VI. Programm

des

f. b. Privat-Gymnasiums

am

Seminarium Vincentinum

in

BRIXEN

veröffentlicht am Schlusse des Schuljahres

1881.

Abhandlung:

Anwendung der Summenformel von Mac-Laurin auf harmonische Reihen.

Von Professor Josef Braun.

BRIXEN.
Druck von A. Weger's Hofbuchdruckerei.

Anwendung der Summenformel von Mac-Laurin auf harmonische Reihen.

Zunächst mag eine elementare Methode zur independenten Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen gegeben werden.

Bezeichnet C_p^n die Anzahl der Combinationen von p Elementen zur n^{ten} Classe ohne Wiederholungen, so ist zunächst

$$p^2 = 2!\,C_p^2 + C_p^1$$

und durch beiderseitige Multiplication mit p

$$p^3 = [(p-2) + 2]\,2!\,C_p^2 + [(p-1) + 1]\,C_p^1$$

$$= 3!\,C_p^3 + 2!\,(2+1)\,C_p^2 + C_p^1$$

da

$$(p-i)\,C_p^i = (i+1)\,C_p^{i+1}$$

Setzt man nun

$$1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + m = S_1^m,$$

$$1 + 2\,(1 + 2) + 3\,(1 + 2 + 3) + \cdots + m\,(1 + 2 + \cdots + m)$$

d. i. $$1 + 2\,S_1^2 + 3\,S_1^3 + \cdots\cdots\cdots\cdots + m\,S_1^m = S_2^m,$$

$$1+2[1+2\,S_1^2] + 3\,[1+2S_1^2+3S_1^3] + \cdots + m[1+2\,S_1^2+\cdots+mS_1^m]$$

d. i. $$1+2\,S_2^2+3\,S_2^3+\cdots\cdots\cdots+m\,S_2^m = S_3^m$$

$\cdots\cdots\cdots$

. . . .

allgemein $$1 + 2\,S_r^2 + 3\,S_r^3 + \cdots\cdots\cdots + m\,S_r^m = S_{r+1}^m\,,$$

wo immer $$i\,S_r^i + S_{r+1}^{i-1} = S_{r+1}^i\,,$$

wenn $$\left.\begin{array}{l} S_0^1 = S_0^2 = \cdots\cdots = S_0^i \\ S_1^1 = S_2^1 = \cdots\cdots = S_r^1 \end{array}\right\} = 1$$

gesetzt wird, so kommt durch Einführung dieser Symbole

$$p^4 = 4!\,C_p^4 + 3!\,S_1^3\,C_p^3 + 2!\,S_2^2\,C_p^2 + C_p^1$$

. . . .

Das durch höhere Induction leicht beweisbare Bildungsgesetz ist allgemein dargestellt durch $p^m =$

$$m!\,C_p^m + (m-1)!\,S_1^{m-1}\,C_p^{m-1} + (m-2)!\,S_2^{m-2}\,C_p^{m-2} + \cdots\cdots + 2!\,S_{m-2}^2\,C_p^2 + C_p^1$$

Lässt man hierin p alle Werte der ganzen Zahlen von 1 bis p annehmen und addiert sämmtliche auf diese Weise entstehenden Gleichungen, so kommt mittels der Relation

$$C_p^m + C_{p-1}^m + C_{p-2}^m + \cdots\cdots + C_m^m + \cdots\cdots + C_1^m = C_{p+1}^{m+1}$$

die Formel

$$\sum_{1}^{p}{}_{(i)}\, i^m = m!\,C_{p+1}^{m+1} + (m-1)!\,S_1^{m-1}\,C_{p+1}^{m} + (m-2)!\,S_2^{m-2}\,C_{p+1}^{m-1} + \cdots$$

$$+ 2!\,S_{m-2}^2\,C_{p+1}^3 + 1!\,C_{p+1}^2$$

oder mit $$m!\,C_p^m = A_p^m$$

$$\sum_{1}^{p}{}_{(i)}\, i^m = \frac{1}{m+1}\,A_{p+1}^{m+1} + \frac{S_1^{m-1}}{m}\,A_{p+1}^{m} + \frac{S_2^{m-2}}{m-1}\,A_{p+1}^{m-1} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{S_{m-2}^2}{3}\,A_{p+1}^3 + \frac{1}{2}\,A_{p+1}^2$$

Die allgemeine Formel für die Summe der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis p ist also

$$\sum_{(i)\,1}^{p} i^{2n} = \frac{1}{2n+1}\overset{2n+1}{A}_{p+1} + \frac{\overset{2n-1}{S}_1}{2n}\overset{2n}{A}_{p+1} + \frac{\overset{2n-2}{S}_2}{2n-1}\overset{2n-1}{A}_{p+1} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\overset{2}{S}_{2n-2}}{3}\overset{3}{A}_{p+1} + \frac{1}{2}\overset{2}{A}_{p+1}$$

(Vgl. Gl. 6 auf S. 9 der Prog.-Abh. v. J. 1879.)

Nun ist die n^{te} Bernoulli'sche Zahl B_{2n-1} der Coefficient des letzten Gliedes in der Summenformel der $2n^{ten}$ Potenzen der natürlichen Zahlen. Es sind sohin alle A aufzulösen und die Coefficienten der Glieder, die p^1 enthalten, zu vereinigen.

Da das allgemeine Glied $\overset{i}{A}_{p+1}$ für alle $i \geqq 2$, wofern $0! = 1$ gilt, den Term

$$(-1)^i\,(i-2)!\,p$$

enthält, so erhält man sofort

$$B_{2n-1} = (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{2} + \sum_{(i)\,0}^{2n-2}(-1)^{i+1}\,\frac{(2n-1-i)!}{2n+1-i}\,\overset{2n-i}{S}_i\right]$$

Der Vorzeichenfactor muss angebracht werden, weil der letzte Term der nach fallenden Potenzen geordneten Summenformel für die $2n^{ten}$ Potenzen der Zahlen von 1 bis p bei $\begin{Bmatrix}\text{geraden}\\ \text{ungeraden}\end{Bmatrix}$ n $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ ist.

* * *

Nach Dirichlet gilt die Gleichung

$$\underset{(k=2l-1=\infty)}{\mathrm{Lim}} \int_{-\pi+g}^{q\pi+g'} \varphi(t)\,\frac{\sin kt}{\sin t}\,dt = \pi\left[\varphi(0) + \varphi(\pi) + \varphi(2\pi) + \cdots\cdots + \varphi(q\pi)\right],$$

wo die Grenze $g-\pi$ beliebig negativ, aber an sich $<\pi$, also

$$0 < \pi - g = \theta\pi < \pi \qquad (0 < \theta < +1)$$

und $\quad 0 < g' < \pi$.

Nimmt man $a + \frac{ht}{\pi} = u$ d. i. $t = \frac{\pi}{h}(u-a)$,

$\varphi(t) = F(a + \frac{ht}{\pi}) = F(u)$, so wird die untere Grenze für u

$$= a - \frac{h}{\pi}(\pi - g) = A, \text{ wobei } A < a$$

und zwar $\qquad a - A = \frac{h}{\pi}(\pi - g) = \theta\, h < h$

und die obere $= a + \frac{h}{\pi}(q\pi + g') = a + hq + \frac{hg'}{\pi} = B$,

wobei $\qquad B - qh = a + \frac{hg'}{\pi} < a + h$

also auch $\qquad (B - qh) - a < h$

Ist $\left.\begin{matrix}-\pi + g \\ g'\end{matrix}\right\} = 0$, so ist in der Summe $\frac{1}{2}\,\varphi(0)$ und $\frac{1}{2}\,\varphi(q\pi)$ zu setzen.

Da nun
$$\frac{\sin(2l-1)t}{\sin t} = 1 + 2\sum_{1}^{l-1}{}_{(r)} \cos 2rt,$$

so hat man durch Einführung des Argumentes u

$$1) \qquad F(a) + F(a+h) + \cdots\cdots + F(a+qh) = \frac{1}{h}\int_A^B F(u)\,du$$
$$+ \frac{2}{h}\sum_{1}^{\infty}{}_{(r)} \int_A^B F(u)\cos 2\pi r\,\frac{u-a}{h}\,du$$

Diese Gleichung, in welcher F ein beliebiges Functionszeichen ist, gilt, solange $\int F(u)\,du$ zwischen allen möglichen Integrationsgrenzen, die zwischen A und B incl. fallen, endlich und stetig bleibt.

Stellt man noch die Bedingung, dass dieselbe für alle Werte von a, die zwischen A und B − qh liegen, gelten soll, so muss

$$(B - qh) - A \leqq h \text{ oder } B - A \leqq (q+1)\,h \qquad \text{sein.*)}$$

Entwickelt man das zweite Glied auf der rechten Seite, so ergeben sich mit Rücksicht auf die Relation

$$\frac{2\,S_{2k}}{(2\pi)^{2k}} = \frac{B_{2k-1}}{(2k)!}$$

*) Scheibner: Über unendliche Reihen 37.

für die Correctur die 2 Formen

$$R = \sum_{1\,(k)}^{n} (-1)^{k-1} \frac{B_{2k-1}\, h^{2k}}{(2k)!} \left[F^{(2k-1)}(b) - F^{(2k-1)}(a) \right]$$

$$+ \begin{cases} (-1)^{n+1} \cdot 2 \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2n+1} \sum\limits_{1\,(r)}^{\infty} \frac{1}{r^{2n+1}} \cdot \int\limits_a^b F^{(2n+1)}(u) \sin 2\pi r \frac{u-a}{h}\, du\,, \\ (-1)^{n} \cdot 2 \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2n} \sum\limits_{1\,(r)}^{\infty} \frac{1}{r^{2n}} \cdot \int\limits_a^b F^{(2n)}(u) \cos 2\pi r \frac{u-a}{h}\, du \end{cases}$$

wenn t auf das Intervall zwischen o und $q\pi$, also u auf das J. zwischen a und $a + qh = b$ beschränkt wird.

Die Annahme $F(u) = u^{\mu}$, wobei μ eine beliebige reelle (oder complexe) Zahl bezeichnen mag, gibt

2) $\frac{1}{2} a^{\mu} + (a+h)^{\mu} + (a+2h)^{\mu} + \cdots\cdots + (b-h)^{\mu} + \frac{1}{2} b^{\mu}$

$$= \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{(\mu+1)\,h} + \sum_{1\,(k)}^{n} (-1)^{k-1} \binom{\mu}{2k-1} \frac{B_{2k-1}\, h^{2k-1}}{2k} \cdot \left[b^{\mu-2k+1} - a^{\mu-2k+1} \right] + R_n$$

$$\text{wo } R_n = (-1)^n \frac{2 h^{2n-1}}{(2\pi)^{2n}} \cdot [\mu]^{2n} \sum_{1\,(r)}^{\infty} \frac{1}{r^{2n}} \int\limits_a^b u^{\mu-2n} \cos 2\pi r \frac{u-a}{h}\, du$$

Es lassen sich unbeschränkt viele Functionen von u angeben, welche die Werte der einzelnen Glieder dieser Reihe annehmen, wenn man für u successive a, a+h, ... einsetzt. Denn hat man erst eine solche Function gefunden, z. B. u^{μ}, so braucht man zu ihr nur eine beliebige Function zu addieren, welche an allen diesen Stellen verschwindet. Diesem Zwecke würde genügen $u^{\mu} + c \cdot \sin \frac{(u-a)\pi}{h}$, wo c eine beliebige Constante bezeichnet.

Hiemit ist die Summation einer harmonischen Reihe im allgemeinen geleistet und es erübrigt nur noch den Wert von R_n zu beurtheilen. Der einfachste Fall liegt vor, wenn μ eine ganze, positive und gerade Zahl ist.

Es wird für $2n = \mu$

$$\int \cos 2\pi r \frac{u-a}{h}\, du = \frac{h}{2\pi r} \sin 2\pi r \frac{u-a}{h} \Bigg|_a^b = 0\,, \quad \text{somit } R_n = 0$$

Ist μ ungerade und positiv, so wird bei $2n+1 = \mu$

$$\int u \,.\, \cos 2\pi r \frac{u-a}{h}\, du = \frac{h}{2\pi r}\, u \,.\, \sin 2\pi r \frac{u-a}{h} + \left(\frac{h}{2\pi r}\right)^2 \cos 2\pi r \frac{u-a}{h}\Bigg|_a^b = 0$$

somit wieder $R_n = 0$

Ist μ beliebig reell, so ist jedesfalls

$$\left| \int u^{\mu-2n} \cos 2\pi r \frac{u-a}{h}\, du \right| < \int u^{\mu-2n}\, du = \frac{u^{\mu-2n+1}}{\mu-2n+1}$$

also $$|R_n| < \frac{h^{2n-1}}{2n} \binom{\mu}{2n-1} B_{2n-1} \left[b^{\mu-2n+1} - a^{\mu-2n+1} \right]$$

d. h. kleiner als das zuletzt berechnete Glied der Reihe, wobei übrigens die Größe von n willkürlich ist.

Nota I. Wenn $F^{2n}(u)$ d. h. jede Derivierte gerader Ordnung im Bereich der Integration von beständigem Zeichen ist, so ist das Ergänzungsglied der Correctur absolut

$$< 2 \,.\, \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2n} S_{2n} \int_a^b F^{2n}(u)\, du = \frac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} \int_a^b F^{2n}(u)\, du$$

und kann folglich $= \rho \dfrac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} \displaystyle\int_a^b F^{2n}(u)\, du$, wo ρ ein positiver oder negativer echter Bruch ist, gesetzt werden.

Führt man die Entwicklung der Correctur weiter, so erhält man die Beziehung

$$(-1)^{n-1} \rho \frac{B_{2n-1}}{(2n)!} \int_a^b F^{2n}(u)\, du = (-1)^n (1-\rho') \frac{B_{2n+1}\, h^2}{(2n+2)!} \int_a^b F^{2n+2}(u)\, du$$

woraus wegen $1-\rho' > 0$ folgt, dass $\rho \gtrless$ ist, je nachdem $F^{2n}(u)$ u. $F^{2n+2}(u)$ $\binom{\text{ungleiche}}{\text{gleiche}}$ Vorzeichen haben, so dass für den letzteren Fall die wahre Summe immer zwischen den Summen von n und n+1 Termen liegt.

Nota II. Für $h = 1$, $q = \infty$ und unter der Voraussetzung, dass $F(u)$, $F'(u)$, $F''(u)$, ... für $q = \infty$ verschwinden, wird einfacher $F(a) + F(a+1) + F(a+2) + \ldots$

$$= \int_a^\infty F(u)\, du + \frac{1}{2} F(a) - \frac{B_1}{2!} F'(a) + \frac{B_3}{4!} F'''(a) - \cdots\cdots$$

Es sollen nun die Ausdrücke untersucht werden, die sich ergeben, wenn man die Gliederzahl der harmonischen Reihe ins unendliche wachsen lässt. Eine unendlich wachsende positive ganze Zahl soll mit k bezeichnet werden.

Wird eine harmonische Reihe d. i. eine Reihe, welche nach gleich hohen Potenzen der natürlichen Zahlen fortschreitet, wobei die Glieder sowohl positiv als negativ genommen werden können, als unendliche gedacht, so ist sie nur dann convergent, wenn der Exponent negativ ist und zwar muss derselbe, falls alle Glieder positiv sind, an sich >1 sein, somit ist die Convergenz der Reihe

$$1+2^{-\mu}+3^{-\mu}+\cdots\cdot\cdot \quad , \text{ wo } \mu \text{ an sich positiv,}$$

an die Bedingung $\mu>1$ geknüpft. — Für $\mu=-\nu$ wächst das allgemeine Glied n^{ν} mit n über alle Grenzen, während für $\mu=0$ lauter Einheiten zu summieren sind. — Für $\mu>0$ nimmt allerdings $n^{-\mu}$ unbegrenzt ab; da jedoch aus der von Schloemilch angegebenen Begrenzung*)

$$l\,(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdot\cdot+\frac{1}{n}<1+l\,(n+1)$$

ersichtlich wird, dass die Summe der Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.$ über alle Grenzen wächst, so ist für alle Werte von $\mu \overline{\overline{<}} 1$ die Divergenz der harmonischen Reihe selbstverständlich. — Soll die Reihe noch convergieren, wenn der Exponent zwar negativ aber der Größe nach $\overline{\overline{<}}\, 1$, so müssen die Zeichen der Glieder in regelmäßigen Perioden wechseln.

Setzt man nun in 2)

$$\frac{a}{h}=x\,,\ \frac{b}{h}=\frac{a+qh}{h}=x+q,\ \text{so kommt}$$

$$x^{\mu}+(x+1)^{\mu}+(x+2)+\cdots\cdots+(x+q-1)^{\mu}=$$

$$\frac{(x+q)^{\mu+1}-x^{\mu+1}}{\mu+1}-\frac{(x+q)^{\mu}-x^{\mu}}{2}+$$

$$\sum_{1\,(r)}^{n}\frac{(-1)^{r-1}}{2r}\binom{\mu}{2r-1}B_{2r-1}\left[(x+q)^{\mu-2r+1}-x^{\mu-2r+1}\right]+R_n\,,$$

$$\text{wo } R_n=(-1)^n\,\frac{2\,h^{-\mu+2n-1}}{(2\pi)^{2n}}\quad[\mu]^{2n}\sum_{1\,(r)}^{\infty}\frac{1}{r^{2n}}\int_a^b u^{\mu-2n}\cos 2\pi r\,\frac{u-a}{h}\,du$$

für ganze positive μ verschwindet, für alle übrigen reellen Werte von μ absolut kleiner ist als das jeweilige letzte Glied der Reihe.

Setzt man in dieser Gleichung $q=k$, so wird die Summe auf der rechten Seite nur so weit fortgesetzt zu werden brauchen, bis die Exponenten $\mu-2r+t$ anfangen negativ zu werden. Dieselbe sondert sich

*) Zeitschrift f. Math. u. Phys. III. Jg.

alsdann in zwei Theile: einen unendlich großen mit dem Argument $x+k$ und einen gleichgebildeten endlichen mit dem Argument x, welcher letztere $E(x,\mu)$ heiße, nämlich

$$E(x,\mu) = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} - \frac{x^{\mu}}{2} + \sum_{1}^{n}{}_{(r)} \frac{(-1)^{r-1}}{2r} \binom{\mu}{2r-1} B_{2r-1} \, x^{\mu-2r+1}$$

Die Summe kann beliebig weit, soll aber jedesfalls soweit fortgesetzt sein, als noch $\mu-\overline{2r-1} \geqq 0$ ist.

Es ist demnach 3)

$$x^{\mu} + (x+1)^{\mu} + (x+2)^{\mu} + \cdots\cdots + (x+k-1)^{\mu} = E(x+k,\mu) - E(x,\mu) + R_n$$

Im Restgliede R_n verschwinden die Terme mit dem unendlichen Argument $x+k$ und sein Wert ist bei ganzen $+\mu$ Null, indem die Reihe von selbst abbricht.

Das erste Glied im Ausdruck der Größe $E(x+k.\mu)$ lässt erkennen, dass die Summe der in inf. fortgesetzten Reihe für $\mu = \alpha + \beta i$ unendlich ist, falls $\alpha \geqq -1$, denn es ist der einfachste Wert von

$$(x+k)^{\alpha+1+\beta i} = (x+k)^{\alpha+1} \cdot e^{\beta \,.\, L(x+k) \,.\, i}$$

Für den Grenzfall $\alpha = -1$, setze man $\mu = -(1+\varepsilon)$; dann ist

$$\frac{1}{x^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(x+1)^{1+\varepsilon}} + \cdots\cdot + \frac{1}{(x+k-1)^{1+\varepsilon}} = -\frac{(x+k)^{-\varepsilon}}{\varepsilon} + \frac{x^{-\varepsilon}}{\varepsilon} + R\,.$$

Für ein reelles ε folgt hieraus

$$\varepsilon \left[\frac{1}{x^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(x+1)^{1+\varepsilon}} + \cdots\cdots + \frac{1}{(x+k-1)^{1+\varepsilon}}\right] =$$
$$- (x+k)^{-\varepsilon} + x^{-\varepsilon} + \varepsilon R$$

Ist $\operatorname{Lim} \varepsilon = +0$ und wird k absolut unendlich, so wird $(x+k)^{-\varepsilon} = 0$, wie klein auch ε angenommen werden mag, also

$$\lim_{\varepsilon = +0} \varepsilon \left[\frac{1}{x^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(x+1)^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(x+2)^{1+\varepsilon}} + \cdots\cdots\right] = 1$$

welches Resultat sich auch geometrisch verificieren lässt.

Die Curve von der Gleichung $y = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ $(\varepsilon > 0)$ erstreckt sich mit beiden Ästen ins unendliche und nähert sich asymptotisch den Coordinatenachsen.

Das Flächenstück $\int_a^\infty \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{a^\varepsilon}$

ist offenbar kleiner als die Summe S der Rechtecke

$$\frac{1}{a^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(a+1)^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(a+2)^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(a+3)^{1+\varepsilon}} + \cdots\cdots$$

dagegen größer als die Summe der Rechtecke

$$\frac{1}{(a+1)^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(a+2)^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(a+3)^{1+\varepsilon}} + \cdots\cdots$$

d. h. also $\frac{1}{a^\varepsilon} < \varepsilon S < \frac{1}{a^\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{a^{1+\varepsilon}}$, und folglich $\lim\limits_{(\varepsilon = 0)} (\varepsilon S) = 1$.

Statt 1 kann hierin ein beliebiges positives Increment h genommen werden, wobei der Grenzwert $\frac{1}{h}$ resultiert.

Dagegen ist, wenn $\lim \varepsilon = -0$ und wenn ε durch $-\varepsilon$ ersetzt wird,

$$\lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon \left[\frac{1}{x^{1-\varepsilon}} + \frac{1}{(x+1)^{1-\varepsilon}} + \frac{1}{(x+2)^{1-\varepsilon}} + \cdots\cdots \right] = \infty$$

Setzt man in 3) $x = 1$ und $k-1$ statt k, so wird

$$1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \cdots\cdots + (k-1)^\mu = E(k,\mu) - E(1,\mu) + R$$

Nun ist die Größe $-E(1,\mu) + R$ von k unabhängig und endlich, hat also einen bestimmten Wert, der bloß von μ abhängt; er heiße $K(\mu)$.

Der Ausdruck der Function $K(\mu)$ enthält das Glied $\frac{1^{\mu+1}}{\mu+1}$; es wird demnach

$$K(\mu) = C(\mu) - \frac{1}{\mu+1}$$

wo $C(\mu)$ ebenfalls eine Function von μ allein ist.

Folglich hat man die Bestimmung

$$1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \cdots\cdots + (k-1)^\mu = E(k,\mu) + K(\mu) \tag{4}$$

wo

$$E(k,\mu) = \frac{k^{\mu+1}}{\mu+1} - \frac{k^\mu}{2} + \sum_{1(r)}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{2r} \binom{\mu}{2r-1} B_{2r-1} k^{\mu-2r+1}$$

$$(\mu + 1 \geqq 2r)$$

und (mit Einführung der Vandermonde'schen Bezeichnung)

$$C(\mu) = \frac{1}{2} - \frac{B_1}{2}\mu + \frac{B_3}{4!}[\mu]^3 - \frac{B_5}{6!}[\mu]^5 + \cdots\cdots$$

Es ist aber $E(x.\mu) - \frac{1}{\mu+1} + R_n$ für endliche x selbst endlich und von x und μ abhängig; denn der einzige Fall, wo in diesem Ausdrucke unendliche Glieder vorkommen können, ist der, wo $\mu = -1$. Dann aber ist der Betrag der unendlichen Glieder

$$\lim_{(\mu=-1)} \frac{x^{\mu+1} - 1^{\mu+1}}{\mu+1} = \lim_{(\mu=-1)} \int_1^x x^\mu \, dx = lx$$

wie auch aus der Entwicklung von x^m nach Mac-Laurin's Reihe für $m = 0$ nämlich aus $x^m = 1 + m\, lx + \frac{m^2}{2!}(lx)^2 x^{\theta m}$ folgt.

Für den Fall, dass μ nicht eine ganze Zahl ist, sollen für reelle μ die positiven Werte der Potenzen, für complexe μ diejenigen gemeint sein, welche die kleinste Amplitude haben, welche Werte in der allgemeinen Potenz

$$a^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha La \mp \beta.2n\pi} \left[\cos(\beta.La \pm \alpha.2n\pi) + i \sin(\beta.La \pm \alpha.2n\pi) \right]$$

enthalten sind.

Ist der reelle Theil von μ negativ, so vereinfacht sich K, nämlich

$$4^*) \qquad K(-\mu) = \frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots\cdots + \frac{1}{(k-1)^\mu} - \frac{k^{1-\mu}}{1-\mu}$$

wenn hier μ eine Zahl bedeutet, deren reeller Theil positiv, wobei auch noch das unendliche Glied $k^{1-\mu}$ verschwindet, falls $\mu > 1$.

Stellt man sich nun die Aufgabe, den Grenzwert der harmonischen Reihe anzugeben für negative $\mu \gtreqless -1$, wenn dieselbe nur bis zu einem gewissen Gliede k^μ fortgesetzt wird, so erhält man aus 4), nachdem $-\mu$ statt μ gesetzt worden,

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots\cdots + \frac{1}{(k-1)^\mu} + \frac{1}{k^\mu} = \frac{k^{1-\mu}}{1-\mu} - \frac{1}{1-\mu} + \frac{1}{2} +$$

$$\sum_{1\,(r)}^{n} \frac{(-1)^{r-1} B_{2r-1}}{2r} \binom{\mu+2r-2}{2r-1}, \text{ wenn } \mu \text{ von 1 verschieden ist;}$$

und $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} = lk + \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2!} - \frac{6B_3}{4!}$$

$$+ \frac{120\,B_5}{6!} - \frac{4320\,B_7}{8!} + \ldots, \text{ wenn } \mu = 1 \text{ ist;}$$

oder kürzer

$$5)\quad \begin{cases} 1+\frac{1}{2^{\mu}}+\frac{1}{3^{\mu}}+\cdots\cdots+\frac{1}{(k-1)^{\mu}}+\frac{1}{k^{\mu}}=\frac{k^{1-\mu}}{1-\mu}+K(-\mu), \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}=\mathrm{l}k+C(-1) \end{cases}$$

Es ist

$$\frac{B_1}{2!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=0{,}08\dot{3};\quad \frac{B_3}{4!}=\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{30}=0{,}001\dot{3}8;\quad \frac{B_5}{6!}=\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{42}=0{,}0000330687_8$$

$$\frac{B_7}{8!}=\frac{1}{8!}\cdot\frac{1}{30}=0{,}0000008267;\quad \frac{B_9}{10!}=\frac{1}{10!}\cdot\frac{5}{66}=00000000208;\quad \frac{B_{11}}{12!}=\frac{1}{12!}\cdot\frac{691}{2730}$$

Die Constante $K(-\mu)$ kann mit beliebiger Genauigkeit durch das folgende Verfahren erhalten werden.

Es ist

$$1+\frac{1}{3^{\mu}}+\frac{1}{5^{\mu}}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k+1)^{\mu}}=1+\frac{1}{2^{\mu}}\cdot\sum_{1\,(r)}^{k}\frac{1}{r^{\mu}\left(1+\frac{1}{2r}\right)^{\mu}}$$

Entwickelt man die Nenner nach dem Binomialtheorem und ordnet die Glieder nach den B. C., so kommt mit Anwendung einer selbstverständlichen Bezeichnung für den Ausdruck der rechten Seite

$$1+\frac{1}{2^{\mu}}\left[\sum_{1\,(r)}^{k}\frac{1}{r^{\mu}}-\binom{\mu}{1}\frac{1}{2}\,S_{\mu+1}+\binom{\mu+1}{2}\frac{1}{2^2}S_{\mu+2}-\cdots\cdots+\cdots\right]$$

oder, wenn je die ersten Glieder in den S abgesondert werden, mit Zuziehung von 5)

$$1+\frac{1}{2^{\mu}}\left[\frac{k^{1-\mu}}{1-\mu}+K(-\mu)-\binom{\mu}{1}\cdot\frac{1}{2}+\binom{\mu+1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}-\cdots\cdots+\cdots+T\right];$$

wird T vollständig geschrieben und beachtet, dass

$$\binom{\mu}{1}\frac{1}{2}-\binom{\mu+1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\binom{\mu+1}{3}\frac{1}{2^3}-\cdots=1-\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-\mu}=1-\frac{2^{\mu}}{3^{\mu}},$$

so folgt 6) $\quad 1+\frac{1}{3^{\mu}}+\frac{1}{5^{\mu}}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k+1)^{\mu}}=1+$

$$\frac{1}{2^{\mu}}\left[\frac{k^{1-\mu}}{1-\mu}+K(-\mu)-1+\frac{2^{\mu}}{3^{\mu}}+\sum_{1\,(r)}^{\infty}\frac{(-1)^r}{2^r}\binom{\mu+r-1}{r}\cdot(S_{\mu+r}-1)\right],$$

worin die Σ rapid convergiert.

Ferner resultiert aus 5) durch Multiplication mit $\frac{1}{2^\mu}$

$$7) \quad \frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{4^\mu}+\frac{1}{6^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k)^\mu}=\frac{1}{2^\mu}\left[\frac{k^{1-\mu}}{1-\mu}+K(-\mu)\right]$$

Durch Addition von 6) und 7) kommt, da das Glied $\frac{1}{(2k+1)^\mu}$ als verschwindend klein wegbleiben darf,

$$1+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k)^\mu}$$

$$=1+\frac{1}{2^\mu}\left[\frac{2k^{1-\mu}}{1-\mu}+2K(-\mu)-1+\frac{2^\mu}{3^\mu}+\sum\right]$$

aber zufolge 5) ist dies auch

$$=\frac{2k^{1-\mu}}{2^\mu(1-\mu)}+K(-\mu),$$

somit gibt die Gleichsetzung beider Werte

$$8) \quad (2^\mu-2)K(-\mu)=2^\mu-1+\frac{2^\mu}{3^\mu}+\sum_{1(r)}^{\infty}\frac{(-1)^r}{2^r}\binom{\mu+r-1}{r}(S_{\mu+r}-1)$$

Hiemit ist $K(-\mu)$ durch einen von k unabhängigen Ausdruck gegeben.

Diese Gleichung kann, wenn $\mu>1$ vorausgesetzt wird, zur Auswertung solcher S dienen, deren unmittelbarer Ausdruck nur schwach convergiert; es wäre diesfalls S_μ statt $K(-\mu)$ zu setzen.

Multipliciert man Gleichung 7) mit 2, oder Gleichung 5) mit $2^{1-\mu}$ und subtrahiert das Resultat von der folgenden, die sich aus 5) ergibt, wenn 2k statt k gesetzt wird

$$1+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k-1)^\mu}+\frac{1}{2k^\mu}=\frac{2k^{1-\mu}}{2^\mu(1-\mu)}+K(-\mu),$$

so kommt

$$1-\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}-\frac{1}{4^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k-1)^\mu}=(1-2^{1-\mu}).K(-\mu)$$

oder da die Reihe links für $\mu>0$ convergiert,*)

$$9) \quad 1-\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}-\frac{1}{4^\mu}+\cdots\cdots=(1-2^{1-\mu}).K(-\mu)$$

*) Scheibner: Über unendliche Reihen, 5.20.

Diese Bestimmung lässt noch ersehen, dass die Werte von $K(-\mu)$, wenn $\mu < 1$, sämmtlich negativ sind; denn die Reihe links ist ein positiver Wert, während diesfalls $1-2^{1-\mu} < 0$ ist.

Addiert man noch 9) und 7), so folgt

$$10)\quad 1+\frac{1}{3^\mu}+\frac{1}{5^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k-1)^\mu}=\frac{k^{1-\mu}}{2^\mu(1-\mu)}+\frac{2^\mu-1}{2^\mu}.K(-\mu)$$

wo das verschwindende Glied $\frac{1}{(2k)^\mu}$ weggelassen wurde.

Für $\mu=1$ resultiert aus 9)

$$K(-1)=\infty$$

und die ursprüngliche Formel gestaltet sich für $h=1$ wie folgt:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a+q-1}=l\,\frac{a+q}{a}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{a+q}\right]+$$

$$\sum_{1(r)}^{n-1}\frac{(-1)^{r-1}B^{2r-1}}{2r}\left[\frac{1}{a^{2r}}-\frac{1}{(a+q)^{2r}}\right]-(-1)^n\,\frac{\varepsilon B_{2n-1}}{2n}\left[\frac{1}{a^{2n}}-\frac{1}{(a+q)^{2n}}\right]$$

$$0<\varepsilon<+1$$

Geht man zur Grenze für unendlich wachsende q über, so wird

$$11)\quad \lim_{(q=k)}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a+q-1}-l\,\frac{a+q}{a}\right]$$

$$=\frac{1}{2a}+\sum_{1}^{n-1}(-1)^{r-1}\frac{B_{2r-1}}{2r}\,\frac{1}{a^{2r}}+(-1)^{n+1}\,\frac{\varepsilon B_{2n-1}}{2n}\cdot\frac{1}{a^{2n}}$$

wo die linke Seite den Ausdruck $-\frac{d\,l\,\Gamma(a)}{da}$ repräsentiert.

Setzt man $a=1$ und $k-1$ statt k, so geht die linke Seite in die Euler'sche Constante über.

Ersetzt man in 4*) $K(-\mu)$ durch $C(-\mu)-\frac{1}{1-\mu}$, so erhält man

$$C(-1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k-1}-\lim_{(\mu=1)}\frac{k^{1-\mu}-1}{1-\mu}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k-1}-lk$$

Wollte man diese Constante durch die directe Substitution $a=1$ auswerten, so wäre nur eine geringe Genauigkeit zu erreichen, weil das Anwachsen der Glieder rechts schon nach dem 4ten, nämlich nach $\frac{B_5}{6}=\frac{1}{252}$ beginnt.

Addiert man aber beiderseits in 11)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a-1}-la$$

so geht ihre linke Seite ebenfalls in $C(-1)$ über und es wird

$$C(-1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a-1}-la+$$

$$\frac{1}{2a}+\sum_{1\,(r)}^{n-1}(-1)^{r-1}\frac{B_{2r-1}}{2r}\cdot\frac{1}{a^{2r}}+(-1)^{n+1}\frac{\varepsilon B_{2n-1}}{2n}\cdot\frac{1}{a^{2n}}$$

Die Summe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{9}$ auf 20 Stellen zu berechnen macht wenig Mühe und noch weniger die Berechnung der 5 Brüche von $\frac{B_1}{2.10^2}$ bis $\frac{B_9}{10.10^{10}}$, welche man nur zu berücksichtigen hat, um C auf 20 Stellen genau zu erhalten. — Da ferner

$$l\,5-2\,.\,l\,2=l\,(1+\tfrac{1}{4})$$

$$3\,.\,l\,5-7\,.\,l\,2=-l\,(1+\tfrac{3}{125})$$

so folgt durch Bestimmung von $l\,2$ und $l\,5$

$$l\,10=10\,.\,l\,(1+\tfrac{1}{4})+3\,.\,l\,(1+\tfrac{3}{125})$$

Entwickelt man die Logarithmen nach der Formel

$$l\,(1+z)=2\left\{\frac{1}{1}\,\frac{z}{z+2}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{z+2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{z+2}\right)^5+\cdots\cdots\right\},\ -1<z<\infty$$

so lässt sich $l\,10$ beliebig genau finden.

Bricht man die Reihen mit der m^{ten} Potenz ab, wo m eine beliebige ungerade Zahl bezeichnet, so betragen die resp. Reihenreste weniger als

$$\frac{1}{40\,(m+2)\,9^m}\,,\quad\frac{9}{3200\,(m+2)}\cdot\left(\frac{3}{253}\right)^m$$

Nimmt man resp. $m=16$ und 9, so erhält man auf 21 Stellen genau

$$l\,10=2{,}302585\ 092994\ 045684\ 018$$

und endlich

$$C(-1)=0{,}577215\ 664901\ 532860\ 6$$

Bei negativen $\mu<-1$ convergiert die Reihe für $q=k$ und es ist, $h=1$ genommen, da $\operatorname{Lim} b^{-\mu+1-2r}=\operatorname{Lim} b^{-(\mu+2r-1)}=0$,

12 a) $$\frac{1}{a^\mu}+\frac{1}{(a+1)^\mu}+\frac{1}{(a+2)^\mu}+\cdots\cdots=\frac{1}{(\mu-1)a^{\mu-1}}+\frac{1}{2a^\mu}$$

$$-\frac{B_1\binom{-\mu}{1}}{2a^{\mu+1}}+\frac{B_3\binom{-\mu}{3}}{4a^{\mu+3}}-\cdots\cdots$$

$$-(-1)^n\frac{B_{2n-3}\binom{-\mu}{2n-3}}{(2n-2)\,a^{\mu+2n-3}}+(-1)^n\frac{\varepsilon B_{2n-1}\binom{-\mu}{2n-1}}{2n\,a^{\mu+2n-1}}$$

Ist speciell μ eine negative ganze Zahl $= - m$, so ist in anderer Form: 12 b)

$$\frac{1}{a^m} + \frac{1}{(a+1)^m} + \frac{1}{(a+2)^m} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{2a+m-1}{2(m-1)a^m} + \frac{1}{(m-1)!\,a^{m+1}} \left[\frac{B_1\, m!}{2!\, a^0} - \frac{B_3 (m+2)!}{4!\ \ a^2} + \cdots\cdots \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{B_{2n-3}\,(m+2n-4)!}{(2n-2)!\, a^{2n-4}}\right] + (-1)^{n+1} \frac{\varepsilon B_{2n-1}\,(m+2n-2)!}{(m-1)!\,(2n)!\,a^{m+2n-1}}$$

Soll hieraus die Summe

$$S_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots\cdots\cdots$$

berechnet werden für ungerade m (da für gerade m schon bequeme Formeln existieren), so kann man dieselbe in 2 Theile zerlegen, von denen der erste

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots\cdots + \frac{1}{(a-1)^m}$$

direct, der andere mit $\frac{1}{a^m} + \frac{1}{(a+1)^m} + \cdots\cdot$ beginnende nach der eben gewonnenen Formel berechnet wird, nachdem aus dem Restglied der letztern die Zahlen a und n so bestimmt sind, dass der Wert des Restes unter die in Aussicht genommene Fehlergrenze herabsinkt.

Dies ist bei 12 b) und auch bei 12 a), falls μ keine ganze Zahl ist, immer möglich.

Sei S_3 zu berechnen, so dass der Fehler

$< 0{,}0000000001$ werde.

Aus 12 b) resultiert

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+2)^3} + \cdots\cdot = \frac{1}{2}\left[\frac{a+1}{a^3} + \frac{3B_1}{a^4} - \frac{5B_3}{a^6} + \frac{7B_5}{a^8} - \cdots \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{(2n-1)\, B_{2n-3}}{a^{2n}} - (-1)^n \frac{\varepsilon(2n+1)\, B_{2n-1}}{n a^{2n+2}}\right]$$

$$= \frac{a+1}{2a^3} + \frac{1}{4a^4} - \frac{1}{12a^6} + \frac{1}{12a^8} - \frac{3}{20a^{10}} + \frac{5}{12a^{12}}$$

$$- \frac{691}{420a^{14}} + \frac{35}{4a^{16}} - \frac{3617}{60a^{18}} + \frac{43867}{84a^{20}} - \cdots\cdots$$

$$+ (-1)^n \frac{(2n-1)\, B_{2n-3}}{2a^{2n}} - (-1)^n \frac{\varepsilon(2n+1)\, B_{2n-1}}{2n\, a^{2n+2}}$$

Da der Fehler, den man begeht, wenn man die Berechnung bei einem Gliede abbricht, stets kleiner als das Doppelte des nächsten Gliedes ist

$$(\varepsilon = 1 + \rho = \lambda \, . \, \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} < 2\lambda, \text{ wo } 0 < \lambda < +1),$$

so erkennt man aus den numerischen Werten der Coefficienten, dass für $a = 5$ der Fehler sich mit Sicherheit nur auf ungefähr $\frac{1}{5^{15}} = 0{,}000000000033$ herabdrücken lässt, wobei $\frac{35}{4a^{16}}$ das letzte zu benützende Glied wäre. — Macht man a größer, so lässt sich die Genauigkeit verstärken, weil die Potenzen von $\frac{1}{a}$ schneller abnehmen.

Führt man die Rechnung für $a = 5$ aus, welche wegen $\frac{1}{5} = 0{,}2$ bequem ist, so erhält man in 11 Decimalstellen

$$\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \cdots\cdots = 0{,}02439\ 48661\ 2$$

und direct

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} = 1{,}\ 17766\ 20370\ 4;$$

mithin

$$S_3 = 1{,}20205690316$$

und dies stimmt noch in der 11ten Stelle.

Man hat also im Falle $\mu = -m$ zur Auswertung der Summe

$$s_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots\cdots + \frac{1}{p^m}$$

wenn unter S_m die Summe der unendlichen, für $m > 1$ convergierenden Reihe

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots\cdots$$

verstanden wird, die Formel

$$\text{I)} \quad s_m = S_m - \frac{1}{(m-1)\,p^{m-1}} + \frac{1}{2p^m} - \frac{1}{m-1} \sum_{1\,(r)}^{n-1} (-1)^{r-1} \binom{m+2r-1}{2r} \frac{B_{2r-1}}{p^{m+2r-1}} + (-1)^n \, \varepsilon \, u_{2n}$$

wo u_{2r} das allgemeine Glied der halbconvergenten Reihe darstellt.

Dieser Formel bedient man sich mit Vortheil, wenn p eine so große Zahl ist, dass die directe Summierung äußerst mühsam werden würde. —

$$\text{II)} \quad s_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{p} =$$

$$C(-1) + lp + \frac{1}{2p} - \sum_{1\,(r)}^{n-1} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{2r \, . \, p^{2r}} + (-1)^n \frac{\varepsilon \, B_{2n-1}}{2n \, . \, p^{2n}}$$

wo $C(-1)$ die oben berechnete Euler'sche Constante bezeichnet.

Ist aber μ zwischen den Grenzen 0 und -1 enthalten, so ist

$$\text{III)} \quad 1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots\cdots + \frac{1}{p^\mu} =$$

$$\frac{p^{1-\mu}}{1-\mu} + K(-\mu) + \frac{1}{2p^{\mu}} - \sum_{1\,(r)}^{n-1} (-1)^{r-1} \binom{\mu+2r-2}{2r-1} \frac{B_{2r-1}}{2r\,.\,p^{\mu+2r-1}} + (-1)^{n}\,\varepsilon\,.\,u_{2n}$$

$$0 < \mu < 1$$

Bekanntlich wird mit dem Symbol $\Gamma(1+x)$ eine gewisse Function von x bezeichnet, die für alle reellen und complexen x einen bestimmten Wert hat, die nur dann unendlich wird, wenn x gleich einer negativen ganzen Zahl ist und die für ganze positive x sich auf das Product $x!$ reduciert, dessen Logarithmus durch die Stirling'sche Reihe ausgedrückt wird. — Man gelangt zur Vorstellung der allgemeinen Functionen Γ, wenn man die Function $x!$ zu interpolieren, d. h. wenn man das Product $1.2.3\ldots.x$ durch eine Function von x darzustellen sucht, welche eine völlig bestimmte Bedeutung behält, wenn x aufhört eine ganze positive Zahl zu sein.

Es seien x und n ganze positive Zahlen. Die x Brüche

$$\frac{n}{n+1}\,,\ \frac{n}{n+2}\,,\ \ldots\ldots\ \frac{n}{n+x}$$

nähern sich der Einheit, wenn n unbegrenzt wächst, während x constant bleibt. Dasselbe gilt daher vom Producte dieser x Brüche, und man hat, wenn noch beiderseits mit $1.2.3\ldots.x$ multipliciert wird,

$$1.2.3\ldots..x = \frac{n!\,n^{x}}{(x+1)\,(x+2)\,\ldots.\,(x+n)}\,(1+\varepsilon_{n}),\ \text{wo } \mathrm{Lim}\ \varepsilon_{n} = 0 \text{ für } n = \infty.$$

Lässt man jetzt die ganze Zahl n unendlich groß werden, so folgt

$$1.2.3\ldots..x = \mathop{\mathrm{Lim}}_{n=\infty} \frac{n!\,n^{x}}{(x+1)\,(x+2)\,\ldots\,(x+n)}$$

Die rechte Seite wird unendlich, wenn x eine negative ganze Zahl ist; behält aber für alle übrigen reellen und complexen x einen bestimmten endlichen Wert.

(Siehe Ohm, Syst. d. Math. VIII. § 101, wo der Gauss'sche Beweis gegeben ist.)

Setzt man daher

$$\Gamma(1+x) = \mathop{\mathrm{Lim}}_{n=\infty} \frac{n!\,n^{x}}{(x+1)\,(x+2)\,\ldots\,(x+n)}$$

so ist im Falle eines ganzen positiven x

$$\Gamma(1+x) = x!\,,\ \text{da}\ \mathop{\mathrm{Lim}}_{n=\infty} \frac{n!\,n^{x}}{(x+n)!} = 1$$

Ist $1+x = u$ beliebig positiv, so kommt $\Gamma(u)$ mit dem Euler'schen Integral zweiter Art überein. (S. Schloem. Zeitschr. f. Math. XXV. S. 127.)

Obiger Definition zufolge ist auch

$$\Gamma(1+x+h) = \mathrm{Lim}\ \frac{n!\,n^{x+h}}{(1+x+h)\,(2+x+h)\,\ldots\,(n+x+h)}$$

und es wird

$$\frac{\Gamma(1+x+h)}{\Gamma(1+x)} = \frac{(1+x)\,(2+x)\,\ldots\ldots.\,(n+x)}{(1+x+h)\,(2+x+h)\ldots(n+x+h)}\cdot n^{h} \qquad (n = \infty$$

Nimmt man links und rechts die reellen Logarithmen und setzt dabei $-1 < x < \infty$ und h beliebig positiv voraus, so kommt

$$L\Gamma(1+x+h) = L\Gamma(1+x) + h\left\{Ln - \sum_{0\,(r)}^{n}\frac{1}{x+1+r}\right\} +$$

$$\frac{h^2}{2}\sum_{0\,(r)}^{n}\frac{1}{(x+1+r)^2} - \frac{h^3}{3}\sum_{0\,(r)}^{n}\frac{1}{(x+1+r)^3} + \frac{h^4}{4}\sum_{0\,(r)}^{n}\frac{1}{(x+1+r)^4} - \cdots\cdots + \cdots$$

Bezeichnet man nach Gauss den Differentialquotienten von $L\Gamma(1+x)$ mit $\psi(x)$, so erhält man nach Taylor's Lehrsatz

$$L\Gamma(1+x+h) = L\Gamma(1+x) + h.\psi(x) + \frac{h^2}{2}\cdot\psi'(x) + \frac{h^3}{3}\cdot\frac{1}{2}\psi''(x) + \frac{h^4}{4}\cdot\frac{1}{3!}\psi'''(x) + \cdots$$

Die Vergleichung der rechts stehenden Reihen gibt

$$Ln - \sum_{0\,(r)}^{\infty}\frac{1}{x+1+r} = \psi(x)$$

$$\sum_{0\,(r)}^{\infty}\frac{1}{(x+1+r)^2} = \psi'(x)$$

$$\sum_{0\,(r)}^{\infty}\frac{1}{(x+1+r)^3} = -\frac{1}{2}\psi''(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Da die Reihen links für $x = 0$ in die Potenzsummen der reciproken natürchen Zahlen übergehen, so hat man zunächst

$$S_2 = \psi'(0) \qquad S_3 = -\frac{1}{2}\psi''(0)$$

$$S_4 = +\frac{1}{3!}\psi'''(0) \qquad S_5 = -\frac{1}{4!}\psi^{IV}(0)$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

Zur Bestimmung von ψ dienen die Formeln

A) $$L\Gamma(1+x) = L\sqrt{2\pi} + (x+\tfrac{1}{2})L(1+x) - x - 1 +$$

$$\sum_{1\,(r)}^{n-1}\frac{(-1)^{r-1}B_{2r-1}}{(2r-1)\,2r}\cdot\frac{1}{(1+x)^{2r-1}} + (-1)^{n-1}\varepsilon.\sigma_n\,, \quad \text{woraus}$$

$$\psi(x) = L(1+x) - \frac{1}{2(1+x)} - \frac{B_1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{B_3}{4}\cdot\frac{1}{(1+x)^4} - \frac{B_5}{6}\cdot\frac{1}{(1+x)^6} + \cdots$$

$$0 < x < \infty\;;$$

$$\text{B)}\quad \Gamma(1+x) = L\sqrt{2\pi} + (x+\tfrac{1}{2})\,Lx - x + \sum_{1\,(r)}^{n-1} \frac{(-1)^{r-1} B_{2r-1}}{(2r-1)\,2r} \cdot \frac{1}{x^{2r-1}} + (-1)^{n-1} \cdot \varepsilon\,\sigma'_n$$

woraus $\psi(x) = Lx + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2x^2} + \frac{B_3}{4x^4} - \frac{B_5}{6x^6} + \cdots, +1 < x < +\infty$;

$$\text{C)}\quad L\Gamma(1+x) = x\,Ln - L(1+\frac{x}{1}) - L(1+\frac{x}{2}) - \cdots - L(1+\frac{x}{n}) + L(1+\varepsilon_n)$$

woraus, wenn $-1 < x < +1$ vorausgesetzt wird, mittels der logarithmischen Reihe

$$L\Gamma(1+x) = -cx + \tfrac{1}{2}\,s_2 x^2 - \tfrac{1}{3}\,s_3 x^3 + \tfrac{1}{4}\,s_4 x^4 - \cdots + L(1+\varepsilon_n)$$

und für unendlich wachsende n

$$\psi(x) = -C + S_2 x - S_3 x^2 + S_4 x^3 - \ldots \qquad (-1 < x < +1)$$

folglich $C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - Ln = -\psi(0)$

resultiert.

Zu den Mitteln die Euler'sche Constante auszuwerten kommt hiemit ein neues hinzu. Man berechnet z. B. zuerst $\psi(10)$ direct aus A), erhält dann mittels der Relation

$$\Gamma(1+x) = x\,.\,\Gamma(x), \quad \text{woraus } \psi(x) = \psi(x-1) + \tfrac{1}{x} \text{ folgt,}$$

successive $\psi(9)$, $\psi(8)$, ... $\psi(2)$, $\psi(1)$, $\psi(0)$, wodurch $C = -\psi(0)$ bekannt ist.

Nimmt man in

$$K(\mu) = 1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \cdots + (k-1)^\mu - E(k,\mu) \qquad \text{[Vgl. 4)]}$$

$\mu = 0$, so wird

$$K(0) = k - 1 - E(k,0), \text{ oder da } E(k,0) = k - \tfrac{1}{2},$$

$$K(0) = -\tfrac{1}{2}$$

Wenn μ eine ganze positive und gerade Zahl $= 2n$ ist, so folgt

$$K(2n) = 1 + 2^{2n} + 3^{2n} + \cdots + (k-1)^{2n} -$$

$$\left[\frac{k^{2n+1}}{2n+1} - \frac{k^{2n}}{2} + \sum_{1\,(r)}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{2r} \binom{2n}{2r-1} B_{2r-1}\; k^{2n-2r+1}\right];$$

setzt man aber in 3)

$$x = 0, \quad q = k, \quad \mu = 2n$$

so wird

$$1 + 2^{2n} + 3^{2n} + \cdots + (k-1)^{2n} =$$

$$\frac{k^{2n+1}}{2n+1} - \frac{k^{2n}}{2} + \sum_{1\,(r)}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{2r} \binom{2n}{2r-1} B_{2r-1}\; k^{2n-2r+1},$$

folglich im Zusammenhalt mit der vorhergehenden Gleichung*)

$$K(2n) = 0$$

Setzt man $\mu = 2n+1$ voraus, so kommt

$$K(2n+1) = 1+2^{2n+1} + \cdots\cdots + (k-1)^{2n+1} -$$

$$\left[\frac{k^{2n+1}}{2n+2} - \frac{k^{2n+1}}{2} + \sum_{1}^{n}{}_{(r)} \frac{(-)^{r-1}}{2r}\binom{2n+1}{2r-1} B_{2r-1}\, k^{2n-2r+2} + (-1)^n \frac{B_{2n+1}}{2n+2}\right]$$

und, wie vorhin

$$1+2^{2n+1} + \cdots\cdots + (k-1)^{2n+1} =$$

$$\frac{k^{2n+2}}{2n+2} - \frac{k^{2n+1}}{2} + \sum_{1}^{n}{}_{(r)} \frac{(-1)^{r-1}}{2r}\binom{2n+1}{2r-1} B_{2r-1}\, k^{2n-2r+2}$$

folglich
$$K(2n+1) = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n+1}}{2n+2}$$

Stellt man nach H. Kinkelin**) den Functionsbegriff auf

13) $$B(x,\mu) \equiv E(x+k,\mu) - \frac{1}{\mu+1} + C(\mu) - \sum_{0}^{k-1}{}_{(r)} (x+r)^{\mu},$$

so ist $B(x,\mu)$ für alle endlichen x und μ endlich und bestimmt und von k unabhängig, und es ist, wenn $\mu \lesseqgtr -1$

$$B(x,\mu) = E(x+k,\mu) + K(\mu) - \sum_{0}^{k-1}{}_{(r)} (x+r)^{\mu};$$

für $\mu = -1$ aber wird

$$B(x,-1) = l(x+k) + C(-1) - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots\cdots + \frac{1}{x+k-1}\right];$$

da aber $l(x+k) = lk + l(1+\frac{x}{k})$, so kann man statt $l(x+k)$ einfach lk setzen, da beide Größen nur um ein unendlich kleines von der Ordnung $\frac{1}{k}$ differieren.

Haupteigenschaften der allgemeinen Bernoulli'schen Function B.

Setzt man in 13) das einemal $x+1$ statt x, das anderemal $k+1$ statt k, so ergibt die Vergleichung der Resultate die Beziehung

A) $B(x+1,\mu) = B(x,\mu) + x^{\mu}$, welche auch noch für $\mu = -1$ gilt.

*) Vgl. Riemann i. d. Monatsberichten d. Berl. Akad. Nov. 1859.

**) Allgemeine Theorie der harmonischen Reihen, Basel 1862.

Da ferner

$$B(1,\mu) = E(k+1,\mu) - [1^\mu + 2^\mu + \cdots\cdots + k^\mu] + K(\mu)$$

und nach 4) $1^\mu + 2^\mu + \cdots\cdots + (k-1)^\mu = E(k,\mu) + K(\mu)$

folglich B) $B(1,\mu) = 0$ ist,

so erhält man aus A), wenn man darin statt x successive 1, 2, 3, ..., x−1 setzt und die entstehenden Gleichungen addiert, die für alle ganzen positiven Werte von x geltende Formel

$$14)\qquad B(x,\mu) = 1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \cdots\cdots + (x-1)^\mu$$

Im besonderen Falle, wo μ positiv ganz ist, resultiert die von Raabe und Schloemilch untersuchte Function $\frac{1}{m}\cdot\varphi(x,m) =$

$$\frac{x^m - 1}{m} - \frac{x^{m-1} - 1}{2} + \sum_{(r)1}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{2r}\binom{m-1}{2r-1} B_{2r-1}\,[x^{m-2r} - 1] \quad m > 1.$$

Setzt man in A) $x = 0$, so wird $B(0,\mu) = -0^\mu$, d. h. $B(0,\mu) = 0$ oder $B(0,\mu) = -\infty$, je nachdem der reelle Theil von $\mu \gtrless 0$ ist.

Für $\mu = -\nu$, wo $\nu > 0$, ist

$$15)\quad B(x,-\nu) = \frac{k^{1-\nu}}{1-\nu} + K(-\nu) - \left[\frac{1}{x^\nu} + \frac{1}{(x+1)^\nu} + \cdots\cdots + \frac{1}{(x+k-1)^\nu}\right]$$

Auf diese B-Function lassen sich harmonische Reihen von der Form

$$\frac{1}{\lambda^\nu} \pm \frac{1}{(p+\lambda)^\nu} + \frac{1}{(2p+\lambda)^\nu} \pm \frac{1}{(3p+\lambda)^\nu} + \cdots\cdots \pm \frac{1}{(\overline{2k-1}\,p+\lambda)^\nu},$$

wo p und λ beliebige ganze positive Zahlen sind, zurückführen.

Wird in 15) $x = \frac{\lambda}{p}$ gesetzt, so wird

$$16)\qquad \sum_{(h)0}^{k-1} \frac{1}{(\lambda + hp)^\nu} = \frac{1}{p^\nu}\left[\frac{k^{1-\nu}}{1-\nu} + K(-\nu) - B\left(\frac{\lambda}{p}, -\nu\right)\right]$$

Lässt man hierin k in 2k übergehen, so wird

$$17)\qquad \sum_{(h)0}^{2k-1} \frac{1}{(\lambda + hp)^\nu} = \frac{1}{p^\nu}\left[\frac{(2k)^{1-\nu}}{1-\nu} + K(-\nu) - B\left(\frac{\lambda}{p}, -\nu\right)\right];$$

lässt man in 16) p in 2p übergehen, so wird

$$18)\qquad \sum_{(h)0}^{k-1} \frac{1}{(\lambda + 2hp)^\nu} = \frac{1}{(2p)^\nu}\left[\frac{k^{1-\nu}}{1-\nu} + K(-\nu) - B\left(\frac{\lambda}{2p}, -\nu\right)\right]$$

Subtrahiert man Gl. 18) von Gl. 17, so kommt 19)

$$\sum_{0\,(h)}^{2k-1}\frac{1}{(\lambda+2h+1p)^{\nu}}=\frac{1}{(2p)^{\nu}}\left[\frac{k^{1-\nu}}{1-\nu}+(2^{\nu}-1)K(-\nu)-2^{\nu}B(\frac{\lambda}{p},-\nu)+B(\frac{\lambda}{2p},-\nu)\right]$$

und subtrahiert man 19) von 18), so wird, da die resultierende Reihe auf der linken Seite beliebig weit fortgesetzt convergent ist, 20)

$$\sum_{0\,(h)}^{\infty}(-1)^{h}\frac{1}{(\lambda+hp)^{\nu}}=\frac{1}{(2p)^{\nu}}\left[(2-2^{\nu})K(-\nu)+2^{\nu}B(\frac{\lambda}{p},-\nu)-2.B(\frac{\lambda}{2p},-\nu)\right]$$

Aus Gl. 20) resultiert für $p=1$, $\lambda=1$, da $B(1,-\nu)=0$

$$1-\frac{1}{2^{\nu}}+\frac{1}{3^{\nu}}-\frac{1}{4^{\nu}}+\cdots\cdots=\frac{1}{2^{\nu}}\left[(2-2^{\nu})K(-\nu)-2.B(\tfrac{1}{2},-\nu)\right]$$

Im Zusammenhalt mit Gl. 9) folgt die Bestimmung

C) $$B(\tfrac{1}{2},-\nu)=(2-2^{\nu}).K(-\nu)$$

Aus 18), 19), 20) folgt für $p=2$, $\lambda=1$

21) $$1+\frac{1}{5^{\nu}}+\frac{1}{9^{\nu}}+\frac{1}{13^{\nu}}+\cdots\frac{1}{(4k+1)^{\nu}}=\frac{1}{4^{\nu}}\left[\frac{k^{1-\nu}}{1-\nu}+K(-\nu)-B(\tfrac{1}{4},-\nu)\right]$$

22) $$\frac{1}{3^{\nu}}+\frac{1}{7^{\nu}}+\frac{1}{11^{\nu}}+\cdots+\frac{1}{(4k+3)^{\nu}}=\frac{1}{4^{\nu}}\left[\frac{k^{1-\nu}}{1-\nu}+(4^{\nu}-2^{\nu}-1)K(-\nu)+B(\tfrac{1}{4},-\nu)\right]$$

23) $$1-\frac{1}{3^{\nu}}+\frac{1}{5^{\nu}}-\frac{1}{7^{\nu}}+\cdots=\frac{1}{4^{\nu}}\left[(2+2^{\nu}-4^{\nu})K(-\nu)-2.B(\tfrac{1}{4},-\nu)\right]$$

Aus 18) folgt noch für $p=2$, $\lambda=3$

24) $$\frac{1}{3^{\nu}}+\frac{1}{7^{\nu}}+\frac{1}{11^{\nu}}+\cdots+\frac{1}{(4k+3)^{\nu}}=\frac{1}{4^{\nu}}\left[\frac{k^{1-\nu}}{1-\nu}+K(-\nu)-B(\tfrac{3}{4},-\nu)\right]$$

Durch Vergleichung von 24) und 22) folgt die Bestimmung

D) $$B(\tfrac{1}{4},-\nu)+B(\tfrac{3}{4},-\nu)=(2+2^{\nu}-4^{\nu}).K(-\nu)$$

welche in 23) eingeführt gibt

25) $$1-\frac{1}{3^{\nu}}+\frac{1}{5^{\nu}}-\frac{1}{7^{\nu}}+\cdots=\frac{1}{4^{\nu}}\left[B(\tfrac{3}{4},-\nu)-B(\tfrac{1}{4},-\nu)\right]$$

Entwicklung der B-Function nach einer Fourier'schen Reihe.

Setzt man nach H. Kinkelin*)

$$U=\int_0^1 B(a+x,\mu)\,dx,\quad V=\int_0^1 B(x,\mu)\sin\alpha x\,dx,\quad W=\int_0^1 B(x,\mu)\cos\alpha x\,dx$$

*) l. c.

wo a eine positive Zahl inclus. 0 und α ein Multiplum von 2π bezeichnet, so hat man, um U auszuwerten, zunächst den Wert von

$$\int_0^1 E(a+k+x,\mu)\,dx$$

anzugeben.

Aus der Definition der Function E [S. 8] folgt

$$D_x\,E(x+k,\mu)=\mu\,.\,E(x+k,\mu-1), \tag{26}$$

wodurch obiges Integral

$$=\frac{1}{\mu+1}\Big[E(a+k+1,\mu+1)-E(a+k,\mu+1)\Big]=\frac{(a+k)^{\mu+1}}{\mu+1}$$

wird, wie aus den Werten von $B(a+1,\mu+1)$, $B(a,\mu+1)$ und aus der Relation $B(a+1,\mu+1)=B(a,\mu+1)+a^{\mu+1}$ zu ersehen ist.

Nimmt man ferner das Integral über die Summe, so kommt sofort

$$\int_0^1\sum_{0\,(r)}^{k-1}(a+x+r)^{\mu}\,dx=\int_0^k(a+x)^{\mu}\,dx=\frac{(a+k)^{\mu+1}-a^{\mu+1}}{\mu+1}$$

und folglich, da noch $\int_0^1 K(\mu)\,dx=K(\mu)$ ist,

$$U=\frac{a^{\mu+1}}{\mu+1}+K(\mu) \tag{27}$$

Es ist ferner, da $\int_0^1 K(\mu)\binom{\sin}{\cos}\alpha x\,dx=0$,

$$V=\int_0^1 E(x+k,\mu)\sin\alpha x\,dx-\int_0^k x^{\mu}\sin\alpha x\,dx.$$

Durch factorenweise Integration*) folgt mit Rücksicht auf 26)

$$V=\frac{\mu}{\alpha}\Big[\int_0^1 E(x+k,\mu-1)\,.\cos\alpha x\,.\,dx-\int_0^k x^{\mu-1}\cos\alpha x\,.\,dx\Big]$$

und ebenso

$$W=-\frac{\mu}{\alpha}\Big[\int_0^1 E(x+k,\mu-1)\sin\alpha x\,.\,dx-\int_0^k x^{\mu-1}\sin\alpha x\,.\,dx\Big].$$

*) In Betreff des Terminus s. Schloem. Zeitschr. f. Math. XXIV. Hist.-lit. Abth. S. 142.

Führt man die factorenweise Integration q^{mal} aus, bis $-1 < \mu - q < 0$ wird, so findet man

$$\int_0^1 E(x+k,\mu-q)\sin\alpha x\,.\,dx = -\frac{k^{\mu-q}}{\alpha}\cos\alpha x\,\Big|_0^1 + \frac{\mu-q}{\alpha}\int_0^1 E(x+k,\mu-q-1)\cos\alpha x\,.\,dx = 0$$

und ebenso

$$\int_0^1 E(x+k,\mu-q)\cos\alpha x\,.\,dx = -\frac{\mu-q}{\alpha}\int_0^1 E(x+k,\mu-q-1)\sin\alpha x\,.\,dx = 0.$$

Beachtet man noch die Integral-Werte

$$\int_0^k x^{\mu-q}\sin\alpha x\,.\,dx = \frac{\Gamma(\mu-q+1)}{\alpha^{\mu-q+1}}\,.\,\sin\frac{\mu-q+1}{2}\pi$$

$$\int_0^k x^{\mu-q}\cos\alpha x\,.\,dx = \frac{\Gamma(\mu-q+1)}{\alpha^{\mu-q+1}}\,.\,\cos\frac{\mu-q+1}{2}\pi\,,$$

so erhält man die für jedes $\mu > -1$ giltigen Formeln*)

$$\left.\begin{aligned} V &= -\frac{\Gamma(1+\mu)}{\alpha^{1+\mu}}\,.\,\sin\tfrac{1}{2}(1+\mu)\pi \\ W &= -\frac{\Gamma(1+\mu)}{\alpha^{1+\mu}}\,.\,\cos\tfrac{1}{2}(1+\mu)\pi \end{aligned}\right\}$$

Gibt man jetzt der Gl. 1) durch Entwicklung des cosinus die Form

$$F(a)+F(a+h)+\cdots+F(a+qh) = \alpha_0 + 2\sum_{(r)\,1}^{n}\alpha_r\cos\frac{2\pi ra}{h} + 2\sum_{(r)\,1}^{n}\beta_r\sin\frac{2\pi ra}{h}$$

wo α_0, α_r β_r selbstverständliche Abkürzungen sind, und nimmt hierin $F(a) = B(x,\mu)$, $h = 1$, $q = 0$, so wird durch Einführung der gefundenen Integral-Werte

$$\text{IV)}\quad B(x,\mu) = K(\mu) - \frac{2\Gamma(1+\mu)}{(2\pi)^{1+\mu}}\left[\cos\tfrac{1}{2}\mu\pi\sum_{(r)\,1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi rx}{r^{1+\mu}} - \sin\tfrac{1}{2}\mu\pi\sum_{(r)\,1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi rx}{r^{1+\mu}}\right]$$

für jeden Wert von x zwischen den Grenzen 0 und +1 und für jedes $\mu > -1$. [Vgl. die Bemerkungen zu Gl. 1)].

Aus dieser Gleichung resultieren für die Bernoulli'schen Functionen mit ganzen positiven Exponenten die unendlichen Reihen**)

$$\text{IVa)}\quad \varphi(x,2n+1) = (-1)^{n+1}\frac{2\,\Gamma(2n+2)}{(2\pi)^{2n+1}}\left[\frac{\sin 2\pi x}{1^{2n+1}} + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}} + \cdots\right]$$

*) Ohm, Syst. d. Math. IX. § 24; Schloem., Comp. d. höh. An. II. S. 270.

**) Vgl. Schloem. Comp. d. höh. An. II.

$$0 \leqq x \leqq 1$$

$$\varphi(x,2n) = (-)^n B_{2n-1} + (-1)^{n-1} \frac{2\Gamma(2n+1)}{(2\pi)^{2n}} \left[\frac{\cos 2\pi x}{1^{2n}} + \frac{\cos 4\pi x}{2^{2n}} + \cdots\right]$$

$$0 \leqq x \leqq 1$$

Nimmt man $x < \frac{1}{n}$ und setzt successive $x,\ x+\frac{1}{n}, x+\frac{2}{n}, \ldots\ldots,$ $x+\frac{n-1}{n}$ statt x, so erhält man durch Summation auf der rechten Seite

$$\sum_{0(r)}^{n-1} B(x+\frac{r}{n},\mu) = n\,K(\mu) - \frac{2\,\Gamma(1+\mu)}{(2\pi)^{1+\mu}\,n^{\mu}}$$

$$\cdot\left\{\sin\tfrac{1}{2}(1+\mu)\pi \sum_{1(r)}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nrx}{r^{1+\mu}} + \cos\tfrac{1}{2}(1+\mu)\pi \sum_{1(r)}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nrx}{r^{1+\mu}}\right\}$$

oder mit Hilfe von IV), wenn darin nx statt x gesetzt wird

$$\text{V)}\quad \sum_{0(r)}^{n-1} B(x+\frac{r}{n},\mu) = n^{-\mu}\,B(nx,\mu) + (n-n)^{-\mu}\,.\ K(\mu).$$

Dieser Gleichung liegt zunächst die Voraussetzung $\mu > -1$ zugrunde; indessen lässt sich dieselbe mittels 15) auch für $\mu < -1$ (ebenso wie für $-1 < \mu < 0$) direct bestätigen.

Ebenso lässt sich für $\mu = -1$ die Gleichung

$$\sum_{0(r)}^{n-1} B(x+\frac{r}{n}, -1) = n\,B(nx,-1) \quad \text{verificieren.}$$

Obschon ferner Gl. V) nur für positive x, die $<\frac{1}{n}$, abgeleitet wurde, so gilt sie doch für alle reellen x, indem sich zeigen lässt, dass, wenn sie für ein bestimmtes x gilt, sie auch gilt für ein x^1, welches $= x + \frac{1}{n}$.

Im speciellen Falle, wenn $n = 2, x = \frac{1}{2}$ ist, resultieren aus V), da $B(1,\mu) = 0$, $B(1,-1) = 0$, die Bestimmungen

$$B(\tfrac{1}{2},\mu) = (2-2^{-\mu})\,K(\mu)$$

$$B(\tfrac{1}{2}, -1) = 0$$

von denen die erstere für jeden von der Einheit verschiedenen Wert von μ gilt.

Aus IV) folgt, wenn $x = \frac{1}{2}$ gesetzt wird,

$$B(\tfrac{1}{2},\mu) = K(\mu) + \frac{2\Gamma(1+\mu)}{(2\pi)^{1+\mu}} \cos\tfrac{1}{2}(1+\mu)\pi \left[\frac{1}{1^{1+\mu}} - \frac{1}{2^{1+\mu}} + \frac{1}{3^{1+\mu}} - \cdots + \cdots\right]$$

welche Gleichung zufolge der Bestimmungen

$$B(\tfrac{1}{2},\mu) = (2-2^{-\mu})\ K(\mu)$$

und

$$\frac{1}{1^{1+\mu}} - \frac{1}{2^{1+\mu}} + \frac{1}{3^{1+\mu}} - \frac{1}{4^{1+\mu}} + \cdots = (1-2^{-\mu}) . K(-1-\mu) \quad \text{[Vgl. 9)]}$$

äquivalent ist mit

$$\frac{K(\mu)}{K(-1-\mu)} = \frac{2\Gamma(1+\mu)}{(2\pi)^{1+\mu}} \cos\tfrac{1}{2}(1+\mu)\pi \qquad \text{für } \mu > -1$$

oder, wenn μ in $\mu-1$ umgesetzt wird, mit

$$\text{VI)} \qquad \frac{K(\mu-1)}{K(-\mu)} = \frac{2\Gamma(\mu)}{(2\pi)^{\mu}} \cos\tfrac{1}{2}\mu\pi \qquad \text{für jedes } \mu > 0.$$

Die Beschränkung, dass $\mu > 0$ sein müsse, kann wegfallen. Denn ist $\mu = -\nu$, wo ν eine positive Zahl bezeichnet, so wird zufolge der Eigenschaft der Γ-Function

$$\Gamma(x) . \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

$$\frac{2\Gamma(-\nu)}{(2\pi)^{-\nu}} \cos -\tfrac{1}{2}\nu\pi = \frac{(2\pi)^{1+\nu}}{2\Gamma(1+\nu)\cos\tfrac{1}{2}(1+\nu)\pi} = \frac{K(-1-\nu)}{K(\nu)}$$

Somit gilt VI) auch für negative Werte von μ. — Endlich wird sie auch erfüllt, wenn $\mu = -1$ ist, wie die Substitution der betreffenden Werte zeigt.

Die für jedes positive μ giltige Gleichung VI) stellt, wenn $0 < \mu < 1$ ist, eine Relation dar für zwei K, deren Argumente beide negativ sind und sich zu -1 ergänzen. Zur Anlegung einer Tabelle der Werte von $K(\mu)$ hat man demnach nur jene für die Argumente μ von $-\frac{1}{2}$ bis $-\infty$ zu berechnen.

Gang der K-Function für reelle μ von $-\infty$ bis $+\infty$.

Solange $\mu < -1$, kann $K(\mu)$ dargestellt werden durch die unendliche Reihe

$$\frac{1}{1^{-\mu}} + \frac{1}{2^{-\mu}} + \frac{1}{3^{-\mu}} + \cdots\cdots$$

welche beständig positiv bleibt und beim Zunehmen des μ von $-\infty$ bis -1 zunimmt von $+1$ bis $+\infty$.

An der Grenze $\mu = -1$ springt $K(\mu)$ von $+\infty$ zu $-\infty$ über. Solange $-1 < \mu < 0$, kann $K(\mu)$ dargestellt werden [9)] durch

$$-\frac{1}{2^{1+\mu}-1}\left[1 - \frac{1}{2^{-\mu}} + \frac{1}{3^{-\mu}} - \frac{1}{4^{-\mu}} + \cdots\cdots\right]$$

und bleibt negativ.

Von $\mu=-1$ bis $\mu=0$ wächst $K(\mu)$ stetig von $-\infty$ bis $-\frac{1}{2}$. Von $\mu=0$ bis $\mu=2$ ist $K(\mu)$ zufolge VI) negativ und verschwindet bei $\mu=2$; von $\mu=2$ bis $\mu=4$ ist $K(\mu)$ positiv und bei $\mu=4$ wieder Null. Ferner ist $K(5)=-\frac{B_5}{6}$, $K(6)=0$ u. s. f.

Zwischen den Puncten $\mu=0$ und $\mu=2$ hat also die Function $K(\mu)$ ein Minimum, zwischen $\mu=2$ und $\mu=4$ ein Maximum und zwar wachsen mit wachsenden μ die Minima und Maxima selbst ins unendliche.

Die Zahlen $\mu=2, 4, 6, \ldots.$ sind demnach die Wurzeln der Gleichung

$$K(\mu)=0$$

und zwar einfache Wurzeln derselben; denn, da

$$K(\mu)=-2.(2\pi)^{-1-\mu}\,\Gamma(1+\mu).K(-1-\mu)\sin\tfrac{1}{2}\mu\pi=Q.\sin\tfrac{1}{2}\mu\pi,$$

so ist
$$D_\mu K(\mu)=\frac{\pi}{2}Q\cos\tfrac{1}{2}\mu\pi+\sin\tfrac{1}{2}\mu\pi.D_\mu Q,$$

wo für $\mu=2n$ das erste Glied rechts von Null verschieden, das zweite $=0$ ist; somit kann $D_\mu K(\mu)$ für $\mu=2n$ nicht verschwinden.

Ebensowenig ist $\mu=-1$ eine mehrfache Wurzel der Gleichung $\frac{1}{K(\mu)}=0$ und folglich darf gesetzt werden

$$K(\mu)=(\mu-2)(\mu-4)(\mu-6)\cdots\cdots(\mu-2k).\frac{\chi(\mu)}{1+\mu}$$

worin die Function $\chi(\mu)$ für keinen andern reellen Wert von μ Null und für keinen andern endlichen Wert von μ unendlich wird.

Zur Berechnung von $K(\mu)$ für negative μ kann auch das folgende Verfahren dienen. [Vgl. 8) S. 12.]

Setzt man in [3) S. 8]

$$x^\mu+(x+1)^\mu+(x+2)^\mu+\cdots\cdots+(x+k-1)^\mu=E(x+k,\mu)-E(x,\mu)+R_n$$

r statt x, rk statt k, $-\mu$ statt μ und lässt r eine ganze positive Zahl bedeuten, so kommt

$$\frac{1}{r^\mu}+\frac{1}{(r+1)^\mu}+\frac{1}{(r+2)^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{(r+rk-1)^\mu}=E(r+rk,-\mu)-E(r,-\mu)+R_n$$

Setzt man in

$$1^\mu+2^\mu+3^\mu+\cdots\cdots+(k-1)^\mu=E(k,\mu)+K(\mu) \qquad [4)\ S.\ 9]$$

$r+rk$ statt k und $-\mu$ statt μ, so kommt

$$1+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\cdots\cdots+\frac{1}{(r+rk-1)^\mu}=E(r+rk,-\mu)+K(-\mu)$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der vorhergehenden, so kommt durch Substitution des Ausdruckes von $E(r,-\mu)$

$$K(-\mu) = \frac{1}{1^\mu} + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \cdots\cdots + \frac{1}{(r-1)^\mu} + \frac{1}{2r^\mu} - \frac{r^{1-\mu}}{1-\mu}$$

$$+ \frac{1}{r^{1+\mu}} \Big[\mu \frac{B_1}{2!} - \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{r^2} \frac{B_3}{4!} + \frac{\mu(\mu+1)\,..\,(\mu+4)}{r^4} \frac{B_5}{6!} -$$

$$\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+6)}{r^6} \frac{B_7}{8!} + \cdots - \cdots \Big] + R_n$$

wo der Rest jeweils kleiner ist als das zuletzt gerechnete Glied der in der Klammer enthaltenen halbconvergenten Reihe.

Im Falle $\mu = -1$ ist $K(-\mu)$ durch $C(-1)$ und $\frac{r^{1-\mu}}{1-\mu}$ durch lr zu ersetzen. [Vgl. 5) S. 10, 11].

Nach obiger Formel wurde $K(\mu)$ für das Intervall $\mu = 0$ bis $\mu = -1$ und zwar für $r = 4$ und je einmal für $r = 5$ und $r = 10$ berechnet.

Für das engere Intervall von $\mu = -0{,}6$ bis $\mu = -0{,}9$ wurde $K(\mu)$ aus der Relation

$$\frac{K(\mu-1)}{K(-\mu)} = \frac{2\Gamma(\mu)}{(2\pi)^\mu} \cos \tfrac{1}{2}\mu\pi$$

mit Hilfe der Tafel von Legendre für die Brigg'schen Logarithmen von $\Gamma(\mu)$ berechnet.*)

Für $\mu = -\frac{1}{2}$ wurde direct durch Berechnung der Quadratwurzeln bis $r = 10$ der genaue Wert

$$K(-\tfrac{1}{2}) = -1{,}460354509$$

gefunden. — Sodann ergeben sich aus den Werten von $K(\mu)$ jene von $C(\mu)$ durch die Relation

$$K(\mu) = C(\mu) - \frac{1}{1+\mu}$$

Es möge hier die folgende Tafel der Werte von $K(\mu)$ Platz finden.

μ	$K(\mu)$	$C(\mu)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
			+	—	—	+
—0,0	—0,500000000	0,50000000	807359			
—0,1	—0,603037520	0,50807359	800548	6811	427	
—0,2	—0,733920925	0,51607907	793310	7238	401	26
—0,3	—0,904559259	0,52401217	785671	7639	371	30
—0,4	—1,134797785	0,53186888	777661	8010	345	26
—0,5	—1,460354509	0,53964549	769306	8355	317	28
—0,6	—1,952661450	0,54733855	760634	8672	293	24
—0,7	—2,778388447	0,55404489	751669	8965	265	28
—0,8	—4,437538417	0,56246158	742439	9230	240	25
—0,9	—9,430114027	0,56988597	732969	9470		
—1,0	∞	0,57721566				

Die zwischenliegenden Werte sind daraus durch Interpolation bestimmbar.

*) Traité des fonct. ellipt. tome II. — Einige Werte aus dieser Tafel finden sich in Schloem. Comp. d. höh. An. II.

Setzt man die Berechnung von $K(\mu)$ bis zum Argumente $-1{,}9$ fort, so erhält man mittels der Relation $\Gamma(1+\frac{r}{q})=\frac{r}{q}\cdot\Gamma(\frac{r}{q})$ die Reihe der Werte von $K(\mu)$ für das Intervall $\mu=0$ bis $\mu=0{,}9$, wozu man sich auch unter Zuhilfenahme des Gauss'schen Theorems der Formel

$$\frac{K(\lambda-\frac{1}{2})}{K(-\lambda-\frac{1}{2})}=\frac{2\sqrt{2}}{(8\pi)^{\lambda}}\cdot\frac{\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(\lambda)}\cos(2\lambda+1)\frac{\pi}{4}\quad \lambda>0,$$

welche speciell für $\lambda=1$

$K(0{,}5)=-\dfrac{K(-1{,}5)}{4\pi}$ gibt, vortheilhaft bedienen kann.*)

* * *

Wenn $\mu=-\nu$ ist, wobei $\nu>0$, so erhält man die Gleichung

$$B(x,-\nu)=K(-\nu)-\frac{2\Gamma(1-\nu)}{(2\pi)^{1-\nu}}\cos\tfrac{1}{2}\nu\pi\sum_{1\,(r)}^{\infty}\frac{\sin 2\pi rx}{r^{1-\nu}}-$$
$$\frac{2\Gamma(1-\nu)}{(2\pi)^{1-\nu}}\sin\tfrac{1}{2}\nu\pi\sum_{1\,(r)}^{\infty}\frac{\cos 2\pi rx}{r^{1-\nu}};$$

setzt man hierin $1-x$ statt x, so folgt

$$B(1-x,-\nu)=K(-\nu)+\frac{2\Gamma(1-\nu)}{(2\pi)^{1-\nu}}\cos\tfrac{1}{2}\nu\pi\sum_{1\,(r)}^{\infty}\frac{\sin 2\pi rx}{r^{1-\nu}}-$$
$$0<\nu<1,\qquad 0<x<1\qquad \frac{2\Gamma(1-\nu)}{(2\pi)^{1-\nu}}\sin\tfrac{1}{2}\nu\pi\sum_{1\,(r)}^{\infty}\frac{\cos 2\pi rx}{r^{1-\nu}}$$

Hieraus folgt mittels der Relation $\Gamma(1-\nu)\cdot\Gamma(\nu)=\dfrac{\pi}{\sin\nu\pi}$

$$\text{VII)}\begin{cases}\text{a)}\ B(x,-\nu)-B(1-x,-\nu)=-\dfrac{(2\pi)^{\nu}}{\Gamma(\nu)\sin\frac{1}{2}\nu\pi}\left[\dfrac{\sin 2\pi x}{1^{1-\nu}}+\dfrac{\sin 4\pi x}{2^{1-\nu}}+\cdots\right]\\[2ex] \text{b)}\ B(x,-\nu)+B(1-x,-\nu)-2K(-\nu)=-\dfrac{(2\pi)^{\nu}}{\Gamma(\nu)\cos\frac{1}{2}\nu\pi}\left[\dfrac{\cos 2\pi x}{1^{1-\nu}}+\right.\\[2ex] \qquad\qquad\left.\dfrac{\cos 4\pi x}{2^{1-\nu}}+\cdots\right]\end{cases}$$

Nimmt man hierin $x=\frac{1}{2}$, so gibt die erstere Gleichung die Identität $0=0$, und die letztere die Bestimmung

*) Eine Tafel der Werte von $\Gamma(1+\frac{r}{12})$ findet sich in Schloem. Übungsbuch für höhere Anal. II.

$$2B(\tfrac{1}{2},-\nu)-2K(-\nu)=\frac{(2\pi)^{\nu}}{\Gamma(\nu)\cos\frac{1}{2}\nu\pi}\left[1-\frac{1}{2^{1-\nu}}+\frac{1}{3^{1-\nu}}-\frac{1}{4^{1-\nu}}+\dots\right]$$

welche zufolge der Gl. C) [S. 22] und der Gl. 9) [S. 12] äquivalent ist mit

$$1-\frac{1}{2^{\nu}}+\frac{1}{3^{\nu}}-\frac{1}{4^{\nu}}+\dots\dots=\frac{2-2^{\nu}}{2^{\nu}-1}\cdot\frac{\pi^{\nu}}{2\Gamma(\nu)\cos\frac{1}{2}\nu\pi}$$

$$\left[1-\frac{1}{2^{1-\nu}}+\frac{1}{3^{1-\nu}}-\frac{1}{4^{1-\nu}}+\dots\dots\right]$$

Bezeichnet man die links stehende Reihe mit $f(\nu)$, so hat man für $f(\nu)$ und die complementäre Function $f(1-\nu)$ die Relation

$$\frac{f(1-\nu)}{f(\nu)}=\frac{2^{\nu}-1}{2^{1-\nu}-1}\cdot\frac{2\Gamma(\nu)\cos\frac{1}{2}\nu\pi}{(2\pi)^{\nu}}\qquad 0<\nu<1$$

welche von Schloemilch auf einem andern Wege entdeckt wurde.*)

Aus VIIa) folgt für $x=\frac{1}{4}$

$$1-\frac{1}{3^{1-\nu}}+\frac{1}{5^{1-\nu}}-\frac{1}{7^{1-\nu}}+\dots=\frac{B(\frac{3}{4},-\nu)-B(\frac{1}{4},-\nu)}{(2\pi)^{\nu}}\cdot\Gamma(\nu)\sin\tfrac{1}{2}\nu\pi$$

oder mit Rücksicht auf 25), wenn unter der Annahme $\nu<1$ ν in $1-\nu$ umgesetzt wird,

$$\frac{B(\frac{3}{4},-\nu)-B(\frac{1}{4},-\nu)}{B(\frac{3}{4},\nu-1)-B(\frac{1}{4},\nu-1)}=\frac{(2\pi)^{\nu}}{4^{1-\nu}\Gamma(\nu)\sin\frac{1}{2}\nu\pi}$$

oder ebenfalls zufolge 25)

$$1-\frac{1}{3^{\nu}}+\frac{1}{5^{\nu}}-\frac{1}{7^{\nu}}+\dots=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{\Gamma(\nu)\sin\frac{1}{2}\nu\pi}$$

$$\left[1-\frac{1}{3^{1-\nu}}+\frac{1}{5^{1-\nu}}-\frac{1}{7^{1-\nu}}+\dots\right]$$

und dies ist die zuerst von Malmsten aufgestellte Relation**)

$$\frac{\varphi(1-\nu)}{\varphi(\nu)}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\nu}\cdot\Gamma(\nu)\sin\tfrac{1}{2}\nu\pi\qquad 0<\nu<1.$$

Auf leicht ersichtliche Weise erhält man noch

$$\tan\tfrac{1}{2}\nu\pi=\frac{1}{2^{2\nu-1}}\cdot\frac{2^{\nu}-1}{2^{1-\nu}-1}\cdot\frac{f(\nu)}{f(1-\nu)}\cdot\frac{\varphi(1-\nu)}{\varphi(\nu)}$$

---

*) Vgl. Zeitschr. f. Math. Jg. XXIII. — **) Jg. III. XXIII.

Lässt man in Gl. VIIa) x successive die Werte $\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \ldots, \frac{2^{n-1}-1}{2^n}$ annehmen, addiert dann alle ungeradstelligen Gleichungen und subtrahiert alle geradstelligen und ordnet nach Numern, so kommt

$$B(\frac{1}{2^n},-\nu) - B(\frac{3}{2^n},-\nu) + B(\frac{5}{2^n},-\nu) - \cdots + B(\frac{2^n-3}{2^n},-\nu) - B(\frac{2^n-1}{2^n},-\nu)$$

$$= -\frac{(2\pi)^\nu}{\Gamma(\nu)\sin\frac{1}{2}\nu\pi}\sum_{1(\lambda)}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{1-\nu}}\left[\sin\frac{\lambda\pi}{c} - \sin\frac{3\lambda\pi}{c} + \sin\frac{5\lambda\pi}{c} - \cdots\cdots - \sin\frac{(2^{n-1}-1)\lambda\pi}{c}\right]$$

worin der Kürze halber c statt 2^{n-1} geschrieben wurde.

Die Summe des Klammerinhaltes rechter Hand ist, wie man leicht bewahrheitet, $= \frac{\sin\lambda\pi}{2\cos\frac{\lambda\pi}{2^{n-1}}}$

Dieser Ausdruck ist aber Null für alle λ, ausgenommen, wenn $\lambda = (2m+1)\,2^{n-2} (m = 0,1,2,\ldots)$, in welchem Falle er die Form $\frac{0}{0}$ annimmt; der wahre Wert ist diesfalls

$$\frac{2^{n-2}\cos(2m+1)\,2^{n-2}\pi}{\sin(m+\frac{1}{2})\pi} = (-1)^m\, 2^{n-2}$$

Demzufolge verschwinden in der Summe rechts alle Glieder, ausgenommen jene, in denen $\lambda = (2m+1)\,2^{n-2}$, und dieselbe geht durch Vereinfachung über in $2^{\nu(n-2)} . \varphi(1-\nu)$

oder zufolge der oben angegebenen Relation zwischen den Functionen $\varphi(\nu)$ und $\varphi(1-\nu)$ in

$$\frac{2^{\nu(n-1)}}{\pi^\nu}\Gamma(\nu)\sin\tfrac{1}{2}\nu\pi \,.\, \varphi(\nu),$$

so dass schließlich die von Kinkelin entdeckte Relation

$$\text{E)}\ B(\frac{1}{2^n},-\nu) - B(\frac{3}{2^n},-\nu) + B(\frac{5}{2^n},-\nu) - \cdots - B(\frac{2^n-1}{2^n},-\nu) = -2^{n\nu} . \varphi(\nu)$$

resultiert. *)

Substituiert man in V) $\frac{1}{2^n}$ für x und 2^n für n, so kommt für $\mu = -\nu$ mit Rücksicht auf $B(1,-\nu) = 0$

*) Mittheilungen d. naturf. Ges. in Bern. Nr. 419.

$$B(\frac{1}{2^n},-\nu)+B(\frac{3}{2^n},-\nu)+\cdots+B(\frac{2^n-1}{2^n},-\nu)+B(\frac{1}{2^{n-1}},-\nu)+$$

$$B(\frac{2}{2^{n-1}},-\nu)+\cdots\cdot+B(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}},-\nu)=(2^n-2^{n\nu})\ K(-\nu)$$

Substituiert man aber in V) $\frac{1}{2^{n-1}}$ für x und 2^{n-1} für n, so wird

$$B(\frac{1}{2^{n-1}},-\nu)+B(\frac{2}{2^{n-1}},-\nu)+B(\frac{3}{2^{n-1}},-\nu)+\cdots+B(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}},-\nu)$$

$$=[2^{n-1}-2^{(n-1)\nu}]\ K(-\nu)$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$B(\frac{1}{2^n},-\nu)+B(\frac{3}{2^n},-\nu)+\cdots+B(\frac{2^n-1}{2^n},-\nu)=[2^{n-1}+2^{(n-1)\nu}-2^{n\nu}]\,K(-\nu).$$

Wird diese Relation mit der obigen E) verbunden, so folgt

$$\text{F)}\ B(\frac{1}{2^n},-\nu)+B(\frac{5}{2^n},-\nu)+B(\frac{9}{2^n},-\nu)+\cdots\cdot+B(\frac{2^n-3}{2^n},-\nu)$$

$$=-2^{n\nu-1}.\,\varphi(\nu)+\tfrac{1}{2}\,[2^{n-1}+2^{(n-1)\nu}-2^{n\nu}]\,K(-\nu).$$

Anmerkungen.

Seite 6, Z. 8 v. u. lies $\rho \gtrless 0$.

Seite 13 Z. 8 v. o. Vgl. Riemann i. d. Monatsberichten d. Berl. Akad. Nov. 1859, dessen Function $\zeta(-\mu)$ übereinstimmt mit $K(\mu)$.

Seite 16 füge zu Gl. II) hinzu: Z. B. ist für $p=1000$ $s_1=7{,}485471$ und für $p=1000000$ $s_1=14{,}392727$, woraus ersichtlich wird, mit welcher Langsamkeit S_1 divergiert.

Schulnachrichten

vom

f. b. Privat-Gymnasium

im

Seminarium Vincentinum

in

BRIXEN.

1881.

I. Personalstand des Lehrkörpers und Fächervertheilung.

Abkürzungen: D. = Deutsch; GH. = Geographie und Geschichte; Gr. = Griechisch; L. = Latein; M. = Mathematik; Nk. = Naturkunde; R. = Religionslehre.

1. Herr Alois Spielmann, Dr. phil., Director, L. 6.
2. — Ferdinand Spielmann, Dr. phil., Professor, Bibliothekar, Turnlehrer, D. 1., L. 1., Gr. 7.
3. — David Mark, Prof., Exhortator, Musikdirector, R. 1—7.
4. — Jakob Mairhofer, Prof., L. 5. 7., Gr. 5.
5. — Josef Mischi, Prof., L. 3., Gr. 3. 6.
6. — Josef Braun, Prof., Custos des phys. Cab., M. 3. 4. 5., Nk. 3. 4.
7. — Andreas Wolf, Prof., M. 1. 2. 6. 7., Nk. 7.
8. — Josef Schuchter, Prof., D. 2. 4. 7., GH. 2., Prop. 7.
9. — Franz Oettl, Prof., L. 2. 4., Gr. 4.
10. — Ludwig Riescher, Prof., Custos der Daktyliothek u. Münzensammlung, GH. 1. 3. 4. 5. 7.
11. — Theodor Hagen, Lehramtscandidat, Supplent, D. 3. 6., GH. 6.
12. — Hartmann Falbesoner, Lehramtscandidat, Supplent, Custos des natur-histor. Cab., D. 5., Nk. 1. 2. 5. 6.

Präfecten: Herr Josef Baur, Hauspräfect.
— Michael Stadler.
— Cassian Haid.
— Alois Eberhart, Dr. phil.
— Johann Höllwart.
— Alois Sopplà.

(Alle Herren sind Weltpriester der Diözese Brixen.)

II. und III. Lehrstoff und Lehrbücher.

I. Classe.

Ordinarius Herr **Dr. Ferd. Spielmann.**

R. 2 St. Katholische Glaubens- und Sittenlehre (M. Pichler).

D. 4 St. Flexionslehre, Syntax des einfachen und zusammengesetzten Satzes (Bauer). Orthographie (Regeln und W.-Verz.); Lectüre aus Pfannerer I., Declamationen; schriftliche Arbeiten nach Vorschrift.

L. 8 St. Regelmäßige Formenlehre (Schultz); Übungsbuch Hauler I., wöch. Compositionen.

G. 3 St. Die Grundbegriffe der astron. und phys. Geographie, Kartenlesen; Übersicht über die Erdtheile (Kozenn-Jarz).

M. 3 St. Die vier Species mit benannten und unbenannten, ganzen und gebrochenen Zahlen, Theilbarkeit. Geometrische Anschauungslehre des Punktes, der Geraden, des Winkels, des Dreieckes (Mocnik).

Ng. 2 St. Die Säugethiere und die wirbellosen Thiere (Pokorny).

II. Classe.

Ordinarius Herr **Fr. Oettl.**

R. 2 St. Die Liturgik der kathol. Kirche (Hafenrichter).

D. 4 St. Ausführliche Lehre vom zusammengesetzten Satze, Wortbildung (Bauer); Orthographie (Regeln und W.-Verz.); Leseübungen und Vortrag von Gedichten (Pfannerer II.); zu vierzehn Tagen eine Hausarbeit.

L. 8 St. Wiederholung und Vervollständigung der Formenlehre; das Wichtigste der Wortbildung und der Syntax (Schultz); Übungen nach Hauler II. Schulpensa.

GH. 4 St. Specielle Geographie von Asien, Afrika, Süd- und West-Europa (Kozenn-Jarz S. 1—129). Geschichte des Alterthums (Gindely).

M. 3 St. Verhältnisse, Proportionen, Regel de tri mit ihren Anwendungen. Congruenz der Figuren, Flächenberechnung, Pythagoreischer Lehrsatz, Verwandlung, Theilung, Ähnlichkeit der Figuren (Mocnik).

Ng. 2 St. I. S. Vögel, Amphibien, Fische. II. S. Botanik (Pokorny).

III. Classe.

Ordinarius Herr **Josef Mischi.**

R. 2. St. Geschichte der göttl. Offenbarung des alten Bundes und Geographie von Palästina (Fischer).
D. 3 St. Wiederholung und Vervollständigung der Wort- und Satzlehre (Heyse); Lectüre (Pfannerer III.). Inhaltsangabe der Lesestücke. Ortographie und schriftliche Arbeiten nach Vorschrift.
L. 6 St. Casuslehre (Schultz); Übersetzungen aus Haulers Aufgaben I. Lectüre: Cornelius Nepos 1—15. Wöch. Schulpensa.
Gr. 5 St. Formenlehre (Curtius bis § 301); Übungen aus Hintner 2. Aufl. Schulpensa.
GH. 3 St. Geographie von Mittel-, Ost- und Nord-Europa, Amerika, Australien (Kozenn-Vogel). Geschichte der römischen Kaiserzeit und des Mittelalters (Gindely).
M. 3 St. Die 4 Grundoperationen mit algebraischen Ausdrücken, Potenzieren, Radicieren, Combinationslehre. Geometrische Anschauungslehre vom Kreis und den ein- und umgeschriebenen Figuren; Umfangs- und Flächenberechnung; Ellipse, Hyperbel, Parabel (Močnik).
Ng. I. S. 2 St. Mineralogie (Pokorny).
Nl. II. S. 2 St. Allgemeines, Schwere, Wärme, Molecularkräfte, chemische Erscheinungen (Krist).

IV. Classe.

Ordinarius Herr **Josef Braun.**

R. 2 St. Geschichte der Offenbarung des neuen Bundes (Fischer).
D. 3 St. Lectüre (Pfannerer IV.). Im Anschluss daran Metrik und Stilistik. Geschäftsaufsätze. Schriftliche Arbeiten zu 14 Tagen.
L. 6 St. Tempus- und Moduslehre, Infinitiv, Participien, Gerundium, Prosodik (Schultz); Lectüre: Caesar de b. gall. I. VII., 1—75 (Hoffmann); Ovid: Metam. VI. 146—312, fast. II. 687—710 (Grysar). Schulpensa.
Gr. 4 St. Verba auf $\mu\iota$, unregelmäßige Verba (Curtius); Übersetzungen aus Hintner 2. Aufl. Schulpensa.
GH. 4 St. Die Neuzeit (Gindely); Geographie (Kozenn-Vogel) und öterr. Vaterlandskunde nach Hannak.
M. 3 St. Arithmetik: Zusammengesetzte Verhältnisse und Proportionen mit Anwendung (Rees'sche Regel); Zins-, Zinseszins-, Termin-, Gesellschafts- und Alligations-Rechnung, Kettensatz; bestimmte Gleichungen des I. Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Geometrische Anschauungslehre: Stereometrie: Lage der Linien und

Ebenen gegen einander; Körperwinkel; Hauptarten der Körper, ihre Gestalt und Größenbestimmung (Möcnik).

Nl. 3 St. Mechanik, starrer, flüssiger und gasiger Körper; Magnetismus, Elektricität, Akustik, Optik (Krist).

V. Classe.

Ordinarius Herr **Jakob Mairhofer.**

R. 2 St. Allgemeine Glaubenslehre (Wappler I.).

D. 2 St Wiederholung der Metrik; Poetik, Stilistik und Lectüre aus Eggers Lehr- und Lesebuch I. Declamation. Haus- u. Schulpensa.

L. 6 St. Livius (Grysar) I. II. cap. 1—20; Ovid (Grysar) metam. VI. 146—312, VIII. 611—724, XII. 1—145, XV. 745—870, fast. II. 475—512, 687—710, IV. 809—862, VI. 349—394, trist. I. 3. III. 4. Wiederholung der Syntax (Schultz); Übersetzungen aus Hauler (lat. Stilübungen f. d. V. u. VI. Cl.); Schulpensa.

Gr. 5 St. Xenophon (Schenkls Chrest.) Kyrop. I.—V.; Anab. I. IV. V. VIII.; Homer Ilias (Hochegger) I. II. 1—150. Syntax bis zur Tempuslehre (Curtius), Übungen (Hintner) und Schulpensa.

GH. 4 St. Das Alterthum bis zur römischen Kaiserzeit (Gindely) und Wiederholung der einschlägigen Geographie.

M. 4 St. Grundoperationen, Zahlenlehre, Größenmessung, Proportionen; Kettenbücher, Potenzen und Wurzeln; Anwendung der Operationsgesetze auf die Zifferrechnung (Frischauf). Die geradlinigen Gebilde, der Kreis (Wiegand I. II.)

Ng. 2 St. I. S. Allgemeine und system. Mineralogie (Hochstetter-Bisching). II. S. Botanik (Bill).

VI. Classe.

Ordinarius Herr **Andreas Wolf.**

R. 2 St. Specielle Glaubenslehre (Wappler II.).

D. 3 St. Literaturkunde bis Göthe (Egger II. 1. § 50). Mittelhochdeutsch (Reichel).

L. 6 St. Salust: Catilina (Linker), Cicero (Klotz) or. in Catilinam I. IV., Vergil (Hoffmann): Eclog. I., Georg. II., Aen. II.; Uebersetzungen aus Hauler (lat. Stilübungen V. VI. Cl.)

Gr. 5 St. Odyssee (Pauly) II.—VI. Ilias (Hochegger) III.—V., Herodot (Wilhelm) VII. 100—185. Syntax (Curtius) mit Übungen aus Hintner.

GH. 3 St. Das Mittelalter (Gindely).

M. 4 St. Logarithmen (Potenzen und Wurzeln); Bestimmungs-Gleichungen des I. Grades mit einer oder mehreren Unbekannten (Frischauf). Stereometrie, Goniometrie, ebene Trigonometrie (Wiegand, Heis).

Ng. 2 St. Systematische Zoologie (Woldrich).

VII. Classe.

Ordinarius Herr **Josef Schuchter.**

R. 2 St. Die kath. Sittenlehre (Wappler III.).

D. 3 St. Fortsetzung und Schluss der Literaturkunde nach Egger (II. 1.) mit der betreffenden Lectüre. Weitere Lectüre: Iphigenie auf Tauris, Hermann und Dorothea, die Jungfrau von Orleans.

L. 5 St. Cicero: or. pro Milone, pro Ligario, pro rege Deiotaro, pro Archia poeta (Klotz) Vergil: Aen. V. VII. X. (Hoffmann). Übersetzungen aus Bergers stil. Vorübungen.

Gr. 4 St. Demosthenes (Pauly) V.—VIII., Ilias (Hochegger) 9, Sophokles Oid. Col. Hausaufgaben Pausanias aus Schenkls Übungsbuch, Schulaufgaben nach Vorschrift.

GH. 3 St. Geschichte der Neuzeit bis zum Wiener-Congress (Gindely). Wiederholung der einschlägigen Geographie (Kozenn-Vogel).

M. 3 St. Quadratische Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten, trigonometrische Lösung derselben, reziproke und Exponential-Gleichungen, arithm. und geom. Reihen; Zinseszins- und Renten-Rechnung; Combinatorik, das Wichtigste vom Binomialtheorem. Anwendung der Algebra auf die Geometrie, Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene mit Einschluss der Kegelschnittslinien. (Frischauf, Heis).

Nl. 3 St. Allgemeine Eigenschaften der Körper, Mechanik der starren, flüssigen und gasigen Körper; Wärmelehre; Lösung einschlägiger Probleme (Handl).

Prop. 2 St. Logik nach dem Lehrbuche von Lindner.

Die VIII. Classe war nicht eröffnet worden.

IV. Freigegenstände.

1. *Italienische Sprache:* 31 Schüler, 2 Abth., je 1 St.

   A. 21 Sch. Formenlehre bis zu den unregelmäßigen Zeitwörtern (Gerstl, III. Aufl.). Sopplá.

   B. 10 Sch. Fortsetzung. Lectüre: Novelle morali di Fr. Soave. Mischi.

2. *Französische Sprache:* 8 Sch. 1 St. Formenlehre nach Plötz, Lectüre: Athalie v. Racine. Mischi.
3. *Kalligraphie:* 51 Sch. 1 St. Vorschriften an der Tafel. Director.
4. *Stenographie:* 31 Sch. 1 St. an Sonn- und Festtagen. Fischer, Lehrgang d. G. Sten. Dr. Ferd. Spielmann.
5. *Freihandzeichnen:* 92 Sch. in 4 Abth. je 1 St.
   A. 51 Sch. Übungen nach Grandauer. Braun.
   B. 15 Sch., C. 17. Sch., D. 9 Sch. Ornamente, Blumen, Köpfe, Landschaften. Director.
6. *Musik:* A. Gesang, 186 Sch. in 6 Abth. 1 St. I.—IV. Abth., theoretisch-praktischer Unterricht nach Mark's Leitfaden; einstimmige Lieder; V. Abth., leichte mehrstimmige Compositionen; VI. Abth. (Chorsänger), Probenunterricht ertheilten: Präfect Joh. Höllwartd in der II., Joh. Öttl (stud. VII. Cl.) in der V., in den übrigen Abth. Musikdirector Mark.
   B. Instrumentalmusik (Pianoforte, Harmonium, Violine) lernten 17 Schüler. Mark.
7. *Turnen:* 150 Sch. in 3 Abth. je 2 St. Dr. Ferd. Spielmann.

V. Themen zu den deutschen Aufsätzen.

V. Classe.

Reflexionen: 1. Scheidegruß des Studenten an die Heimat. 2. Weihnachtsgedanken. Parallelen: 3. Heiterkeit — der Sonnenschein des Lebens. 4. Das Auge ein Fenster der Seele. Motto: „Ich kenne zwei kleine Fensterlein in einem großen Haus; da schaut die ganze Welt herein, da schaut die Welt heraus.“ Erzählungen: 5. Der Raub der Sabinerinnen nach Livius. 6. Die Kaiserlinde in Brixen. 7. Ein Schwank nach eigenen Erlebnissen. Abhandlungen: 8. Freuden der Arbeit. 9. Lust und Lieb' zu einem Ding, macht alle Müh' und Arbeit ring. 10. Mittelmaß die beste Straß. Beschreibung und Schilderung: 11. Das Papier. 12. Der Wald. Gespräche: 13. Der Nutzen des Studiums der Naturgeschichte. 14. Inhalt und Beurtheilung der Elegie Lenau's: „An mein Vaterland.“ Brief: 15. Über den Fortschritt im abgelaufenen Schuljahre.

VI. Classe.

1. Das Ende der Nibelungen am Hofe Ezels. 2. Die Idee der Versallentreue, verkörpert in Rüdiger. 3. Die Zustände Roms im Jahre 66 v. Chr.

nach Salusts Catilina. 4. Gedankengang der Ode Klopstocks „Mein Vaterland.“ 5. Welche Umstände haben auf die Entwicklung der deutschen Poesie im 12. Jahrhundert begünstigend eingewirkt? 6. Schwert und Zunge. 7. Würdigung der Ballade Bürgers „Das Lied vom braven Manne.“ 8. Religion des Kreuzes, nur du verknüpfest in einem Kranze der Demuth und Kraft doppelte Palme zugleich.“ 9. Gedankengang der Abiturientenrede Klopstocks. 10. Über die Elegie Walthers von der Vogelweide: „Owê war sint verswunden alliu miniu jâr?“ 11. Unser Mai-Ausflug. 12. „Ans Vaterland, ans theure schließ dich an.“ 13. „Den guten Mann kennst du an seinem liebsten Buch und an der Art, wie er's liest.“ Sailer. 14. Wodurch wird Aeneas zum Ausruf veranlasst: Heu nihil invitis fas quemquam fidere divis! Verg. Aen. II. 402.

VII. Classe.

1. Warum beschränkt sich der Wert der Lesebücher des Obergymnasiums nicht auf die Schule? 2. Lessing und Herder in Parallele. 3. Die Vorfabel der Göthe'schen Iphigenie. 4. Die Fabel desselben Stückes. 5. Welche persönliche Verhältnisse des Dichters und welche Auffassung der Dichtkunst lehrt uns die „Dichterweihe“ von Göthe kennen? 6. „Virtutem primam esse puta compescere linguam.“ Rožek, Chrestom. 1878, S. 8. 7. Dasselbe Thema in Form eines Zweigesprächs zu bearbeiten. 8. Der Charakter Hermanns in „Herm. und Dor.“ 9. Welche Geschichtsdata sind von 1526 bis 1699 der österreichischen und osmanischen Geschichte gemeinsam, und welches war das jeweilige Verhältnis Österreichs zu Deutschland? 10. „Es soll der Sänger mit dem König gehen, Sie beide stehen auf der Menschheit Höhen.“ Schiller, Jungfr. v. Orl. I. 2. 11. Wie bewegt sich die Handlung im 2. Aufz. der „Jungfr. v. Orl.“ in Gegensätzen fort? 12. Disposition der Rede des Phönix (Ilias, IX., 432 f.) und psychologischer Charakter derselben. 13. Warum unterscheidet sich in „Jungfr. v. Orl.“ die erste Hälfte bis III. 8. incl. in der Art der Verwickelung wesentlich von der 2. Hälfte? 14. Welche Bande knüpfen die Völker Österreichs an die Dynastie? 15. „Der Siege göttlichster ist das Vergeben.“ Isabella in „Braut von Messina.“ 16. Die Wärme nach der Verschiedenheit ihrer Quellen und Wirkungen.

VI. Statistische Notizen.

	Classe I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	Summe
1. Schülerzahl.								
Am Anfang des Schuljahres	56	39	46	30	29	18	11	229
Während des Jahres ausgetr.	5	1	1	1	2	2	2	14
Am Schlusse des II. Sem.	51	38	45	29	27	16	9	215
2. Vaterland.								
Tirol	40	36	38	24	22	14	9	183
Vorarlberg	11	2	6	5	5	1	—	30
Italien	—	—	1	—	—	1	—	2
3. Religionsbekenntnis.								215
Alle römisch-katholisch.								
4. Muttersprache.								
Deutsch	50	34	45	25	26	14	9	202
Italienisch (und Ladinisch) .	2	4	—	4	1	2	—	13
5. Alter am 15. Juli 1881.								215
Es haben 11 Jahre vollendet	16	—	—	—	—	—	—	16
12 " "	26	12	—	—	—	—	—	38
13 " "	6	21	16	—	—	—	—	43
14 " "	3	2	13	7	—	—	—	25
15 " "	—	1	11	16	7	—	—	35
16 " "	—	2	3	3	16	3	1	28
17 " "	—	—	2	3	3	10	—	18
18 " "	—	—	—	—	—	3	5	8
19 " "	—	—	—	—	1	—	2	3
20 " "	—	—	—	—	—	—	1	1
6. Classification am Ende des II. Semesters.								215
I. Classe mit Vorzug . .	8	9	13	6	6	4	2	48
I. Classe	27	26	32	21	20	12	7	145
II. Classe mit Wiederh.-Pr.	4	—	—	2	1	—	—	7
II. Classe ohne " "	7	2	—	—	—	—	—	9
III. Classe	5	1	—	—	—	—	—	6
Ungeprüft	—	—	—	—	—	—	—	—
								215

Von den 7 Schülern, denen am Schlusse des Jahres 1880 eine Wiederholungsprüfung gestattet worden war, legten sie am Beginne dieses Schuljahres 6 mit gutem, 1 mit schlechtem Erfolge ab.

Zahl der Stipendisten 10, der jährl. Betrag der Stipendien 805 fl. 25 kr.

Von den 11 Abiturienten des vorigen Jahres wandten sich 10 zur Theologie, 1 (Joh. Knittel) zur Medizin.

VII. Lehrmittel-Sammlung.

a) Bibliothek. Geschenke: Von der k. k. statist. Central-Commission: die periodische Presse Österreichs, Wien 1875; von Herrn Prof. Grissemann: Tausend und eine Nacht, übers. von Weil, herausgegeben von Lewald, 4 Bde., Stuttgart 1838—44; Musaeus J. K. A., Volksmärchen der Deutschen, Leipzig 1842; von Herrn Pfarrer Stefan Rudigier: Kapp Ernst, philos. u. allg. vergleichende Erdkunde, 2 Bde., Braunschweig 1845; von Herrn Dr. Roman Riezler: A. Bouys, Le jeune maitre de français, Hamburg 1879, Lessings Hamburgische Dramaturgie, L. Nardini, Scelta di lettere familiari, promessi sposi di Al. Manzoni e storia della colonna infame, Milano 1869, Gedichte im Tiroler Dialekt von C. v. L., Innsbruck 1854, Gaudy Fr., Tagbuch eines Schneidergesellen; von Herrn Dr. Jos. Egger, Prof. in Brixen: seine Propaedeutika phil. theol., tom. II., Brixen 1880; von Herrn August Petter: Stecher Chr., deutsche Dichtung für die christliche Familie und Schule, Heft 1—14, Graz 1880—81; von E. Feichtinger: seine kurzgef. griechische Formenlehre, Salzburg 1880; von Al. Netzer, stud. VII. Cl.: Englisch-deutsches und deutsch-englisches Lexikon 1823; von Jos. Flenger, stud. VI. Cl.: Aristotelis physicorum libri 8, de coelo, de gener. et corruptione, meteorologia, Venetiis 1572; von Herrn Dr. Ferd. Spielmann: Dantes göttl. Comödie, illustr. von Dorè, erkl. von Camerini, 3 Bde. fol., Mailand 1868—69, Js. Proschko, österreichische Volks- und Jugendschriften, 18 Hefte; von Herrn Prof. Otto Vorhauser: Hermann C. Fr., Lehrbuch der griech. Antiquitäten, 3 Bde., Heidelberg 1841—52, Pape W., Handwörterbuch griech.-deutsch, 3 Bde., Braunschweig 1842—1849, Rost und Wüstemann, Anleitung zum Übersetzen aus dem Deutschen ins Griech., 2 Bde., Göttingen 1838 und 1850, Süvern J. W., Über Aristophanes Wolken, Berlin 1826, Herodotus, erklärt von Stein, I. und IV. Bd., 3. Aufl., Berlin 1861—70, Thucydides, von Winsenius (Witenberg 1580) und Poppo, Gotha 1843—51, 2 Bde., Platon, Apologia und Kriton, erkl. von Chr. Cron., 3. Aufl. 1865, Demosthenes, Rede vom Kranze griech. und deutsch, Leipzig 1857, Windischmann Fr., die persische Anahita, München 1856, Schelling W. J., Über die Gottheiten von Samothrake, Stuttgart 1815, Cicero M. T., oratio pro Plancio, Wunder, Leipzig 1830, Cicero M. T., Laelius von Seyffert, Brandenburg 1844, Gradus ad parnassum latinum, Friedmann, ed. IV., Leipzig 1842, Guil. Dindarfii poet. scenicorum Graec. fabulae, ed. IV., Lips. 1868, Xenophon, Hellenica, erkl. von Breitenbach, Berlin 1873—78, Müller K. O., Geschichte der griech. Literatur, 2 Bde., Breslau 1841, Grysar C. J., Theorie des lat. Stils nebst lat. Antib., Köln 1831, Corssen W., Über Aussprache, Vocalismus und Betonung der lat. Sprache, Leipzig 1858, Minckwitz Joh., Lehrbuch der rhythmischen Malerei der deutschen Sprache, Leipzig 1856, Aeschyli septem ad Thebas. ex rec. Hermanni ed. Ritschelius, Elberf. 1853, Terentius Varro, de lingua latina (Odofr. Müller), Lips. 1833, Nägelsbach C. F., Übungen des lat. Stils, Leipzig 1858, Platon, Protagoras, erklärt von Sauppe, Haacke Fr. Ferd., Abriss der griech. und röm. Alterthümer, Stendal 1863; von Herrn Prof. Dr. Katschthaler Joh.: seine Theologia dogm. cath. specialis, 3 Bde., Ratisbonae 1877—1880, zwei Thesen für das allgem. Concil von Mayer, beleuchtet von Katschthaler; von einem Ungenannten 45 Bde. Werke theologischen Inhalts.

Durch Doubletten-Tausch: Calderon's größte Dramen religiösen Inhalts, übers. von Lorinser, 3 Bde., Freiburg 1875; v. Seeburg Fr., 1. Das Marienkind, 3. Aufl., 2. Die Fugger und ihre Zeit, ein Bildercyclus; Daumer F. G., Blumen und Früchte aus dem Garten christl. Weltanschauung, Mainz 1863; v. Droste-Hülshoff Anette, Gedichte, 3. Aufl., Stuttgart 1873; Hartwig Georg, Gott in der Natur, Wiesbaden 1871; Wisemann, Erinnerungen an die vier letzten Päpste, Köln 1858, 1 Bd.; Bisping Aug., Exegetisches Handbuch zum neuen Testament, 12 Bde., Münster 1860–1871; Rolfus Adolf u. Pfister, Real-Encyclopaedie des Erziehungs- und Unterrichtswesens nach kath. Prinzipien, Mainz 1863—66, 4 Bde.; Mehler Ludw., Beispiele der ges. christkath. Lehre, Regensburg 1851, 5 Bde.; Eiselein J., Die Sprichwörter und Sinnreden des deutschen Volkes in alter und neuer Zeit, Donaueschingen 1838; Behrle Rudolf, 1. Josef und seine Brüder, 2. Tobias, Schauspiele mit Musikbeilagen; Schneller Chr., Märchen und Sagen aus Wälschtirol, Innsbruck 1867.

Durch Kauf: Oskar Peschel, Abhandlungen zur Erd- und Völkerkunde, herausgegeben von J. Löwenberg, Leipzig 1877; Oskar Peschel, Geschichte der Erdkunde bis auf Alex. v. Humboldt und K. Ritter, herausgegeben von Sophus Ruge, München 1877; H. Birnbaum, Grundzüge der vergleichenden physikalischen Erdkunde in ihrer Beziehung zur Geschichte des Menschen, 3. Ausg., Leipzig 1873; Franz v. Hauer, Die Geologie und ihre Anwendung auf die Kenntnis der Bodenbeschaffenheit, 2. Aufl., Wien 1878; G. Schweinfurth, Im Herzen von Afrika, Reisen und Entdeckungen von Central-Äquatorial-Afrika während der Jahre 1868—71, Leipzig 1878; Moritz Brosch, Papst Julius II. und die Gründung des Kirchenstaates, Gotha 1878; Moritz Brosch, Geschichte des Kirchenstaates im 16. und 17. Jahrhundert, 1 Bd., Gotha 1880; Hergenröther J., Kathol. Kirche und christl. Staat, 2. Aufl., Freiburg 1876; Gregorovius Ferd., Lucrezia Borgia, 3. Aufl., Stuttgart 1875, 2 Bde.; Aloisi Eduardo, Cesare Borgia, ducati di Romagna, Imola 1878; Lorenz Ottokar, Papstwahl und Kaiserthum, Berlin 1874; Onken W., Österreich und Preußen im Befreiungskrieg, Berlin 1876—79, 2 Bde.; v. Treitschke H., Geschichte im 19. Jahrh., 1. Th., Leipzig 1879; Janssen J., Geschichte des deutschen Volkes, 1. u. 2. Bd., Freiburg 1878—79; Zoepfl H., Deutsche Rechtsgeschichte, 4. Aufl., 3 Bde., Braunschweig 1871—72; Ficker Jul., Beiträge zur Urkundenlehre, 2 Bde., Innsbruck 1878—79; Düntzer H., Göthes und Schillers lyrische Gedichte erläutert, und Faust, 9 Bde., Leipzig 1874—77; Koch Eugen, Deutsche Grammatik, 6. Aufl., Jena 1875; Wackernagl W., Geschichte der deutschen Literatur, 1. Bd., Basel 1877; Möbius Theodor, Altdeutsches Glossar, Leipzig 1866; Schulze Ernst, Gothisches Wörterbuch, Züllichau 1867; Bellarini J. P., adnotationes in XII. priorum Caesarum numismata, Romae 1730; Cohen H., 1. description generale des monnaies de la republique romain, Paris 1857; 2. description historique des monnaies frappees sans l' empire romain, Paris 1859—1865, 7 Bde.; 3. description generale des monnaies Byzantines, Paris 1862; Mayer Fr. Ant., Einleitung in die altrömische Numismatik, Zürich 1842; Numismata moduli maximi vulgo Medaiglioni ex cimeliarchio Ludovici XIV., Eleutheropoli 1704; Sepilli J., 4 monete pontificie ed una di casa di Savoja ill., Triest 1859; Ekhel J., 1. Sylloge nummorum veterum, Viennae 1786; 2. Kurzgefasste Anfangsgründe der alten Numismatik, Wien 1807; Bouthowsky Alex., dictionaire numismatique, Leipzig 1877—80; Voigt Ad., Nummi Germaniae medii aevi, Viennae 1783; Werlhof A. C. E., Handbuch der griechischen Numismatik, Hannover 1850; Gazzoletti Ant., della Zecca di Trento, Trento 1858; Morgenstern, recensio nummorum imp. a Nerva—Faustin. mai. Dorpat; Ladurner Just., Über die Münze und das Münzwesen in Tirol vom 13. Jahrh. bis zum Ableben des Kaisers Maxmilian; Vorstellung unterschiedlicher Münz-Edicten und Recessen von 1676 bis 1680; Aristotelis de anima libri tres, rec. Ad. Torstrik, Berol. 1862; Aristotelis de anima libri 3, ill. Fr. A. Trendelenburg, Jenae 1833; Kaulich W., Handbuch der Psychologie, Wien 1857; Österreichisches Museum, enthaltend die geschichtliche und topographisch-pitoreske Darstellung aller k. k. österr. Staaten, 4 Bde., Wien 1833—1836; Claus C., Grundzüge der Zoologie, 4. Aufl., 2 Bde., Marburg 1880; Posepny F., Archiv für praktische Geologie, 1. Bd., Wien 1880; Daubrée A., Synthetische Studien zur Experimental-Geologie, übers. von A. Gurlt, Braunschweig 1880; Scharf Alb., Lehrbuch der physikalischen Mineralogie, 2 Bde., Wien 1880; Nuhn A., Lehrbuch der vergleichenden Anatomie, Heidelberg 1878; Hyrtl Jos., Lehrbuch der Anatomie des Menschen, Wien 1878; Heitzmann C., die descriptive und topographische Anatomie des Menschen, Wien 1875, 2 Bde.; Groth P., Physikalische Krystallographie, Leipzig 1876; Giesebrecht, Geschichte der deutschen Kaiserzeit, 5. Bd., I. Theil, Hannover 1880; Jäger Albert, Geschichte der Ständeverfassung in Tirol, 1. Bd., Innsbruck 1880; Onno Klopp, Fall des Hauses Stuart, 9. u. 10. Bd., Wien 1881; Kopp J. E., Geschichte der eidgenössischen Bünde, 4. Bd., 2. Abth., Basel 1880; Gerster J. S., geographische Anschauungslehre, Freiburg 1880, und Gebrauchsanweisung; „Unsere Helden," Lebensbilder für Heer und Volk, 4 Hefte, Salzburg 1879—80; Proschko C. H., Kronprinz Rudolf von Österreich, Wien 1881; Monumenta Germaniae hist. auct. antiquissimorum t. IV. p. prior, Berolini 1881; Daiber J., Körperhaltung und Schule, Stuttgart 1881; Mittheilungen des Institutes für österr. Geschichtsforschung, Innsbruck 1880, 4 H. Fortgesetzt wurden alle v. J. genannten wissenschaftl. Zeitschriften.

b) Physikalisches Cabinet. Gekauft wurden: Mariotte'sche Flasche; zerlegbares Modell des Babinet'schen Hahnes aus Holz; Wellen-Maschine von Mach; ein Luftthermometer; Thermometer zu physik. Versuchen; Spiegelsextant; Oberflächenconductor mit Halbkugeln auf Stativen; Wheatstone's Brücke; Siemens' Widerstandseinheit justiert für eine bestimmte T.; diamagnetischer Apparat.

c) Naturhistorisches Cabinet. Geschenke: Von P. Leo Treuinfels, Prof. in Meran, 10 Käfer; aus dem Nachlasse des Herrn Pfarrers Handl 4 ausgestopfte Vögel; von Herrn Vizekanzler Joh. Stippler, 1 Felis Domestica, 1 Ei von Struthio camelus; von Herrn Lidl, Oberförster in Untersberg, 2 Schliffe: 1 Cycadeenzapfen, 1 Hippurit; von Frau Antonie v. Feistauer in Salzburg, 4 St. Anhydrit, 1 Fasergyps, 1 Bleiglanz, 1 faseriges Steinsalz, 1 stengeliger Kalkspath von Röthelstein; von Frl. Maria v. Radauer in Salzburg, 1 Dopplerit von Aussee; von Herrn Gottfried Baron v. Sternbach, 1 Calcit aus Fassa, 1 Liparit; von Herrn Dr. Th. v. Alpenheim, 2 Aragonit nebst Fahlerz aus Schwaz; von Schülern, 2 Gypsdrusen aus Hall; von Herrn H. F., ein Herbar für den Schulgebrauch nach Eichlers „Syllabus" geordnet; 1 Theiser Geode mit Datolith, Desmin, Chabasit und Quarz; 1 Adular mit Chlorit aus dem Achenthale, 2 Anatas und Brookit von Binnenthal (Schweiz); Drahtmodelle, die Symetrieverhältnisse an Krystallen darstellend, circa 100 Stücke bestimmter Petrefacten und Gesteine; von Herrn Karl Moser, Prof. in Innsbruck, 14 Stück Muscheln und Korallen.

d) Münzensammlung. Geschenke des Herrn Vizekanzlers Joh. Stippler, die ganze Sammlung des Herrn Joh. Neurauter weiland Pfarrer in Curtatsch, circa 8000 mitunter sehr seltene Stücke enthaltend; Bronze-Medaillen: a) Josef I. auf seine Krönung zum röm. König 1690, b) Wolfgang

Graf v. Schrattenbach auf die Heiligsprechung des Joh. von Nepomuk, c) Wilhelm Tell, d) auf das Genfer Reformations-Jubelfest 1835, 1 Silbermedaillon Karl V. von 1637, 1 Medaille auf das Bundesschiessen in Stuttgart 1875, 1 Ducaten: Mathias Corvinus, Konrad II. 1627, Silbermünze der Rep Genua; Pius IX., Medaille auf die Fußwaschung a. XXIV.; von Herrn Bez.-Sekr. v. Mersi, Leopold I., Medaille auf den Entsatz Wiens (14. Juli 1683).

VIII. Aus der Chronik.

Am Schlusse des Schuljahres 1880 war dem Herrn Alois Leiter, geistl. Rath und Regens, die Pfarre Kolsass im Unterinnthale verliehen worden und zwei Präfecten, die Herren Dr. Roman Riezler und Franz Schratz, schieden aus der Anstalt, um sich der seelsorgl. Thätigkeit zu widmen. Der Berichterstatter sah sich genöthigt, dem Willen des Hochwürdigsten Fürstbischofs sich zu fügen und provisorisch die Gesammtleitung des Institutes zu übernehmen. Als Präfecten wurden berufen die Herren: Dr. Alois Eberhart, Johann Höllwart und Alois Sopplá. Am 14. September erhielten die Herren Lehramtscandidaten Theodor Hagen und Hartmann Falbesoner die Anstellungsdekrete als Supplenten und traten die Lehrthätigkeit sofort an.

Am 16. September Eröffnung des Studienjahres durch den Hochwürdigsten Fürstbischof in herkömmlicher Weise. Nachmittag Verlesung der Disciplinar-Statuten.

Am 3. October abends Declamation patriotischer Gedichte und Theater-Vorstellung durch Zöglinge der obersten Curse zur Feier des h. Namensfestes Sr. k. und k. apost. Majestät des Kaisers Franz Josef I. Der 4. October war Ferialtag mit festlichem Gottesdienste.

Am 19. November, am Namensfeste Ihrer Majestät der Kaiserin, Missa cantata.

Mit dem 12. Februar schloss das I., am 15. begann das II. Semester.

Die Vermählung Sr. kais. Hoheit des durchlauchtigsten Kronprinzen Erzherzogs Rudolf mit Ihrer königl. Hoheit der Frau Prinzessin Stephanie von Belgien am 10. Mai wurde in der Anstalt in feierlichster Weise begangen. Um 8 Uhr wohnten die Professoren, die Präfecten und Zöglinge dem hl. Amte und dem Te Deum in der Seminarkirche bei. Die Schüler der obersten Curse schmückten das Bild des Kronprinzen in ihrem Speisesalon mit Taxgewinden, Blumen und Chronogrammen in überraschend sinniger Weise und vertheilten unter die Vorstände und Mitschüler ein Festblatt, das Gedichte, Chronologika und einen Preis-Rebus enthielt und von Joh. Rudig, stud. VII. C., mit gelungenen Handzeichnungen in polychromer Hektographie ausgestattet war. In der Festversammlung abends 5 Uhr im Theatersaale hielt Joh. Öttl, stud. VII. C., eine Rede über die Bande, welche die Völker Österreichs an die habsburgische Dynastie knüpfen; dem „rauschenden Hoch auf den Fürsten und seine erlauchte Braut," womit seine Rede schloss, folgte ein Chorgesang und eine Ansprache des Directors, in welcher er den Umfang und die Erfolge des Jugendstudiums des wissbegierigen Rudolf in kurzen Zügen auseinanderlegte und darauf hinwies, wie die hohe Freude seiner allerhöchsten Eltern und die größten Hoffnungen aller Völker Österreichs an diesem Tage wesentlich hierauf gegründet sind. Noch nie hatten die Strophen der Volkshymme so ergreifend schön im Saale des Vincentinum geklungen, wie sie zum Schlusse dieser Feier klangen.

Mitte Juni vollendete Herr Josef Seeber, Lehramtscandidat in Innsbruck mit der Bestimmung für das Gym. Vincentinum, die Prüfung aus der deutschen Sprache und Literatur und erhielt die Approbation für das ganze Gymnasium.

Am 14. Juli Prämienvertheilung durch den Hochwürdigsten Fürstbischof, am 15. Semesterschluss.

Der löbl. tirolische Stenographen-Verein spendete 2 Prämien, 4 Herr Joh. Rimml, Subregens des Clerikalseminars.

Von Erlässen sind hier anzuführen:

16. Sept. 1880. Erlass des k. k. Landesschulrathes vom 10. Sept. d. J., Z. 14542, womit der h. Minist.-Erlass vom 20. Aug. 1880, Z. 12050, hinsichtlich der Überfüllung der Mittelschulen mitgetheilt wird.

1. Dez. Erlass der k. k. Statthalterei vom 25. Nov. d. J., Z. 19207, betreffend die Cumulierung von Stipendien.

4. Dez. Erlass des k. k. Landesschulrathes vom 21. Nov., Z. 19337, womit der h. Minist.-Erlass vom 8. Nov., Z. 15905, mitgetheilt wird, betreffend die Bewilligung eines Ferientages zur Ermöglichung des gesetzlichen Empfanges der hl. Sakramente.

Das nächste Schuljahr beginnt am 16. Sept. 7 Uhr morgens.

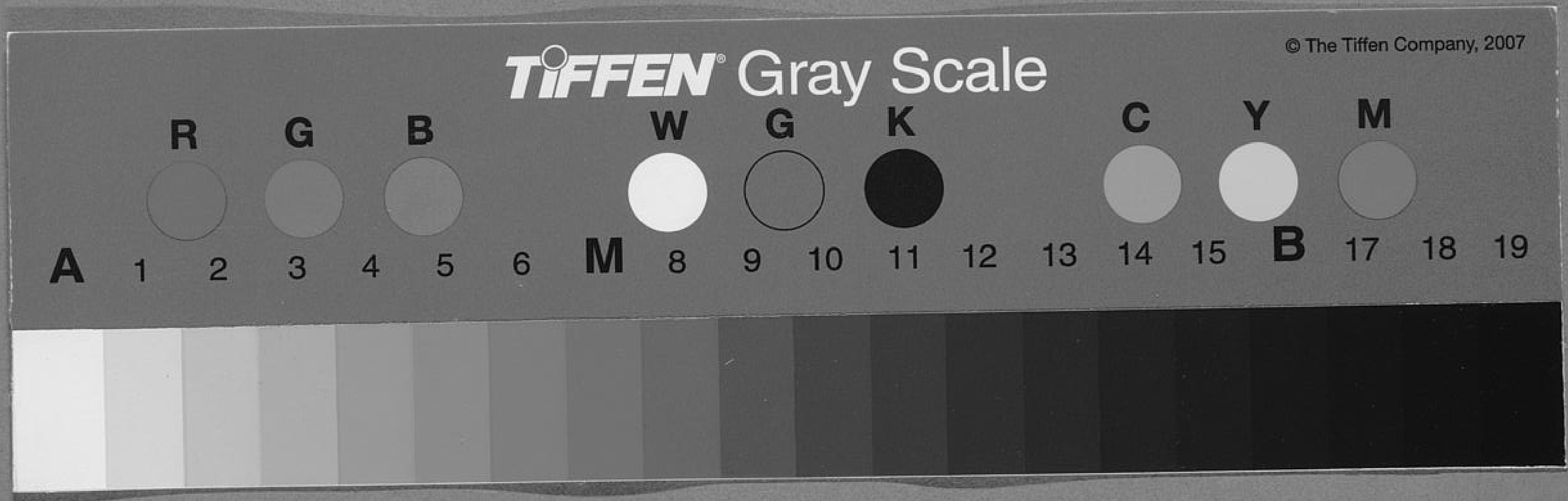
Die Reparatur-Prüfungen sowie allenfalls nöthige Prüfungen zur Aufnahme in höhere Classen werden am 14. und 15. Sept. statthaben. Zeit und Ort der Aufnahms-Prüfungen zum Eintritte in die erste Classe wird demnächst im „Diözesanblatte" bekannt gegeben werden.

Gesuche um Aufnahme sind bis längstens 13. August an das f. b. Ordinariat einzureichen.

Zum Schlusse den herzlichsten Dank allen Wohlthätern, die durch Beiträge, durch persönliche Thätigkeit, durch ein gutes Wort am rechten Ort die Verwirklichung des großen Gedankens des Hochseligen Fürstbischofs Vinzenz gefördert haben. Es ist ihre Zahl so groß, dass an die Anführung von Namen Einzelner nicht gedacht werden kann. Gott, der sie allein alle weiß, wird auch die kleinste Gabe nicht ohne Vergeltung lassen; die Vorstehung des Hauses kann mit dem Dankeswort nur die Versicherung geben, dass sie es für ihre ernste Pflicht hält, die schon gegebenen und noch zu hoffenden Gaben, so viel an ihr liegt, nicht Unwürdigen zuzuwenden.

Brixen, 15. Juli 1881.

Dr. Alois Spielmann, Director.


TIFFEN Gray Scale
© The Tiffen Company, 2007
R G B W G K C Y M
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19