Die Summenformel von Mac-Laurin und einige Anwendungen derselben.

Vorbemerkung.

In nachstehender Abhandlung wird versucht, die Herleitung der berühmten Mac-Laurin'schen Summenformel mit Hilfe einer von Darboux herrührenden Function [Man sehe Liouville's Journ. de Math. (serie 3) tome II.] zu geben. Selbstverständlich kann hiebei eine Untersuchung der Natur und Haupteigenschaften der Bernoulli'schen Functionen nicht umgangen werden.

In den Anwendungen der Mac-Laurin'schen Formel finden sich einige der von Darboux l. cit. niedergelegten Gedanken verwerthet und wird weiterhin eine strenge Herleitung der Stirling'schen Reihe für den Logarithmus des Products der x ersten ganzen Zahlen gegeben.

Betrachten wir die folgende Function von t*)

$$\Psi(t) = \varphi^{n}(t) \,.\, F(x+ht) - h\,\varphi^{n-1}(t) \,.\, F'(x+ht) + h^{2}\,\varphi^{n-2}(t) \,.$$
$$F''(x+ht) \;-\; \ldots\ldots \;+ (-1)^{n}\, h^{n}\, \varphi(t) \,.\, F^{n}(x+ht)$$

Hierin bezeichne $\varphi(t)$ ein Polynom vom Grade n und φ', φ'', ... φ^{n-1}, φ^{n} seien die successiven Derivirten der Hauptfunction φ. — Unter F (u) ist eine reelle Function der gleichfalls als reell gedachten Variablen x und h zu verstehen. Nebstdem wird vorausgesetzt, dass die Functionen F (u), $F'(u)$, ..., $F^{n}(u)$, $F^{n+1}(u)$ endlich und stetig bleiben, wenn ihr Argument von x bis $x+h$ variirt.

Nun ist

$$\Psi'(t) = (-1)^{n}\, h^{n+1}\, \varphi(t) .\, F^{n+1}(x+ht)$$

---

*) Nach Darboux in Liouville's Journ. de Math. (3. serie) tome II.

und zufolge der Voraussetzung in Betreff der Function F

$$\Psi(1) - \Psi(0) = (-1)^n \, h^{n+1} \int_0^1 \varphi(t).\, F^{n+1}(x+ht)\, dt;$$

führt man die Werte von $\Psi(1)$, $\Psi(0)$ ein, so kommt

$$\text{I.} \qquad \varphi^n(0)\,[F(x+h) - F(x)]$$

$$= h\,[\varphi^{n-1}(1) \,.\, F'(x+h) - \varphi^{n-1}(0) \,.\, F'(x)]$$

$$- h^2\,[\varphi^{n-2}(1) \,.\, F''(x+h) - \varphi^{n-2}(0) \,.\, F''(x)]$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ (-1)^{n-1}\, h^n\,[\varphi(1) \,.\, F^n(x+h) - \varphi(0) \,.\, F^n(x)] + R_n$$

$$\text{wo } R_n = (-1)^n\, h^{n+1} \int_0^1 \varphi(t) \,.\, F^{n+1}(x+ht)\, dt \text{ ist.}$$

Diese Formel erweist sich als sehr fruchtbar. Indem man bezüglich des Polynomes $\varphi(t)$ verschiedene Annahmen macht, resultiren aus derselben theils schon bekannte, theils neue Reihen, die wegen ihrer Restformen mehrfach brauchbar sind.

Nimmt man beispielsweise $\varphi(t) = (t-1)^n$, so erhält man die Taylor'sche Reihe in ihrer gewöhnlichen Form:

$$\text{II. a)} \quad F(x+h) - F(x) = \sum_1^n{}_{n)}\, F^n(x) \,.\, \frac{h^n}{n!} + F^{n+1}(x+\theta h) \,.\, \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Setzt man 2n für n und nimmt $\varphi(t) = t^n(t-1)^n = (t^2-t)^n$, so kommt

$$\text{b)} \left\{ \begin{aligned} & F(x+h) - F(x) = \frac{h}{2}\,[F'(x+h) + F'(x)] - \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} \cdot \frac{h^2}{2!} \\ & \qquad [F''(x+h) - F''(x)] \\ & + \ldots\ldots + (-1)^{k-1}.\, \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1)}{2n(2n-1)\ldots\ldots(2n-k+1)} \cdot \frac{h^k}{k!} \\ & \qquad [F^k(x+h) + (-1)^k F^k(x)] \\ & + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}.\, \frac{h^n}{2n(2n-1)\ldots\ldots(n+1)} \,. \\ & \qquad [F^n(x+h) + (-1)^{n-1} F^n(x)] + R_{2n} \end{aligned} \right.$$

wo der Rest gegeben ist durch die Gleichung

$$R_{2n} = (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 t^n (1-t)^n \,.\, F^{2n+1}(x+ht)\, dt$$

$$\text{Nun ist} \int_0^1 t^n (1-t)^n\, dt = \frac{n}{n+1} \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{n+1}\, dt$$

und durch n—malige Anwendung

$$\int_0^1 t^n (1-t)^n\, dt = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, n}{(n+1) \ldots (2n+1)}$$

$$\text{folglich } R_{2n} = (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{F^{2n+1}(x+\theta h)}{[(n+1) \ldots\ldots 2n]^2}$$

Die Formel II b) erscheint deshalb bemerkenswert, weil man durch dieselbe, wenn man nur n Derivirte zählt, eine Approximation von der Ordnung h^{2n+1} erreichen kann.

Setzt man in derselben successive $n = 1, 2, 3, \ldots$ so erhält man

$$\text{A)}\quad F(x+h) - F(x) = \frac{h}{2}\,[F'(x+h) + F'(x)] - \frac{h^2}{12} \,.\, F'''(x+\theta h)$$

$$\text{B)}\quad F(x+h) - F(x) = \frac{h}{2}\,[F'(x+h) + F'(x)] - \frac{h^2}{12}[F''(x+h) - F''(x)] + \frac{h^5}{720} \,.\, F^{V}(x+\theta h)$$

$$\text{C)}\quad F(x+h) - F(x) = \frac{h}{2}\,[F'(x+h) + F'(x)] - \frac{h^2}{8}[F''(x+h) - F''(x)] + \frac{h^3}{120}\,[F'''(x+h) - F'''(x)] - \frac{h^7 \,.\, F^{VII}(x+\theta h)}{100800}$$

Man kann noch bemerken, dass das Restglied hier mit einem numerischen Coefficienten behaftet ist, der viel kleiner ist als der entsprechende Coefficient im Restgliede der Taylor'schen Reihe.

Die Coefficienten, welche in der Formel I. erscheinen, sind die Derivirten von $\varphi(t)$ für $t = o$ und $t = 1$. Man kann nun fragen, ob es nicht möglich wäre, mehrere jener Coefficienten einander gleich zu machen und eine Formel herzustellen, in welche nur die Differenzen $F^{(k)}(x+h) - F^{(k)}(x)$ eingehen.

Die Forderung, dass sämmtliche Ableitungen des Polynoms $\varphi(t)$ für $t = 0$ und $t = 1$ denselben Wert annehmen sollen, ist unerfüllbar; denn da

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1}\varphi^{1}(0) + \ldots\ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(0) + \frac{t^n}{n!}\varphi^n(0)$$

$$\varphi(t+1) = \varphi(1) + \frac{t}{1}\varphi^{1}(1) + \ldots\ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(1) + \frac{t^n}{n!}\cdot\varphi^n(1)$$

ist, so müsste $\varphi(t+1) = \varphi(t)$ sein, was auch t wäre — ein Absurdum, da kein Polynom periodisch ist.

Stellt man die Forderung, dass sämmtliche Ableitungen des Polynoms $\varphi(t)$ mit Ausnahme der vorletzten für die besagten Werte von t einzeln einander gleich werden sollen, so ist hiezu, wie man aus

$$\varphi(t+1) - \varphi(t) = [\varphi^{n-1}(1) - \varphi^{n-1}(0)]\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

ersieht, notwendig aber auch hinreichend, dass die Differenz $\varphi(t+1) - \varphi(t)$ nur den Term mit t^{n-1} enthalte; das gesuchte Polynom muss sohin der Functionalgleichung

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = C\,.\,x^{n-1}$$

genügen, und da man sich dieselbe mit einer passend gewählten Constante multiplicirt denken kann, so kann man die obige Bedingung ausdrücken durch $\varphi(x+1) - \varphi(x) = nx^{n-1}$

Wenn nun x eine ganze Zahl ist, so resultirt hieraus weiterhin

$$\begin{aligned}\varphi(x) - \varphi(x-1) &= n(x-1)^{n-1}\\ \varphi(x-1) - \varphi(x-2) &= n(x-2)^{n-1}\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \varphi(2) - \varphi(1) &= n\,.\,1^{n-1}\\ \varphi(1) - \varphi(0) &= 0\end{aligned}$$

und wenn $\varphi(0) = 0$ genommen wird, so hat man für ganze x

$$\varphi(x) = n\,[x^{n-1} + (x-1)^{n-1} + \cdots\cdots + 2^{n-1} + 1^{n-1}]$$

Setzt man noch $x = p-1$, so hat man

$$\varphi(p) = n\,[(p-1)^{n-1} + (p-2)^{n-1} + \cdots\cdots + 2^{n-1} + 1^{n-1}]$$

Natur und Eigenschaften der Function φ.

Um die Function φ zu finden, muss das Problem, „die Summen der gleichen Potenzen der natürlichen Zahlen auszuwerthen“ in Angriff genommen werden.

Die Aufgabe sei nun: Eine endliche Reihe von der Form

$$1^m + 2^m + \cdots\cdots + (p-2)^m + (p-1)^m$$

zu summiren, wo p und m als positive ganze Zahlen gedacht werden.

Lässt sich auch die Summation durch recurrente Berechnung ausführen, so ist doch ein independentes Gesetz nur durch Differenzialrechnung zu gewinnen.

Bemerkt man zunächst, dass

$$a^m = D_x^m (e^{ax})_{(x=0)}$$

so hat man

$$1^m + 2^m + \cdots\cdots + (p-2)^m + (p-1)^m = D_x^m [e^x + e^{2x} + \cdots\cdots + e^{(p-2)x} + e^{(p-1)x}]_{(0)}$$

$$= D_x^m \left\{ \frac{e^{px} - e^x}{e^x - 1} \right\}_{(0)} = D_x^m \left\{ 1 + \frac{e^{px} - e^x}{e^x - 1} \right\}_{(0)}$$

Da nun

$$1 + \frac{e^{px} - e^x}{e^x - 1} = \frac{e^{px} - 1}{e^x - 1} = \frac{e^{px} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1},$$

so handelt es sich um die Entwicklung der Factoren des letzteren Productes.

Es ist

$$\frac{e^{px} - 1}{x} = p + \frac{p^2}{2!} x + \frac{p^3}{3!} x^2 + \cdots\cdots + \frac{p^{m+1}}{(m+1)!} x^m + \cdots$$

und

$$1) \quad \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots} = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

wo die A noch zu bestimmende numerische Coefficienten bezeichnen.

Man hat nun

$$1 = 1 + (A_1 + \tfrac{1}{2}) x + (A_2 + \tfrac{A_1}{2!} + \tfrac{1}{3!}) x^2 + (A_3 + \tfrac{A_2}{2!} + \tfrac{A_1}{3!} + \tfrac{1}{4!}) x^3 + \cdots$$

welche Gleichung nur bestehen kann, wenn die Coefficienten von x, x^2, x^3, ... sämmtlich $= 0$ sind.

Hieraus ergeben sich Bestimmungsgleichungen für $A_1, A_2, \ldots$

$$A_1 + \tfrac{1}{2!} = 0 \qquad\qquad A_1 = -\tfrac{1}{2}$$

$$A_2 + \tfrac{A_1}{2!} + \tfrac{1}{3!} = 0 \qquad\qquad A_2 = +\tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{2!}$$

$$\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots$$

Setzt man $-x$ statt x, so kommt einerseits

$$\frac{-x}{e^{-x} - 1} = 1 - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + \cdots\cdots$$

andererseits ist

$$\frac{-x}{e^{-x} - 1} = \frac{-xe^x}{1 - e^x} = x - \frac{x}{1 - e^x} = 1 + (A_1 + 1) x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots\cdots$$

folglich $1 - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + \ldots\ldots = 1 + (A_1 + 1) x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots$

d. h.

$$\begin{array}{ll} -A_1 = (A_1 + 1), & \text{daraus } A_1 = -\tfrac{1}{2}; \\ A_2 = A_2 & \\ -A_3 = A_3 & \quad\text{„}\quad A_3 = 0 \\ A_4 = A_4 & \\ -A_5 = A_5 & \quad\text{„}\quad A_5 = 0 \\ \ldots\ldots & \end{array}$$

Daraus scheint hervorzugehen, dass die mit ungeraden Indices behafteten A, von A_3 angefangen, sämmtlich $= 0$ sind.

Dividirt man 1) durch x, so kommt

$$2)\quad \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} + A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots\ldots, \text{ wo } A_1 = -\tfrac{1}{2}$$

Setzt man hierin $-x$ statt x und bemerkt, dass

$$\frac{1}{e^{-x}-1} = \frac{e^x}{1 - e^x} = \frac{-e^x}{e^x - 1} \text{ wird, so hat man}$$

$$3)\quad \frac{-e^x}{e^x - 1} = -\frac{1}{x} + A_1 - A_2 x + A_3 x^2 - A_4 x^3 + \ldots\ldots$$

Durch Addition der Gleichungen 2) und 3) ergibt sich in Betracht, dass $2 A_1 = -1$ ist

$$0 = 2 A_3 x^2 + 2 A_5 x^4 + 2 A_7 x^6 + \ldots\ldots$$

woraus unzweifelhaft folgt, dass $A_3 = A_5 = A_7 = \ldots = 0$ ist.

In Betracht, dass $A_1 = -\frac{1}{2}$ ist, kann die Gleichung 2) folgendermassen geschrieben werden.

$$x\left(\frac{1}{e^x - 1} + \tfrac{1}{2}\right) = 1 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + \ldots = \sum_{0}^{\infty}{}_{(k)} A_{2k} \cdot x^{2k}$$

wo $A_0 = 1$ ist, während $A_2, A_4, \ldots$ noch zu bestimmen sind.

Weil aber

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots = \sum_{0}^{\infty}{}_{(r)} \cdot \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} \text{ ist,}$$

so folgt, wenn obige Gleichung damit multiplicirt wird

$$x + \tfrac{1}{2} \sum_{0}{}_{(r)} \frac{x^{r+2}}{(r+1)!} = \sum_{(k,r)} A_{2k} \frac{x^{2k+r+1}}{(r+1)!}$$

wo rechts die Summation simultan auf die Variablen k, r zu erstrecken ist.

Nimmt man hier rechts und links den Coefficienten von x^{m+1}, wo m jede positive ganze Zahl vorstellt, so hat man die Gleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m!} = \sum_{[r+2k=m]} \frac{A_{2k}}{(r+1)!} = \sum_{[r+2k=m]} \frac{A_{2k}}{(m+1-2k)!} \; {}^{*)}$$

Sondert man von der Reihe rechts das Glied für $k=o$ ab, (indem man $k=o$ und dann $k+1$ statt k schreibt), multiplicirt beiderseits mit $m!$ und reducirt die Gleichung auf Null, so kommt

$$\sum_{[r+2k=m-2]} \frac{m!}{(m-1-2k)!} A_{2k+2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{m+1} = 0$$

aus welcher Gleichung, wenn man statt m successive 2, 4, 6, ... (oder auch 3, 5, 7, ...) setzt, die Coefficienten A_2, A_4, ... bestimmbar sind.

Subtrahirt man Gleichung 3) von 2), so ergibt sich weiter, wenn noch mit $^1/_2 x$ multiplicirt wird,

$$4) \quad {}^1/_2 x \cdot \frac{e^x+1}{e^x-1} = 1 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + \ldots\ldots = \sum_{0}^{\infty}{}_{(k)} A_{2k} x^{2k},$$

da $A_0 = 1$.

Diese Gleichung liefert, wenn man statt e^x die Reihe $\sum_0^\infty{}_{(r)} \frac{x^r}{r!}$ setzt, die Brüche wegschafft und vergleicht, die obigen Bestimmungsgleichungen für die A nochmals.

Beachtet man, dass

$$\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{e^{1/_2 x}+e^{-1/_2 x}}{e^{1/_2 x}-e^{-1/_2 x}} = -\frac{e^{1/_2 x.i}+e^{-1/_2 x.i}}{e^{1/_2 x.i}-e^{-1/_2 x.i}} =$$

$$i \cdot \frac{\cos {}^1/_2 xi}{\sin {}^1/_2 xi}, = i \cdot \cot. {}^1/_2 xi,$$ so folgt, wenn man in 4) $-xi$ statt x einführt

$$5) \quad \tfrac{1}{2} x \cdot \frac{e^{-xi}+1}{e^{-xi}-1} = \tfrac{1}{2} x \cot \tfrac{1}{2} x = 1 - A_2 x^2 + A_4 x^4 - \ldots\ldots$$

$$= \sum^{\infty}{}_{(k)} (-1)^k A_{2k} . x^{2k}$$

Ausserdem weiss man, dass

$$\tfrac{1}{2} x \cdot \cot \tfrac{1}{2} x = 1 - \frac{B_1}{2!} x^2 - \frac{B_3}{4!} x^4 - \frac{B_5}{6!} x^6 - \ldots\ldots$$

---

*) Die Gleichungen unter dem Σ bestimmen die Amplitude der Summation. (Vgl. Schröder. Lehrb. d. Arith. u. Alg. I. Bd.)

$$= -\sum_{0}^{\infty}{}_{(k)} \frac{B_{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}, \text{ für } -2\pi < x < 2\pi$$

wenn man unter B_{-1} die negative Einheit versteht.

Die nunmehr sich ergebende Gleichung

$$\sum_{0}^{n}{}_{(k)} (-1)^k A_{2k} \,.\, x^{2k} = -\sum_{0}^{n}{}_{(k)} \frac{B_{2k-1}}{(2k)!} \,.\, x^{2k}$$

liefert schliesslich

$$A_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{B_{2k-1}}{(2k)!}$$

Nota I) Die hier auftretenden Coefficienten B sind die (von Euler so genannten) Bernoulli'schen Zahlen.

Die n^{te} Bernoulli'sche Zahl ist nach Prof. Glaisher in Cambridge gegeben durch die folgende Determinante n^{ten} Grades:

$$\frac{B_{2n-1}}{2^n (2n)!} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4!} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & 0 \\ \frac{2}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & & 0 \\ \frac{3}{8!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{n}{(2n+2)!} & \frac{1}{2n!} & \frac{1}{2n-2!} & \frac{1}{2n-4!} & \cdots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

Nota II) Aus Gleichung 2) resultirt die Cauchy'sche Gleichung

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = \frac{B_1}{2!} - \frac{B_3}{4!}x^2 + \ldots .$$

Der gesuchte Factor ist also

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \sum_{0}{}_{(k)} (-1)^{k-1} \frac{B_{2k-1}}{(2k)!} \,.\, x^{2k}$$

und folglich

$$\frac{e^{px}-1}{e^x - 1} = p + \left(\frac{p^2}{3!} - \frac{p}{2}\right) x + \left(\frac{p^3}{3!} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{2!} + \frac{p}{2!}B_1\right) x^2 + \ldots..$$

$$+ \left(\frac{p^{m+1}}{(m+1)!} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p^m}{m!} + \frac{B_1}{2!} \cdot \frac{p^{m-1}}{(m-1)!} - \frac{B_3}{4!} \cdot \frac{p^{m-3}}{(m-3)!} + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{B_{2k-1}}{(2k)!} \cdot \frac{p^{m-\overline{2k-1}}}{(m-\overline{2k-1})!}\right) x^m$$

und die Summe

6) $1^m + 2^m + \ldots\ldots + (p-2)^m + (p-1)^m =$

$$D_x^m \left[\left(\frac{p^{m+1}}{(m+1)!} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p^m}{m!} + \ldots\ldots + (-1)^{k-1}\frac{B_{2k-1}}{(2k)!}\cdot\frac{p^{m-(2k-1)}}{(m-\overline{2k-1})!}\right)x^m\right]_{(0)}$$

$$= \frac{p^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2}p^m + \frac{1}{2}\binom{m}{1}B_1\,p^{m-1} - \frac{1}{4}\binom{m}{3}B_3\,p^{m-3} + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{k-1}\frac{1}{2k}\binom{m}{2k-1}B_{2k-1}\,p^{m-(2k-1)} + \ldots$$

$$= \frac{1}{m+1}\left[p^{m+1} - \frac{m+1}{2}\cdot p^m + \binom{m+1}{2}B_1\,p^{m-1} - \binom{m+1}{4}B_3\,p^{m-3} + \ldots \right.$$

$$\left. + (-1)^{k-1}\binom{m+1}{2k}B_{2k-1}\,p^{m-(2k-1)}\right]$$

$$= \frac{1}{m+1}\cdot\varphi_{m+1}(p)$$

Diese rechts stehende Reihe für $\varphi_{m+1}(p)$ schliesst bei geraden m mit dem Gliede $\pm\frac{1}{m}\cdot\binom{m}{m-1}B_{m-1}\,p$, bei ungeraden m mit dem Gliede $\pm\frac{1}{m-1}\cdot\binom{m}{m-2}B_{m-2}\,p^2$, folglich hat φ (p) keinen von p freien Term.

Setzt man noch $m = n-1$, so kommt

$$\varphi_n(p) = p^n - \frac{n}{2}p^{n-1} + \binom{n}{2}B_1\,p^{n-2} - \binom{n}{4}B_3\,p^{n-4} + \binom{n}{6}B_5\,p^{n-6} - \ldots$$

als die gesuchte Function. Dieselbe enthält keinen von p freien Term; unter $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{4}$, … sind die Binomialcoefficienten der n^{ten} Potenz, unter B_1, B_3, ... die Bernoulli'schen Zahlen zu verstehen.

Während der Ableitung zufolge p eine positive ganze Zahl > 1 bedeutet, kann im Polynom φ statt p eine beliebige Variable t gesetzt werden und man erhält dann einen Ausdruck, welcher eine *ganze rationale Function von* t darstellt. Sohin ist die Function φ_n (t) durch die Gleichung

$$\varphi_n(t) = t^n - \frac{n}{2}t^{n-1} + \sum_{k=1}^{k\leq\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{k-1}\binom{n}{2k}B_{2k-1}\,t^{n-2k}$$

definirt und heisst die *Bernoulli'sche Function* n^{ter} *Ordnung*.

Da nun $D_x^m\left\{\frac{e^{tx}-e^x}{e^x-1}\right\}_{(x=o)} = \frac{1}{m+1}\cdot\varphi_{m+1}(t)$ so ergibt sich, dass die *Functionen* φ *Differenzial-Quotienten* sind.

Eigenschaften der Bernoulli'schen Functionen.

I.) $\varphi_n(0) = 0$

II.) $\varphi_n(t+1) - \varphi_n(t) = nt^{n-1}$

Denn es ist

$$\varphi_n(t+1) - \varphi(t) = n\left[D_x^{n-1}\left(\frac{e^{(1+t)x} - e^x}{e^x - 1}\right)_{(0)} - D_x^{n-1}\left(\frac{e^{tx} - e^x}{e^x - 1}\right)_{(0)}\right]$$

$$= n\, D_x^{n-1}(e^{tx})_{(0)} = n\, t^{n-1}$$

III.) Die Functionen φ sind bezüglich der Argumente t und $1-t$ symmetrisch oder alternirend, je nachdem sie von gerader oder ungerader Ordnung sind, d. h. es ist

$$\varphi_m(1-t) = (-1)^m \cdot \varphi_m(t)$$

Denn es ist

$$D_x^m\left\{\frac{e^{tx} - e^x}{e^x - 1}\right\}_{(0)} = \frac{1}{m+1} \cdot \varphi_{m+1}(t)$$

Ferner ist identisch

$$\frac{e^{(1-t)x} - 1}{e^x - 1} = 1 - \frac{e^{-tx} - 1}{e^{-x} - 1} = 1 - \frac{e^{tz} - 1}{e^z - 1},$$ wenn $-x = z$ gesetzt wird;

somit

$$D_x^m\left\{\frac{e^{(1-t)x} - 1}{e^x - 1}\right\}_{(0)} = D_x^m\left\{1 - \frac{e^{tz} - 1}{e^z - 1}\right\}_{(0)} = -D_x^m\left\{\frac{e^{tz} - 1}{e^z - 1}\right\}_{(0)}$$

und $$\frac{1}{m+1} \cdot \varphi_{m+1}(1-t) = \frac{1}{m+1} \cdot (-1)^{m+1}\varphi_{m+1}(t)$$

Hieraus folgt, wenn noch $m-1$ statt m gesetzt wird

$$\varphi_m(1-t) = (-1)^m \cdot \varphi_m(t)$$

Die Function φ nimmt also von $t = \frac{1}{2}$ bis $t = 1$ in umgekehrter Folge dieselben absoluten Werte an, welche sie von $t = 0$ bis $t = {}^1\!/_2$ hatte und zwar mit dem gleichen oder mit entgegengesetztem Vorzeichen, je nachdem die Function von gerader oder ungerader Ordnung ist.

Die Untersuchung der Function φ kann daher auf das Intervall von $t = 0$ bis $t = {}^1\!/_2$ beschränkt werden.

Für $t = {}^1\!/_2$ und ein ungerades $m = 2n-1$ gibt die obige Gleichung

$$\varphi_{2n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0$$

ferner da $\varphi_m(0) = (-1)^m \cdot \varphi_m(1)$ und

$\varphi_m(0) = 0$ ist,

$\varphi_m(1) = 0$ wenn nur $m > 1$ ist.

IV.) $$\varphi_{2n}(\tfrac{1}{2})=(-1)^n \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} \, . \, B^{2n-1}$$

Beweis $$\frac{\varphi_m(\frac{1}{2})}{m} = D_x^{m-1} \left\{\frac{e^{x/2}-1}{e^x-1}\right\}_{(0)} = D_x^{m-1} \left\{\frac{e^{x/2}+1}{e^x-1} - \frac{2}{e^x-1}\right\}_{(0)}$$
$$= D_x^{m-1} \left\{\frac{1}{e^{x/2}-1} - \frac{2}{e^x-1}\right\}_{(0)}$$

Nach Gleichung 2) ist
$$\frac{2}{e^x-1} = \frac{2}{x} + 2A_1 + 2A_2 x + 2A_3 x^2 + \ldots\ldots + 2A_m x^{m-1}$$
und $$\frac{1}{e^{x/2}-1} = \frac{2}{x} + A_1 + A_2 \, . \, \frac{x}{2} + A_3\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots\ldots + A_m\left(\frac{x}{2}\right)^{m-1}$$
Hieraus zieht man
$$\frac{1}{e^{x/2}-1} - \frac{2}{e^x-1} = -A_1 + A_2\left(\frac{1}{2}-2\right)x + A_3\left(\frac{1}{2^2}-2\right)x^2 + \ldots$$
$$\ldots + A_m\left(\frac{1}{2^{m-1}}-2\right)x^{m-1} + \ldots$$
und $$\frac{1}{m} \cdot \varphi_m(\tfrac{1}{2}) = -(m-1)! \, A_m \frac{2^m-1}{2^{m-1}}$$
oder $$\varphi_m(\tfrac{1}{2}) = -m! \, A_m \frac{2^m-1}{2^{m-1}}$$

Ist nun $m = 2n-1$, so ist $A_3 = A_5 = \ldots = A_{2n-1} = 0$

ist $m = 2n$, so ist $A_{2n} = (-1)^{n-1} \dfrac{B^{2n-1}}{(2n)!}$

somit $\varphi_{2n}(\frac{1}{2}) = (-1)^n \dfrac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} \, . \, B_{2n-1}$ q. e. d.

V.) Um die Eigenschaften der Differenzialquotienten von $\varphi_m(t)$ zu erkennen, kann man (nach Schloem. Comp. d. h. An. II. Bd.) die Function $\dfrac{e^{tx}-1}{e^x-1}$ (m—1)-mal in Beziehung auf x und 1-mal in Beziehung auf t differenziren unter Anwendung des Satzes, dass die Reihenfolge dieser Operationen willkürlich ist. Es kommt
$$D_t \, D_x^{m-1}\left(\frac{e^{tx}-1}{e^x-1}\right) = D_x^{m-1} \, D_t\left(\frac{e^{tx}-1}{e^x-1}\right) = D_x^{m-1}\left(\frac{xe^{tx}}{e^x-1}\right)$$
$$= D_x^{m-1}\left\{x\frac{e^{tx}-1}{e^x-1} + \frac{x}{e^x-1}\right\}$$

folglich für $x=0$

$$D_t \left\{\frac{1}{m} \cdot \varphi_m(t)\right\} = (m-1)\, D_x^{m-2} \left(\frac{e^{tx}-1}{e^x-1}\right)_{(0)} + (m-1)!\, A_{m-1}$$

$$= \varphi_{m-1}(t) + (m-1)!\, A_{m-1}$$

worin noch die Resultate für gerade und ungerade m zu sondern sind.

Es ist

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi'_{2n}(t) = 2n \cdot \varphi_{2n-1}(t) & n > 1 \\ \varphi'_{2n+1}(t) = (2n+1)\left[\varphi_{2n}(t) + (-1)^{n-1} B_{2n-1}\right] & \end{array}\right\}$$

Durch Umkehrung gewinnt man hieraus noch

$$\int_0^t \varphi_{2n}(t)\, dt = \frac{1}{2n+1} \cdot \varphi_{2n+1}(t) + (-1)^n B_{2n-1} \cdot t$$

und als speciellen Fall

$$\int_0^{1/2} \varphi_{2n}(t)\, dt = (-1)^n \tfrac{1}{2} B_{2n-1}$$

Da $\varphi_{2n}(1-t) = \varphi_{2n}(t)$, so ist immer

$$\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\, dt = 2 \int_0^{1/2} \varphi_{2n}(t)\, dt$$

VI.) Um den Gang der Bernoulli'schen Functionen innerhalb des Intervalles $t=o$ bis $t=1/2$ zu übersehen, betrachten wir vorerst die Functionen gerader Ordnung. Irgend zwei unmittelbar auf einander folgende Functionen gerader Ordnung können mit $\varphi_{2\mu}(t)$, $\varphi_{2\mu+2}(t)$ bezeichnet werden.

Setzt man noch $t = \frac{v}{h}$, so ist

$$\varphi_{2n}\left(\frac{v}{h}\right) = \varphi_{2n}\left(\frac{h-v}{h}\right) = \frac{(2n)!}{h^{2n}} \left\{\frac{(h-v)^{2n}}{2n!} + A_1 h \frac{(h-v)^{2n-1}}{(2n-1)!}\right.$$

$$\left. + A_2 h^2 \frac{(h-v)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots + A_{2n-2} h^{2n-2} \frac{(h-v)^2}{2!} + A_{2n-1} h^{2n-1} \frac{(h-v)}{1!}\right\}$$

$$= \frac{(2n)!}{h^{2n}} \cdot \sum_{0\,(k)}^{2n-1} A_k \frac{h^k (h-v)^{2n-k}}{(2n-k)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{h^{2n}} \cdot \psi_{2n}(h-v) \quad ^{*)}$$

*) Vgl. M. Ohm, System der Mathematik. 8. Thl.

Die Coefficienten A sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A_{2k-1} &= 0 \;,\; A_1 = -\tfrac{1}{2} \\ A_{2k} &= (-1)^{k-1} \cdot \frac{B_{2k-1}}{(2k)!} \end{aligned}\right\}$$

Es ist jetzt die Function ψ im Intervalle $v = o$ bis $v = \frac{1}{2}h$ zu betrachten. Man kann folgenden Satz aussprechen:

Hat die Ableitung $D_v\, \psi_{2\mu}(v) = \psi'_{2\mu}(v)$ für irgend einen bestimmten positiv-ganzen Wert von v im Intervalle von $v = o$ bis $v = \frac{1}{2}h$ ein bestimmtes Vorzeichen, so ist d a s s e l b e der Fall mit der Ableitung $\psi'_{2\mu+2}(v)$, die aber dann innerhalb desselben Intervalles stets das entgegengesetzte Vorzeichen hat.

$$\text{Es ist } \psi'_{2\mu}(v) = \sum_{0}^{2\mu-1}{}_{(k)} A_k \frac{h^k\, v^{2\mu-1-k}}{(2\mu-1-k)!}$$

Multiplicirt man die Gleichung mit $h^{-2\mu-2}$ und integrirt zwischen den Grenzen $h = h$ und $h = +\infty$, so kommt

$$\int_h^{+\infty} \frac{\psi'_{2\mu}(v)}{h^{2\mu+2}}\, dh = \sum_{0}^{2\mu-1}{}_{(k)} A_k \frac{v^{2\mu-1-k}}{(2\mu+1-k)\;(2\mu-1-k)!} \cdot \frac{1}{h^{2\mu+1-k}}$$

Da offenbar das links stehende Integral mit ψ' stets einerlei Vorzeichen hat, so hat auch das rechts stehende Aggregat so lange einerlei Vorzeichen, als ψ' einerlei Vorzeichen hat d. h. z u f o l g e d e r V o r a u s s e t z u n g für alle Werte von v die zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ h liegen.

Integrirt man noch nach v zwischen den Grenzen $v = v$ und $v = \frac{1}{2}h$ so kommt

$$\int_v^{1/2 h}\int_h^{\infty} \frac{\psi'_{2\mu}(v)}{h^{2\mu+2}}\, dh.\, dv = \frac{1}{h}\sum_{0}^{2\mu-1}{}_{(k)} A_k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu-k}}{(2\mu+1-k)!} - \frac{1}{h^{2\mu+1}}\sum_{0}^{2\mu-1}{}_{(k)} A_k \frac{h^k\, v^{2\mu-k}}{(2\mu+1-k)!}$$

und es muss, weil die Summe von Summanden, die einerlei Vorzeichen haben, dasselbe Vorzeichen annimmt, auch dieser Ausdruck zur Rechten von $v = o$ bis $v = \frac{1}{2}h$ mit $\psi'_{2\mu}(v)$ ein und dasselbe Vorzeichen behalten. Nun ist der Minuend der rechts stehenden Differenz

$$= \frac{2}{h} \cdot \frac{1}{(2\mu+1)!} \cdot \varphi_{2\mu+1}\left(\tfrac{1}{2}\right) - \frac{1}{h}\, A_{2\mu}$$

d. h. nach III.

$$= -\frac{1}{h} \cdot A_{2\mu} = (-1)^{\mu} \frac{B_{2\mu-1}}{(2\mu)!} \cdot \frac{1}{h}\;;$$

der Subtrahend kann auch so dargestellt werden

$$\frac{1}{h^{2\mu+1}} \cdot \frac{1}{v}\left[\sum_{(k)\,0}^{2\mu} A_k \frac{h^k\, v^{2\mu+1-k}}{(2\mu+1-k)!} - A_{2\mu}\, h^{2\mu}\frac{v}{1!}\right]$$

Wird die Subtraction ausgeführt, so tilgen sich der Minuend und das zweite Glied des Subtrahends und es bleibt

$$-\frac{1}{h^{2\mu+1}} \cdot \frac{1}{v}\sum_{(k)\,0}^{2\mu} A_k \frac{h^k\, v^{2\mu+1-k}}{(2\mu+1-k)!} = -\frac{1}{h^{2\mu+1}} \cdot \frac{1}{v} \cdot \psi'_{2\mu+2}(v)$$

d. h. $-\frac{1}{h^{2\mu+1}} \cdot \frac{1}{v} \cdot \psi'_{2\mu+2}(v)$ hat mit $\psi'_{2\mu}(v)$ im Intervalle von $v = 0$ bis $v = \frac{1}{2}h$ stets dasselbe und einerlei Vorzeichen.

Da nun $\psi'_2(v) = v - \frac{1}{2}h$ im Intervalle $v = 0 \ldots \frac{1}{2}h$ beständig negativ ist, so ist $\psi'_4(v)$ beständig positiv, $\psi'_6(v)$ beständig negativ, $\psi'_8(v)$ beständig positiv, d. h. $\psi'_{2\mu}(v)$ im besagten Intervall beständig $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ je nachdem $\mu = \left\{\begin{matrix}2\nu-1\\ 2\nu\end{matrix}\right\}$ ist. Weil aber $\psi_{2\mu}(v)$ beständig $\left\{\begin{matrix}\text{steigend}\\ \text{fallend}\end{matrix}\right\}$ ist, je nachdem die Ableitung $\psi'_{2\mu}(v)$ stets $\left\{\begin{matrix}>0\\ <0\end{matrix}\right\}$, so ist die Function ψ, da sie für $v = 0$ verschwindet, innerhalb des Intervalles von $v = 0$ bis $v = \frac{1}{2}h$ $\left\{\begin{matrix}\text{beständig negativ}\\ \text{beständig positiv}\end{matrix}\right\}$, so oft $\mu = \left\{\begin{matrix}2\nu-1\\ 2\nu\end{matrix}\right\}$ ist.

Wenn aber die Function ψ von $v = 0$ bis $v = \frac{1}{2}h$ beständig einerlei Vorzeichen hat, dann hat sie auch beständig dasselbe Vorzeichen von $v = {}^1/_2 h$ bis $v = h$ hin, da $\psi(h - v) = \psi(v)$.

Folglich ist im Intervalle $v = 0$ bis $v = h$ der Wert von $\psi_{2\mu}(v)$ beständig negativ, wenn $\mu = 2\nu - 1$ und beständig positiv, wenn $\mu = 2\nu$ gedacht wird. Mit diesem Verhalten von $\psi_{2\mu}(v)$ im Intervalle $v = 0$ bis $v = h$ stimmt, wie ersichtlich, das Verhalten von $\varphi_{2\mu}(t)$ im Intervalle $t = 0$ bis $t = 1$ überein.

Gang der Functionen $\varphi_m(t)$ für $m = 4\nu \mp 1$

Da $\varphi_2(t)$ im Intervalle von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}$ von Null an stets negativ bleibt, so ist der Wert von $\frac{1}{3} \cdot \varphi_3'(t) = \varphi_2(t) + B_1$ für $t = 0$ positiv, nimmt dann stetig ab und wird für $t = \frac{1}{2}$

$$= -\frac{1}{4} + B_1 = -\frac{1}{12}$$

woraus folgt, dass es zwischen $t = 0$ und $t = {}^1/_2$ einen aber nur einen Wert gibt, für welchen $\varphi_3'(t)$ verschwindet.

Somit wächst $\varphi_3(t)$ von Null an, hat bei $t = {}^1/_2\,(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$ ein Maximum und nimmt dann bis $t = \frac{1}{2}$ ab, wo $\varphi_3(t) = 0$ ist; mithin bleibt $\varphi_3(t) > 0$ von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}$.

Von $t = \frac{1}{2}$ bis $t = 1$ bleibt $\varphi_3(t) < 0$ und hat bei $t = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$ ein Minimum.

In $\frac{1}{5} \cdot \varphi_5'(t) = \varphi_4(t) - B_3$ ist die rechte Seite für $t = 0$ negativ wird aber, da $\varphi_4(t)$ im Intervall von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}$ von Null an beständig zunehmend ist, immer grösser und erreicht für $t = \frac{1}{2}$ den grössten Wert

$$= \left[\frac{2^4-1}{2^3} - 1\right] B_3 = \left[1 - \frac{1}{2^3}\right] B_3 > 0$$

Hieraus folgt, dass $\varphi_5(t)$ erst von Null an abnimmt, negativ bleibt von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}$, zwischen $t = 0$ und $t = \frac{1}{2}$ für $t = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ein Minimum hat und für $t = \frac{1}{2}$ wieder Null ist.

Die Schlussweise für die folgenden Functionen ungerader Ordnung bleibt dieselbe.

Das Gesammtergebniss dieser Schlüsse kann graphisch zur Ansicht gebracht werden, wenn man t als Abscisse und $\varphi_m(t)$ als zugehörige senkrecht auf t stehende Ordinate construirt. (Man sehe Schloem. Comp. d. höh. Anal. II. Bd.)

Setzt man nun die Werte der Derivirten von $\varphi_{2n}(t)$ in die Fundamentalformel I) ein, so kommt, wenn 2n für n gesetzt wird

$$\text{III. a)} \left\{ \begin{aligned} F(x+h) - F(x) = {} & \frac{h}{2}[F'(x+h) + F'(x)] - \frac{B_1 h^2}{2!}[F''(x+h) - F''(x)] \\ & + \frac{B_3 h^4}{4!}[F^{IV}(x+h) - F^{IV}(x)] - \ldots - \\ & + (-1)^{n-1} \frac{B_{2n-3}\, h^{2n-2}}{(2n-2)!}[F^{2n-2}(x+h) - F^{2n-2}(x)] - R_{2n} \end{aligned} \right.$$

oder

$$\text{III. b)} \left\{ \begin{aligned} & h F'(x) = \Delta F(x) - \frac{h}{2} \Delta F'(x) + \frac{B_1 h^2}{2!} \Delta F''(x) - \frac{B_3 h^4}{4!} \Delta F^{IV}(x) \\ & \qquad + \ldots + (-1)^n \frac{B_{2n-3}\, h^{2n-2}}{(2n-2)!} \Delta F^{2n-2}(x) + R_{2n} \\ & \text{wo } R_{2n} = \frac{-h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 \varphi_{2n}(t)\, F^{2n+1}(x+ht)\, dt \text{ ist } - \end{aligned} \right.$$

und hiemit ist die Formel von Mac-Laurin gefunden.

Da $\varphi_{2n}(t)$ zwischen 0 und 1 von beständigem Vorzeichen ist, so ist

$$R_{2n} = \frac{-h^{2n+1}}{(2n)!} F^{2n+1}(x+\theta h) \int_0^1 \varphi_{2n}(t)\, dt = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1}\, h^{2n+1}}{(2n)!} F^{2n+1}(x+\theta h)$$

In der allgemeinen Gleichung III. a) nehme x successive die Werte $a,\ a+h,\ a+2h, \ldots\ldots, a+\overline{q-1}h$ an; durch Addition der so entstehenden Gleichungen resultirt, wenn noch $a+qh=b$ und $F'(x)=f(x)$ gesetzt wird

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$=h\,[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots+f(a+\overline{q-1}h)]$$

$$+\frac{h}{2}[f(b)-f(a)]-\frac{B_1 h^2}{2!}[f'(b)-f'(a)]+\frac{B_3 h^4}{4!}[f'''(b)-f'''(a)]$$

$$-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n-3}\,h^{2n-2}}{(2n-2)!}[f^{2n-3}(b)-f^{2n-3}(a)]$$

$$+\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\,H_{2n}(t)\,dt$$

oder

$$h\,[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots+f(a+\overline{q-1}\,h)]$$

$$=\int_a^{b=a+qh} f(u)\,du-\frac{h}{2}[f(b)-f(a)]+\sum_{1\,(k)}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{B_{2k-1}\,h^{2k}}{(2k)!}$$

$$[f^{2k-1}(b)-f^{2k-1}(a)]+S_{2n}$$

wo

$$S_{2n}=-\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\,[f^{2n}(a+ht)+f^{2n}(a+h+ht)+f^{2n}(a+2h+ht)+\ldots\ldots+f^{2n}(a+\overline{q-1}h+ht)]\,dt,$$

woraus auch die Bedeutung von $H_{2n}(t)$ zu ersehen ist.

Unter der Voraussetzung, dass $f^{2n}(u)$ von beständigem Zeichen ist für alle u von a bis b, lässt sich S_{2n} vereinfachen.

Unter dieser wesentlichen Voraussetzung ist

$$S_{2n}=-\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(1-t)\,.\,H_{2n}(t)\,dt=-\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\varphi_{2n}(1-T)\int_0^1 H_{2n}(t)\,dt$$

$$0<T<1$$

ferner

$$\int_0^1 H_{2n}(t)\,dt=\frac{1}{h}[f^{2n-1}(b)-f^{2n-1}(a)]$$

Da die Function $\varphi_{2n}(1-t)=\varphi_{2n}(t)$ von $t=0$ bis $t={}^1/_2$ von Null an continuirlich $\left\{\begin{matrix}\text{wächst}\\ \text{abnimmt}\end{matrix}\right\}$, je nachdem n $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ ist, so ist $\varphi_{2n}(\frac{1}{2})$

positiv oder negativ, aber an sich der grösste Wert von $\varphi_{2n}(t)$ im besagten Intervalle; also kann man $\lambda \,.\, \varphi_{2n}(\tfrac{1}{2})$ statt $\varphi_{2n}(1-T)$ setzen, wenn man sich λ zwar unbekannt aber zwischen 0 und 1 denkt.

Demnach ist $\varphi_{2n}(1-T) = (-1)^n \lambda \,.\, \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} B_{2n-1}$

wodurch man erhält

$$S_{2n} = (-1)^{n+1} \lambda \,.\, \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} \frac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} [f^{2n-1}(b) - f^{2n-1}(a)]$$

Da ferner $\frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{2n-1}} < 2$ ist, so liegt jedenfalls $\lambda \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}}$ zwischen 0 und 2, folglich $\rho = -1 + \lambda \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}}$ jedenfalls zwischen -1 und $+1$ und man hat $\lambda \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} = 1 + \rho$, wo $-1 < \rho < +1$.

Es ist noch zu entscheiden, in welchen Fällen ρ positiv und in welchen es negativ ist.

*) Es ist, wenn $F^{2n+1}(u)$ zwischen $u = x$ und $u = x + h$ sein Vorzeichen nicht wechselt,

$$R_{2n} = - \frac{h^{2n+1}}{(2n)!} \varphi_{2n}(1-T) \int_0^1 F^{2n+1}(x+ht)\, dt$$

$$= (-1)^{n+1} (1+\rho) \frac{B_{2n-1}}{(2n)!} h^{2n} \left[F^{2n}(x+ht)\right]_0^1$$

Führt man die Reihe III. b) um ein Glied weiter, so kommt

$$R_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1}\; h^{2n}}{(2n)!} \Delta F^{2n}(x) + R_{2n+2}$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$R_{2n+2} = (-1)^{n+1} \,.\, \rho \frac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} \Delta F^{2n}(x) \quad -1 < \rho < +1$$

und, wenn R_{2n+2} direct entwickelt wird

$$(-1)^n \frac{B_{2n+1}\; h^{2n+3}}{(2n+2)!} \,.\, F^{2n+3}(x+h\theta) = (-1)^{n+1} \rho \frac{B_{2n-1}\; h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 F^{2n+1}(x+ht)\, dt$$

oder einfacher, da $F^{2n+1}(u) = f^{2n}(u)$,

$$\frac{B_{2n+1}\; h^2}{(2n+1)(2n+2)} \,.\, f^{2n+2}(x+h\theta) = -\rho\, B_{2n-1} \int_0^1 f^{2n}(x+ht)\, dt$$

*) Nach Schloemilch, Comp. d. hoch. Anal. II. Bd.

Der Voraussetzung zufolge ist $F^{2n+1}(u)$, d. h. jede Derivirte ungerader Ordnung von beständigem Vorzeichen, wenn u von x bis $x+h$ variirt; dasselbe gilt von $F^{2n+3}(x+h\theta)$. — Besitzen nun $f^{2n+2}(u)$ und $f^{2n}(u)$ gleiche Vorzeichen, so kommt dieses Vorzeichen auch dem rechts stehenden Integrale zu und dann muss ρ negativ sein; haben dagegen $f^{2n+2}(u)$ und $f^{2n}(u)$ ungleiche Vorzeichen, so muss aus denselben Gründen ρ positiv sein.

Demzufolge ist, da $f^{2n}(u)$ von $x=a$ bis $x=b$ dasselbe Zeichen behält,

$$S_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} [f^{2n-1}(b) - f^{2n-1}(a)]$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} \left\{ \begin{aligned} &\rho_1 [f^{2n-1}(a+h) - f^{2n-1}(a)] \\ &+ \rho_2 [f^{2n-1}(a+2h) - f^{2n-1}(a+h)] \\ &+ \ldots\ldots\ldots \\ &+ \rho_q [f^{2n-1}(a+qh) - f^{2n-1}(a+\overline{q-1}h)] \end{aligned} \right\}$$

Im Falle, dass alle ρ positiv sind und $f^{2n-1}(u) \left\{ \begin{matrix} \text{wächst} \\ \text{abnimmt} \end{matrix} \right\}$, hat man für den Klammerinhalt T die Grenzen

$$0 \lesseqgtr T \lesseqgtr f^{2n-1}(a+qh) - f^{2n-1}(a);$$

es kann folglich

$T = \rho\ [f^{2n-1}(b) - f^{2n-1}(a)]$ gesetzt werden, wo $0 < \rho < +1$

Bei negativen $\rho_1, \rho_2, \ldots. \rho_q$ gelten für $-T$ die nämlichen Schlüsse wie für T bei positiven $\rho_1, \rho_2, \ldots. \rho_q$; somit ist allgemein die Ergänzung $S_{2n+2} = (-1)^{n+1}\rho\ \frac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} [f^{2n-1}(b) - f^{2n-1}(a)]$ d. h. ein echter Bruchtheil des Gliedes, bei welchem man stehen bleibt.

Das Verfahren bei der Mac-Laurin'schen Formel kann verallgemeinert werden, wie folgt:

Versteht man unter q eine ganze positive Zahl und setzt

$$S\, f(x) \equiv f(x) + f(x+h) + f(x+2h) + \ldots. + f(x+\overline{q-1}h = \varphi(q)$$

$$S\, f'(x) \equiv f'(x) + f'(x+h) + f'(x+2h) + \ldots. + f'(x+\overline{q-1}h) = \psi(q)$$

so ist 1) $\qquad \varphi(q+1) - \varphi(q) = f(x+qh)$

und 2) $\qquad \psi(q+1) - \psi(q) = f'(x+qh)$

Die Function φ muss der Gleichung 1) genügen für ganze q. Diese Bedingung ist aber a fortiori erfüllt, wenn man die Function φ derart bestimmen kann, dass sie für alle Werte von q der Gleichung 1) genügt. Dann ist aber Gleichung 1) eine Identität und man kann die Ableitungen beider Seiten nehmen in Beziehung auf q.

Es kommt $\varphi'(q+1) - \varphi'(q) = h \,.\, f'(x+qh)$ und verglichen mit 2)

$$= h\,[\psi(q+1) - \psi(q)]$$

Setzt man statt q successive $q+1, q+2, \ldots, q+k$, so kommt durch Addition und Transposition

3) $$\varphi'(q) - h\,\psi(q) = \varphi'(q+k) - h\,\psi(q+k)$$

Da hierin die linke Seite von k unabhängig ist, so muss dasselbe gelten für die rechte Seite; da aber letztere eine Function von $q+k$ ist, so kann sie nicht von k unabhängig sein, ohne es zugleich von q zu sein.

Somit muss $\varphi'(q) - h\,\psi(q) = c$ sein, wo c eine von q unabhängige Constante bezeichnet, oder

$$\frac{d\,S\,f(x)}{dq} = h\,S\,f'(x) + c, \text{ und durch Integration}$$

IV. $$S\,f(x) = h\int S\,f'(x)\,dq + cq$$

eine Formel, welche die Summation der Function f(x) von der Summation ihrer Derivirten abhängig macht. Die Beifügung einer neuen Constante unterbleibt, da $S\,f(x) = 0$ sein muss für $q = 0$. — Die c wird man nach jeder Integration dadurch bestimmen, dass man $q = 1$ setzt.

* * *

Aus Mac-Laurin's Formel kann eine Reihenentwicklung für jede ungerade Function erhalten werden, d. h. für jede Function, welcher die Eigenschaft $F(-x) = -F(x)$ zukommt. Mac-Laurin's Formel ist im Grunde genommen eine Formel zur Entwicklung für jede ungerade Function Einer Variablen.

Setzt man $-x$ statt x und 2x für h, so nimmt die genannte Formel fl. Gestalt an*)

$$F(x) - F(-x) = x\,[F'(x) - F'(-x)] - \frac{B_1}{2!}(2x)^2\,[F''(x) - F''(-x)]$$
$$+ \ldots + (-1)^{n-1}\frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}\,[F^{2n-2}(x) - F^{2n-2}(-x)]$$
$$- R_{2n}$$

wo $$R_{2n} = -\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\,.\,F^{2n+1}(-x+2xt)\,dt$$

Vertauscht man in R_{2n} t mit $1-t$, so erhält man in Betracht, dass

$$\varphi_{2n}(1-t) = \varphi_{2n}(t)$$

$$R_{2n} = -\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\,.\,F^{2n+1}(x-2xt)\,dt.$$

*) Darboux l. c.

Bildet man noch die Halbsumme beider Restwerte, so wird auch

$$R_{2n} = -\frac{2^{2n}\,x^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\,.\,[F^{2n+1}(x-2xt) + F^{2n+1}(-x+2xt)]\,dt$$

Diese Formeln enthalten nur die Function F(x) — F(—x) und deren Ableitungen. — Setzt man 2 F(x) anstatt F(x) — F(—x), so entsteht die Reihe

$$F(x) = x\,.\,F'(x) - \frac{B_1}{2!}(2x)^2.\,F''(x) + \frac{B_3}{4!}(2x)^4.\,F^{IV}(x) - \ldots.$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}.\,F^{2n-2}(x) - R_{2n}$$

wo unter F(x) eine ungerade Function zu verstehen ist und

$$R_{2n} = -\frac{2^{2n}\,x^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\,.\,F^{2n+1}(-x+2xt)\,dt$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}\,B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n+1}\,.\,F^{2n+1}(-x+2x\vartheta) \qquad 0<\vartheta<1$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}\,B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n+1}\,.\,F^{2n+1}(\theta x) \qquad -1<\theta<1$$

Nimmt man z. B. F(x) = artan x, so erhält man in Rücksicht, dass

$$D^m \operatorname{artan} x = D^{m-1}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

und für gerade m

$$D^m \operatorname{artan} x = (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{(m-1)!}{(1+x^2)^m}\sum_{0\,(k)}^{\frac{1}{2}(m-2)}(-1)^k\binom{m}{2k+1}x^{2k+1}\ ^{*)}$$

ist, nach gehöriger Zusammenziehung der Glieder, die Reihe

$$\operatorname{artan} x = \frac{x}{1+x^2}\left[1+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2+\frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3+\ldots\right]$$

$$x^2<\infty$$

Nimmt man ferner F(x) = sin x, so hat man, da $D^m \sin x$

$$= \sin\left(\frac{m\pi}{2}+x\right) = \mp \sin x \text{ für } m = \begin{Bmatrix}4n+2\\4n\end{Bmatrix} \text{ ist,}$$

$$\sin x = x\,.\,\cos x + \frac{B_1}{2!}(2x)^2\sin x + \frac{B_3}{4!}(2x)^4\sin x + \ldots.$$

$$+ \frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}\sin x + \frac{2^{2n}\,B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n+1}\,.\,\cos\theta x$$

oder nach Division durch sin x und Transposition, die bekannte Reihe

*) Sohnke's Aufg. aus d. Differenzialrechnung. 3. Aufl.

$$x \cdot \cot x = 1 - \frac{B_1}{2!}(2x)^2 - \frac{B_3}{4!}(2x)^4 - \dots - \frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}$$

$$- \frac{2^{2n} B_{2n-1}}{(2n)!} x^{2n+1} \cdot \frac{\cos \theta x}{\sin x}$$

worin x reel und absolut $< \pi$ sein muss, damit die Reihe — beliebig weit fortgesetzt — convergent sei.

Nimmt man $F(x) = e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}$, so erhält man die Reihe

$$\alpha x \cdot \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}} = 1 + \frac{B_1}{2!}(2\alpha x)^2 - \frac{B_3}{4!}(2\alpha x)^4 + \dots + (-1)^n \frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}(2\alpha x)^{2n-2}$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} B_{2n-1}}{(2n)!} (\alpha x)^{2n+1} \cdot \frac{e^{\alpha\theta x} + e^{-\alpha\theta x}}{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}$$

welche für $\alpha = i$ in die Reihe für x cot x übergeht. —

Mac-Laurin's Summenformel drückt den Zusammenhang zwischen der Summe einer endlichen Reihe und einem bestimmten Integrale aus; dieselbe kann daher zur Auswertung des einen dieser Ausdrücke benutzt werden, wenn man den jedesmaligen andern als bekannt voraussetzt. Besonders vortheilhaft erscheint ihre Anwendung zur Summirung einer endlichen Reihe, wenn man das Integral geschlossen geben kann.

Sei gegeben $f(u) = l\, u$

Für $a = 1$, $h = 1$ entsteht das Problem $l\,1 + l\,2 + \dots + l(q-1) + l\,q = l(q!)$ zu berechnen.

Der gesuchte $l\,(q!)$ wird durch die Stirling'sche Reihe ausgedrückt. Die Summenformel gibt

$$l\,(q!) = \int_1^{q+1} l\,u \,.\, du - \tfrac{1}{2}\, l(q+1) + \frac{B_1}{1.2}\left[\frac{1}{q+1} - 1\right] - \frac{B_3}{3.4}\left[\frac{1}{(q+1)^3} - 1\right] + \dots$$

Setzt man $q = k-1$ und addirt beiderseits $l\,k$, so ist, da

$$\int l\,u \,.\, d\,u = u(l\,u - 1),$$

$$1)\quad l\,(k!) = (k + 1/2)\, l\,k - k + 1 + \sum_{1\,(r)}^{n-1} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{(2r-1)\,2r}\left[\frac{1}{k^{2r-1}} - 1\right] + S_{2n}$$

$$= (k + 1/2)\, l\,k - k + \sum_{1\,(r)}^{n-1} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{(2r-1)\,2r} \cdot \frac{1}{k^{2r-1}} + A_n + S_{2n}$$

wo A_n den Verein der von k unabhängigen Summanden bedeutet.

Der Rest der Reihe S_{2n} soll nun in der ursprünglichen Form betrachtet werden. Da in unserem Falle

$$f^{2n}(u) = D_u^{2n}\, l\,u = - \frac{(2n-1)!}{u^{2n}},$$

so ist

$$S_{2n} = \frac{1}{2n} \int_0^1 \varphi_{2n}(t) \sum_{1}^{k-1}{}_{(r)} \frac{1}{(r+t)^{2n}}\, dt$$

Lässt man nun in der Gleichung

$$2)\quad l(k!) - (k+\tfrac{1}{2})\, l\, k + k - \sum_{1}^{n-1}{}_{(r)} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{(2r-1)\, 2r} \cdot \frac{1}{k^{2r-1}} = A_n + S_{2n}$$

k ins Unendliche wachsen, so kann es sein, dass der linke Theil sich einer bestimmten endlichen Grenze C nähert, so dass man hätte

$$3)\qquad C = A_n + \underset{(k=\infty)}{\mathrm{Lim}}\, S_{2n} = A_n + \underset{(k=\infty)}{\mathrm{Lim}} \frac{1}{2n} \int_0^1 \varphi_{2n}(t) \sum_{1}^{k-1}{}_{(r)} \frac{dt}{(r+t)^{2n}}$$

Um über die Existenz von C entscheiden zu können, muss man offenbar die Vorfrage erledigen, ob

$$\underset{k=+\infty}{\mathrm{Lim}} \frac{1}{2n} \int_0^1 \varphi_{2n}(t) \sum_{1}^{k-1}{}_{(r)} \frac{dt}{(r+t)^{2n}} = \frac{1}{2n} \int_0^1 \varphi_{2n}(t) \left(\underset{k=\infty}{\mathrm{Lim}} \sum_{1}^{k-1}{}_{(r)} \frac{1}{(r+t)^{2n}} \right) dt$$

gesetzt werden dürfe.

Die in Betracht kommende Reihe ist von der Form

$$\rho_1(t) + \rho_2(t) + \ldots\ldots + \rho_N(t) + \rho_{N+1}(t) + \ldots\ldots$$

Zur Convergenz dieser Reihe ist notwendig und hinreichend, dass für stets wachsende Werte von N das Aggregat

$$\rho_{N+1} + \rho_{N+2} + \ldots\ldots + \rho_{N+x} = U_{N,t}$$

kleiner werde als jede noch so kleine vorgegebene Zahl σ, welchen Wert auch x haben mag; darin ist involvirt, dass ρ_N die Null zur Grenze haben muss.

Es ist nun jedenfalls $U_{N,t}$ ein positiver Wert; auch ist

$$U_{N,t} < \rho_{N+1}(0) + \rho_{N+2}(0) + \ldots\ldots \text{ in inf} = U_{N,0}$$

da überall anstatt t sein kleinster Wert, nämlich Null gesetzt wurde. Die Reihe $U_{N,0}$ ist aber eine convergente harmonische Reihe.

Denn $\rho_z(0)$ ist eine für positive und wachsende Werte von z beständig und ins Unendliche abnehmende u n d positiv bleibende Function und

$$\int_z^\infty \rho_z(0)\, dz = \int_z^\infty \frac{dz}{z^{2n}} = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{z^{2n-1}} = \psi(\infty) - \psi(z)$$

ein bestimmter endlicher Wert.

Nun hat man nach dem Lagrange-Maclaurin'schen Lehrsatze, weil $\psi'(z) = \rho_z(0)$ ist,

$$\psi(z+h) - \psi(z) = h \cdot \rho_{z+\xi h}(0) \qquad 0 < \xi < 1$$

und wenn hierin successive $z = N, N+1, N+2, \ldots\ldots$ und $h = 1$ gesetzt wird

$$\psi(N+1) - \psi(N) = \rho_{N+\xi}(0) \quad \text{d. h.} \quad < \rho_N \text{ und } > \rho_{N+1}$$

$$\psi(N+2) - \psi(N+1) = \rho_{N+1+\xi}(0) \quad \text{d. h} < \rho_{N+1} \text{ und } > \rho_{N+2}$$

. . . .

folglich durch Addition dieser unendlich vielen Ungleichungen

$$\rho_{N+1} + \rho_{N+2} + \ldots\ldots < \psi(\infty) - \psi(N) < \rho_N + \rho_{N+1} + \ldots.$$

somit $$\psi(\infty) - \psi(N) - \rho_N < U_{N,0} < \psi(\infty) - \psi(N)$$

Stellt man nun die Bedingung, dass $U_{N,t} < \sigma$ sei, so genügt es $U_{N,0} < \sigma$ zu machen: dies wird erreicht, indem

$$N > \left[\frac{1}{(2n-1)\sigma}\right]^{\frac{1}{2n-1}} \text{ genommen wird.}$$

Die unendliche Reihe ist also convergent — ihre Summe sei $f(t)$; ausserdem ist $f(t)$ eine stetige Function innerhalb und an den Grenzen, was auch von $\varphi_{2n}(t)$ gilt. Da nun $f(t) = \rho_1 + \rho_2 + \ldots\ldots$ im ganzen Integrationsintervalle ist und da sich eine Zahl N angeben lässt, so dass dem absoluten Betrage nach

$$f - \rho_1 - \rho_2 - \ldots\ldots < \sigma$$

ist, wie klein auch σ vorgegeben sei und welche Werte des Integrationsintervalles t auch annehmen mag, so ist in der That absolut genommen

$$\int \varphi\,.\,f\,dt - \int \varphi\,.\,\rho_1\,dt - \int \varphi\,.\,\rho_2\,dt - \ldots - \int \varphi\,.\,\rho_N\,dt < \sigma \int \varphi\,dt$$

und da dieser Ausdruck beliebig klein gemacht werden kann,

$$\int \varphi\,.\,f\,dt = \int \varphi\,.\,\rho_1\,dt + \int \varphi\,.\,\rho_2\,dt + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

Eine Reihe von der angegebenen Eigenschaft nennt man „gleichmässig convergent" und man hat mit Einführung dieses Wortes den Satz: Das Integral einer unendlichen Reihe, welche im Integrationsintervalle gleichmässig convergent ist, wird durch Integration der Glieder erhalten.

Hiemit ist die Vorfrage in bejahendem Sinne entschieden. — Durch Subtraction der Gleichung 3) von 2) kommt

$$l(k!) - (k+\tfrac{1}{2})\,lk + k - \sum_{1}^{n-1}{}_{(r)} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{(2r-1)\,2r} \cdot \frac{1}{k^{2r-1}} - C$$

$$= S_{2n} - \text{Lim}\,S_{2n}$$

$$= -\frac{1}{2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\left[\frac{1}{(k+t)^{2n}} + \frac{1}{(k+1+t)^{2n}} + \ldots\ldots\right] dt$$

$$= -\frac{1}{2n}\,\varphi_{2n}(1-T)\int_0^1 \left[\frac{1}{(k+t)^{2n}} + \frac{1}{(k+1+t)^{2n}} + \ldots\right] dt,$$

weil die Reihe von **beständigem** Vorzeichen ist.

Durch unbestimmte Integration und Einführung der Grenzen kommt

$$S_{2n} - \text{Lim}\,S_{2n} = -\frac{1}{(2n-1)\,2n}\,\varphi_{2n}(1-T) \cdot \frac{1}{k^{2n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1}}{(2n-1)2n} \cdot \frac{1+\rho}{k^{2n-1}}$$

Somit ist

$$l(k!) = C + (k + \tfrac{1}{2})\, l\, k - k + \sum_{1}^{n-1}{}_{(r)} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{(2r-1)\,2r} \cdot \frac{1}{k^{2r-1}}$$

$$+ (-1)^{n+1} \cdot \frac{B_{2n-1}}{(2n-1)2n} \cdot \frac{1+\rho}{k^{2n-1}}$$

Da nun $f^{2n}(u)$ und $f^{2n+2}(u)$ das negative Vorzeichen haben, so ist ρ ein negativer echter Bruch, somit $1 + \rho = \varepsilon$ ein positiver echter Bruch.

Das Resultat der bisherigen Untersuchung ist also gegeben durch $l(k!) = C + (k + \frac{1}{2})\, l\, k - k + G(\frac{1}{k})$, wo

$$G\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{B_1}{1.2} \cdot \frac{1}{k} - \frac{B_3}{3.4} \cdot \frac{1}{k^3} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{B_{2n-3}}{(2n-3)(2n-2)} \cdot \frac{1}{k^{2n-3}}$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{\varepsilon B_{2n-1}}{(2n-1)\,2n} \cdot \frac{1}{k^{2n-1}},\ 0 < \varepsilon < 1$$

$G(\frac{1}{k})$ ist anzusehen als eine endliche Reihe, zu welcher, wo man sie auch abbrechen lässt, jedesmal ein Ergänzungsglied hinzukommt, welches ein echter Bruchtheil des Gliedes ist, mit welchem man die Reihe geschlossen hat.

Es handelt sich nun um die Bestimmung von C.

Es ist $C = \lim\limits_{k=+\infty} \left\{ l(k!) - k\, l\, k + k - \tfrac{1}{2}\, l\, k \right\} = \lim\limits_{(k=\infty)} \left\{ l \left[\frac{k!}{k^k} \cdot \frac{e^k}{\sqrt{k}} \right] \right\}$

$$= \lim_{(k=\infty)} \left\{ l\, \chi(k) \right\}$$

da $G(\frac{1}{k}) = 0$ für $k = \infty$

Die Hauptfrage ist zunächst ob C existirt.

Zur Entscheidung der Frage um die Existenz des Grenzwertes kann das Gauss'sche Criterium dienen: „Wenn es gelingt den Quotienten $\frac{\chi(k+1)}{\chi(k)}$ auf die Form $1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{\alpha'}{k^2} + \frac{\alpha''}{k^3} + \ldots$ zu bringen, dann kann entschieden werden, was aus $\chi(k)$ wird für $k = \infty$: Ist $\alpha > 0$, so wächst der Ausdruck über alle Grenzen d. h. Lim. $\chi(k) = \infty$; ist $\alpha < 0$, so ist Lim $\chi(k) = 0$; ist $\alpha = 0$, so hat $\chi(k)$ einen endlichen von Null verschiedenen Grenzwert." *)

Es ist $\quad \dfrac{\chi(k+1)}{\chi(k)} = \dfrac{(k+1)!}{k!} \cdot \dfrac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \cdot e\, \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}$

$$= e \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k \sqrt{1+\frac{1}{k}}} \text{ oder } \frac{1}{k} = \nu \text{ gesetzt}$$

$$= e^{1 - \frac{l(1+\nu)}{\nu}} \cdot (1+\nu)^{-\frac{1}{2}},$$

*) Scheibner, Ueber unendliche Reihen, 25. 26.

folglich mit Anwendung der logarithmischen, der Exponential- und Binomial-Reihe und nach Restitution von $\frac{1}{k}$ statt ν

$$\frac{\chi(k+1)}{\chi(k)} = 1 - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{k^2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{k^3} - \ldots .$$

In der That ist $\alpha = 0$ und somit existirt für $\chi(k)$, also auch für $l\,\chi(k)$ ein endlicher Grenzwert.

Es handelt sich noch um die Herstellung des Grenzwertes

$$\operatorname{Lim} \left\{ l \left[\frac{k!}{k^k} \cdot \frac{e^k}{\sqrt{k}} \right] \right\} = \operatorname{Lim} \omega(k)$$

Es ist $\omega(2k) = l(\overline{2k}!) - 2k\, l(2k) + 2k - \frac{1}{2}\, l(2k)$

$$k! = \frac{2.4.6 \ldots\ldots 2k}{2^k} = \frac{1}{1.3.5 \ldots\ldots 2k-1} \cdot \frac{\overline{2k}!}{2^k}$$

$$(k!)^2 = \frac{2.4.6 \ldots\ldots 2k}{1.3.5 \ldots\ldots (2k-1)} \cdot \frac{\overline{2k}!}{2^{2k}}$$

$$\overline{2k}! = 2^{2k}(k!)^2 \cdot \frac{1.3.5 \ldots\ldots (2k-1)}{2.4.6 \ldots\ldots 2k};$$

folglich

$$\omega(2k) = 2\,l\,(k!) - l\,\frac{2.4.6 \ldots\ldots 2k}{1.3.5 \ldots\ldots (2k-1)} - 2k\,l\,k + 2k - \frac{1}{2}\,l\,(2k)$$

Ferner ist

$$2 \cdot \omega(k) - \omega(2k) = l\,\frac{2.4.6 \ldots\ldots 2k}{1.3.5 \ldots\ldots (2k-1)} - \frac{1}{2}\,l\,k + \frac{1}{2}\,l\,2$$

Nun erhält man aus der Gleichung

$\cos x = \prod\limits_{0}^{\infty}{}_{(k)} \left[1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2 \pi^2} \right]$ *), welche auch so geschrieben werden kann

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\frac{\pi}{2} - x} = \left(1 + \frac{2x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) \ldots\ldots,$$

wenn man $x = \frac{\pi}{2}$ macht:

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{25}\right)\left(1 - \frac{1}{49}\right) \ldots\ldots \left(1 - \frac{1}{(2k-1)^2}\right) \qquad k = \infty$$

oder $$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots\cdots \frac{2k-2}{2k-3} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k-1} \qquad k = \infty$$

— die Formel von Wallis.

---

*) cos x ist definirt durch die stets convergente Reihe $\sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Man hat nun

$$2 \,.\, \omega(\mathrm{k}) - \omega(2\mathrm{k}) = \tfrac{1}{2}\, \mathrm{l} \left\{ \frac{2.2.4.4.6.6 \ldots\ldots (2\mathrm{k}-2)\,(2\mathrm{k}-2)\,2\mathrm{k}}{1.3.3.5.5.7 \ldots\ldots (2\mathrm{k}-3)\,(2\mathrm{k}-1)\,(2\mathrm{k}-1)} \,.\, 2\mathrm{k} \right\}$$

$$- \tfrac{1}{2}\, \mathrm{l}\, \mathrm{k} + \tfrac{1}{2}\, \mathrm{l}\, 2$$

$$= \tfrac{1}{2}\, \mathrm{l}\, \tfrac{\pi}{2} + \mathrm{l}\, 2$$

Da nun

$$(\mathrm{k} = \infty) \begin{cases} \mathrm{Lim}\; \omega(\mathrm{k}) = \mathrm{C} \\ \mathrm{Lim}\; \omega(2\mathrm{k}) = \mathrm{C}, \end{cases}$$ so hat man schliesslich

$$\mathrm{C} = \tfrac{1}{2}\, \mathrm{l}\, (2\pi) = \mathrm{l}\, \sqrt{2\pi}$$

und $$\mathrm{l}(\mathrm{k}!) = \mathrm{l}\, \sqrt{2\pi} + (\mathrm{k} + \tfrac{1}{2})\, \mathrm{l}\, \mathrm{k} - \mathrm{k} + \mathrm{G}\left(\tfrac{1}{\mathrm{k}}\right)$$

Um Brigg'sche Logarithmen zu erhalten, hat man die natürlichen Logarithmen mit dem Modul $\mathrm{M} = \frac{1}{\mathrm{l}\, 10}$ zu multipliciren, so dass

$$\log(\mathrm{k}!) = \log \sqrt{2\pi} + (\mathrm{k} + \tfrac{1}{2}) \log \mathrm{k} + \left\{ - \mathrm{k} + \mathrm{G}\left(\tfrac{1}{\mathrm{k}}\right) \right\} \mathrm{M}$$

Nota I. Geht man von den natürlichen Logarithmen zu den Zahlen über, so ist

$$1.2.3 \ldots\ldots \mathrm{k} > \sqrt{2\pi} \,.\, \mathrm{e}^{-\mathrm{k}} \,.\, \mathrm{k}^{\mathrm{k}+\frac{1}{2}}$$

$$1.2.3 \ldots\ldots \mathrm{k} < \sqrt{2\pi} \,.\, \mathrm{e}^{-\mathrm{k}+\frac{1}{12\mathrm{k}}} \,.\, \mathrm{k}^{\mathrm{k}+\frac{1}{2}}$$

so dass $$\mathrm{k}! = (2\pi\mathrm{k})^{1/2} \left(\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{k}} .\, \mathrm{s},$$ während l s zwischen

$$\frac{1}{12\mathrm{k}} - \frac{1}{360\mathrm{k}^3} \text{ und } \frac{1}{12\mathrm{k}}$$ liegt.

Es ist daher l s stets positiv, also s stets >1; aber es rückt l s der Null, also der Factor s selbst der Einheit desto näher, je grösser k ist, so dass $\mathrm{s} = 1$ wird für $\mathrm{k} = \infty$

Nota II. Da der Binomial-Coefficient $\binom{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{m}!}{(\mathrm{m}-\mathrm{n})!\,\mathrm{n}!}$ ist, so kann man sich dieser Näherungsformel auch bedienen, wenn bei einem sehr grossen (zunächst ganzen und) positiven Werte von m der n^{te} B. C. für grosse n berechnet werden soll (Laplace).

Weitere Anwendungen der Summenformel von Mac-Laurin auf die Function $\mathrm{f}(\mathrm{u}) = \mathrm{u}^{-\mu}$ in den Fällen

$$-1 < \mu < 0$$

$$0 < \mu \leqq 1$$

$$\mu > 1$$

mögen in einem spätern Jahrgange folgen.

Errata:

Seite 2 Zeile 3 v. u. l. $(-1)^{\mathrm{k}-1}$
„ 3 „ 11 v. o. l. $\frac{\mathrm{h}^3}{12}$
„ 3 „ 14 v. o. l. $\frac{\mathrm{h}^2}{10}$
„ 3 „ 15 v. o. l. $\mathrm{F}'''(\mathrm{x}+\mathrm{h}) + \mathrm{F}'''(\mathrm{x})$

Seite 7 Zeile 4 v. u. l. $-\frac{1}{2}\mathrm{xi}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{ix}}+1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{ix}}-1}$
„ 7 „ 3 v. u. l. $\sum_{0}^{\infty}(\mathrm{k}) \cdots$
„ 8 „ 5 v. u. l. $\sum_{1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{k}) \cdots$