoch aus der von Schloemilch angegebenen Begrenzung*)

$$l\,(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} < 1 + l\,(n+1)$$

ersichtlich wird, dass die Summe der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots.$ über alle Grenzen wächst, so ist für alle Werte von $\mu \overline{\overline{<}} 1$ die Divergenz der harmonischen Reihe selbstverständlich. — Soll die Reihe noch convergieren, wenn der Exponent zwar negativ aber der Größe nach $\overline{\overline{<}} 1$, so müssen die Zeichen der Glieder in regelmäßigen Perioden wechseln.

Setzt man nun in 2)

$$\frac{a}{h} = x\,,\ \frac{b}{h} = \frac{a+qh}{h} = x+q, \text{ so kommt}$$

$$x^{\mu} + (x+1)^{\mu} + (x+2) + \cdots\cdots + (x+q-1)^{\mu} =$$

$$\frac{(x+q)^{\mu+1} - x^{\mu+1}}{\mu+1} - \frac{(x+q)^{\mu} - x^{\mu}}{2} +$$

$$\sum_{1\,(r)}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{2r} \binom{\mu}{2r-1} B_{2r-1} \left[(x+q)^{\mu-2r+1} - x^{\mu-2r+1}\right] + R_n\,,$$

$$\text{wo } R_n = (-1)^n \frac{2\,h^{-\mu+2n-1}}{(2\pi)^{2n}} \,[\mu]^{2n} \sum_{1\,(r)}^{\infty} \frac{1}{r^{2n}} \int_a^b u^{\mu-2n} \cos 2\pi r \frac{u-a}{h}\, du$$

für ganze positive μ verschwindet, für alle übrigen reellen Werte von μ absolut kleiner ist als das jeweilige letzte Glied der Reihe.

Setzt man in dieser Gleichung $q = k$, so wird die Summe auf der rechten Seite nur so weit fortgesetzt zu werden brauchen, bis die Exponenten $\mu-2r+t$ anfangen negativ zu werden. Dieselbe sondert sich

*) Zeitschrift f. Math. u. Phys. III. Jg.

alsdann in zwei Theile: einen unendlich großen mit dem Argument $x+k$ und einen gleichgebildeten endlichen mit dem Argument x, welcher letztere $E(x,\mu)$ heiße, nämlich

$$E(x,\mu) = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} - \frac{x^{\mu}}{2} + \sum_{1}^{n}{}_{(r)} \frac{(-1)^{r-1}}{2r} \binom{\mu}{2r-1} B_{2r-1}\, x^{\mu-2r+1}$$

Die Summe kann beliebig weit, soll aber jedesfalls soweit fortgesetzt sein, als noch $\mu-\overline{2r-1} \geqq 0$ ist.

Es ist demnach 3)

$$x^{\mu} + (x+1)^{\mu} + (x+2)^{\mu} + \cdots\cdots + (x+k-1)^{\mu} = E(x+k,\mu) - E(x,\mu) + R_n$$

Im Restgliede R_n verschwinden die Terme mit dem unendlichen Argument $x+k$ und sein Wert ist bei ganzen $+\mu$ Null, indem die Reihe von selbst abbricht.

Das erste Glied im Ausdruck der Größe $E(x+k.\mu)$ lässt erkennen, dass die Summe der in inf. fortgesetzten Reihe für $\mu = \alpha + \beta i$ unendlich ist, falls $\alpha \geqq -1$, denn es ist der einfachste Wert von

$$(x+k)^{\alpha+1+\beta i} = (x+k)^{\alpha+1} \cdot e^{\beta \,.\, L(x+k) \,.\, i}$$

Für den Grenzfall $\alpha = -1$, setze man $\mu = -(1+\varepsilon)$; dann ist

$$\frac{1}{x^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(x+1)^{1+\varepsilon}} + \cdots\cdots + \frac{1}{(x+k-1)^{1+\varepsilon}} = -\frac{(x+k)^{-\varepsilon}}{\varepsilon} + \frac{x^{-\varepsilon}}{\varepsilon} + R\,.$$

Für ein reelles ε folgt hieraus

$$\varepsilon\left[\frac{1}{x^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(x+1)^{1+\varepsilon}} + \cdots\cdots + \frac{1}{(x+k-1)^{1+\varepsilon}}\right] =$$
$$- (x+k)^{-\varepsilon} + x^{-\varepsilon} + \varepsilon R$$

Ist $\operatorname{Lim} \varepsilon = +0$ und wird k absolut unendlich, so wird $(x+k)^{-\varepsilon} = 0$, wie klein auch ε angenommen werden mag, also

$$\lim_{\varepsilon = +0} \varepsilon\left[\frac{1}{x^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(x+1)^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(x+2)^{1+\varepsilon}} + \cdots\cdots\right] = 1$$

welches Resultat sich auch geometrisch verificieren lässt.

Die Curve von der Gleichung $y = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ $(\varepsilon > 0)$ erstreckt sich mit beiden Ästen ins unendliche und nähert sich asymptotisch den Coordinatenachsen.

Das Flächenstück $\int_a^\infty \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{a^\varepsilon}$

ist offenbar kleiner als die Summe S der Rechtecke

$$\frac{1}{a^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(a+1)^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(a+2)^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(a+3)^{1+\varepsilon}} + \cdots\cdots$$

dagegen größer als die Summe der Rechtecke

$$\frac{1}{(a+1)^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(a+2)^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(a+3)^{1+\varepsilon}} + \cdots\cdots$$

d. h. also $\frac{1}{a^\varepsilon} < \varepsilon S < \frac{1}{a^\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{a^{1+\varepsilon}}$, und folglich $\lim\limits_{(\varepsilon = 0)} (\varepsilon S) = 1$.

Statt 1 kann hierin ein beliebiges positives Increment h genommen werden, wobei der Grenzwert $\frac{1}{h}$ resultiert.

Dagegen ist, wenn $\lim \varepsilon = -0$ und wenn ε durch $-\varepsilon$ ersetzt wird,

$$\lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon \left[\frac{1}{x^{1-\varepsilon}} + \frac{1}{(x+1)^{1-\varepsilon}} + \frac{1}{(x+2)^{1-\varepsilon}} + \cdots\cdots\right] = \infty$$

Setzt man in 3) $x = 1$ und $k-1$ statt k, so wird

$$1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \cdots\cdots + (k-1)^\mu = E(k,\mu) - E(1,\mu) + R$$

Nun ist die Größe $-E(1,\mu) + R$ von k unabhängig und endlich, hat also einen bestimmten Wert, der bloß von μ abhängt; er heiße $K(\mu)$.

Der Ausdruck der Function $K(\mu)$ enthält das Glied $\frac{1^{\mu+1}}{\mu+1}$; es wird demnach

$$K(\mu) = C(\mu) - \frac{1}{\mu+1}$$

wo $C(\mu)$ ebenfalls eine Function von μ allein ist.

Folglich hat man die Bestimmung

$$1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \cdots\cdots + (k-1)^\mu = E(k,\mu) + K(\mu) \tag{4}$$

wo

$$E(k,\mu) = \frac{k^{\mu+1}}{\mu+1} - \frac{k^\mu}{2} + \sum_{1\,(r)}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{2r} \binom{\mu}{2r-1} B_{2r-1}\, k^{\mu-2r+1}$$

$$(\mu + 1 \geqq 2r)$$

und (mit Einführung der Vandermonde'schen Bezeichnung)

$$C(\mu) = \frac{1}{2} - \frac{B_1}{2}\mu + \frac{B_3}{4!}[\mu]^3 - \frac{B_5}{6!}[\mu]^5 + \cdots\cdots$$

Es ist aber $E(x.\mu) - \frac{1}{\mu+1} + R_n$ für endliche x selbst endlich und von x und μ abhängig; denn der einzige Fall, wo in diesem Ausdrucke unendliche Glieder vorkommen können, ist der, wo $\mu = -1$. Dann aber ist der Betrag der unendlichen Glieder

$$\lim_{(\mu=-1)} \frac{x^{\mu+1} - 1^{\mu+1}}{\mu+1} = \lim_{(\mu=-1)} \int_1^x x^\mu \, dx = lx$$

wie auch aus der Entwicklung von x^m nach Mac-Laurin's Reihe für $m = 0$ nämlich aus $x^m = 1 + m\, lx + \frac{m^2}{2!}(lx)^2 x^{\theta m}$ folgt.

Für den Fall, dass μ nicht eine ganze Zahl ist, sollen für reelle μ die positiven Werte der Potenzen, für complexe μ diejenigen gemeint sein, welche die kleinste Amplitude haben, welche Werte in der allgemeinen Potenz

$$a^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha La \mp \beta.2n\pi} \left[\cos(\beta.La \pm \alpha.2n\pi) + i \sin(\beta.La \pm \alpha.2n\pi) \right]$$

enthalten sind.

Ist der reelle Theil von μ negativ, so vereinfacht sich K, nämlich

4*) $$K(-\mu) = \frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots\cdots + \frac{1}{(k-1)^\mu} - \frac{k^{1-\mu}}{1-\mu}$$

wenn hier μ eine Zahl bedeutet, deren reeller Theil positiv, wobei auch noch das unendliche Glied $k^{1-\mu}$ verschwindet, falls $\mu > 1$.

Stellt man sich nun die Aufgabe, den Grenzwert der harmonischen Reihe anzugeben für negative $\mu \gtreqless -1$, wenn dieselbe nur bis zu einem gewissen Gliede k^μ fortgesetzt wird, so erhält man aus 4), nachdem $-\mu$ statt μ gesetzt worden,

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots\cdots + \frac{1}{(k-1)^\mu} + \frac{1}{k^\mu} = \frac{k^{1-\mu}}{1-\mu} - \frac{1}{1-\mu} + \frac{1}{2} +$$

$$\sum_{1\,(r)}^{n} \frac{(-1)^{r-1} B_{2r-1}}{2r} \binom{\mu+2r-2}{2r-1},$$ wenn μ von 1 verschieden ist;

und $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} = lk + \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2!} - \frac{6B_3}{4!}$$

$$+ \frac{120\,B_5}{6!} - \frac{4320\,B_7}{8!} + \cdots,$$ wenn $\mu = 1$ ist;

oder kürzer

$$5)\quad \begin{cases} 1+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{(k-1)^\mu}+\frac{1}{k^\mu}=\frac{k^{1-\mu}}{1-\mu}+K(-\mu), \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}=lk+C(-1) \end{cases}$$

Es ist

$$\frac{B_1}{2!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=0{,}08\dot{3};\quad \frac{B_3}{4!}=\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{30}=0{,}0013\dot{8};\quad \frac{B_5}{6!}=\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{42}=0{,}0000330687_8$$

$$\frac{B_7}{8!}=\frac{1}{8!}\cdot\frac{1}{30}=0{,}0000008267;\quad \frac{B_9}{10!}=\frac{1}{10!}\cdot\frac{5}{66}=00000000208;\quad \frac{B_{11}}{12!}=\frac{1}{12!}\cdot\frac{691}{2730}$$

Die Constante $K(-\mu)$ kann mit beliebiger Genauigkeit durch das folgende Verfahren erhalten werden.

Es ist

$$1+\frac{1}{3^\mu}+\frac{1}{5^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k+1)^\mu}=1+\frac{1}{2^\mu}\cdot\sum_{1\,(r)}^{k}\frac{1}{r^\mu\left(1+\frac{1}{2r}\right)^\mu}$$

Entwickelt man die Nenner nach dem Binomialtheorem und ordnet die Glieder nach den B. C., so kommt mit Anwendung einer selbstverständlichen Bezeichnung für den Ausdruck der rechten Seite

$$1+\frac{1}{2^\mu}\left[\sum_{1\,(r)}^{k}\frac{1}{r^\mu}-\binom{\mu}{1}\frac{1}{2}S_{\mu+1}+\binom{\mu+1}{2}\frac{1}{2^2}S_{\mu+2}-\cdots\cdots+\cdots\right]$$

oder, wenn je die ersten Glieder in den S abgesondert werden, mit Zuziehung von 5)

$$1+\frac{1}{2^\mu}\left[\frac{k^{1-\mu}}{1-\mu}+K(-\mu)-\binom{\mu}{1}\cdot\frac{1}{2}+\binom{\mu+1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}-\cdots\cdots+\cdots+T\right];$$

wird T vollständig geschrieben und beachtet, dass

$$\binom{\mu}{1}\frac{1}{2}-\binom{\mu+1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\binom{\mu+1}{3}\frac{1}{2^3}-\cdots=1-\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-\mu}=1-\frac{2^\mu}{3^\mu},$$

so folgt 6) $\quad 1+\frac{1}{3^\mu}+\frac{1}{5^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k+1)^\mu}=1+$

$$\frac{1}{2^\mu}\left[\frac{k^{1-\mu}}{1-\mu}+K(-\mu)-1+\frac{2^\mu}{3^\mu}+\sum_{1\,(r)}^{\infty}\frac{(-1)^r}{2^r}\binom{\mu+r-1}{r}\cdot(S_{\mu+r}-1)\right],$$

worin die Σ rapid convergiert.

Ferner resultiert aus 5) durch Multiplication mit $\frac{1}{2^\mu}$

$$7)\qquad \frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{4^\mu}+\frac{1}{6^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k)^\mu}=\frac{1}{2^\mu}\left[\frac{k^{1-\mu}}{1-\mu}+K(-\mu)\right]$$

Durch Addition von 6) und 7) kommt, da das Glied $\frac{1}{(2k+1)^\mu}$ als verschwindend klein wegbleiben darf,

$$1+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k)^\mu}$$

$$=1+\frac{1}{2^\mu}\left[\frac{2k^{1-\mu}}{1-\mu}+2K(-\mu)-1+\frac{2^\mu}{3^\mu}+\sum\right]$$

aber zufolge 5) ist dies auch

$$=\frac{2k^{1-\mu}}{2^\mu(1-\mu)}+K(-\mu),$$

somit gibt die Gleichsetzung beider Werte

$$8)\qquad (2^\mu-2)K(-\mu)=2^\mu-1+\frac{2^\mu}{3^\mu}+\sum_{1\,(r)}^{\infty}\frac{(-1)^r}{2^r}\binom{\mu+r-1}{r}(S_{\mu+r}-1)$$

Hiemit ist $K(-\mu)$ durch einen von k unabhängigen Ausdruck gegeben.

Diese Gleichung kann, wenn $\mu > 1$ vorausgesetzt wird, zur Auswertung solcher S dienen, deren unmittelbarer Ausdruck nur schwach convergiert; es wäre diesfalls S_μ statt $K(-\mu)$ zu setzen.

Multipliciert man Gleichung 7) mit 2, oder Gleichung 5) mit $2^{1-\mu}$ und subtrahiert das Resultat von der folgenden, die sich aus 5) ergibt, wenn 2k statt k gesetzt wird

$$1+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k-1)^\mu}+\frac{1}{2k^\mu}=\frac{2k^{1-\mu}}{2^\mu(1-\mu)}+K(-\mu),$$

so kommt

$$1-\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}-\frac{1}{4^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k-1)^\mu}=(1-2^{1-\mu})\,.\,K(-\mu)$$

oder da die Reihe links für $\mu > 0$ convergiert,*)

$$9)\qquad 1-\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}-\frac{1}{4^\mu}+\cdots\cdots=(1-2^{1-\mu})\,.\,K(-\mu)$$

*) Scheibner: Über unendliche Reihen, 5.20.

Diese Bestimmung lässt noch ersehen, dass die Werte von $K(-\mu)$, wenn $\mu < 1$, sämmtlich negativ sind; denn die Reihe links ist ein positiver Wert, während diesfalls $1-2^{1-\mu} < 0$ ist.

Addiert man noch 9) und 7), so folgt

$$10)\quad 1+\frac{1}{3^\mu}+\frac{1}{5^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k-1)^\mu}=\frac{k^{1-\mu}}{2^\mu(1-\mu)}+\frac{2^\mu-1}{2^\mu}.K(-\mu)$$

wo das verschwindende Glied $\frac{1}{(2k)^\mu}$ weggelassen wurde.

Für $\mu=1$ resultiert aus 9)

$$K(-1)=\infty$$

und die ursprüngliche Formel gestaltet sich für $h=1$ wie folgt:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a+q-1}=l\,\frac{a+q}{a}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{a+q}\right]+$$

$$\sum_{1(r)}^{n-1}\frac{(-1)^{r-1}B^{2r-1}}{2r}\left[\frac{1}{a^{2r}}-\frac{1}{(a+q)^{2r}}\right]-(-1)^n\,\frac{\varepsilon B_{2n-1}}{2n}\left[\frac{1}{a^{2n}}-\frac{1}{(a+q)^{2n}}\right]$$

$$0<\varepsilon<+1$$

Geht man zur Grenze für unendlich wachsende q über, so wird

$$11)\quad \lim_{(q=k)}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a+q-1}-l\,\frac{a+q}{a}\right]$$

$$=\frac{1}{2a}+\sum_{1}^{n-1}(-1)^{r-1}\frac{B_{2r-1}}{2r}\,\frac{1}{a^{2r}}+(-1)^{n+1}\,\frac{\varepsilon B_{2n-1}}{2n}\cdot\frac{1}{a^{2n}}$$

wo die linke Seite den Ausdruck $-\frac{d\,l\,\Gamma(a)}{da}$ repräsentiert.

Setzt man $a=1$ und $k-1$ statt k, so geht die linke Seite in die Euler'sche Constante über.

Ersetzt man in 4*) $K(-\mu)$ durch $C(-\mu)-\frac{1}{1-\mu}$, so erhält man

$$C(-1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k-1}-\lim_{(\mu=1)}\frac{k^{1-\mu}-1}{1-\mu}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k-1}-lk$$

Wollte man diese Constante durch die directe Substitution $a=1$ auswerten, so wäre nur eine geringe Genauigkeit zu erreichen, weil das Anwachsen der Glieder rechts schon nach dem 4ten, nämlich nach $\frac{B_5}{6}=\frac{1}{252}$ beginnt.

Addiert man aber beiderseits in 11)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{a-1} - la$$

so geht ihre linke Seite ebenfalls in C(−1) über und es wird

$$C(-1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{a-1} - la +$$

$$\frac{1}{2a} + \sum_{1\,(r)}^{n-1} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{2r} \cdot \frac{1}{a^{2r}} + (-1)^{n+1} \frac{\varepsilon B_{2n-1}}{2n} \cdot \frac{1}{a^{2n}}$$

Die Summe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{9}$ auf 20 Stellen zu berechnen macht wenig Mühe und noch weniger die Berechnung der 5 Brüche von $\frac{B_1}{2.10^2}$ bis $\frac{B_9}{10.10^{10}}$, welche man nur zu berücksichtigen hat, um C auf 20 Stellen genau zu erhalten. — Da ferner

$$l\,5 - 2\,.\,l\,2 = l\,(1 + \tfrac{1}{4})$$

$$3\,.\,l\,5 - 7\,.\,l\,2 = -\,l\,(1 + \tfrac{3}{125})$$

so folgt durch Bestimmung von l 2 und l 5

$$l\,10 = 10\,.\,l\,(1 + \tfrac{1}{4}) + 3\,.\,l\,(1 + \tfrac{3}{125})$$

Entwickelt man die Logarithmen nach der Formel

$$l\,(1+z) = 2\left\{\frac{1}{1}\,\frac{z}{z+2} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z+2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{z+2}\right)^5 + \cdots\cdots\right\},\ -1 < z < \infty$$

so lässt sich l 10 beliebig genau finden.

Bricht man die Reihen mit der m^{ten} Potenz ab, wo m eine beliebige ungerade Zahl bezeichnet, so betragen die resp. Reihenreste weniger als

$$\frac{1}{40\,(m+2)\,9^m},\quad \frac{9}{3200\,(m+2)} \cdot \left(\frac{3}{253}\right)^m$$

Nimmt man resp. m = 16 und 9, so erhält man auf 21 Stellen genau

$$l\,10 = 2{,}302585\ 092994\ 045684\ 018$$

und endlich

$$C(-1) = 0{,}577215\ 664901\ 532860\ 6$$

Bei negativen $\mu < -1$ convergiert die Reihe für $q = k$ und es ist, $h = 1$ genommen, da $\operatorname{Lim} b^{-\mu+1-2r} = \operatorname{Lim} b^{-(\mu+2r-1)} = 0$,

$$\text{12 a)}\qquad \frac{1}{a^\mu} + \frac{1}{(a+1)^\mu} + \frac{1}{(a+2)^\mu} + \cdots\cdots = \frac{1}{(\mu-1)a^{\mu-1}} + \frac{1}{2a^\mu}$$

$$- \frac{B_1\binom{-\mu}{1}}{2a^{\mu+1}} + \frac{B_3\binom{-\mu}{3}}{4a^{\mu+3}} - \cdots\cdots$$

$$-(-1)^n \frac{B_{2n-3}\binom{-\mu}{2n-3}}{(2n-2)\,a^{\mu+2n-3}} + (-1)^n \frac{\varepsilon B_{2n-1}\binom{-\mu}{2n-1}}{2n\,a^{\mu+2n-1}}$$

Ist speciell μ eine negative ganze Zahl $= -$ m, so ist in anderer Form: 12 b)

$$\frac{1}{a^m} + \frac{1}{(a+1)^m} + \frac{1}{(a+2)^m} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{2a+m-1}{2(m-1)a^m} + \frac{1}{(m-1)!\,a^{m+1}} \left[\frac{B_1\, m!}{2!\, a^0} - \frac{B_3(m+2)!}{4!\; a^2} + \cdots\cdots \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{B_{2n-3}\,(m+2n-4)!}{(2n-2)!\, a^{2n-4}}\right] + (-1)^{n+1} \frac{\varepsilon B_{2n-1}\,(m+2n-2)!}{(m-1)!\,(2n)!\,a^{m+2n-1}}$$

Soll hieraus die Summe

$$S_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots\cdots\cdots$$

berechnet werden für ungerade m (da für gerade m schon bequeme Formeln existieren), so kann man dieselbe in 2 Theile zerlegen, von denen der erste

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots\cdots + \frac{1}{(a-1)^m}$$

direct, der andere mit $\frac{1}{a^m} + \frac{1}{(a+1)^m} + \cdots\cdot$ beginnende nach der eben gewonnenen Formel berechnet wird, nachdem aus dem Restglied der letztern die Zahlen a und n so bestimmt sind, dass der Wert des Restes unter die in Aussicht genommene Fehlergrenze herabsinkt.

Dies ist bei 12 b) und auch bei 12 a), falls μ keine ganze Zahl ist, immer möglich.

Sei S_3 zu berechnen, so dass der Fehler

$< 0{,}0000000001$ werde.

Aus 12 b) resultiert

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+2)^3} + \cdots\cdot = \frac{1}{2}\left[\frac{a+1}{a^3} + \frac{3B_1}{a^4} - \frac{5B_3}{a^6} + \frac{7B_5}{a^8} - \cdots \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{(2n-1)\,B_{2n-3}}{a^{2n}} - (-1)^n \frac{\varepsilon(2n+1)\,B_{2n-1}}{na^{2n+2}}\right]$$

$$= \frac{a+1}{2a^3} + \frac{1}{4a^4} - \frac{1}{12a^6} + \frac{1}{12a^8} - \frac{3}{20a^{10}} + \frac{5}{12a^{12}}$$

$$- \frac{691}{420a^{14}} + \frac{35}{4a^{16}} - \frac{3617}{60a^{18}} + \frac{43867}{84a^{20}} - \cdots\cdots$$

$$+ (-1)^n \frac{(2n-1)\,B_{2n-3}}{2a^{2n}} - (-1)^n \frac{\varepsilon(2n+1)\,B_{2n-1}}{2n\,a^{2n+2}}$$

Da der Fehler, den man begeht, wenn man die Berechnung bei einem Gliede abbricht, stets kleiner als das Doppelte des nächsten Gliedes ist

$$(\varepsilon = 1 + \rho = \lambda \, . \, \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} < 2\lambda, \text{ wo } 0 < \lambda < +1),$$

so erkennt man aus den numerischen Werten der Coefficienten, dass für $a = 5$ der Fehler sich mit Sicherheit nur auf ungefähr $\frac{1}{5^{15}} = 0{,}000000000033$ herabdrücken lässt, wobei $\frac{35}{4a^{16}}$ das letzte zu benützende Glied wäre. — Macht man a größer, so lässt sich die Genauigkeit verstärken, weil die Potenzen von $\frac{1}{a}$ schneller abnehmen.

Führt man die Rechnung für $a = 5$ aus, welche wegen $\frac{1}{5} = 0{,}2$ bequem ist, so erhält man in 11 Decimalstellen

$$\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \cdots\cdots = 0{,}02439\ 48661\ 2$$

und direct
$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} = 1{,}\ 17766\ 20370\ 4;$$

mithin
$$S_3 = 1{,}20205690316$$

und dies stimmt noch in der 11^{ten} Stelle.

Man hat also im Falle $\mu = -m$ zur Auswertung der Summe

$$s_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots\cdots + \frac{1}{p^m}$$

wenn unter S_m die Summe der unendlichen, für $m > 1$ convergierenden Reihe

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots\cdots$$

verstanden wird, die Formel

I) $$s_m = S_m - \frac{1}{(m-1)\,p^{m-1}} + \frac{1}{2p^m} - \frac{1}{m-1}\sum_{1}^{n-1}{}_{(r)} (-1)^{r-1} \binom{m+2r-1}{2r} \frac{B_{2r-1}}{p^{m+2r-1}} + (-1)^n \cdot \varepsilon\, u_{2n}$$

wo u_{2r} das allgemeine Glied der halbconvergenten Reihe darstellt.

Dieser Formel bedient man sich mit Vortheil, wenn p eine so große Zahl ist, dass die directe Summierung äußerst mühsam werden würde. —

II) $$s_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{p} =$$

$$C(-1) + lp + \frac{1}{2p} - \sum_{1}^{n-1}{}_{(r)} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{2r\,.\,p^{2r}} + (-1)^n \frac{\varepsilon\, B_{2n-1}}{2n\,.\,p^{2n}}$$

wo $C(-1)$ die oben berechnete Euler'sche Constante bezeichnet.

Ist aber μ zwischen den Grenzen 0 und -1 enthalten, so ist

III) $$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots\cdots + \frac{1}{p^\mu} =$$

$$\frac{p^{1-\mu}}{1-\mu} + K(-\mu) + \frac{1}{2p^{\mu}} - \sum_{1\,(r)}^{n-1} (-1)^{r-1} \binom{\mu+2r-2}{2r-1} \frac{B_{2r-1}}{2r \, . \, p^{\mu+2r-1}} +$$

$$0 < \mu < 1 \qquad\qquad (-1)^n \, \varepsilon \, . \, u_{2n}$$

Bekanntlich wird mit dem Symbol $\Gamma(1+x)$ eine gewisse Function von x bezeichnet, die für alle reellen und complexen x einen bestimmten Wert hat, die nur dann unendlich wird, wenn x gleich einer negativen ganzen Zahl ist und die für ganze positive x sich auf das Product x! reduciert, dessen Logarithmus durch die Stirling'sche Reihe ausgedrückt wird. — Man gelangt zur Vorstellung der allgemeinen Functionen Γ, wenn man die Function x! zu interpolieren, d. h. wenn man das Product $1.2.3\ldots.x$ durch eine Function von x darzustellen sucht, welche eine völlig bestimmte Bedeutung behält, wenn x aufhört eine ganze positive Zahl zu sein.

Es seien x und n ganze positive Zahlen. Die x Brüche

$$\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+2}, \ldots\ldots \frac{n}{n+x}$$

nähern sich der Einheit, wenn n unbegrenzt wächst, während x constant bleibt. Dasselbe gilt daher vom Producte dieser x Brüche, und man hat, wenn noch beiderseits mit $1.2.3\ldots..x$ multipliciert wird,

$$1.2.3\ldots..x = \frac{n!\,n^x}{(x+1)\,(x+2)\ldots.(x+n)}\,(1+\varepsilon_n), \text{ wo } \operatorname{Lim} \varepsilon_n = 0 \text{ für } n = \infty.$$

Lässt man jetzt die ganze Zahl n unendlich groß werden, so folgt

$$1.2.3\ldots..x = \operatorname{Lim}_{n=\infty} \frac{n!\,n^x}{(x+1)\,(x+2)\ldots(x+n)}$$

Die rechte Seite wird unendlich, wenn x eine negative ganze Zahl ist; behält aber für alle übrigen reellen und complexen x einen bestimmten endlichen Wert.

(Siehe Ohm, Syst. d. Math. VIII. § 101, wo der Gauss'sche Beweis gegeben ist.)

Setzt man daher

$$\Gamma(1+x) = \operatorname{Lim}_{n=\infty} \frac{n!\,n^x}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$

so ist im Falle eines ganzen positiven x

$$\Gamma(1+x) = x!\,, \text{ da } \operatorname{Lim}_{n=\infty} \frac{n!\,n^x}{(x+n)!} = 1$$

Ist $1+x = u$ beliebig positiv, so kommt $\Gamma(u)$ mit dem Euler'schen Integral zweiter Art überein. (S. Schloem. Zeitschr. f. Math. XXV. S. 127.)

Obiger Definition zufolge ist auch

$$\Gamma(1+x+h) = \operatorname{Lim} \frac{n!\,n^{x+h}}{(1+x+h)\,(2+x+h)\ldots(n+x+h)}$$

und es wird

$$\frac{\Gamma(1+x+h)}{\Gamma(1+x)} = \frac{(1+x)\,(2+x)\ldots\ldots.(n+x)}{(1+x+h)\,(2+x+h)\ldots(n+x+h)} \cdot n^h \qquad (n = \infty$$

Nimmt man links und rechts die reellen Logarithmen und setzt dabei $-1 < x < \infty$ und h beliebig positiv voraus, so kommt

$$L\Gamma(1+x+h) = L\Gamma(1+x) + h\left\{Ln - \sum_{0\,(r)}^{n} \frac{1}{x+1+r}\right\} +$$

$$\frac{h^2}{2}\sum_{0\,(r)}^{n}\frac{1}{(x+1+r)^2} - \frac{h^3}{3}\sum_{0\,(r)}^{n}\frac{1}{(x+1+r)^3} + \frac{h^4}{4}\sum_{0\,(r)}^{n}\frac{1}{(x+1+r)^4} - \cdots\cdots + \cdots$$

Bezeichnet man nach Gauss den Differentialquotienten von $L\Gamma(1+x)$ mit $\psi(x)$, so erhält man nach Taylor's Lehrsatz

$$L\Gamma(1+x+h) = L\Gamma(1+x) + h.\psi(x) + \frac{h^2}{2}\cdot\psi'(x) + \frac{h^3}{3}\cdot\frac{1}{2}\psi''(x) + \frac{h^4}{4}\cdot\frac{1}{3!}\psi'''(x) + \cdots$$

Die Vergleichung der rechts stehenden Reihen gibt

$$Ln - \sum_{0\,(r)}^{\infty}\frac{1}{x+1+r} = \psi(x)$$

$$\sum_{0\,(r)}^{\infty}\frac{1}{(x+1+r)^2} = \psi'(x)$$

$$\sum_{0\,(r)}^{\infty}\frac{1}{(x+1+r)^3} = -\frac{1}{2}\psi''(x)$$

. . . .

. . . .

Da die Reihen links für $x = 0$ in die Potenzsummen der reciproken natürchen Zahlen übergehen, so hat man zunächst

$$S_2 = \psi'(0) \qquad S_3 = -\frac{1}{2}\psi''(0)$$

$$S_4 = +\frac{1}{3!}\psi'''(0) \qquad S_5 = -\frac{1}{4!}\psi^{IV}(0)$$

. . . .

Zur Bestimmung von ψ dienen die Formeln

A) $$L\Gamma(1+x) = L\sqrt{2\pi} + (x+\tfrac{1}{2})L(1+x) - x - 1 +$$

$$\sum_{1\,(r)}^{n-1}\frac{(-1)^{r-1}B_{2r-1}}{(2r-1)\;2r}\cdot\frac{1}{(1+x)^{2r-1}} + (-1)^{n-1}\varepsilon.\sigma_n\,, \quad \text{woraus}$$

$$\psi(x) = L(1+x) - \frac{1}{2(1+x)} - \frac{B_1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{B_3}{4}\cdot\frac{1}{(1+x)^4} - \frac{B_5}{6}\cdot\frac{1}{(1+x)^6} + \cdots$$

$$0 < x < \infty\,;$$

$$\text{B)}\quad \Gamma(1+x) = L\sqrt{2\pi} + (x+\tfrac{1}{2})\,Lx - x + \sum_{1\,(r)}^{n-1} \frac{(-1)^{r-1} B_{2r-1}}{(2r-1)\,2r} \cdot \frac{1}{x^{2r-1}} + (-1)^{n-1} \,.\, \varepsilon\,\sigma'_n$$

woraus $\psi(x) = Lx + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2x^2} + \frac{B_3}{4x^4} - \frac{B_5}{6x^6} + \cdots, +1 < x < +\infty;$

$$\text{C)}\quad L\Gamma(1+x) = x\,Ln - L(1+\tfrac{x}{1}) - L(1+\tfrac{x}{2}) - \cdots - L(1+\tfrac{x}{n}) + L(1+\varepsilon_n)$$

woraus, wenn $-1 < x < +1$ vorausgesetzt wird, mittels der logarithmischen Reihe

$$L\Gamma(1+x) = -cx + \tfrac{1}{2}\,s_2 x^2 - \tfrac{1}{3}\,s_3 x^3 + \tfrac{1}{4}\,s_4 x^4 - \cdots + L(1+\varepsilon_n)$$

und für unendlich wachsende n

$$\psi(x) = -C + S_2 x - S_3 x^2 + S_4 x^3 - \ldots \qquad (-1 < x < +1)$$

folglich $\qquad C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - Ln = -\psi(0)$

resultiert.

Zu den Mitteln die Euler'sche Constante auszuwerten kommt hiemit ein neues hinzu. Man berechnet z. B. zuerst $\psi(10)$ direct aus A), erhält dann mittels der Relation

$$\Gamma(1+x) = x\,.\,\Gamma(x), \quad \text{woraus } \psi(x) = \psi(x-1) + \tfrac{1}{x} \text{ folgt,}$$

successive $\psi(9)$, $\psi(8)$, ... $\psi(2)$, $\psi(1)$, $\psi(0)$, wodurch $C = -\psi(0)$ bekannt ist.

Nimmt man in

$$K(\mu) = 1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \cdots + (k-1)^\mu - E(k,\mu) \qquad \text{[Vgl. 4)]}$$

$\mu = 0$, so wird

$$K(0) = k - 1 - E(k,0), \text{ oder da } E(k,0) = k - \tfrac{1}{2},$$

$$K(0) = -\tfrac{1}{2}$$

Wenn μ eine ganze positive und gerade Zahl $= 2n$ ist, so folgt

$$K(2n) = 1 + 2^{2n} + 3^{2n} + \cdots + (k-1)^{2n} -$$

$$\left[\frac{k^{2n+1}}{2n+1} - \frac{k^{2n}}{2} + \sum_{1\,(r)}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{2r} \binom{2n}{2r-1} B_{2r-1}\, k^{2n-2r+1}\right];$$

setzt man aber in 3)

$$x = 0, \quad q = k, \quad \mu = 2n$$

so wird

$$1 + 2^{2n} + 3^{2n} + \cdots + (k-1)^{2n} =$$

$$\frac{k^{2n+1}}{2n+1} - \frac{k^{2n}}{2} + \sum_{1\,(r)}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{2r} \binom{2n}{2r-1} B_{2r-1}\, k^{2n-2r+1},$$

folglich im Zusammenhalt mit der vorhergehenden Gleichung*)

$$K(2n) = 0$$

Setzt man $\mu = 2n+1$ voraus, so kommt

$$K(2n+1) = 1+2^{2n+1} + \cdots\cdots + (k-1)^{2n+1} -$$

$$\left[\frac{k^{2n+1}}{2n+2} - \frac{k^{2n+1}}{2} + \sum_{1}^{n}{}_{(r)} \frac{(-)^{r-1}}{2r} \binom{2n+1}{2r-1} B_{2r-1}\, k^{2n-2r+2} + (-1)^n \frac{B_{2n+1}}{2n+2}\right]$$

und, wie vorhin

$$1+2^{2n+1} + \cdots\cdots + (k-1)^{2n+1} =$$

$$\frac{k^{2n+2}}{2n+2} - \frac{k^{2n+1}}{2} + \sum_{1}^{n}{}_{(r)} \frac{(-1)^{r-1}}{2r} \binom{2n+1}{2r-1} B_{2r-1}\, k^{2n-2r+2}$$

folglich $$K(2n+1) = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n+1}}{2n+2}$$

Stellt man nach H. Kinkelin**) den Functionsbegriff auf

13) $$B(x,\mu) \equiv E(x+k,\mu) - \frac{1}{\mu+1} + C(\mu) - \sum_{0}^{k-1}{}_{(r)} (x+r)^{\mu},$$

so ist $B(x,\mu)$ für alle endlichen x und μ endlich und bestimmt und von k unabhängig, und es ist, wenn $\mu \lessgtr -1$

$$B(x,\mu) = E(x+k,\mu) + K(\mu) - \sum_{0}^{k-1}{}_{(r)} (x+r)^{\mu};$$

für $\mu = -1$ aber wird

$$B(x,-1) = l(x+k) + C(-1) - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots\cdots + \frac{1}{x+k-1}\right];$$

da aber $l(x+k) = lk + l(1+\frac{x}{k})$, so kann man statt $l(x+k)$ einfach lk setzen, da beide Größen nur um ein unendlich kleines von der Ordnung $\frac{1}{k}$ differieren.

Haupteigenschaften der allgemeinen Bernoulli'schen Function B.

Setzt man in 13) das einemal $x+1$ statt x, das anderemal $k+1$ statt k, so ergibt die Vergleichung der Resultate die Beziehung

A) $B(x+1,\mu) = B(x,\mu) + x^{\mu}$, welche auch noch für $\mu = -1$ gilt.

---

*) Vgl. Riemann i. d. Monatsberichten d. Berl. Akad. Nov. 1859.

**) Allgemeine Theorie der harmonischen Reihen, Basel 1862.

Da ferner

$$B(1,\mu) = E(k+1,\mu) - [1^\mu + 2^\mu + \cdots\cdots + k^\mu] + K(\mu)$$

und nach 4) $1^\mu + 2^\mu + \cdots\cdots + (k-1)^\mu = E(k,\mu) + K(\mu)$

folglich B) $\qquad B(1,\mu) = 0$ ist,

so erhält man aus A), wenn man darin statt x successive 1, 2, 3, ..., x—1 setzt und die entstehenden Gleichungen addiert, die für alle ganzen positiven Werte von x geltende Formel

14) $$B(x,\mu) = 1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \cdots\cdots + (x-1)^\mu$$

Im besonderen Falle, wo μ positiv ganz ist, resultiert die von Raabe und Schloemilch untersuchte Function $\frac{1}{m} \cdot \varphi(x,m) =$

$$\frac{x^m-1}{m} - \frac{x^{m-1}-1}{2} + \sum_{1}^{n}{}_{(r)} \frac{(-1)^{r-1}}{2r}\binom{m-1}{2r-1} B_{2r-1}\,[x^{m-2r}-1] \quad m>1.$$

Setzt man in A) $x=0$, so wird $B(0,\mu) = -0^\mu$, d. h. $B(0,\mu) = 0$ oder $B(0,\mu) = -\infty$, je nachdem der reelle Theil von $\mu \gtrless 0$ ist.

Für $\mu = -\nu$, wo $\nu > 0$, ist

15) $$B(x,-\nu) = \frac{k^{1-\nu}}{1-\nu} + K(-\nu) - \left[\frac{1}{x^\nu} + \frac{1}{(x+1)^\nu} + \cdots\cdots + \frac{1}{(x+k-1)^\nu}\right]$$

Auf diese B-Function lassen sich harmonische Reihen von der Form

$$\frac{1}{\lambda^\nu} \pm \frac{1}{(p+\lambda)^\nu} + \frac{1}{(2p+\lambda)^\nu} \pm \frac{1}{(3p+\lambda)^\nu} + \cdots\cdots \pm \frac{1}{(\overline{2k-1}\,p+\lambda)^\nu},$$

wo p und λ beliebige ganze positive Zahlen sind, zurückführen.

Wird in 15) $x = \frac{\lambda}{p}$ gesetzt, so wird

16) $$\sum_{0}^{k-1}{}_{(h)} \frac{1}{(\lambda+hp)^\nu} = \frac{1}{p^\nu}\left[\frac{k^{1-\nu}}{1-\nu} + K(-\nu) - B\left(\frac{\lambda}{p}, -\nu\right)\right]$$

Lässt man hierin k in 2k übergehen, so wird

17) $$\sum_{0}^{2k-1}{}_{(h)} \frac{1}{(\lambda+hp)^\nu} = \frac{1}{p^\nu}\left[\frac{(2k)^{1-\nu}}{1-\nu} + K(-\nu) - B\left(\frac{\lambda}{p}, -\nu\right)\right];$$

lässt man in 16) p in 2p übergehen, so wird

18) $$\sum_{0}^{k-1}{}_{(h)} \frac{1}{(\lambda+2hp)^\nu} = \frac{1}{(2p)^\nu}\left[\frac{k^{1-\nu}}{1-\nu} + K(-\nu) - B\left(\frac{\lambda}{2p}, -\nu\right)\right]$$

Subtrahiert man Gl. 18) von Gl. 17, so kommt 19)

$$\sum_{0\,(h)}^{2k-1} \frac{1}{(\lambda+2h+1p)^\nu} = \frac{1}{(2p)^\nu}\left[\frac{k^{1-\nu}}{1-\nu}+(2^\nu-1)K(-\nu)-2^\nu B(\frac{\lambda}{p},-\nu)+B(\frac{\lambda}{2p},-\nu)\right]$$

und subtrahiert man 19) von 18), so wird, da die resultierende Reihe auf der linken Seite beliebig weit fortgesetzt convergent ist, 20)

$$\sum_{0\,(h)}^{\infty} (-1)^h \frac{1}{(\lambda+hp)^\nu} = \frac{1}{(2p)^\nu}\left[(2-2^\nu)K(-\nu)+2^\nu B(\frac{\lambda}{p},-\nu)-2.B(\frac{\lambda}{2p},-\nu)\right]$$

Aus Gl. 20) resultiert für $p=1$, $\lambda=1$, da $B(1,-\nu)=0$

$$1-\frac{1}{2^\nu}+\frac{1}{3^\nu}-\frac{1}{4^\nu}+\cdots\cdots=\frac{1}{2^\nu}\left[(2-2^\nu)K(-\nu)-2.B(\tfrac{1}{2},-\nu)\right]$$

Im Zusammenhalt mit Gl. 9) folgt die Bestimmung

C) $$B(\tfrac{1}{2},-\nu)=(2-2^\nu).K(-\nu)$$

Aus 18), 19), 20) folgt für $p=2$, $\lambda=1$

21) $$1+\frac{1}{5^\nu}+\frac{1}{9^\nu}+\frac{1}{13^\nu}+\cdots\frac{1}{(4k+1)^\nu}=\frac{1}{4^\nu}\left[\frac{k^{1-\nu}}{1-\nu}+K(-\nu)-B(\tfrac{1}{4},-\nu)\right]$$

22) $$\frac{1}{3^\nu}+\frac{1}{7^\nu}+\frac{1}{11^\nu}+\cdots+\frac{1}{(4k+3)^\nu}=\frac{1}{4^\nu}\left[\frac{k^{1-\nu}}{1-\nu}+(4^\nu-2^\nu-1)K(-\nu)+B(\tfrac{1}{4},-\nu)\right]$$

23) $$1-\frac{1}{3^\nu}+\frac{1}{5^\nu}-\frac{1}{7^\nu}+\cdots=\frac{1}{4^\nu}\left[(2+2^\nu-4^\nu)K(-\nu)-2.B(\tfrac{1}{4},-\nu)\right]$$

Aus 18) folgt noch für $p=2$, $\lambda=3$

24) $$\frac{1}{3^\nu}+\frac{1}{7^\nu}+\frac{1}{11^\nu}+\cdots+\frac{1}{(4k+3)^\nu}=\frac{1}{4^\nu}\left[\frac{k^{1-\nu}}{1-\nu}+K(-\nu)-B(\tfrac{3}{4},-\nu)\right]$$

Durch Vergleichung von 24) und 22) folgt die Bestimmung

D) $$B(\tfrac{1}{4},-\nu)+B(\tfrac{3}{4},-\nu)=(2+2^\nu-4^\nu).K(-\nu)$$

welche in 23) eingeführt gibt

25) $$1-\frac{1}{3^\nu}+\frac{1}{5^\nu}-\frac{1}{7^\nu}+\cdots=\frac{1}{4^\nu}\left[B(\tfrac{3}{4},-\nu)-B(\tfrac{1}{4},-\nu)\right]$$

Entwicklung der B-Function nach einer Fourier'schen Reihe.

Setzt man nach H. Kinkelin*)

$$U=\int_0^1 B(a+x,\mu)\,dx,\quad V=\int_0^1 B(x,\mu)\sin\alpha x\,dx,\quad W=\int_0^1 B(x,\mu)\cos\alpha x\,dx$$

*) l. c.

wo a eine positive Zahl inclus. 0 und α ein Multiplum von 2π bezeichnet, so hat man, um U auszuwerten, zunächst den Wert von

$$\int_0^1 E(a+k+x,\mu)\, dx$$

anzugeben.

Aus der Definition der Function E [S. 8] folgt

26) $$D_x\, E(x+k,\mu) = \mu \,.\, E(x+k,\mu-1),$$

wodurch obiges Integral

$$= \frac{1}{\mu+1}\Big[E(a+k+1,\mu+1) - E(a+k,\mu+1)\Big] = \frac{(a+k)^{\mu+1}}{\mu+1}$$

wird, wie aus den Werten von $B(a+1,\mu+1)$, $B(a,\mu+1)$ und aus der Relation $B(a+1,\mu+1) = B(a,\mu+1) + a^{\mu+1}$ zu ersehen ist.

Nimmt man ferner das Integral über die Summe, so kommt sofort

$$\int_0^1 \sum_{0\,(r)}^{k-1} (a+x+r)^\mu\, dx = \int_0^k (a+x)^\mu\, dx = \frac{(a+k)^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1}$$

und folglich, da noch $\int_0^1 K(\mu)\, dx = K(\mu)$ ist,

27) $$U = \frac{a^{\mu+1}}{\mu+1} + K(\mu)$$

Es ist ferner, da $\int_0^1 K(\mu)\binom{\sin}{\cos}\alpha x\, dx = 0,$

$$V = \int_0^1 E(x+k,\mu)\sin\alpha x\, dx - \int_0^k x^\mu \sin\alpha x\, dx.$$

Durch factorenweise Integration*) folgt mit Rücksicht auf 26)

$$V = \frac{\mu}{\alpha}\Big[\int_0^1 E(x+k,\mu-1)\,.\cos\alpha x\,.\, dx - \int_0^k x^{\mu-1}\cos\alpha x\,.\, dx\Big]$$

und ebenso

$$W = -\frac{\mu}{\alpha}\Big[\int_0^1 E(x+k,\mu-1)\sin\alpha x\,.\, dx - \int_0^k x^{\mu-1}\sin\alpha x\,.\, dx\Big].$$

*) In Betreff des Terminus s. Schloem. Zeitschr. f. Math. XXIV. Hist.-lit. Abth. S. 142.

Führt man die factorenweise Integration q^{mal} aus, bis $-1 < \mu - q < 0$ wird, so findet man

$$\int_0^1 E(x+k, \mu-q)\sin \alpha x\,.\,dx = -\frac{k^{\mu-q}}{\alpha}\cos \alpha x \Big|_0^1 + \frac{\mu-q}{\alpha}\int_0^1 E(x+k, \mu-q-1)\cos \alpha x\,.\,dx = 0$$

und ebenso

$$\int_0^1 E(x+k, \mu-q)\cos \alpha x\,.\,dx = -\frac{\mu-q}{\alpha}\int_0^1 E(x+k, \mu-q-1)\sin \alpha x\,.\,dx = 0.$$

Beachtet man noch die Integral-Werte

$$\int_0^k x^{\mu-q}\sin \alpha x\,.\,dx = \frac{\Gamma(\mu-q+1)}{\alpha^{\mu-q+1}}\,.\,\sin\frac{\mu-q+1}{2}\pi$$

$$\int_0^k x^{\mu-q}\cos \alpha x\,.\,dx = \frac{\Gamma(\mu-q+1)}{\alpha^{\mu-q+1}}\,.\,\cos\frac{\mu-q+1}{2}\pi\,,$$

so erhält man die für jedes $\mu > -1$ giltigen Formeln*)

$$\left.\begin{aligned} V &= -\frac{\Gamma(1+\mu)}{\alpha^{1+\mu}}\,.\,\sin\tfrac{1}{2}(1+\mu)\pi \\ W &= -\frac{\Gamma(1+\mu)}{\alpha^{1+\mu}}\,.\,\cos\tfrac{1}{2}(1+\mu)\pi \end{aligned}\right\}$$

Gibt man jetzt der Gl. 1) durch Entwicklung des cosinus die Form

$$F(a)+F(a+h)+\cdots+F(a+qh) = \alpha_0 + 2\sum_{1\,(r)}^{n}\alpha_r\cos\frac{2\pi ra}{h} + 2\sum_{1\,(r)}^{n}\beta_r\sin\frac{2\pi ra}{h}$$

wo α_0, α_r β_r selbstverständliche Abkürzungen sind, und nimmt hierin $F(a) = B(x,\mu)$, $h=1$, $q=0$, so wird durch Einführung der gefundenen Integral-Werte

$$\text{IV)}\quad B(x,\mu) = K(\mu) - \frac{2\Gamma(1+\mu)}{(2\pi)^{1+\mu}}\left[\cos\tfrac{1}{2}\mu\pi\sum_{1\,(r)}^{\infty}\frac{\sin 2\pi rx}{r^{1+\mu}} - \sin\tfrac{1}{2}\mu\pi\sum_{1\,(r)}^{\infty}\frac{\cos 2\pi rx}{r^{1+\mu}}\right]$$

für jeden Wert von x zwischen den Grenzen 0 und +1 und für jedes $\mu > -1$. [Vgl. die Bemerkungen zu Gl. 1)].

Aus dieser Gleichung resultieren für die Bernoulli'schen Functionen mit ganzen positiven Exponenten die unendlichen Reihen**)

$$\text{IVa)}\quad \varphi(x, 2n+1) = (-1)^{n+1}\frac{2\,\Gamma(2n+2)}{(2\pi)^{2n+1}}\left[\frac{\sin 2\pi x}{1^{2n+1}} + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}} + \cdots\right]$$

---

*) Ohm, Syst. d. Math. IX. § 24; Schloem., Comp. d. höh. An. II. S. 270.

**) Vgl. Schloem. Comp. d. höh. An. II.

$$0 \leqq x \leqq 1$$

$$\varphi(x,2n) = (-)^n B_{2n-1} + (-1)^{n-1} \frac{2\Gamma(2n+1)}{(2\pi)^{2n}} \left[\frac{\cos 2\pi x}{1^{2n}} + \frac{\cos 4\pi x}{2^{2n}} + \cdots\right]$$

$$0 \leqq x \leqq 1$$

Nimmt man $x < \frac{1}{n}$ und setzt successive $x, x+\frac{1}{n}, x+\frac{2}{n}, \ldots\ldots, x+\frac{n-1}{n}$ statt x, so erhält man durch Summation auf der rechten Seite

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{(r)} B(x+\frac{r}{n}, \mu) = n\, K(\mu) - \frac{2\,\Gamma(1+\mu)}{(2\pi)^{1+\mu}\, n^{\mu}}$$

$$\cdot \left\{ \sin\tfrac{1}{2}(1+\mu)\pi \sum_{1}^{\infty}{}_{(r)} \frac{\sin 2\pi n r x}{r^{1+\mu}} + \cos\tfrac{1}{2}(1+\mu)\pi \sum_{1}^{\infty}{}_{(r)} \frac{\cos 2\pi n r x}{r^{1+\mu}} \right\}$$

oder mit Hilfe von IV), wenn darin nx statt x gesetzt wird

$$\text{V)} \quad \sum_{0}^{n-1}{}_{(r)} B(x+\frac{r}{n}, \mu) = n^{-\mu} B(nx,\mu) + (n-n)^{-\mu} \,.\, K(\mu).$$

Dieser Gleichung liegt zunächst die Voraussetzung $\mu > -1$ zugrunde; indessen lässt sich dieselbe mittels 15) auch für $\mu < -1$ (ebenso wie für $-1 < \mu < 0$) direct bestätigen.

Ebenso lässt sich für $\mu = -1$ die Gleichung

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{(r)} B(x+\frac{r}{n}, -1) = n\, B(nx,-1) \quad \text{verificieren.}$$

Obschon ferner Gl. V) nur für positive x, die $< \frac{1}{n}$, abgeleitet wurde, so gilt sie doch für alle reellen x, indem sich zeigen lässt, dass, wenn sie für ein bestimmtes x gilt, sie auch gilt für ein x^1, welches $= x + \frac{1}{n}$.

Im speciellen Falle, wenn $n = 2, x = \frac{1}{2}$ ist, resultieren aus V), da $B(1,\mu) = 0$, $B(1,-1) = 0$, die Bestimmungen

$$B(\tfrac{1}{2},\mu) = (2-2^{-\mu})\, K(\mu)$$

$$B(\tfrac{1}{2},-1) = 0$$

von denen die erstere für jeden von der Einheit verschiedenen Wert von μ gilt.

Aus IV) folgt, wenn $x = \frac{1}{2}$ gesetzt wird,

$$B(\tfrac{1}{2},\mu) = K(\mu) + \frac{2\Gamma(1+\mu)}{(2\pi)^{1+\mu}} \cos\tfrac{1}{2}(1+\mu)\pi \left[\frac{1}{1^{1+\mu}} - \frac{1}{2^{1+\mu}} + \frac{1}{3^{1+\mu}} - \cdots + \cdots\right]$$

welche Gleichung zufolge der Bestimmungen

und $$B(\tfrac{1}{2},\mu)=(2-2^{-\mu})\ K(\mu)$$

$$\frac{1}{1^{1+\mu}}-\frac{1}{2^{1+\mu}}+\frac{1}{3^{1+\mu}}-\frac{1}{4^{1+\mu}}+\cdots\cdot=(1-2^{-\mu}).K(-1-\mu)\quad\text{[Vgl. 9)]}$$

äquivalent ist mit

$$\frac{K(\mu)}{K(-1-\mu)}=\frac{2\Gamma(1+\mu)}{(2\pi)^{1+\mu}}\cos\tfrac{1}{2}(1+\mu)\pi\qquad\text{für } \mu>-1$$

oder, wenn μ in $\mu-1$ umgesetzt wird, mit

$$\text{VI)}\qquad \frac{K(\mu-1)}{K(-\mu)}=\frac{2\Gamma(\mu)}{(2\pi)^{\mu}}\cos\tfrac{1}{2}\mu\pi\qquad\text{für jedes } \mu>0.$$

Die Beschränkung, dass $\mu>0$ sein müsse, kann wegfallen. Denn ist $\mu=-\nu$, wo ν eine positive Zahl bezeichnet, so wird zufolge der Eigenschaft der Γ-Function

$$\Gamma(x).\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$$

$$\frac{2\Gamma(-\nu)}{(2\pi)^{-\nu}}\cos-\tfrac{1}{2}\nu\pi=\frac{(2\pi)^{1+\nu}}{2\Gamma(1+\nu)\cos\frac{1}{2}(1+\nu)\pi}=\frac{K(-1-\nu)}{K(\nu)}$$

Somit gilt VI) auch für **negative** Werte von μ. — Endlich wird sie auch erfüllt, wenn $\mu=-1$ ist, wie die Substitution der betreffenden Werte zeigt.

Die für jedes positive μ giltige Gleichung VI) stellt, wenn $0<\mu<1$ ist, eine Relation dar für zwei K, deren Argumente beide negativ sind und sich zu -1 ergänzen. Zur Anlegung einer Tabelle der Werte von $K(\mu)$ hat man demnach nur jene für die Argumente μ von $-\frac{1}{2}$ bis $-\infty$ zu berechnen.

Gang der K-Function für reelle μ von $-\infty$ bis $+\infty$.

Solange $\mu<-1$, kann $K(\mu)$ dargestellt werden durch die unendliche Reihe

$$\frac{1}{1^{-\mu}}+\frac{1}{2^{-\mu}}+\frac{1}{3^{-\mu}}+\cdots\cdots$$

welche beständig positiv bleibt und beim Zunehmen des μ von $-\infty$ bis -1 **zunimmt** von $+1$ bis $+\infty$.

An der Grenze $\mu=-1$ springt $K(\mu)$ von $+\infty$ zu $-\infty$ über. Solange $-1<\mu<0$, kann $K(\mu)$ dargestellt werden [9)] durch

$$-\frac{1}{2^{1+\mu}-1}\left[1-\frac{1}{2^{-\mu}}+\frac{1}{3^{-\mu}}-\frac{1}{4^{-\mu}}+\cdots\cdots\right]$$

und bleibt negativ.

Von $\mu = -1$ bis $\mu = 0$ wächst $K(\mu)$ stetig von $-\infty$ bis $-\frac{1}{2}$. Von $\mu = 0$ bis $\mu = 2$ ist $K(\mu)$ zufolge VI) negativ und verschwindet bei $\mu = 2$; von $\mu = 2$ bis $\mu = 4$ ist $K(\mu)$ positiv und bei $\mu = 4$ wieder Null. Ferner ist $K(5) = -\frac{B_5}{6}$, $K(6) = 0$ u. s. f.

Zwischen den Puncten $\mu = 0$ und $\mu = 2$ hat also die Function $K(\mu)$ ein Minimum, zwischen $\mu = 2$ und $\mu = 4$ ein Maximum und zwar wachsen mit wachsenden μ die Minima und Maxima selbst ins unendliche.

Die Zahlen $\mu = 2, 4, 6, \ldots.$ sind demnach die Wurzeln der Gleichung

$$K(\mu) = 0$$

und zwar einfache Wurzeln derselben; denn, da

$$K(\mu) = -2 \, . \, (2\pi)^{-1-\mu} \, \Gamma(1+\mu) \, . \, K(-1-\mu) \sin \tfrac{1}{2} \mu\pi = Q . \sin \tfrac{1}{2} \mu\pi ,$$

so ist $$D_\mu \, K(\mu) = \frac{\pi}{2} Q \cos \tfrac{1}{2} \mu\pi + \sin \tfrac{1}{2} \mu\pi \, . \, D_\mu \, Q ,$$

wo für $\mu = 2n$ das erste Glied rechts von Null verschieden, das zweite $= 0$ ist; somit kann $D_\mu \, K(\mu)$ für $\mu = 2n$ nicht verschwinden.

Ebensowenig ist $\mu = -1$ eine mehrfache Wurzel der Gleichung $\frac{1}{K(\mu)} = 0$ und folglich darf gesetzt werden

$$K(\mu) = (\mu-2)\,(\mu-4)\,(\mu-6) \cdots\cdots (\mu-2\,k) \, . \, \frac{\chi(\mu)}{1+\mu}$$

worin die Function $\chi(\mu)$ für keinen andern reellen Wert von μ Null und für keinen andern endlichen Wert von μ unendlich wird.

Zur Berechnung von $K(\mu)$ für negative μ kann auch das folgende Verfahren dienen. [Vgl. 8) S. 12.]

Setzt man in [3) S. 8]

$$x^\mu + (x+1)^\mu + (x+2)^\mu + \cdots\cdots + (x+k-1)^\mu = E(x+k, \mu) - E(x, \mu) + R_n$$

r statt x, rk statt k, $-\mu$ statt μ und lässt r eine ganze positive Zahl bedeuten, so kommt

$$\frac{1}{r^\mu} + \frac{1}{(r+1)^\mu} + \frac{1}{(r+2)^\mu} + \cdots + \frac{1}{(r+rk-1)^\mu} = E(r+rk, -\mu) - E(r, -\mu) + R_n$$

Setzt man in

$$1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \cdots\cdots + (k-1)^\mu = E(k, \mu) + K(\mu) \qquad [4) \text{ S. } 9]$$

$r+rk$ statt k und $-\mu$ statt μ, so kommt

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots\cdots + \frac{1}{(r+rk-1)^\mu} = E(r+rk, -\mu) + K(-\mu)$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der vorhergehenden, so kommt durch Substitution des Ausdruckes von $E(r, -\mu)$

$$K(-\mu)=\frac{1}{1^\mu}+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{(r-1)^\mu}+\frac{1}{2r^\mu}-\frac{r^{1-\mu}}{1-\mu}$$
$$+\frac{1}{r^{1+\mu}}\Big[\mu\frac{B_1}{2!}-\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{r^2}\frac{B_3}{4!}+\frac{\mu(\mu+1)\,..\,(\mu+4)}{r^4}\frac{B_5}{6!}-$$
$$\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+6)}{r^6}\frac{B_7}{8!}+\cdots-\cdots\Big]+R_n$$

wo der Rest jeweils kleiner ist als das zuletzt gerechnete Glied der in der Klammer enthaltenen halbconvergenten Reihe.

Im Falle $\mu=-1$ ist $K(-\mu)$ durch $C(-1)$ und $\frac{r^{1-\mu}}{1-\mu}$ durch lr zu ersetzen. [Vgl. 5) S. 10, 11].

Nach obiger Formel wurde $K(\mu)$ für das Intervall $\mu=0$ bis $\mu=-1$ und zwar für $r=4$ und je einmal für $r=5$ und $r=10$ berechnet.

Für das engere Intervall von $\mu=-0{,}6$ bis $\mu=-0{,}9$ wurde $K(\mu)$ aus der Relation
$$\frac{K(\mu-1)}{K(-\mu)}=\frac{2\Gamma(\mu)}{(2\pi)^\mu}\cos\tfrac{1}{2}\mu\pi$$
mit Hilfe der Tafel von Legendre für die Brigg'schen Logarithmen von $\Gamma(\mu)$ berechnet.*)

Für $\mu=-\frac{1}{2}$ wurde direct durch Berechnung der Quadratwurzeln bis $r=10$ der genaue Wert
$$K(-\tfrac{1}{2})=-1{,}460354509$$
gefunden. — Sodann ergeben sich aus den Werten von $K(\mu)$ jene von $C(\mu)$ durch die Relation
$$K(\mu)=C(\mu)-\frac{1}{1+\mu}$$

Es möge hier die folgende Tafel der Werte von $K(\mu)$ Platz finden.

μ	$K(\mu)$	$C(\mu)$	Δ_1 +	Δ_2 —	Δ_3 —	Δ_4 +
—0,0	—0,500000000	0,50000000	807359			
—0,1	—0,603037520	0,50807359	800548	6811	427	
—0,2	—0,733920925	0,51607907	793310	7238	401	26
—0,3	—0,904559259	0,52401217	785671	7639	371	30
—0,4	—1,134797785	0,53186888	777661	8010	345	26
—0,5	—1,460354509	0,53964549	769306	8355	317	28
—0,6	—1,952661450	0,54733855	760634	8672	293	24
—0,7	—2,778388447	0,55404489	751669	8965	265	28
—0,8	—4,437538417	0,56246158	742439	9230	240	25
—0,9	—9,430114027	0,56988597	732969	9470		
—1,0	∞	0,57721566				

Die zwischenliegenden Werte sind daraus durch Interpolation bestimmbar.

*) Traité des fonct. ellipt. tome II. — Einige Werte aus dieser Tafel finden sich in Schloem. Comp. d. höh. An. II.

Setzt man die Berechnung von $K(\mu)$ bis zum Argumente $-1,9$ fort, so erhält man mittels der Relation $\Gamma(1+\frac{r}{q})=\frac{r}{q}\,.\,\Gamma(\frac{r}{q})$ die Reihe der Werte von $K(\mu)$ für das Intervall $\mu=0$ bis $\mu=0,9$, wozu man sich auch unter Zuhilfenahme des Gauss'schen Theorems der Formel

$$\frac{K(\lambda-\frac{1}{2})}{K(-\lambda-\frac{1}{2})}=\frac{2\sqrt{2}}{(8\pi)^{\lambda}}\cdot\frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(\lambda)}\cos(2\lambda+1)\frac{\pi}{4}\qquad\lambda>0,$$

welche speciell für $\lambda=1$

$K(0,5)=-\dfrac{K(-1,5)}{4\pi}$ gibt, vortheilhaft bedienen kann.*)

* * *

Wenn $\mu=-\nu$ ist, wobei $\nu>0$, so erhält man die Gleichung

$$B(x,-\nu)=K(-\nu)-\frac{2\Gamma(1-\nu)}{(2\pi)^{1-\nu}}\cos\tfrac{1}{2}\nu\pi\sum_{1\,(r)}^{\infty}\frac{\sin 2\pi rx}{r^{1-\nu}}-\frac{2\Gamma(1-\nu)}{(2\pi)^{1-\nu}}\sin\tfrac{1}{2}\nu\pi\sum_{1\,(r)}^{\infty}\frac{\cos 2\pi rx}{r^{1-\nu}};$$

setzt man hierin $1-x$ statt x, so folgt

$$B(1-x,-\nu)=K(-\nu)+\frac{2\Gamma(1-\nu)}{(2\pi)^{1-\nu}}\cos\tfrac{1}{2}\nu\pi\sum_{1\,(r)}^{\infty}\frac{\sin 2\pi rx}{r^{1-\nu}}-\frac{2\Gamma(1-\nu)}{(2\pi)^{1-\nu}}\sin\tfrac{1}{2}\nu\pi\sum_{1\,(r)}^{\infty}\frac{\cos 2\pi rx}{r^{1-\nu}}$$

$$0<\nu<1,\qquad 0<x<1$$

Hieraus folgt mittels der Relation $\Gamma(1-\nu)\,.\,\Gamma(\nu)=\dfrac{\pi}{\sin\nu\pi}$

$$\text{VII)}\begin{cases}\text{a) } B(x,-\nu)-B(1-x,-\nu)=-\dfrac{(2\pi)^{\nu}}{\Gamma(\nu)\sin\frac{1}{2}\nu\pi}\left[\dfrac{\sin 2\pi x}{1^{1-\nu}}+\dfrac{\sin 4\pi x}{2^{1-\nu}}+\cdots\right]\\[2ex] \text{b) } B(x,-\nu)+B(1-x,-\nu)-2K(-\nu)=-\dfrac{(2\pi)^{\nu}}{\Gamma(\nu)\cos\frac{1}{2}\nu\pi}\left[\dfrac{\cos 2\pi x}{1^{1-\nu}}+\dfrac{\cos 4\pi x}{2^{1-\nu}}+\cdots\right]\end{cases}$$

Nimmt man hierin $x=\frac{1}{2}$, so gibt die erstere Gleichung die Identität $0=0$, und die letztere die Bestimmung

*) Eine Tafel der Werte von $\Gamma(1+\frac{r}{12})$ findet sich in Schloem. Übungsbuch für höhere Anal. II.

$$2B(\tfrac{1}{2},-\nu)-2K(-\nu)=\frac{(2\pi)^\nu}{\Gamma(\nu)\cos\frac{1}{2}\nu\pi}\left[1-\frac{1}{2^{1-\nu}}+\frac{1}{3^{1-\nu}}-\frac{1}{4^{1-\nu}}+\dots\right]$$

welche zufolge der Gl. C) [S. 22] und der Gl. 9) [S. 12] äquivalent ist mit

$$1-\frac{1}{2^\nu}+\frac{1}{3^\nu}-\frac{1}{4^\nu}+\dots=\frac{2-2^\nu}{2^\nu-1}\cdot\frac{\pi^\nu}{2\Gamma(\nu)\cos\frac{1}{2}\nu\pi}$$

$$\left[1-\frac{1}{2^{1-\nu}}+\frac{1}{3^{1-\nu}}-\frac{1}{4^{1-\nu}}+\dots\right]$$

Bezeichnet man die links stehende Reihe mit $f(\nu)$, so hat man für $f(\nu)$ und die complementäre Function $f(1-\nu)$ die Relation

$$\frac{f(1-\nu)}{f(\nu)}=\frac{2^\nu-1}{2^{1-\nu}-1}\cdot\frac{2\Gamma(\nu)\cos\frac{1}{2}\nu\pi}{(2\pi)^\nu}\qquad 0<\nu<1$$

welche von Schloemilch auf einem andern Wege entdeckt wurde.*)

Aus VIIa) folgt für $x=\frac{1}{4}$

$$1-\frac{1}{3^{1-\nu}}+\frac{1}{5^{1-\nu}}-\frac{1}{7^{1-\nu}}+\dots=\frac{B(\frac{3}{4},-\nu)-B(\frac{1}{4},-\nu)}{(2\pi)^\nu}\cdot\Gamma(\nu)\sin\tfrac{1}{2}\nu\pi$$

oder mit Rücksicht auf 25), wenn unter der Annahme $\nu<1$ ν in $1-\nu$ umgesetzt wird,

$$\frac{B(\frac{3}{4},-\nu)-B(\frac{1}{4},-\nu)}{B(\frac{3}{4},\nu-1)-B(\frac{1}{4},\nu-1)}=\frac{(2\pi)^\nu}{4^{1-\nu}\Gamma(\nu)\sin\frac{1}{2}\nu\pi}$$

oder ebenfalls zufolge 25)

$$1-\frac{1}{3^\nu}+\frac{1}{5^\nu}-\frac{1}{7^\nu}+\dots=\left(\frac{\pi}{2}\right)^\nu\frac{1}{\Gamma(\nu)\sin\frac{1}{2}\nu\pi}$$

$$\left[1-\frac{1}{3^{1-\nu}}+\frac{1}{5^{1-\nu}}-\frac{1}{7^{1-\nu}}+\dots\right]$$

und dies ist die zuerst von Malmsten aufgestellte Relation**)

$$\frac{\varphi(1-\nu)}{\varphi(\nu)}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^\nu\cdot\Gamma(\nu)\sin\tfrac{1}{2}\nu\pi\qquad 0<\nu<1.$$

Auf leicht ersichtliche Weise erhält man noch

$$\tan\tfrac{1}{2}\nu\pi=\frac{1}{2^{2\nu-1}}\cdot\frac{2^\nu-1}{2^{1-\nu}-1}\cdot\frac{f(\nu)}{f(1-\nu)}\cdot\frac{\varphi(1-\nu)}{\varphi(\nu)}$$

---

*) Vgl. Zeitschr. f. Math. Jg. XXIII. — **) Jg. III. XXIII.

Lässt man in Gl. VIIa) x successive die Werte $\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \ldots, \frac{2^{n-1}-1}{2^n}$ annehmen, addiert dann alle ungeradstelligen Gleichungen und subtrahiert alle geradstelligen und ordnet nach Numern, so kommt

$$B(\frac{1}{2^n},-\nu) - B(\frac{3}{2^n},-\nu) + B(\frac{5}{2^n},-\nu) - \cdots + B(\frac{2^n-3}{2^n},-\nu) - B(\frac{2^n-1}{2^n},-\nu)$$

$$= - \frac{(2\pi)^\nu}{\Gamma(\nu)\sin\frac{1}{2}\nu\pi} \sum_{1(\lambda)}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{1-\nu}} \left[\sin\frac{\lambda\pi}{c} - \sin\frac{3\lambda\pi}{c} + \sin\frac{5\lambda\pi}{c} - \cdots\cdots - \sin\frac{(2^{n-1}-1)\lambda\pi}{c}\right]$$

worin der Kürze halber c statt 2^{n-1} geschrieben wurde.

Die Summe des Klammerinhaltes rechter Hand ist, wie man leicht bewahrheitet, $= \frac{\sin\lambda\pi}{2\cos\frac{\lambda\pi}{2^{n-1}}}$

Dieser Ausdruck ist aber Null für alle λ, ausgenommen, wenn $\lambda = (2m+1)\,2^{n-2}$ $(m = 0,1,2,\ldots)$, in welchem Falle er die Form $\frac{0}{0}$ annimmt; der wahre Wert ist diesfalls

$$\frac{2^{n-2}\cdot\cos(2m+1)\,2^{n-2}\pi}{\sin(m+\frac{1}{2})\pi} = (-1)^m\,2^{n-2}$$

Demzufolge verschwinden in der Summe rechts alle Glieder, ausgenommen jene, in denen $\lambda = (2m+1)\,2^{n-2}$, und dieselbe geht durch Vereinfachung über in $2^{\nu(n-2)}\cdot\varphi(1-\nu)$

oder zufolge der oben angegebenen Relation zwischen den Functionen $\varphi(\nu)$ und $\varphi(1-\nu)$ in

$$\frac{2^{\nu(n-1)}}{\pi^\nu}\,\Gamma(\nu)\sin\tfrac{1}{2}\nu\pi\,.\,\varphi(\nu),$$

so dass schließlich die von Kinkelin entdeckte Relation

$$\text{E)}\ B(\frac{1}{2^n},-\nu) - B(\frac{3}{2^n},-\nu) + B(\frac{5}{2^n},-\nu) - \cdots - B(\frac{2^n-1}{2^n},-\nu) = -2^{n\nu}.\,\varphi(\nu)$$

resultiert.*)

Substituiert man in V) $\frac{1}{2^n}$ für x und 2^n für n, so kommt für $\mu = -\nu$ mit Rücksicht auf $B(1,-\nu) = 0$

*) Mittheilungen d. naturf. Ges. in Bern. Nr. 419.

$$B\left(\frac{1}{2^n},-\nu\right)+B\left(\frac{3}{2^n},-\nu\right)+\cdots+B\left(\frac{2^n-1}{2^n},-\nu\right)+B\left(\frac{1}{2^{n-1}},-\nu\right)+$$

$$B\left(\frac{2}{2^{n-1}},-\nu\right)+\cdots\cdot+B\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}},-\nu\right)=(2^n-2^{n\nu})\,K(-\nu)$$

Substituiert man aber in V) $\frac{1}{2^{n-1}}$ für x und 2^{n-1} für n, so wird

$$B\left(\frac{1}{2^{n-1}},-\nu\right)+B\left(\frac{2}{2^{n-1}},-\nu\right)+B\left(\frac{3}{2^{n-1}},-\nu\right)+\cdots+B\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}},-\nu\right)$$
$$=[2^{n-1}-2^{(n-1)\nu}]\,K(-\nu)$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$B\left(\frac{1}{2^n},-\nu\right)+B\left(\frac{3}{2^n},-\nu\right)+\cdots+B\left(\frac{2^n-1}{2^n},-\nu\right)=[2^{n-1}+2^{(n-1)\nu}-2^{n\nu}]\,K(-\nu).$$

Wird diese Relation mit der obigen E) verbunden, so folgt

$$\text{F)}\ B\left(\frac{1}{2^n},-\nu\right)+B\left(\frac{5}{2^n},-\nu\right)+B\left(\frac{9}{2^n},-\nu\right)+\cdots\cdot+B\left(\frac{2^n-3}{2^n},-\nu\right)$$
$$=-2^{n\nu-1}.\,\varphi(\nu)+\tfrac{1}{2}\,[2^{n-1}+2^{(n-1)\nu}-2^{n\nu}]\,K(-\nu).$$

Anmerkungen.

Seite 6, Z. 8 v. u. lies $\rho \gtrless 0$.

Seite 13 Z. 8 v. o. Vgl. Riemann i. d. Monatsberichten d. Berl. Akad. Nov. 1859, dessen Function $\zeta(-\mu)$ übereinstimmt mit $K(\mu)$.

Seite 16 füge zu Gl. II) hinzu: Z. B. ist für $p=1000$ $s_1=7{,}485471$ und für $p=1000000$ $s_1=14{,}392727$, woraus ersichtlich wird, mit welcher Langsamkeit S_1 divergiert.