Viertes Programm

des

F. B. PRIVAT-GYMNASIUMS

am

SEMINARIUM VINCENTINUM

(Knaben-Seminar der Diöcese Brixen)

veröffentlicht am Schlusse des Schuljahres

1879.

Abhandlung:

Mac-Laurin's Summenformel und einige Anwendungen derselben.

Von Prof. Josef Braun.

BRIXEN,
Druck von A. Weger's Hofbuchdruckerei.

Die Summenformel von Mac-Laurin und einige Anwendungen derselben.

Vorbemerkung.

In nachstehender Abhandlung wird versucht, die Herleitung der berühmten Mac-Laurin'schen Summenformel mit Hilfe einer von Darboux herrührenden Function [Man sehe Liouville's Journ. de Math. (serie 3) tome II.] zu geben. Selbstverständlich kann hiebei eine Untersuchung der Natur und Haupteigenschaften der Bernoulli'schen Functionen nicht umgangen werden.

In den Anwendungen der Mac-Laurin'schen Formel finden sich einige der von Darboux l. cit. niedergelegten Gedanken verwerthet und wird weiterhin eine strenge Herleitung der Stirling'schen Reihe für den Logarithmus des Products der x ersten ganzen Zahlen gegeben.

Betrachten wir die folgende Function von t*)

$$\Psi(t) = \varphi^{n}(t) \,.\, F(x+ht) - h\, \varphi^{n-1}(t) \,.\, F'(x+ht) + h^{2}\, \varphi^{n-2}(t) \,.$$

$$F''(x+ht) \;-\; \ldots\ldots \;+ (-1)^{n}\, h^{n}\, \varphi(t) \,.\, F^{n}(x+ht)$$

Hierin bezeichne $\varphi(t)$ ein Polynom vom Grade n und $\varphi', \varphi'', \ldots\ldots \varphi^{n-1}$, φ^{n} seien die successiven Derivirten der Hauptfunction φ. — Unter F (u) ist eine reelle Function der gleichfalls als reell gedachten Variablen x und h zu verstehen. Nebstdem wird vorausgesetzt, dass die Functionen F (u), $F'(u), \ldots\ldots, F^{n}(u), F^{n+1}(u)$ endlich und stetig bleiben, wenn ihr Argument von x bis $x+h$ variirt.

Nun ist

$$\Psi'(t) = (-1)^{n}\, h^{n+1}\, \varphi(t) .\, F^{n+1}(x+ht)$$

---

*) Nach Darboux in Liouville's Journ. de Math. (3. serie) tome II.

und zufolge der Voraussetzung in Betreff der Function F

$$\Psi(1) - \Psi(0) = (-1)^n \; h^{n+1} \int_0^1 \varphi(t) . \; F^{n+1}(x+ht) \; dt;$$

führt man die Werte von $\Psi(1)$, $\Psi(0)$ ein, so kommt

$$\text{I.} \quad \varphi^n(0) \, [F(x+h) - F(x)]$$
$$= h \, [\varphi^{n-1}(1) \, . \, F'(x+h) - \varphi^{n-1}(0) \, . \, F'(x)]$$
$$- h^2 \, [\varphi^{n-2}(1) \, . \, F''(x+h) - \varphi^{n-2}(0) \, . \, F''(x)]$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ (-1)^{n-1} h^n \, [\varphi(1) \, . \, F^n(x+h) - \varphi(0) \, . \, F^n(x)] + R_n$$

$$\text{wo } R_n = (-1)^n \; h^{n+1} \int_0^1 \varphi(t) \, . \, F^{n+1}(x+ht) \, dt \text{ ist.}$$

Diese Formel erweist sich als sehr fruchtbar. Indem man bezüglich des Polynomes $\varphi(t)$ verschiedene Annahmen macht, resultiren aus derselben theils schon bekannte, theils neue Reihen, die wegen ihrer Restformen mehrfach brauchbar sind.

Nimmt man beispielsweise $\varphi(t) = (t-1)^n$, so erhält man die Taylor'sche Reihe in ihrer gewöhnlichen Form:

$$\text{II. a)} \quad F(x+h) - F(x) = \sum_{1}^{n} {}_{n)} F^n(x) \, . \, \frac{h^n}{n!} + F^{n+1}(x+\theta h) \, . \, \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Setzt man 2n für n und nimmt $\varphi(t) = t^n (t-1)^n = (t^2-t)^n$, so kommt

$$\text{b)} \left\{ \begin{array}{l} F(x+h) - F(x) = \frac{h}{2} \, [F'(x+h) + F'(x)] - \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} \cdot \frac{h^2}{2!} \\ \qquad [F''(x+h) - F''(x)] \\ \quad + \ldots\ldots + (-1)^{k-1} . \, \frac{n(n-1) \ldots\ldots (n-k+1)}{2n(2n-1) \ldots\ldots (2n-k+1)} \cdot \frac{h^k}{k!} \\ \qquad [F^k(x+h) + (-1)^k F^k(x)] \\ \quad + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} . \, \frac{h^n}{2n(2n-1) \ldots\ldots (n+1)} \, . \\ \qquad [F^n(x+h) + (-1)^{n-1} F^n(x)] + R_{2n} \end{array} \right.$$

wo der Rest gegeben ist durch die Gleichung

$$R_{2n} = (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 t^n (1-t)^n \, . \, F^{2n+1}(x+ht)\, dt$$

$$\text{Nun ist} \int_0^1 t^n (1-t)^n \, dt = \frac{n}{n+1} \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{n+1} \, dt$$

und durch n—malige Anwendung

$$\int_0^1 t^n (1-t)^n \, dt = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,n}{(n+1)\,.\,.\,.\,(2n+1)}$$

$$\text{folglich } R_{2n} = (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{F^{2n+1}(x+\theta h)}{[(n+1)\,.\,.\,.\,.\,.\,2n]^2}$$

Die Formel II b) erscheint deshalb bemerkenswert, weil man durch dieselbe, wenn man nur n Derivirte zählt, eine Approximation von der Ordnung h^{2n+1} erreichen kann.

Setzt man in derselben successive $n = 1, 2, 3, \ldots$ so erhält man

$$\text{A)}\quad F(x+h) - F(x) = \frac{h}{2}\,[F'(x+h) + F'(x)] - \frac{h^2}{12}\,.\,F'''(x+\theta h)$$

$$\text{B)}\quad F(x+h) - F(x) = \frac{h}{2}\,[F'(x+h) + F'(x)] - \frac{h^2}{12}[F''(x+h) - F''(x)] + \frac{h^5}{720}\,.\,F^{V}(x+\theta h)$$

$$\text{C)}\quad F(x+h) - F(x) = \frac{h}{2}\,[F'(x+h) + F'(x)] - \frac{h^2}{8}[F''(x+h) - F''(x)] + \frac{h^3}{120}\,[F'''(x+h) - F'''(x)] - \frac{h^7\,.\,F^{VII}(x+\theta h)}{100800}$$

Man kann noch bemerken, dass das Restglied hier mit einem numerischen Coefficienten behaftet ist, der viel kleiner ist als der entsprechende Coefficient im Restgliede der Taylor'schen Reihe.

Die Coefficienten, welche in der Formel I. erscheinen, sind die Derivirten von $\varphi(t)$ für $t = o$ und $t = 1$. Man kann nun fragen, ob es nicht möglich wäre, mehrere jener Coefficienten einander gleich zu machen und eine Formel herzustellen, in welche nur die Differenzen $F^{(k)}(x+h) - F^{(k)}(x)$ eingehen.

Die Forderung, dass sämmtliche Ableitungen des Polynoms $\varphi(t)$ für $t = 0$ und $t = 1$ denselben Wert annehmen sollen, ist unerfüllbar; denn da

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1}\,\varphi^{1}(0) + \ldots\ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi^{n-1}(0) + \frac{t^{n}}{n!}\,\varphi^{n}(0)$$

$$\varphi(t+1) = \varphi(1) + \frac{t}{1}\varphi^{1}(1) + \ldots\ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(1) + \frac{t^{n}}{n!}\cdot\varphi^{n}(1)$$

ist, so müsste $\varphi(t+1) = \varphi(t)$ sein, was auch t wäre — ein Absurdum, da kein Polynom periodisch ist.

Stellt man die Forderung, dass sämmtliche Ableitungen des Polynoms $\varphi(t)$ mit Ausnahme der vorletzten für die besagten Werte von t einzeln einander gleich werden sollen, so ist hiezu, wie man aus

$$\varphi(t+1) - \varphi(t) = [\varphi^{n-1}(1) - \varphi^{n-1}(0)]\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

ersieht, notwendig aber auch hinreichend, dass die Differenz $\varphi(t+1) - \varphi(t)$ nur den Term mit t^{n-1} enthalte; das gesuchte Polynom muss sohin der Functionalgleichung

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = C\,.\,x^{n-1}$$

genügen, und da man sich dieselbe mit einer passend gewählten Constante multiplicirt denken kann, so kann man die obige Bedingung ausdrücken durch $\quad \varphi(x+1) - \varphi(x) = nx^{n-1}$

Wenn nun x eine ganze Zahl ist, so resultirt hieraus weiterhin

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - \varphi(x-1) &= n(x-1)^{n-1}\\
\varphi(x-1) - \varphi(x-2) &= n(x-2)^{n-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi(2) - \varphi(1) &= n\,.\,1^{n-1}\\
\varphi(1) - \varphi(0) &= 0
\end{aligned}$$

und wenn $\varphi(0) = 0$ genommen wird, so hat man für ganze x

$$\varphi(x) = n\,[x^{n-1} + (x-1)^{n-1} + \ldots\ldots + 2^{n-1} + 1^{n-1}]$$

Setzt man noch $x = p-1$, so hat man

$$\varphi(p) = n\,[(p-1)^{n-1} + (p-2)^{n-1} + \ldots\ldots + 2^{n-1} + 1^{n-1}]$$

Natur und Eigenschaften der Function φ.

Um die Function φ zu finden, muss das Problem, „die Summen der gleichen Potenzen der natürlichen Zahlen auszuwerthen“ in Angriff genommen werden.

Die Aufgabe sei nun: Eine endliche Reihe von der Form

$$1^{m} + 2^{m} + \ldots\ldots + (p-2)^{m} + (p-1)^{m}$$

zu summiren, wo p und m als positive ganze Zahlen gedacht werden.

Lässt sich auch die Summation durch recurrente Berechnung ausführen, so ist doch ein independentes Gesetz nur durch Differenzialrechnung zu gewinnen.

Bemerkt man zunächst, dass

$$a^m = D_x^m (e^{ax})_{(x=0)}$$

so hat man

$$1^m + 2^m + \cdots\cdots + (p-2)^m + (p-1)^m = D_x^m [e^x + e^{2x} + \cdots\cdots + e^{(p-2)x} + e^{(p-1)x}]_{(0)}$$

$$= D_x^m \left\{\frac{e^{px} - e^x}{e^x - 1}\right\}_{(0)} = D_x^m \left\{1 + \frac{e^{px} - e^x}{e^x - 1}\right\}_{(0)}$$

Da nun

$$1 + \frac{e^{px} - e^x}{e^x - 1} = \frac{e^{px} - 1}{e^x - 1} = \frac{e^{px} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1},$$

so handelt es sich um die Entwicklung der Factoren des letzteren Productes.

Es ist

$$\frac{e^{px} - 1}{x} = p + \frac{p^2}{2!} x + \frac{p^3}{3!} x^2 + \cdots\cdots + \frac{p^{m+1}}{(m+1)!} x^m + \cdots$$

und

$$1) \quad \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots} = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

wo die A noch zu bestimmende numerische Coefficienten bezeichnen.

Man hat nun

$$1 = 1 + (A_1 + \tfrac{1}{2}) x + (A_2 + \tfrac{A_1}{2!} + \tfrac{1}{3!}) x^2 + (A_3 + \tfrac{A_2}{2!} + \tfrac{A_1}{3!} + \tfrac{1}{4!}) x^3 + \cdots$$

welche Gleichung nur bestehen kann, wenn die Coefficienten von x, x^2, x^3, ... sämmtlich $= 0$ sind.

Hieraus ergeben sich Bestimmungsgleichungen für A_1, A_2, ...

$$A_1 + \tfrac{1}{2!} = 0 \qquad\qquad A_1 = -\tfrac{1}{2}$$

$$A_2 + \tfrac{A_1}{2!} + \tfrac{1}{3!} = 0 \qquad\qquad A_2 = +\tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{2!}$$

. . . .

Setzt man $-x$ statt x, so kommt einerseits

$$\frac{-x}{e^{-x} - 1} = 1 - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + \cdots\cdots$$

andererseits ist

$$\frac{-x}{e^{-x} - 1} = \frac{-xe^x}{1 - e^x} = x - \frac{x}{1 - e^x} = 1 + (A_1 + 1) x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots\cdots$$

folglich $1 - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + \ldots\ldots = 1 + (A_1 + 1) x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots$

d. h.

$$\begin{array}{ll} -A_1 = (A_1 + 1), & \text{daraus } A_1 = -\tfrac{1}{2}, \\ A_2 = A_2 & \\ -A_3 = A_3 & \quad " \quad A_3 = 0 \\ A_4 = A_4 & \\ -A_5 = A_5 & \quad " \quad A_5 = 0 \\ \ldots\ldots & \end{array}$$

Daraus scheint hervorzugehen, dass die mit ungeraden Indices behafteten A, von A_3 angefangen, sämmtlich $= 0$ sind.

Dividirt man 1) durch x, so kommt

$$2)\ \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} + A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots\ldots, \text{ wo } A_1 = -\tfrac{1}{2}$$

Setzt man hierin $-x$ statt x und bemerkt, dass

$$\frac{1}{e^{-x} - 1} = \frac{e^x}{1 - e^x} = \frac{-e^x}{e^x - 1} \text{ wird, so hat man}$$

$$3)\ \frac{-e^x}{e^x - 1} = -\frac{1}{x} + A_1 - A_2 x + A_3 x^2 - A_4 x^3 + \ldots\ldots$$

Durch Addition der Gleichungen 2) und 3) ergibt sich in Betracht, dass $2 A_1 = -1$ ist

$$0 = 2 A_3 x^2 + 2 A_5 x^4 + 2 A_7 x^6 + \ldots\ldots$$

woraus unzweifelhaft folgt, dass $A_3 = A_5 = A_7 = \ldots = 0$ ist.

In Betracht, dass $A_1 = -\frac{1}{2}$ ist, kann die Gleichung 2) folgendermassen geschrieben werden.

$$x\left(\frac{1}{e^x - 1} + \tfrac{1}{2}\right) = 1 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + \ldots = \sum_{0}^{\infty}{}_{(k)} A_{2k} \cdot x^{2k}$$

wo $A_0 = 1$ ist, während $A_2, A_4, \ldots$ noch zu bestimmen sind.

Weil aber

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots = \sum_{0}^{\infty}{}_{(r)} \cdot \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} \text{ ist,}$$

so folgt, wenn obige Gleichung damit multiplicirt wird

$$x + \tfrac{1}{2} \sum_{0}{}_{(r)} \frac{x^{r+2}}{(r+1)!} = \sum{}_{(k,r)} A_{2k} \frac{x^{2k+r+1}}{(r+1)!}$$

wo rechts die Summation simultan auf die Variablen k, r zu erstrecken ist.

Nimmt man hier rechts und links den Coefficienten von x^{m+1}, wo m jede positive ganze Zahl vorstellt, so hat man die Gleichung

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m!}=\sum_{[r+2k=m]}\frac{A_{2k}}{(r+1)!}=\sum_{[r+2k=m]}\frac{A_{2k}}{(m+1-2k)!}\ {}^{*)}$$

Sondert man von der Reihe rechts das Glied für $k=0$ ab, (indem man $k=0$ und dann $k+1$ statt k schreibt), multiplicirt beiderseits mit $m!$ und reducirt die Gleichung auf Null, so kommt

$$\sum_{[r+2k=m-2]}\frac{m!}{(m-1-2k)!}A_{2k+2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{m+1}=0$$

aus welcher Gleichung, wenn man statt m successive 2, 4, 6, ... (oder auch 3, 5, 7, ...) setzt, die Coefficienten A_2, A_4, ... bestimmbar sind.

Subtrahirt man Gleichung 3) von 2), so ergibt sich weiter, wenn noch mit $\frac{1}{2}x$ multiplicirt wird,

$$4)\quad \tfrac{1}{2}x\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}=1+A_2x^2+A_4x^4+\ldots\ldots=\sum_{(k)\,0}^{\infty}A_{2k}\,x^{2k},$$

da $A_0=1$.

Diese Gleichung liefert, wenn man statt e^x die Reihe $\sum\limits_{(r)\,0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}$ setzt, die Brüche wegschafft und vergleicht, die obigen Bestimmungsgleichungen für die A nochmals.

Beachtet man, dass

$$\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{e^{\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}}=-\frac{e^{\frac{1}{2}xi.i}+e^{-\frac{1}{2}xi.i}}{e^{\frac{1}{2}xi.i}-e^{-\frac{1}{2}xi.i}}=$$

$$i\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}xi}{\sin\frac{1}{2}xi},=i\cdot\cot.\tfrac{1}{2}xi,$$ so folgt, wenn man in 4) $-xi$ statt x einführt

$$5)\quad \tfrac{1}{2}x\cdot\frac{e^{-xi}+1}{e^{-xi}-1}=\tfrac{1}{2}x\cot\tfrac{1}{2}x=1-A_2x^2+A_4x^4-\ldots\ldots$$

$$=\sum_{(k)}^{\infty}(-1)^k A_{2k}\cdot x^{2k}$$

Ausserdem weiss man, dass

$$\tfrac{1}{2}x\cdot\cot\tfrac{1}{2}x=1-\frac{B_1}{2!}x^2-\frac{B_3}{4!}x^4-\frac{B_5}{6!}x^6-\ldots\ldots$$

---

*) Die Gleichungen unter dem Σ bestimmen die Amplitude der Summation. (Vgl. Schröder. Lehrb. d. Arith. u. Alg. I. Bd.)

$$= -\sum_{0}^{\infty}{}_{(k)} \frac{B_{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}, \text{ für } -2\pi < x < 2\pi$$

wenn man unter B_{-1} die negative Einheit versteht.

Die nunmehr sich ergebende Gleichung

$$\sum_{0}^{n}{}_{(k)} (-1)^k A_{2k} \cdot x^{2k} = -\sum_{0}^{n}{}_{(k)} \frac{B_{2k-1}}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

liefert schliesslich

$$A_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{B_{2k-1}}{(2k)!}$$

Nota I) Die hier auftretenden Coefficienten B sind die (von Euler so genannten) Bernoulli'schen Zahlen.

Die n^{te} Bernoulli'sche Zahl ist nach Prof. Glaisher in Cambridge gegeben durch die folgende Determinante n^{ten} Grades:

$$\frac{B_{2n-1}}{2^n (2n)!} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4!} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & 0 \\ \frac{2}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 0 & & 0 \\ \frac{3}{8!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{n}{(2n+2)!} & \frac{1}{2n!} & \frac{1}{2n-2!} & \frac{1}{2n-4!} & \cdots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

Nota II) Aus Gleichung 2) resultirt die Cauchy'sche Gleichung

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = \frac{B_1}{2!} - \frac{B_3}{4!} x^2 + \ldots.$$

Der gesuchte Factor ist also

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \tfrac{1}{2} x + \sum_{0}{}_{(k)} (-1)^{k-1} \frac{B_{2k-1}}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

und folglich

$$\frac{e^{px} - 1}{e^x - 1} = p + \left(\frac{p^2}{3!} - \frac{p}{2}\right) x + \left(\frac{p^3}{3!} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{2!} + \frac{p}{2!} B_1\right) x^2 + \ldots..$$

$$+ \left(\frac{p^{m+1}}{(m+1)!} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p^m}{m!} + \frac{B_1}{2!} \cdot \frac{p^{m-1}}{(m-1)!} - \frac{B_3}{4!} \cdot \frac{p^{m-3}}{(m-3)!} + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{B_{2k-1}}{(2k)!} \cdot \frac{p^{m-\overline{2k-1}}}{(m-\overline{2k-1})!}\right) x^m$$

und die Summe

6) $1^m + 2^m + \ldots\ldots + (p-2)^m + (p-1)^m =$

$$D_x^m \left[\left(\frac{p^{m+1}}{(m+1)!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p^m}{m!} + \ldots\ldots + (-1)^{k-1} \frac{B_{2k-1}}{(2k)!} \cdot \frac{p^{m-(2k-1)}}{(m-\overline{2k-1})!}\right) x^m\right]_{(0)}$$

$$= \frac{p^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2} p^m + \frac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 p^{m-1} - \frac{1}{4}\binom{m}{3} B_3 p^{m-3} + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{k-1} \frac{1}{2k}\binom{m}{2k-1} B_{2k-1} p^{m-(2k-1)} + \ldots$$

$$= \frac{1}{m+1}\left[p^{m+1} - \frac{m+1}{2} \cdot p^m + \binom{m+1}{2} B_1 p^{m-1} - \binom{m+1}{4} B_3 p^{m-3} + \ldots \right.$$

$$\left. + (-1)^{k-1} \binom{m+1}{2k} B_{2k-1} p^{m-(2k-1)} \right]$$

$$= \frac{1}{m+1} \cdot \varphi_{m+1}(p)$$

Diese rechts stehende Reihe für $\varphi_{m+1}(p)$ schliesst bei geraden m mit dem Gliede $\pm \frac{1}{m} \cdot \binom{m}{m-1} B_{m-1}\, p$, bei ungeraden m mit dem Gliede $\pm \frac{1}{m-1} \cdot \binom{m}{m-2} B_{m-2}\, p^2$, folglich hat φ (p) keinen von p freien Term.

Setzt man noch $m = n-1$, so kommt

$$\varphi_n(p) = p^n - \frac{n}{2} p^{n-1} + \binom{n}{2} B_1 p^{n-2} - \binom{n}{4} B_3 p^{n-4} + \binom{n}{6} B_5 p^{n-6} - \ldots$$

als die gesuchte Function. Dieselbe enthält keinen von p freien Term; unter $\binom{n}{2}, \binom{n}{4}, \ldots$ sind die Binomialcoefficienten der n^{ten} Potenz, unter $B_1, B_3, \ldots\ldots$ die Bernoulli'schen Zahlen zu verstehen.

Während der Ableitung zufolge p eine positive ganze Zahl > 1 bedeutet, kann im Polynom φ statt p eine beliebige Variable t gesetzt werden und man erhält dann einen Ausdruck, welcher eine *ganze rationale Function von* t darstellt. Sohin ist die Function φ_n (t) durch die Gleichung

$$\varphi_n(t) = t^n - \frac{n}{2} t^{n-1} + \sum_{k=1}^{k \leq \frac{1}{2}(n-1)} (-1)^{k-1} \binom{n}{2k} B_{2k-1}\, t^{n-2k}$$

definirt und heisst die *Bernoulli'sche Function* n^{ter} *Ordnung*.

Da nun $D_x^m \left\{\frac{e^{tx} - e^x}{e^x - 1}\right\}_{(x=o)} = \frac{1}{m+1} \cdot \varphi_{m+1}(t)$ so ergibt sich, dass die *Functionen* φ *Differenzial-Quotienten* sind.

Eigenschaften der Bernoulli'schen Functionen.

I.) $\varphi_n(0) = 0$

II.) $\varphi_n(t+1) - \varphi_n(t) = nt^{n-1}$

Denn es ist

$$\varphi_n(t+1) - \varphi(t) = n \left[D_x^{n-1}\left(\frac{e^{(1+t)x} - e^x}{e^x - 1}\right)_{(0)} - D_x^{n-1}\left(\frac{e^{tx} - e^x}{e^x - 1}\right)_{(0)} \right]$$

$$= n\, D_x^{n-1}(e^{tx})_{(0)} = n\, t^{n-1}$$

III.) Die Functionen φ sind bezüglich der Argumente t und 1—t symmetrisch oder alternirend, je nachdem sie von gerader oder ungerader Ordnung sind, d. h. es ist

$$\varphi_m(1-t) = (-1)^m \cdot \varphi_m(t)$$

Denn es ist

$$D_x^m \left\{\frac{e^{tx} - e^x}{e^x - 1}\right\}_{(0)} = \frac{1}{m+1} \cdot \varphi_{m+1}(t)$$

Ferner ist identisch

$$\frac{e^{(1-t)x} - 1}{e^x - 1} = 1 - \frac{e^{-tx} - 1}{e^{-x} - 1} = 1 - \frac{e^{tz} - 1}{e^z - 1}, \text{ wenn } -x = z \text{ gesetzt wird;}$$

somit

$$D_x^m \left\{\frac{e^{(1-t)x} - 1}{e^x - 1}\right\}_{(0)} = D_x^m \left\{1 - \frac{e^{tz} - 1}{e^z - 1}\right\}_{(0)} = - D_x^m \left\{\frac{e^{tz} - 1}{e^z - 1}\right\}_{(0)}$$

und $$\frac{1}{m+1} \cdot \varphi_{m+1}(1-t) = \frac{1}{m+1} \cdot (-1)^{m+1} \varphi_{m+1}(t)$$

Hieraus folgt, wenn noch m—1 statt m gesetzt wird

$$\varphi_m(1-t) = (-1)^m \cdot \varphi_m(t)$$

Die Function φ nimmt also von $t = \frac{1}{2}$ bis $t = 1$ in umgekehrter Folge dieselben absoluten Werte an, welche sie von $t = 0$ bis $t = 1/2$ hatte und zwar mit dem gleichen oder mit entgegengesetztem Vorzeichen, je nachdem die Function von gerader oder ungerader Ordnung ist.

Die Untersuchung der Function φ kann daher auf das Intervall von $t = 0$ bis $t = 1/2$ beschränkt werden.

Für $t = 1/2$ und ein ungerades $m = 2n-1$ gibt die obige Gleichung

$$\varphi_{2n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0$$

ferner da $$\varphi_m(0) = (-1)^m \cdot \varphi_m(1) \quad \text{und}$$

$$\varphi_m(0) = 0 \quad \text{ist,}$$

$$\varphi_m(1) = 0 \quad \text{wenn nur } m > 1 \text{ ist.}$$

IV.) $$\varphi_{2n}(\tfrac{1}{2})=(-1)^n \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} \, . \, B^{2n-1}$$

Beweis $$\frac{\varphi_m(\frac{1}{2})}{m} = D_x^{m-1} \left\{\frac{e^{x/2}-1}{e^x-1}\right\}_{(0)} = D_x^{m-1} \left\{\frac{e^{x/2}+1}{e^x-1} - \frac{2}{e^x-1}\right\}_{(0)}$$
$$= D_x^{m-1} \left\{\frac{1}{e^{x/2}-1} - \frac{2}{e^x-1}\right\}_{(0)}$$

Nach Gleichung 2) ist
$$\frac{2}{e^x-1} = \frac{2}{x} + 2A_1 + 2A_2 x + 2A_3 x^2 + \ldots\ldots + 2A_m x^{m-1}$$
und $$\frac{1}{e^{x/2}-1} = \frac{2}{x} + A_1 + A_2 \, . \, \frac{x}{2} + A_3\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots\ldots + A_m\left(\frac{x}{2}\right)^{m-1}$$
Hieraus zieht man
$$\frac{1}{e^{x/2}-1} - \frac{2}{e^x-1} = -A_1 + A_2\left(\frac{1}{2}-2\right)x + A_3\left(\frac{1}{2^2}-2\right)x^2 + \ldots$$
$$\ldots + A_m\left(\frac{1}{2^{m-1}}-2\right)x^{m-1} + \ldots$$

und $$\frac{1}{m} \cdot \varphi_m(\tfrac{1}{2}) = -(m-1)! \, A_m \frac{2^m-1}{2^{m-1}}$$

oder $$\varphi_m(\tfrac{1}{2}) = -m! \, A_m \frac{2^m-1}{2^{m-1}}$$

Ist nun $m = 2n-1$, so ist $A_3 = A_5 = \ldots = A_{2n-1} = 0$

ist $m = 2n$, so ist $A_{2n} = (-1)^{n-1} \dfrac{B^{2n-1}}{(2n)!}$

somit $\varphi_{2n}(\frac{1}{2}) = (-1)^n \dfrac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} \, . \, B_{2n-1}$ q. e. d.

V.) Um die Eigenschaften der Differenzialquotienten von $\varphi_m(t)$ zu erkennen, kann man (nach Schloem. Comp. d. h. An. II. Bd.) die Function $\dfrac{e^{tx}-1}{e^x-1}$ (m—1)-mal in Beziehung auf x und 1-mal in Beziehung auf t differenziren unter Anwendung des Satzes, dass die Reihenfolge dieser Operationen willkürlich ist. Es kommt

$$D_t \, D_x^{m-1} \left(\frac{e^{tx}-1}{e^x-1}\right) = D_x^{m-1} \, D_t \left(\frac{e^{tx}-1}{e^x-1}\right) = D_x^{m-1} \left(\frac{xe^{tx}}{e^x-1}\right)$$
$$= D_x^{m-1} \left\{x\frac{e^{tx}-1}{e^x-1} + \frac{x}{e^x-1}\right\}$$

folglich für $x=0$

$$D_t \left\{\frac{1}{m} \cdot \varphi_m(t)\right\} = (m-1)\, D_x^{m-2} \left(\frac{e^{tx}-1}{e^x-1}\right)_{(0)} + (m-1)!\, A_{m-1}$$

$$= \varphi_{m-1}(t) + (m-1)!\, A_{m-1}$$

worin noch die Resultate für gerade und ungerade m zu sondern sind.

Es ist
$$\left.\begin{aligned} \varphi'_{2n}(t) &= 2n \cdot \varphi_{2n-1}(t) \qquad n > 1 \\ \varphi'_{2n+1}(t) &= (2n+1)\left[\varphi_{2n}(t) + (-1)^{n-1} B_{2n-1}\right] \end{aligned}\right\}$$

Durch Umkehrung gewinnt man hieraus noch

$$\int_0^t \varphi_{2n}(t)\, dt = \frac{1}{2n+1} \cdot \varphi_{2n+1}(t) + (-1)^n B_{2n-1} \cdot t$$

und als speciellen Fall

$$\int_0^{1/2} \varphi_{2n}(t)\, dt = (-1)^n \tfrac{1}{2} B_{2n-1}$$

Da $\varphi_{2n}(1-t) = \varphi_{2n}(t)$, so ist immer

$$\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\, dt = 2 \int_0^{1/2} \varphi_{2n}(t)\, dt$$

VI.) Um den Gang der Bernoulli'schen Functionen innerhalb des Intervalles $t = o$ bis $t = 1/2$ zu übersehen, betrachten wir vorerst die Functionen gerader Ordnung. Irgend zwei unmittelbar auf einander folgende Functionen gerader Ordnung können mit $\varphi_{2\mu}(t)$, $\varphi_{2\mu+2}(t)$ bezeichnet werden.

Setzt man noch $t = \frac{v}{h}$, so ist

$$\varphi_{2n}\left(\frac{v}{h}\right) = \varphi_{2n}\left(\frac{h-v}{h}\right) = \frac{(2n)!}{h^{2n}} \left\{\frac{(h-v)^{2n}}{2n!} + A_1 h \frac{(h-v)^{2n-1}}{(2n-1)!}\right.$$

$$\left. + A_2 h^2 \frac{(h-v)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots + A_{2n-2} h^{2n-2} \frac{(h-v)^2}{2!} + A_{2n-1} h^{2n-1} \frac{(h-v)}{1!}\right\}$$

$$= \frac{(2n)!}{h^{2n}} \cdot \sum_{0}^{2n-1}{}_{(k)} A_k \frac{h^k (h-v)^{2n-k}}{(2n-k)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{h^{2n}} \cdot \psi_{2n}(h-v) \quad {}^{*)}$$

*) Vgl. M. Ohm, System der Mathematik. 8. Thl.

Die Coefficienten A sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A_{2k-1} &= 0 \quad , \quad A_1 = -\tfrac{1}{2} \\ A_{2k} &= (-1)^{k-1} \cdot \frac{B_{2k-1}}{(2k)!} \end{aligned}\right\}$$

Es ist jetzt die Function ψ im Intervalle $v = o$ bis $v = \frac{1}{2} h$ zu betrachten. Man kann folgenden Satz aussprechen:

Hat die Ableitung $D_v\, \psi_{2\mu}(v) = \psi'_{2\mu}(v)$ für irgend einen bestimmten positiv-ganzen Wert von v im Intervalle von $v=o$ bis $v=\frac{1}{2}h$ ein bestimmtes Vorzeichen, so ist dasselbe der Fall mit der Ableitung $\psi'_{2\mu+2}(v)$, die aber dann innerhalb desselben Intervalles stets das entgegengesetzte Vorzeichen hat.

$$\text{Es ist } \psi'_{2\mu}(v) = \sum_{0}^{2\mu-1}{}_{(k)} A_k \frac{h^k\, v^{2\mu-1-k}}{(2\mu-1-k)!}$$

Multiplicirt man die Gleichung mit $h^{-2\mu-2}$ und integrirt zwischen den Grenzen $h=h$ und $h=+\infty$, so kommt

$$\int_h^{+\infty} \frac{\psi'_{2\mu}(v)}{h^{2\mu+2}}\, dh = \sum_{0}^{2\mu-1}{}_{(k)} A_k \frac{v^{2\mu-1-k}}{(2\mu+1-k)\;(2\mu-1-k)!} \cdot \frac{1}{h^{2\mu+1-k}}$$

Da offenbar das links stehende Integral mit ψ' stets einerlei Vorzeichen hat, so hat auch das rechts stehende Aggregat so lange einerlei Vorzeichen, als ψ' einerlei Vorzeichen hat d. h. zufolge der Voraussetzung für alle Werte von v die zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ h liegen.

Integrirt man noch nach v zwischen den Grenzen $v=v$ und $v=\frac{1}{2}h$ so kommt

$$\int_v^{1/2 h}\int_h^{\infty} \frac{\psi'_{2\mu}(v)}{h^{2\mu+2}}\, dh.\, dv = \frac{1}{h}\sum_{0}^{2\mu-1}{}_{(k)} A_k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu-k}}{(2\mu+1-k)!} - \frac{1}{h^{2\mu+1}}\sum_{0}^{2\mu-1}{}_{(k)} A_k \frac{h^k v^{2\mu-k}}{(2\mu+1-k)!}$$

und es muss, weil die Summe von Summanden, die einerlei Vorzeichen haben, dasselbe Vorzeichen annimmt, auch dieser Ausdruck zur Rechten von $v=o$ bis $v=\frac{1}{2}h$ mit $\psi'_{2\mu}(v)$ ein und dasselbe Vorzeichen behalten. Nun ist der Minuend der rechts stehenden Differenz

$$= \frac{2}{h} \cdot \frac{1}{(2\mu+1)!} \cdot \varphi_{2\mu+1}\left(\tfrac{1}{2}\right) - \frac{1}{h}\, A_{2\mu}$$

d. h. nach III.

$$= -\frac{1}{h} \cdot A_{2\mu} = (-1)^{\mu} \frac{B_{2\mu-1}}{(2\mu)!} \cdot \frac{1}{h}\;;$$

der Subtrahend kann auch so dargestellt werden

$$\frac{1}{h^{2\mu+1}} \cdot \frac{1}{v}\left[\sum_{(k)}^{2\mu}{}_{0} A_k \frac{h^k\, v^{2\mu+1-k}}{(2\mu+1-k)!} - A_{2\mu}\, h^{2\mu} \frac{v}{1!}\right]$$

Wird die Subtraction ausgeführt, so tilgen sich der Minuend und das zweite Glied des Subtrahends und es bleibt

$$-\frac{1}{h^{2\mu+1}} \cdot \frac{1}{v}\sum_{(k)}^{2\mu}{}_{0} A_k \frac{h^k\, v^{2\mu+1-k}}{(2\mu+1-k)!} = -\frac{1}{h^{2\mu+1}} \cdot \frac{1}{v} \cdot \psi'_{2\mu+2}(v)$$

d. h. $-\frac{1}{h^{2\mu+1}} \cdot \frac{1}{v} \cdot \psi'_{2\mu+2}(v)$ hat mit $\psi'_{2\mu}(v)$ im Intervalle von $v = 0$ bis $v = \frac{1}{2}h$ stets dasselbe und einerlei Vorzeichen.

Da nun $\psi'_2(v) = v - \frac{1}{2}h$ im Intervalle $v = 0 \ldots \frac{1}{2}h$ beständig negativ ist, so ist $\psi'_4(v)$ beständig positiv, $\psi'_6(v)$ beständig negativ, $\psi'_8(v)$ beständig positiv, d. h. $\psi'_{2\mu}(v)$ im besagten Intervall beständig $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ je nachdem $\mu = \left\{\begin{matrix}2\nu-1\\ 2\nu\end{matrix}\right\}$ ist. Weil aber $\psi_{2\mu}(v)$ beständig $\left\{\begin{matrix}\text{steigend}\\ \text{fallend}\end{matrix}\right\}$ ist, je nachdem die Ableitung $\psi'_{2\mu}(v)$ stets $\left\{\begin{matrix}>0\\ <0\end{matrix}\right\}$, so ist die Function ψ, da sie für $v = 0$ verschwindet, innerhalb des Intervalles von $v = 0$ bis $v = \frac{1}{2}h$ $\left\{\begin{matrix}\text{beständig negativ}\\ \text{beständig positiv}\end{matrix}\right\}$, so oft $\mu = \left\{\begin{matrix}2\nu-1\\ 2\nu\end{matrix}\right\}$ ist.

Wenn aber die Function ψ von $v = 0$ bis $v = \frac{1}{2}h$ beständig einerlei Vorzeichen hat, dann hat sie auch beständig dasselbe Vorzeichen von $v = {}^1/_2 h$ bis $v = h$ hin, da $\psi(h - v) = \psi(v)$.

Folglich ist im Intervalle $v = 0$ bis $v = h$ der Wert von $\psi_{2\mu}(v)$ beständig negativ, wenn $\mu = 2\nu - 1$ und beständig positiv, wenn $\mu = 2\nu$ gedacht wird. Mit diesem Verhalten von $\psi_{2\mu}(v)$ im Intervalle $v = 0$ bis $v = h$ stimmt, wie ersichtlich, das Verhalten von $\varphi_{2\mu}(t)$ im Intervalle $t = 0$ bis $t = 1$ überein.

Gang der Functionen $\varphi_m(t)$ für $m = 4\nu \mp 1$

Da $\varphi_2(t)$ im Intervalle von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}$ von Null an stets negativ bleibt, so ist der Wert von $\frac{1}{3} \cdot \varphi_3'(t) = \varphi_2(t) + B_1$ für $t = 0$ positiv, nimmt dann stetig ab und wird für $t = \frac{1}{2}$

$$= -\frac{1}{4} + B_1 = -\frac{1}{12}$$

woraus folgt, dass es zwischen $t = 0$ und $t = {}^1/_2$ einen aber nur einen Wert gibt, für welchen $\varphi_3'(t)$ verschwindet.

Somit wächst $\varphi_3(t)$ von Null an, hat bei $t = {}^1/_2\,(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$ ein Maximum und nimmt dann bis $t = {}^1/_2$ ab, wo $\varphi_3(t) = 0$ ist; mithin bleibt $\varphi_3(t) > 0$ von $t = 0$ bis $t = {}^1/_2$.

Von $t = {}^1/_2$ bis $t = 1$ bleibt $\varphi_3(t) < 0$ und hat bei $t = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$ ein Minimum.

In $\frac{1}{5} \cdot \varphi_5'(t) = \varphi_4(t) - B_3$ ist die rechte Seite für $t = 0$ negativ wird aber, da $\varphi_4(t)$ im Intervall von $t = 0$ bis $t = {}^1/_2$ von Null an beständig zunehmend ist, immer grösser und erreicht für $t = {}^1/_2$ den grössten Wert

$$= \left[\frac{2^4 - 1}{2^3} - 1\right] B_3 = \left[1 - \frac{1}{2^3}\right] B_3 > 0$$

Hieraus folgt, dass $\varphi_5(t)$ erst von Null an abnimmt, negativ bleibt von $t = 0$ bis $t = {}^1/_2$, zwischen $t = 0$ und $t = {}^1/_2$ für $t = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ein Minimum hat und für $t = {}^1/_2$ wieder Null ist.

Die Schlussweise für die folgenden Functionen ungerader Ordnung bleibt dieselbe.

Das Gesammtergebniss dieser Schlüsse kann graphisch zur Ansicht gebracht werden, wenn man t als Abscisse und $\varphi_m(t)$ als zugehörige senkrecht auf t stehende Ordinate construirt. (Man sehe Schloem. Comp. d. höh. Anal. II. Bd.)

Setzt man nun die Werte der Derivirten von $\varphi_{2n}(t)$ in die Fundamentalformel I) ein, so kommt, wenn 2n für n gesetzt wird

$$\text{III. a)} \left\{ \begin{aligned} F(x+h) - F(x) = \frac{h}{2}[F'(x+h) + F'(x)] - \frac{B_1 h^2}{2!}[F''(x+h) - F''(x)] \\ + \frac{B_3 h^4}{4!}[F^{IV}(x+h) - F^{IV}(x)] - \ldots - \\ + (-1)^{n-1} \frac{B_{2n-3}\, h^{2n-2}}{(2n-2)!}[F^{2n-2}(x+h) - F^{2n-2}(x)] - R_{2n} \end{aligned} \right.$$

oder

$$\text{III. b)} \left\{ \begin{aligned} h F'(x) = \Delta F(x) - \frac{h}{2} \Delta F'(x) + \frac{B_1 h^2}{2!} \Delta F''(x) - \frac{B_3 h^4}{4!} \Delta F^{IV}(x) \\ + \ldots + (-1)^n \frac{B_{2n-3}\, h^{2n-2}}{(2n-2)!} \Delta F^{2n-2}(x) + R_{2n} \\ \text{wo } R_{2n} = \frac{-h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 \varphi_{2n}(t)\, F^{2n+1}(x+ht)\, dt \text{ ist} - \end{aligned} \right.$$

und hiemit ist die Formel von Mac-Laurin gefunden.

Da $\varphi_{2n}(t)$ zwischen 0 und 1 von beständigem Vorzeichen ist, so ist

$$R_{2n} = \frac{-h^{2n+1}}{(2n)!} F^{2n+1}(x+\theta h) \int_0^1 \varphi_{2n}(t)\, dt = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1}\, h^{2n+1}}{(2n)!} F^{2n+1}(x+\theta h)$$

In der allgemeinen Gleichung III. a) nehme x successive die Werte $a, a+h, a+2h, \ldots\ldots, a+\overline{q-1}h$ an; durch Addition der so entstehenden Gleichungen resultirt, wenn noch $a+qh=b$ und $F'(x)=f(x)$ gesetzt wird

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$=h\,[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots+f(a+\overline{q-1}h)]$$

$$+\frac{h}{2}[f(b)-f(a)]-\frac{B_1h^2}{2!}[f'(b)-f'(a)]+\frac{B_3h^4}{4!}[f'''(b)-f'''(a)]$$

$$-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n-3}\,h^{2n-2}}{(2n-2)!}[f^{2n-3}(b)-f^{2n-3}(a)]$$

$$+\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\varphi_{2n}(t)\;H_{2n}(t)\,dt$$

oder

$$h\,[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots+f(a+\overline{q-1}\,h)]$$

$$=\int_a^{b=a+qh} f(u)\,du-\frac{h}{2}[f(b)-f(a)]+\sum_{1}^{n-1}{}_{(k)}(-1)^{k-1}\frac{B_{2k-1}\,h^{2k}}{(2k)!}$$

$$[f^{2k-1}(b)-f^{2k-1}(a)]+S_{2n}$$

wo

$$S_{2n}=-\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\varphi_{2n}(t)\;[f^{2n}(a+ht)+f^{2n}(a+h+ht)+f^{2n}(a+2h+ht)+\ldots\ldots$$

$$+f^{2n}(a+\overline{q-1}h+ht)]\,dt,$$

woraus auch die Bedeutung von $H_{2n}(t)$ zu ersehen ist.

Unter der Voraussetzung, dass $f^{2n}(u)$ von beständigem Zeichen ist für alle u von a bis b, lässt sich S_{2n} vereinfachen.

Unter dieser wesentlichen Voraussetzung ist

$$S_{2n}=-\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\varphi_{2n}(1-t)\,.\,H_{2n}(t)\,dt=-\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\varphi_{2n}(1-T)\int_0^1 H_{2n}(t)\,dt$$

$$0<T<1$$

ferner

$$\int_0^1 H_{2n}(t)\,dt=\frac{1}{h}[f^{2n-1}(b)-f^{2n-1}(a)]$$

Da die Function $\varphi_{2n}(1-t)=\varphi_{2n}(t)$ von $t=0$ bis $t={}^1\!/_2$ von Null an continuirlich $\left\{\begin{matrix}\text{wächst}\\ \text{abnimmt}\end{matrix}\right\}$, je nachdem n $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ ist, so ist $\varphi_{2n}(\frac{1}{2})$

positiv oder negativ, aber an sich der grösste Wert von $\varphi_{2n}(t)$ im besagten Intervalle; also kann man $\lambda \,.\, \varphi_{2n}(^1/_2)$ statt $\varphi_{2n}(1-T)$ setzen, wenn man sich λ zwar unbekannt aber zwischen 0 und 1 denkt.

Demnach ist $\varphi_{2n}(1-T) = (-1)^n \lambda \,.\, \dfrac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} B_{2n-1}$

wodurch man erhält

$$S_{2n} = (-1)^{n+1} \lambda \,.\, \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} \frac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} \left[f^{2n-1}(b) - f^{2n-1}(a)\right]$$

Da ferner $\dfrac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} = 2 - \dfrac{1}{2^{2n-1}} < 2$ ist, so liegt jedenfalls $\lambda \dfrac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}}$ zwischen 0 und 2, folglich $\rho = -1 + \lambda \dfrac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}}$ jedenfalls zwischen -1 und $+1$ und man hat $\quad \lambda \dfrac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} = 1 + \rho$, wo $-1 < \rho < +1$.

Es ist noch zu entscheiden, in welchen Fällen ρ positiv und in welchen es negativ ist.

*) Es ist, wenn $F^{2n+1}(u)$ zwischen $u = x$ und $u = x + h$ sein Vorzeichen nicht wechselt,

$$R_{2n} = -\frac{h^{2n+1}}{(2n)!} \varphi_{2n}(1-T) \int_0^1 F^{2n+1}(x+ht)\, dt$$

$$= (-1)^{n+1} (1+\rho) \frac{B_{2n-1}}{(2n)!} h^{2n} \left[F^{2n}(x+ht)\right]_0^1$$

Führt man die Reihe III. b) um ein Glied weiter, so kommt

$$R_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1}\; h^{2n}}{(2n)!} \Delta F^{2n}(x) + R_{2n+2}$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$R_{2n+2} = (-1)^{n+1} \,.\, \rho \frac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} \Delta F^{2n}(x) \quad -1 < \rho < +1$$

und, wenn R_{2n+2} direct entwickelt wird

$$(-1)^n \frac{B_{2n+1}\; h^{2n+3}}{(2n+2)!} \,.\, F^{2n+3}(x+h\theta) = (-1)^{n+1} \rho \frac{B_{2n-1}\; h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 F^{2n+1}(x+ht)\, dt$$

oder einfacher, da $F^{2n+1}(u) = f^{2n}(u)$,

$$\frac{B_{2n+1}\; h^2}{(2n+1)\,(2n+2)} \,.\, f^{2n+2}(x+h\theta) = -\rho\, B_{2n-1} \int_0^1 f^{2n}(x+ht)\, dt$$

*) Nach Schloemilch, Comp. d. hoch. Anal. II. Bd.

Der Voraussetzung zufolge ist $F^{2n+1}(u)$, d. h. jede Derivirte ungerader Ordnung von beständigem Vorzeichen, wenn u von x bis $x+h$ variirt; dasselbe gilt von $F^{2n+3}(x+h\theta)$. — Besitzen nun $f^{2n+2}(u)$ und $f^{2n}(u)$ gleiche Vorzeichen, so kommt dieses Vorzeichen auch dem rechts stehenden Integrale zu und dann muss ρ negativ sein; haben dagegen $f^{2n+2}(u)$ und $f^{2n}(u)$ ungleiche Vorzeichen, so muss aus denselben Gründen ρ positiv sein.

Demzufolge ist, da $f^{2n}(u)$ von $x=a$ bis $x=b$ dasselbe Zeichen behält,

$$S_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} [f^{2n-1}(b) - f^{2n-1}(a)]$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} \left\{ \begin{aligned} &\rho_1 [f^{2n-1}(a+h) - f^{2n-1}(a)] \\ &+ \rho_2 [f^{2n-1}(a+2h) - f^{2n-1}(a+h)] \\ &+ \ldots\ldots\ldots \\ &+ \rho_q [f^{2n-1}(a+qh) - f^{2n-1}(a+\overline{q-1}h)] \end{aligned} \right\}$$

Im Falle, dass alle ρ positiv sind und $f^{2n-1}(u) \left\{ \begin{matrix} \text{wächst} \\ \text{abnimmt} \end{matrix} \right\}$, hat man für den Klammerinhalt T die Grenzen

$$0 \lesseqgtr T \lesseqgtr f^{2n-1}(a+qh) - f^{2n-1}(a);$$

es kann folglich

$T = \rho\ [f^{2n-1}(b) - f^{2n-1}(a)]$ gesetzt werden, wo $0 < \rho < +1$

Bei negativen $\rho_1, \rho_2, \ldots. \rho_q$ gelten für $-T$ die nämlichen Schlüsse wie für T bei positiven $\rho_1, \rho_2, \ldots. \rho_q$; somit ist allgemein die Ergänzung $S_{2n+2} = (-1)^{n+1}\rho \dfrac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)!} [f^{2n-1}(b) - f^{2n-1}(a)]$ d. h. ein echter Bruchtheil des Gliedes, bei welchem man stehen bleibt.

Das Verfahren bei der Mac-Laurin'schen Formel kann verallgemeinert werden, wie folgt:

Versteht man unter q eine ganze positive Zahl und setzt

$S\, f(x) \equiv f(x) + f(x+h) + f(x+2h) + \ldots. + f(x+\overline{q-1}h = \varphi(q)$

$S\, f'(x) \equiv f'(x) + f'(x+h) + f'(x+2h) + \ldots. + f'(x+\overline{q-1}h) = \psi(q)$

so ist 1) $\quad \varphi(q+1) - \varphi(q) = f(x+qh)$

und 2) $\quad \psi(q+1) - \psi(q) = f'(x+qh)$

Die Function φ muss der Gleichung 1) genügen für ganze q. Diese Bedingung ist aber a fortiori erfüllt, wenn man die Function φ derart bestimmen kann, dass sie für alle Werte von q der Gleichung 1) genügt. Dann ist aber Gleichung 1) eine Identität und man kann die Ableitungen beider Seiten nehmen in Beziehung auf q.

Es kommt $\quad \varphi'(q+1) - \varphi'(q) = h \,.\, f'(x+qh)$ und verglichen mit 2)

$$= h\,[\psi(q+1) - \psi(q)]$$

Setzt man statt q successive $q+1, q+2, \ldots., q+k$, so kommt durch Addition und Transposition

3) $$\varphi'(q) - h\,\psi(q) = \varphi'(q+k) - h\,\psi(q+k)$$

Da hierin die linke Seite von k unabhängig ist, so muss dasselbe gelten für die rechte Seite; da aber letztere eine Function von $q+k$ ist, so kann sie nicht von k unabhängig sein, ohne es zugleich von q zu sein.

Somit muss $\varphi'(q) - h\,\psi(q) = c$ sein, wo c eine von q unabhängige Constante bezeichnet, oder

$$\frac{d\,S\,f(x)}{dq} = h\,S f'(x) + c, \text{ und durch Integration}$$

IV. $$S\,f(x) = h\int S f'(x)\,dq + cq$$

eine Formel, welche die Summation der Function f(x) von der Summation ihrer Derivirten abhängig macht. Die Beifügung einer neuen Constante unterbleibt, da $S\,f(x) = 0$ sein muss für $q = 0$. — Die c wird man nach jeder Integration dadurch bestimmen, dass man $q = 1$ setzt.

* * *

Aus Mac-Laurin's Formel kann eine Reihenentwicklung für jede ungerade Function erhalten werden, d. h. für jede Function, welcher die Eigenschaft $F(-x) = -F(x)$ zukommt. Mac-Laurin's Formel ist im Grunde genommen eine Formel zur Entwicklung für jede ungerade Function Einer Variablen.

Setzt man $-x$ statt x und 2x für h, so nimmt die genannte Formel fl. Gestalt an*)

$$F(x) - F(-x) = x\,[F'(x) - F'(-x)] - \frac{B_1}{2!}(2x)^2\,[F''(x) - F''(-x)]$$
$$+ \ldots. + (-1)^{n-1}\frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}\,[F^{2n-2}(x) - F^{2n-2}(-x)]$$
$$- R_{2n}$$

wo $$R_{2n} = -\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\,.\,F^{2n+1}(-x+2xt)\,dt$$

Vertauscht man in R_{2n} t mit $1-t$, so erhält man in Betracht, dass

$$\varphi_{2n}(1-t) = \varphi_{2n}(t)$$

$$R_{2n} = -\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\,.\,F^{2n+1}(x-2xt)\,dt.$$

*) Darboux l. c.

Bildet man noch die Halbsumme beider Restwerte, so wird auch

$$R_{2n} = -\frac{2^{2n}\,x^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\,.\,[F^{2n+1}(x-2xt) + F^{2n+1}(-x+2xt)]\,dt$$

Diese Formeln enthalten nur die Function F(x) — F(−x) und deren Ableitungen. — Setzt man 2 F(x) anstatt F(x) — F(—x), so entsteht die Reihe

$$F(x) = x\,.\,F'(x) - \frac{B_1}{2!}(2x)^2.\,F''(x) + \frac{B_3}{4!}(2x)^4.\,F^{IV}(x) - \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}.\,F^{2n-2}(x) - R_{2n}$$

wo unter F(x) eine ungerade Function zu verstehen ist und

$$R_{2n} = -\frac{2^{2n}\,x^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\,.\,F^{2n+1}(-x+2xt)\,dt$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}\,B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n+1}\,.\,F^{2n+1}(-x+2x\vartheta) \qquad 0<\vartheta<1$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}\,B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n+1}\,.\,F^{2n+1}(\theta x) \qquad -1<\theta<1$$

Nimmt man z. B. F(x) = artan x, so erhält man in Rücksicht, dass

$$D^m\,\text{artan}\,x = D^{m-1}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

und für gerade m

$$D^m\,\text{artan}\,x = (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{(m-1)!}{(1+x^2)^m}\sum_{0\,(k)}^{\frac{1}{2}(m-2)}(-1)^k\binom{m}{2k+1}x^{2k+1}\ ^{*)}$$

ist, nach gehöriger Zusammenziehung der Glieder, die Reihe

$$\text{artan}\,x = \frac{x}{1+x^2}\left[1+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2+\frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3+\ldots\right] \qquad x^2<\infty$$

Nimmt man ferner F(x) = sin x, so hat man, da $D^m \sin x$

$$= \sin\left(\frac{m\pi}{2}+x\right) = \mp \sin x \text{ für } m = \begin{Bmatrix}4n+2\\4n\end{Bmatrix} \text{ ist,}$$

$$\sin x = x\,.\,\cos x + \frac{B_1}{2!}(2x)^2\sin x + \frac{B_3}{4!}(2x)^4\sin x + \ldots.$$

$$+\frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}\sin x + \frac{2^{2n}\,B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n+1}\,.\,\cos\theta x$$

oder nach Division durch sin x und Transposition, die bekannte Reihe

*) Sohnke's Aufg. aus d. Differenzialrechnung. 3. Aufl.

$$x \cdot \cot x = 1 - \frac{B_1}{2!}(2x)^2 - \frac{B_3}{4!}(2x)^4 - \ldots - \frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}$$

$$- \frac{2^{2n} B_{2n-1}}{(2n)!} x^{2n+1} \cdot \frac{\cos \theta x}{\sin x}$$

worin x reel und absolut $< \pi$ sein muss, damit die Reihe — beliebig weit fortgesetzt — convergent sei.

Nimmt man $F(x) = e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}$, so erhält man die Reihe

$$\alpha x \cdot \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}} = 1 + \frac{B_1}{2!}(2\alpha x)^2 - \frac{B_3}{4!}(2\alpha x)^4 + \ldots + (-1)^n \frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}(2\alpha x)^{2n-2}$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} B_{2n-1}}{(2n)!} (\alpha x)^{2n+1} \cdot \frac{e^{\alpha\theta x} + e^{-\alpha\theta x}}{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}$$

welche für $\alpha = i$ in die Reihe für x cot x übergeht. —

Mac-Laurin's Summenformel drückt den Zusammenhang zwischen der Summe einer endlichen Reihe und einem bestimmten Integrale aus; dieselbe kann daher zur Auswertung des einen dieser Ausdrücke benutzt werden, wenn man den jedesmaligen andern als bekannt voraussetzt. Besonders vortheilhaft erscheint ihre Anwendung zur Summirung einer endlichen Reihe, wenn man das Integral geschlossen geben kann.

Sei gegeben $f(u) = l\,u$

Für $a = 1$, $h = 1$ entsteht das Problem $l\,1 + l\,2 + \ldots + l(q-1) + l\,q = l(q!)$ zu berechnen.

Der gesuchte $l\,(q!)$ wird durch die Stirling'sche Reihe ausgedrückt. Die Summenformel gibt

$$l\,(q!) = \int_1^{q+1} l\,u \,.\, du - \tfrac{1}{2}\, l(q+1) + \frac{B_1}{1.2}\left[\frac{1}{q+1} - 1\right] - \frac{B_3}{3.4}\left[\frac{1}{(q+1)^3} - 1\right] + \ldots$$

Setzt man $q = k-1$ und addirt beiderseits $l\,k$, so ist, da

$$\int l\,u \,.\, du = u(l\,u - 1),$$

$$1)\quad l\,(k!) = (k + {}^1\!/_2)\, l\,k - k + 1 + \sum_{1\,(r)}^{n-1} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{(2r-1)\,2r}\left[\frac{1}{k^{2r-1}} - 1\right] + S_{2n}$$

$$= (k + {}^1\!/_2)\, l\,k - k + \sum_{1\,(r)}^{n-1} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{(2r-1)\,2r} \cdot \frac{1}{k^{2r-1}} + A_n + S_{2n}$$

wo A_n den Verein der von k unabhängigen Summanden bedeutet.

Der Rest der Reihe S_{2n} soll nun in der ursprünglichen Form betrachtet werden. Da in unserem Falle

$$f^{2n}(u) = D_u^{2n}\, l\,u = - \frac{(2n-1)!}{u^{2n}},$$

so ist

$$S_{2n} = \frac{1}{2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t) \sum_{1\,(r)}^{k-1} \frac{1}{(r+t)^{2n}}\, dt$$

Lässt man nun in der Gleichung

$$2)\ l(k!) - (k+\tfrac{1}{2})\, l\, k + k - \sum_{1\,(r)}^{n-1} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{(2r-1)\,2r} \cdot \frac{1}{k^{2r-1}} = A_n + S_{2n}$$

k ins Unendliche wachsen, so kann es sein, dass der linke Theil sich einer bestimmten endlichen Grenze C nähert, so dass man hätte

$$3)\qquad C = A_n + \underset{(k=\infty)}{\mathrm{Lim}}\, S_{2n} = A_n + \underset{(k=\infty)}{\mathrm{Lim}} \frac{1}{2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t) \sum_{1\,(r)}^{k-1} \frac{dt}{(r+t)^{2n}}$$

Um über die Existenz von C entscheiden zu können, muss man offenbar die Vorfrage erledigen, ob

$$\underset{k=+\infty}{\mathrm{Lim}} \frac{1}{2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t) \sum_{1\,(r)}^{k-1} \frac{dt}{(r+t)^{2n}} = \frac{1}{2n}\int_0^1 \varphi_{2n}(t) \left(\underset{k=\infty}{\mathrm{Lim}} \sum_{1\,(r)}^{k-1} \frac{1}{(r+t)^{2n}} \right) dt$$

gesetzt werden dürfe.

Die in Betracht kommende Reihe ist von der Form

$$\rho_1(t) + \rho_2(t) + \ldots\ldots + \rho_N(t) + \rho_{N+1}(t) + \ldots\ldots$$

Zur Convergenz dieser Reihe ist notwendig und hinreichend, dass für stets wachsende Werte von N das Aggregat

$$\rho_{N+1} + \rho_{N+2} + \ldots\ldots + \rho_{N+x} = U_{N,t}$$

kleiner werde als jede noch so kleine vorgegebene Zahl σ, welchen Wert auch x haben mag; darin ist involvirt, dass ρ_N die Null zur Grenze haben muss.

Es ist nun jedenfalls $U_{N,t}$ ein positiver Wert; auch ist

$$U_{N,t} < \rho_{N+1}(0) + \rho_{N+2}(0) + \ldots\ldots \text{ in inf } = U_{N,0}$$

da überall anstatt t sein kleinster Wert, nämlich Null gesetzt wurde. Die Reihe $U_{N,0}$ ist aber eine convergente harmonische Reihe.

Denn $\rho_z(0)$ ist eine für positive und wachsende Werte von z beständig und ins Unendliche abnehmende u n d positiv bleibende Function und

$$\int_z^\infty \rho_z(0)\, dz = \int_z^\infty \frac{dz}{z^{2n}} = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{z^{2n-1}} = \psi(\infty) - \psi(z)$$

ein bestimmter endlicher Wert.

Nun hat man nach dem Lagrange-Maclaurin'schen Lehrsatze, weil $\psi'(z) = \rho_z(0)$ ist,

$$\psi(z+h) - \psi(z) = h \cdot \rho_{z+\xi h}(0) \qquad 0 < \xi < 1$$

und wenn hierin successive $z = N, N+1, N+2, \ldots\ldots$ und $h = 1$ gesetzt wird

$$\psi(N+1) - \psi(N) = \rho_{N+\xi}(0) \text{ d. h. } < \rho_N \text{ und } > \rho_{N+1}$$

$$\psi(N+2) - \psi(N+1) = \rho_{N+1+\xi}(0) \quad \text{d. h} < \rho_{N+1} \text{ und } > \rho_{N+2}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

folglich durch Addition dieser unendlich vielen Ungleichungen

$$\rho_{N+1} + \rho_{N+2} + \ldots\ldots < \psi(\infty) - \psi(N) < \rho_N + \rho_{N+1} + \ldots.$$

somit $\qquad \psi(\infty) - \psi(N) - \rho_N < U_{N,0} < \psi(\infty) - \psi(N)$

Stellt man nun die Bedingung, dass $U_{N,t} < \sigma$ sei, so genügt es $U_{N,0} < \sigma$ zu machen: dies wird erreicht, indem

$$N > \left[\frac{1}{(2n-1)\sigma}\right]^{\frac{1}{2n-1}} \text{ genommen wird.}$$

Die unendliche Reihe ist also convergent — ihre Summe sei $f(t)$; ausserdem ist $f(t)$ eine stetige Function innerhalb und an den Grenzen, was auch von $\varphi_{2n}(t)$ gilt. Da nun $f(t) = \rho_1 + \rho_2 + \ldots\ldots$ im ganzen Integrationsintervalle ist und da sich eine Zahl N angeben lässt, so dass dem absoluten Betrage nach

$$f - \rho_1 - \rho_2 - \ldots\ldots < \sigma$$

ist, wie klein auch σ vorgegeben sei und welche Werte des Integrationsintervalles t auch annehmen mag, so ist in der That absolut genommen

$$\int \varphi \,.\, f\,dt - \int \varphi \,.\, \rho_1\,dt - \int \varphi \,.\, \rho_2\,dt - \ldots. - \int \varphi \,.\, \rho_N\,dt < \sigma \int \varphi\,dt$$

und da dieser Ausdruck beliebig klein gemacht werden kann,

$$\int \varphi \,.\, f\,dt = \int \varphi \,.\, \rho_1\,dt + \int \varphi \,.\, \rho_2\,dt + \ldots.. \text{ in inf.}$$

Eine Reihe von der angegebenen Eigenschaft nennt man „gleichmässig convergent" und man hat mit Einführung dieses Wortes den Satz: Das Integral einer unendlichen Reihe, welche im Integrationsintervalle gleichmässig convergent ist, wird durch Integration der Glieder erhalten.

Hiemit ist die Vorfrage in bejahendem Sinne entschieden. — Durch Subtraction der Gleichung 3) von 2) kommt

$$l(k!) - (k+\tfrac{1}{2})\,l\,k + k - \sum_{1}^{n-1}{}_{(r)} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{(2r-1)\,2r} \cdot \frac{1}{k^{2r-1}} - C$$

$$= S_{2n} - \text{Lim } S_{2n}$$

$$= -\frac{1}{2n} \int_0^1 \varphi_{2n}(t) \left[\frac{1}{(k+t)^{2n}} + \frac{1}{(k+1+t)^{2n}} + \ldots..\right] dt$$

$$= -\frac{1}{2n}\, \varphi_{2n}(1-T) \int_0^1 \left[\frac{1}{(k+t)^{2n}} + \frac{1}{(k+1+t)^{2n}} + \ldots.\right] dt,$$

weil die Reihe von beständigem Vorzeichen ist.

Durch unbestimmte Integration und Einführung der Grenzen kommt

$$S_{2n} - \text{Lim } S_{2n} = -\frac{1}{(2n-1)\,2n}\, \varphi_{2n}(1-T) \cdot \frac{1}{k^{2n-1}} = (-1)^{n+1}$$

$$\frac{B_{2n-1}}{(2n-1)2n} \cdot \frac{1+\rho}{k^{2n-1}}$$

Somit ist

$$l(k!) = C + (k + \tfrac{1}{2})\, l\, k - k + \sum_{1}^{n-1}{}_{(r)} (-1)^{r-1} \frac{B_{2r-1}}{(2r-1)\, 2r} \cdot \frac{1}{k^{2r-1}}$$

$$+ (-1)^{n+1} \cdot \frac{B_{2n-1}}{(2n-1) 2n} \cdot \frac{1+\rho}{k^{2n-1}}$$

Da nun $f^{2n}(u)$ und $f^{2n+2}(u)$ das negative Vorzeichen haben, so ist ρ ein negativer echter Bruch, somit $1 + \rho = \varepsilon$ ein positiver echter Bruch.

Das Resultat der bisherigen Untersuchung ist also gegeben durch $l(k!) = C + (k + \frac{1}{2})\, l\, k - k + G(\frac{1}{k})$, wo

$$G\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{B_1}{1.2} \cdot \frac{1}{k} - \frac{B_3}{3.4} \cdot \frac{1}{k^3} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{B_{2n-3}}{(2n-3)(2n-2)} \cdot \frac{1}{k^{2n-3}}$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{\varepsilon B_{2n-1}}{(2n-1)\, 2n} \cdot \frac{1}{k^{2n-1}}, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

$G(\frac{1}{k})$ ist anzusehen als eine endliche Reihe, zu welcher, wo man sie auch abbrechen lässt, jedesmal ein Ergänzungsglied hinzukommt, welches ein echter Bruchtheil des Gliedes ist, mit welchem man die Reihe geschlossen hat.

Es handelt sich nun um die Bestimmung von C.

Es ist $$C = \lim_{k=+\infty} \left\{ l(k!) - k\, l\, k + k - \tfrac{1}{2}\, l\, k \right\} = \lim_{(k=\infty)} \left\{ l \left[\frac{k!}{k^k} \cdot \frac{e^k}{\sqrt{k}} \right] \right\}$$

$$= \lim_{(k=\infty)} \left\{ l\, \chi(k) \right\}$$

da $G(\frac{1}{k}) = 0$ für $k = \infty$

Die Hauptfrage ist zunächst ob C existirt.

Zur Entscheidung der Frage um die Existenz des Grenzwertes kann das Gauss'sche Criterium dienen: „Wenn es gelingt den Quotienten $\frac{\chi(k+1)}{\chi(k)}$ auf die Form $1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{\alpha'}{k^2} + \frac{\alpha''}{k^3} + \ldots$ zu bringen, dann kann entschieden werden, was aus $\chi(k)$ wird für $k = \infty$: Ist $\alpha > 0$, so wächst der Ausdruck über alle Grenzen d. h. $\lim. \chi(k) = \infty$; ist $\alpha < 0$, so ist $\lim \chi(k) = 0$; ist $\alpha = 0$, so hat $\chi(k)$ einen endlichen von Null verschiedenen Grenzwert." *)

Es ist $$\frac{\chi(k+1)}{\chi(k)} = \frac{(k+1)!}{k!} \cdot \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \cdot e \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}$$

$$= e \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k \sqrt{1+\frac{1}{k}}} \quad \text{oder } \tfrac{1}{k} = \nu \text{ gesetzt}$$

$$= e^{1 - \frac{l(1+\nu)}{\nu}} \cdot (1+\nu)^{-\frac{1}{2}},$$

*) Scheibner, Ueber unendliche Reihen, 25. 26.

folglich mit Anwendung der logarithmischen, der Exponential- und Binomial-Reihe und nach Restitution von $\frac{1}{k}$ statt ν

$$\frac{\chi(k+1)}{\chi(k)} = 1 - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{k^2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{k^3} - \ldots .$$

In der That ist $\alpha = 0$ und somit existirt für $\chi(k)$, also auch für $l\,\chi(k)$ ein endlicher Grenzwert.

Es handelt sich noch um die Herstellung des Grenzwertes

$$\text{Lim}\left\{ l\left[\frac{k!}{k^k} \cdot \frac{e^k}{\sqrt{k}}\right]\right\} = \text{Lim}\ \omega(k)$$

Es ist $\omega(2k) = l(\overline{2k}!) - 2k\, l(2k) + 2k - \frac{1}{2}\, l(2k)$

$$k! = \frac{2.4.6 \ldots\ldots 2k}{2^k} = \frac{1}{1.3.5 \ldots\ldots 2k-1} \cdot \frac{\overline{2k}!}{2^k}$$

$$(k!)^2 = \frac{2.4.6 \ldots\ldots 2k}{1.3.5 \ldots\ldots (2k-1)} \cdot \frac{\overline{2k}!}{2^{2k}}$$

$$\overline{2k}! = 2^{2k}(k!)^2 \cdot \frac{1.3.5 \ldots\ldots (2k-1)}{2.4.6 \ldots\ldots 2k};$$

folglich

$$\omega(2k) = 2\, l(k!) - l\, \frac{2.4.6 \ldots\ldots 2k}{1.3.5 \ldots\ldots (2k-1)} - 2k\, l\, k + 2k - \frac{1}{2}\, l(2k)$$

Ferner ist

$$2 \cdot \omega(k) - \omega(2k) = l\, \frac{2.4.6 \ldots\ldots 2k}{1.3.5 \ldots\ldots (2k-1)} - \frac{1}{2}\, l\, k + \frac{1}{2}\, l\, 2$$

Nun erhält man aus der Gleichung

$\cos x = \prod_{0\,(k)}^{\infty}\left[1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]$ *), welche auch so geschrieben werden kann

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\frac{\pi}{2} - x} = \left(1 + \frac{2x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) \ldots\ldots,$$

wenn man $x = \frac{\pi}{2}$ macht:

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{25}\right)\left(1 - \frac{1}{49}\right) \ldots\ldots \left(1 - \frac{1}{(2k-1)^2}\right) \qquad k = \infty$$

oder
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \ldots\ldots \frac{2k-2}{2k-3} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k-1} \qquad k = \infty$$

— die Formel von Wallis.

*) cos x ist definirt durch die stets convergente Reihe $\sum_{0\,(n)}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Man hat nun

$$2 \,.\, \omega(k) - \omega(2k) = \tfrac{1}{2}\, l \left\{ \frac{2.2.4.4.6.6 \ldots\ldots (2k-2)\,(2k-2)\,2k}{1.3.3.5.5.7 \ldots\ldots (2k-3)\,(2k-1)\,(2k-1)} \,.\, 2k \right\}$$

$$- \tfrac{1}{2}\, l\, k + \tfrac{1}{2}\, l\, 2$$

$$= \tfrac{1}{2}\, l\, \tfrac{\pi}{2} + l\, 2$$

Da nun

$$(k = \infty) \begin{cases} \text{Lim } \omega(k) = C \\ \text{Lim } \omega(2k) = C, \end{cases}$$ so hat man schliesslich

$$C = \tfrac{1}{2}\, l\, (2\pi) = l\, \sqrt{2\pi}$$

und $$l(k!) = l\, \sqrt{2\pi} + (k + \tfrac{1}{2})\, l\, k - k + G\left(\tfrac{1}{k}\right)$$

Um Brigg'sche Logarithmen zu erhalten, hat man die natürlichen Logarithmen mit dem Modul $M = \frac{1}{l\, 10}$ zu multipliciren, so dass

$$\log(k!) = \log \sqrt{2\pi} + (k + \tfrac{1}{2}) \log k + \left\{ -k + G\left(\tfrac{1}{k}\right) \right\} M$$

Nota I. Geht man von den natürlichen Logarithmen zu den Zahlen über, so ist

$$1.2.3 \ldots\ldots k > \sqrt{2\pi} \,.\, e^{-k}\, k^{k+\frac{1}{2}}$$

$$1.2.3 \ldots\ldots k < \sqrt{2\pi} \,.\, e^{-k+\frac{1}{12k}} \,.\, k^{k+\frac{1}{2}}$$

so dass $$k! = (2\pi k)^{1/2} \left(\frac{k}{e}\right)^{k} \,.\, s,$$ während $l\, s$ zwischen

$$\frac{1}{12k} - \frac{1}{360k^3} \text{ und } \frac{1}{12k}$$ liegt.

Es ist daher $l\, s$ stets positiv, also s stets > 1; aber es rückt $l\, s$ der Null, also der Factor s selbst der Einheit desto näher, je grösser k ist, so dass $s = 1$ wird für $k = \infty$

Nota II. Da der Binomial-Coefficient $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\, n!}$ ist, so kann man sich dieser Näherungsformel auch bedienen, wenn bei einem sehr grossen (zunächst ganzen und) positiven Werte von m der n^{te} B. C. für grosse n berechnet werden soll (Laplace).

Weitere Anwendungen der Summenformel von Mac-Laurin auf die Function $f(u) = u^{-\mu}$ in den Fällen

$$-1 < \mu < 0$$

$$0 < \mu \leqq 1$$

$$\mu > 1$$

mögen in einem spätern Jahrgange folgen.

Errata:

Seite 2 Zeile 3 v. u. l. $(-1)^{k-1}$
" 3 " 11 v. o. l. $\frac{h^3}{12}$
" 3 " 14 v. o. l. $\frac{h^2}{10}$
" 3 " 15 v. o. l. $F'''(x+h) + F'''(x)$

Seite 7 Zeile 4 v. u. l. $-\frac{1}{2} xi \frac{e^{-ix}+1}{e^{-ix}-1}$
" 7 " 3 v. u. l. $\sum\limits_{0}^{\infty}(k) \cdots$
" 8 " 5 v. u. l. $\sum\limits_{1}^{n}(k) \cdots$

Schulnachrichten.

I. Personalstand.

Regens der Anstalt:

Herr Leiter Alois, geistlicher Rath, Exhortator.

Lehrpersonale und Fächervertheilung.

1. Herr Spielmann Alois, Dr. phil., Studien-Director und Subregens, lehrte Deutsch, Latein u. philos. Propädeutik in der 7. Classe.
2. — Spielmann Eerdinand, Dr. phil., Professor, Bibliothekar, Lat. 4., Deutsch 5,, Griech. 5. 7.
3. — Mark David, Prof., Musikdirector, Rel. 1. 4—7., Lat. 3.
4. — Mairhofer Jakob, Prof., Deutsch, Lat. 2., Griech. 3.
5. — Mischi Josef, Prof., Deutsch, Lat. 1., Griech. 4.
6. — Braun Josef, Prof., Cust. d. phys. Cab., Math. 1. 3. 6. 7., Phys. 7.
7. — Wolf Andreas, Prof., Math. 2. 4. 5., Phys. 3 (II. S.) 4., Rel. 2.
8. — Schuchter Josef, Prof., Deutsch 3. 4. 6., Geogr. u. Gesch. 3. 4.
9. — Riescher Ludwig, Cust. d. Daktyliothek u. Münzensammlung Geogr. u. Gesch. 2. 5. 6. 7.
10. — Oettl Franz, Latein 5. 6., Griech. 6.
11. — v. Hörmann Albert, Cust. d. naturhist. Cab. Rel. 3., Geogr. 1., Naturgesch. 1. 2. 3. (I. Sem.), 5. 6.

Praefecten:

Herr Baur Josef, Hauspraefect.
— Stadler Michael.
— Haid Cassian.
— Riezler Roman, Dr. phil. et theol.
— Schratz Franz.

(Alle Herren sind Weltpriester der Diöcese Brixen.)

II. u. III. Lehrverfassung und Lehrbücher.

I. Classe.

Ordinarius Herr **Mischi Josef.**

Religionslehre: Kath. Glaubens- und Sittenlehre (M. Pichler, grosser Katechismus). 2 Stunden wöch.

Deutsche Spr.: Flexionslehre, Lehre vom einfachen und das Wichtigste vom zusammengesetzten Satze (Heyse); Lectüre aus Pfannerer 1. Bd. Vortrag memorirter Gedichte; grammatikalische Behandlung von Lesestücken und Uebung in Wiedergabe ihres Inhaltes. Orthographische Uebungen; alle 14 Tage eine schriftliche Schul- oder Hausaufgabe. 4 St.

Latein: Regelmässige Formenlehre (Schultz); Uebersetzungen aus Hauler (Uebungsbuch I.), wöchentlich eine Composition in der Schule. 8 St.

Geographie: Die Grundbegriffe der astronomischen und physischen Geographie; Uebersicht über die Erdtheile und Staaten. Kartenlesen. (Kozenn-Vogel). 3 St.

Math.: Die 4 Species mit unbenannten und benannten, ganzen und gebrochenen Zahlen, Kennzeichen der Theilbarkeit (Mocnik). Geometrische Anschauungslehre des Punctes, der Geraden, des Winkels, des Dreieckes (Mocnik). 3 St.

Naturgeschichte: Die Säugethiere u. die wirbellosen Thiere (Pokorny) 2 St.

II. Classe.

Ord. Herr **Mairhofer Jakob.**

Religionslehre: Die Liturgik der kath. Kirche (Hafenrichter). 2 St.

Deutsche Spr.: Ausführliche Lehre vom zusammengesetzten Satze; Orthographie, Wortbildung (Bauer); Leseübungen und Vortrag von Gedichten (Pfannerer 2. Bd.). Orthographische und grammatikalische Uebungen; alle 14 Tage eine Hausarbeit (Erzählung oder Beschreibung). 4 St.

Latein: Wiederholung und Vervollständigung der Formenlehre; das Wichtigste der Wortbildung und der Syntax (Schultz). Uebungen nach Hauler II. Schulpensa. 8 St.

Geographie: Specielle G. von Asien, Afrika und Südeuropa; die Gebirgs- und Flusssysteme Europas (Kozenn-Vogel); *Geschichte* des Altertums (Hannak) bis zum Ende d. römischen Republik. 4 St.

Math.: Arithmetik: Verhältnisse, Proportionen, Regel de tri mit ihren Anwendungen (Mocnik). Geometrie: Congruenz der

Figuren, Flächenberechnung, pythagoreischer Lehrsatz, Verwandlung, Theilung, Aehnlichkeit d. Figuren (Mocnik). 3 St.
Ng.: I. S.: Vögel, Amphibien, Fische. II. S.: Botanik. (Pokorny.) 2 St.

III. Classe.

Ord. Herr **Mark David**.

Religionslehre: Geschichte der göttl. Offenbarung d. alten Bundes und Geographie von Palästina (Fischer). 2 St.
Deutsche Spr.: Tempus- u. Moduslehre, Wortfolge, Wiederholung der Lehre von den Satzbildern und Satzzeichen (Bauer). Lectüre (Pfannerer 3. Bd.) mit Inhaltsangabe u. Erklärung der Lesestücke; Memoriren und Vortrag von Gedichten. Eine schriftliche Arbeit in 14 Tagen. 3 St.
Latein: Casuslehre (Schultz). Schriftliche und mündliche Uebersetzungen aus Hauler's Aufgaben I.; Lectüre: Nepos plenior (Vogel): I, III, IV, V, IX, XVI. — Schulpensa nach Vorschrift. 6 St.
Griechisch: Flexionslehre bis zu den Verben in $\mu\iota$ (Curtius). Uebersetzungen aus Hintner's Elementarbuch. Monatlich zwei Compositionen. 5 St.
Geogr.: Mittel-, Ost- u. Nord-Europa, Amerika, Australien (Kozenn-Vogel). *Geschichte* des Mittelalters (Gindely). 3 St.
Math.: Die 4 Grundoperationen mit algebraischen Ausdrücken, das Potenziren und Radiziren, die Combinationslehre. Geometrische Anschauungslehre vom Kreis und den ein- und umgeschriebenen Figuren; Berechnung des Umfangs und Flächeninhalts; Ellipse, Hyperbel, Parabel (Mocnik). 3 St.
Naturkunde: I. Sem. Mineralogie (Pokorny). 2 St. II. Sem. Physik: Allgemeine Eigenschaften, äussere und innere Verschiedenheit der Körper; Grundstoffe; Wärmelehre (Pick). 2 St.

IV. Classe.

Ord. Herr **Wolf Andreas**.

Religionslehre: Geschichte d. Offenbarung d. neuen Bundes (Fischer). 2 St.
Deutsche Spr.: Lectüre (Pfannerer, 4. Bd.); in Anschluss daran Metrik, Lehre von den Tropen u. Figuren und grammatikalische Bemerkungen. Vortrag memorirter Gedichte; Geschäftsaufsätze. Schriftliche Arbeiten. 3 St.
Latein: Tempus- und Moduslehre, Prosodik (Schultz). Uebersetzungen aus Hauler's Aufgaben II. Th.; entsprechende Schularbeiten. Lectüre: Caesar de b. gall. I—III, VI (Hoffmann), Ovid: Metam. I. 89–406, Trist. I. 1; III. 4 (Grysar). 6 St.

Griechisch: Verba in $\mu\iota$, unregelmässige Verba, Präpositionen (Curtius); Uebersetzungen (Hintner). Schulpensa. 4 St.
Gesch.: Die Neuzeit (Gindely). *Geogr.:* Oesterreich (Kozenn-Vogel); österreichische Vaterlandskunde (Hannak). 4 St.
Math.: Zusammengesetzte Verhältnisse und Proportionen, Regel de tri, Gesellschafts-, Allegations-, Ketten-, Zinsesrechnungen; Gleichungen d. I. Grades mit einer und mehreren Unbekannten (Mocnik). — Die wichtigsten Körperformen und deren Netze, Oberflächen- und Kubikinhalts-Berechnung (Mocnik). 3 St.
Nl.: Mechanik starrer, flüssiger und gasiger Körper; Magnetismus, Elektrizität, Akustik, Optik (Pisko). 3 St.

V. Classe.

Ord. Herr Dr. **Spielmann Ferd.**

Religionslehre: Allgemeine Glaubenslehre. (Wappler I.) 2 St.
Deutsche Spr.: Wiederholung der Metrik; Poetik, Prosa und ausgewählte Lectüre aus Egger's Lehr- und Lesebuch I. Erklärung des Liedes von der Glocke v. Schiller. 2 St.
Latein: Liv. (Grysar) I. II.; Ovid (Grysar): Metam. II, 1—366, III, 511—733, VI, 146—312, VIII, 183—235, XIII, 399—575. Wiederholung der Syntax, Uebersetzungen aus Berger's stil. Vorübungen, Schulcompositionen zu 14 Tagen. 6 St.
Griechisch: Xenophon (Schenkel Chrest.): Kyrop. I—IV, IX, XIII, XIV; Anab. I—III, VIII; Comm. I, III; Homer A. B (Hochegger). Syntax bis zum Infinitiv (Curtius § 559); Uebungen (Hintner) und Schulpensa. 5 St.
Gesch.: Das Altertum bis zu den Flaviern (Gindely);
Geogr.: Repetition der betreffenden Länder (Kozenn-Vogel). 4 St.
Math.: Grundoperationen, Zahlenlehre, Messung der Grössen, Proportionen. Kettenbrüche, Potenzen und Wurzeln; Anwendung der Operationsgesetze auf Zifferrechnung (Frischauf). Planimetrie: Die geradlinigen Gebilde; der Kreis (Wiegand I. II.) 4 St.
Ng., I. Sem.: Allgemeine u. syst. Mineralogie (Hochstetter-Bisching); II. Sem.: Allg. u. syst. Botanik (Bill). 2 St.

VI. Classe.

Ord. Herr **Oettl Franz.**

Religionslehre: Specielle Glaubenslehre. (Wappler II. Th.) 2 St.
Deutsche Spr.: Literaturkunde (Egger II. 1. bis § 50). Mittelhochdeutsche Lect.: Auswahl aus d. Nibelungen und Walther (Reichel). 3 St.

Latein: Sallust: Catilina, Jugurtha, oratio Lepidi (Linker); Cicero: oratio I. in Catilinam (Klotz); Vergil: Aen. I, II; Eclog. I, V (Hoffmann); Uebersetzungen aus Süpfle. Pensa. 6 St.
Griechisch: Syntax (Curtius § 551—622) mit Uebungen aus Hintner; Ilias VI—IX (Hochegger); Herodot VII (Wilhelm). Pensa. 5 St.
Gesch. d. Mittelalters (Gindely, Bretschneider's Wandatlas). 3 St.
Math.: Potenzen, Wurzeln, Logarithmen; Theorie der imaginären und complexen Zahlen; Anwendung der Operationsgesetze auf die Zifferrechnung. — Gleichungen des 1. Grades, diophantische Gleichungen (Mocnik; Heis). — Stereometrie; Goniometrie, Auflösung goniomet. Gleichungen. Ebene Trigonometrie, Polygonometrie; Anwendung auf Probleme der Stereometrie, Geodäsie u. Geogr. (Mocnik). 4 St.
Ng.: Systematische Zoologie (Woldrich). 2 St.

VII. Classe.

Ord. Herr **Braun Josef**

Religionslehre: Schluss d. Glaubenslehre; Sittenlehre. (Wappler III.) 2 Stunden.
Deutsche Spr.: Fortsetzung und Schluss der Literaturkunde, Lectüre von Musterstücken (Egger II. 1.); grössere Dichtungen: Iphigenie auf Tauris, Tasso, die Jungfrau von Orleans. 3 Stunden.
Latein: Cicero: or. de imp. Cn. Pompei, pro Milone (Richter); Vergil: Aen. VI—VIII (Hoffmann). Stilist. Uebungen (Süpfle); Schulcompositionen. 5 St.
Griechisch: Demosth.: Olynth. Reden I—III, Philipp. I. (Rehdantz); Homer: α, β, λ, μ (Pauly); Sophokles: Antigone (Nauk). Wiederderholung der wichtigsten Partien d. Grammatik; Compositionen. 4 St.
Gesch.: Die Neuzeit (Gindely) und einschläg. Geogr. (Vogel; Bretschneider). 3 St.
Math.: Quadratische Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten, trigonometrische Auflösung derselben, reciproke und Exponential-Gleichungen, diophantische Gl. 2. Grades. — Arith. u. geomet. Reihen; Zinseszins- u. Rentenrechnung; Combinationslehre, binomischer Lehrsatz. — Anwendung der Algebra auf die Geometrie; Elemente d. analyt. Geom. in der Ebene mit Einschluss d. Kegelschnittslinien (Mocnik; Heis). 3 St.
Physik: Allgemeine Eigenschaften der Körper; Mechanik der starren, flüssigen und luftförmigen Körper: Wärmelehre; Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie (Handl). 3 St.
Philos. Prop.: Formale Logik (Drbal). 2 St.

IV. Themen zu deutschen Aufsätzen.

V. Classe.

1. Wirf in den Brunnen, wo du trankest, keinen Stein, — Sag Uebles dem nicht nach, bei dem du kehrtest ein. (Weisheit des Brahmanen.) 2. Lasst uns besser werden, gleich wird's besser sein. 3. Der Neugierige (Charakterbild). 4. Erklärung der Romanze von Platen „In der Nacht“. 5. Stets am Stoff klebt unsere Seele, Handlung — Ist der Welt allmächtiger Puls, und deshalb — Flötet oftmals tauberem Ohr der hohe, — Lyrische Dichter. 6. Blüten und Hoffnungen. (Vergleich.) 7. Zwiebel und Satyre. (Vergleich.) 8. Welchen Einfluss hatten die Perserkriege auf die geistige Entwickelung der Hellenen? 9. Inwiefern hat die Komödie ästhetischen Kunstwert? 10. Charakter Kyros des Jüngeren nach Xenophon. 11. Crescentem sequitur cura pecuniam — Maiorumque fames. Hor. Od. III. 16, 17. 12. Unterschied zwischen poetischer und prosaischer Sprache. 13. Heil'ge Ordnung, segenreiche Himmelstochter, die — Das Theuerste der Bande — Wob, den Trieb zum Vaterlande. (Glocke von Schiller.) 14. Festfeier der silbernen Hochzeit des erlauchten Kaiserpaares im Vincentinum. (Beschreibung.) 15. Stellung der Kryptogamen im Haushalte der Natur. 16. Gedankengang der Reflexionen in Schiller's Lied von der Glocke. 17. Dum vitant stulti vitia in contraria currunt. Hor. S. I. 2, 24. Chrie. 18. Gedanken eines Quintaners am Schlusse des Schuljahres (Reflexion).

VI. Classe.

1. Das Glück der Alpenbewohner. (Nach Albr. v. Haller.) 2. „Die beiden Musen“ von Klopstock. Widergabe des Inhalts und Darlegung der thatsächlichen Verhältnisse, die dem Dichter vorschwebten. 3. Der Charakter des deutschen Volkes. — 4. „Der Vogelsang oder die drei Lehren“ von Wieland. Abhandlung über Inhalt und Form der Dichtung. 5. Wieland's Lebensweisheit nach „Vogelsang“ und „Aristipp“. 6. Lessing. Charakteristische Züge von ihm aus den Lesestücken. 7. Die vorzüglichsten deutschen Literaturstätten in der Mitte des 18. Jahrhunderts. 8. „Nulla est honesta avaritia nisi temporis.“ Seneca. — 9. Art und Weise der belletristischen Lectüre abgeleitet aus ihren Zwecken. 10. Rückwirkung Italiens auf das Ansehen und die Macht des deutschen Königtums im Mittelalter. — 11. Die Macht der Zunge. Nach Vridank's Bescheidenheit. 12. Die didaktische Poesie im Mittelalter im Verhältnisse zur epischen und lyrischen. 13. Oesterreich-Ungarn ein Staat der Vorsehung. 14. Stellung der Insecten in der Oekonomie der Natur. 15. Inhalt

des 1. Theiles des Nibelungenliedes. 16. Siegfrieds Tod in seinen Ursachen. 17. Antheil tirolischer und vorarlbergischer Landesgebiete an der mittelhochdeutschen Literatur.

VII. Classe.

1. Das Lied der Parzen in Göthe's Iphigenie. Motivirung seiner Einflechtung. 2. „Schreiben muss man wenig, zeichnen viel". Die Hauptfrucht des Aufenthaltes Göthe's in Rom für seine Dichterbildung. 3. Iphigeniens Charakter, soweit er in den Worten gezeichnet ist: „O wie beschämt gesteh' ich, dass ich dir mit stillem Widerwillen diene, Göttin, dir, meiner Retterin! Mein Leben sollte zu treuem Dienste dir gewidmet sein". (I. 1, 35 ff.) 4. „Griechenland das Deutschland des Altertums." (Niebuhr). 5. Deutschland das Herz Europa's. 6. Scenen aus dem Elysium, frei nach Vergil Aen. VI. 7. Durch welche Mittel machte Schiller die Erzählung des Ritters im Kampf mit dem Drachen so lebendig? 8. Worin unterscheidet sich das Todtenreich Vergils (Aen. VI.) von dem Homers (Od. XI)? 9. Die wahren Ursachen des Abfalls der Niederlande. 10. Philipp's II. Charakter. 11. Die Quellen von Tasso's Leiden. 12. Mein Abschied von dem alten Winterrock. 13. „Vom Dome schwer und bang, — Tönt die Glocke Grabgesang". Versuch einer Elegie auf den Tod des Fürstbischofs Vinzenz. 14. Unseres Kaisers Wahlspruch. Rede auf den 24. April. 15. „Willst du, dass wir mit hinein in das Haus dich bauen, lass es dir gefallen, Stein, dass wir dich behauen." (Rückert.) 16. Bedeutung der Köhlerscene in Schiller's Jungfrau von Orleans.

V. Freigegenstände.

1. *Italienische Spr.:* (1 St.): I. Abth. (20 Schüler): Formenlehre u. Hauptregeln der Syntax. Uebungen n. Mussafia. Dr. Ferd. Spielmann.
   II. Abth. (4 Sch.): Fortsetzung (Mussafia). Wolf.
   III. Abth. (6 Sch.): I promessi sposi. Mischi.
2. *Französische Spr.* (1 St. wöch.): I. Abth. (6 Sch.): Plötz, Elementar-Grammatik. Stadler M.
   II. Abth. (6 Sch.): Elementarbuch v. Filek; Lectüre: Aventures de Télémaque. Mischi.
3. *Kalligraphie:* 1 St. alle Primaner. Director.

4. *Stenographie:* 1 St. I. Abth. 23 Sch. nach Fischer's Lehrgang. Dr. Ferd. Spielmann.

II. Abth. (II. Sem.) 15 Sch. Uebungen; das Wichtigste über die Anwendung des Gabelsb. Syst. auf die lat. Spr. Director.

5. *Freihandzeichnen:* 3 Abth. je 1 St. I. (alle Primaner); Geometrische Gebilde und Elemente des Flachornaments nach Entwürfen an der Tafel. II. (14 Sch.): Ornamente, Landschaften, Blumen, Kopfformen. III. (6 Sch.) Fortsetzung. Director.

6. *Musik:* A. Gesang (je 1 St.) I. Abth. (1. Sect. 15 Sch., 2. Sect. 17 Sch.): Normaltonleiter; Erklärung u. Uebung der Intervalle; Psalmtöne.

II. Abth. (I. Sect. 32 Sch., 2. Sect. 16 Sch.) Wiederholung und Erweiterung der Theorie, Dur-Tonarten und ihre Dreiklänge.

In diesen 4 Sectionen unterrichteten unter Mark's Leitung die Septimaner: Greil Johann, Haider Silvester, Mayr Johann, Wechner Erich. —

III. Abth. (32 Sch.): Dur- und Molltonarten, Einübung homophoner Tonstücke. Dr. Ferd. Spielmann.

IV. Abth. (29 Sch.): Homophone und polyphone kirchliche und profane Tonwerke alter und neuer Meister. Mark.

B. Instrumentalmusik (Pianoforte, Harmonium, Violine) lernten 19 Schüler. Mark.

7. *Turnen.* (144 Sch. in 3 Abth. je 2 St.) Dr. Ferd. Spielmann.

8. *Kunstgeschichte:* Von November bis Mai 1 St. wöch. Vortrag über Gesch. der Baukunst. Dr. Riezler.

VI. Statistische Notizen.

	Classe I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	Summe
I. Schülerzahl.								
Am Anfang des Schuljahres	50	40	29	23	15	6	13	176
Ausserord. Schüler (II. S.) .	—	—	1	—	—	—	—	1
Ausgetreten	4	—	1	—	1	—	—	6
Entlassen keiner.								
Am Schlusse d. II. Sem. .	46	40	29	23	14	6	13	171

	Classe							Summe
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
2. Vaterland.								
Tirol	40	35	24	19	12	6	12	148
Vorarlberg	5	5	5	3	2	—	1	21
N. Oesterreich	1	—	—	—	—	—	—	1
Italien	—	—	—	1	—	—	—	1
								171
3. Religionsbekenntnis.								
Alle Römisch-Katholisch.								
4. Muttersprache.								
Deutsch	46	35	26	20	14	5	13	159
Italienisch	—	—	1	1	—	—	—	2
Ladinisch	—	5	2	2	—	1	—	10
5. Alter am 15. Juli 1879.								
11 Jahre alt	11	1	—	—	—	—	—	12
12 " "	25	9	—	—	—	—	—	34
13 " "	5	23	4	—	—	—	—	32
14 " "	2	5	17	4	1	—	—	29
15 " "	3	1	6	12	—	—	—	22
16 " "	—	1	1	4	5	—	—	11
17 " "	—	—	—	1	6	3	3	13
18 " "	—	—	—	2	1	—	3	6
19 " "	—	—	—	—	1	—	5	6
20 " "	—	—	—	—	—	2	2	4
21 " "	—	—	—	—	—	1	—	1
24 " "	—	—	1	—	—	—	—	1
								271
6. Classification der Schüler am Ende des II. Semesters.								
I. Classe mit Vorzug . .	8	5	7	4	2	1	6	33
I. Classe	29	23	15	16	9	3	7	102
II. Classe mit Wiederholungs-Prüf.	3	4	3	3	2	—	—	15
II. Classe ohne W.-Pr. .	3	4	3	—	1	2	—	13
III. Classe	3	4	—	—	—	—	—	7
Ungeprüft	—	—	—	—	—	—	—	—
								170

Stipendisten sind 3; der Stipendienbetrag 311 fl.

VII. Lehrmittel.

a) Bibliothek.

Die im Bibliotheksaal befindlichen Bücher sind nun nach Hübl's Anweisung in Zetteln aufgenommen worden. Die Zahl der Zettel beläuft sich auf 1832, die der Bände auf 3325, die der Hefte auf 1912. Darunter sind nicht gerechnet: a. Die numismatischen Werke, welche im Daktyliotheksaale bleiben werden, b. die musikalischen, c. die geogr. Karten, d. der Besitz des Zeichnungssaales, e. die Werke der in einem eigenen Locale untergebrachten Spiritualbibliothek. Neuer Erwerb:

Geschenke: Vom hohen k. k. Ministerium f. C. u. U.: Bericht über öst. Unterrichtswesen, 2 Th. Wien, 1873; von Prof. Dr. A. v. Klipstein seine Beiträge zur geol. und topogr. Kenntnis d. östl. Alpen, 2 Bde. Giessen; von Dr. Egger Jos., Prof. Theol.; M. Rhabani Mauri de laudibus s. crucis ed. Honze Leipzig 1847; von H. Regensberger Joh. Pfarrer in Albeins: die öst.-ung. Nordpolexpedition v. Payr Jul., Wien 1875 f.; von H. Rainer Benedict, stud. theol.: System der Anatomie v. Hirtel; von einem Ungenannten: Hellmuth's Elementar-Naturlehre v. Reichert, 17. Aufl. 1870; von Dr. Riezler Roman; Kämpfe und Siege der Kirche v. Firm. Lactantius, 2. Aufl. Mainz 1874; von A. Weger's Buchhandlung: Sixte Quint v. Hübner, 3 tom., Paris 1870 und G. Othmer's, Vademecum des Sortimenters, 3. Aufl., Hannover 1878; von H. Stippler Joh. Vicekanzler: Köhler, Münzbelustigung, 21 Bde., Mionnet, de la rareté et du prix des medailles Romaines, Paris 1847, 2 vol.

Kauf: Matthiessen Ludw., Grundzüge d. antiken u. modernen Algebra d. literalen Gleichungen, Leipzig 1878; Leupold F., Mineralogische Tafeln, Stuttg. 1878; Eckardt Th., Der Bau des menschl. Körpers, Essingen 1879; Kopp J. E., Gesch. d. eidgenöss. Bundes, 5 Bde. Leipzig 1845—1871; Brugier G., Gesch. d. deutschen Nationalliteratur, 5. Aufl., Freib. 1878; Laas E., der deutsche Aufsatz, 2. Aufl., Berlin 1878; Venn Jos., Deutsche Aufsätze, 13. Aufl., Wiesb. 1877; Kampen A., Descriptiones nobilium apud classicos locorum series I; Monumenta Germaniae historica, auct. antiquissimorum, tom. I. II. III. pars prior., Berlin 1877—1878; Wiegand Aug., Geometrische Aufgaben nach Miles Bland, 2. Aufl. 1860; Pennerstorfer Ig., Oest. Geschichte in Gedichten, Wien 1878; Krones, öst. Gesch., 2 Bde.; Ohm's System. d. Mathematik, 9 Bde., Berlin 1829—1852; Schneider Jos., Carminum libri octo, Tergesti 1878; De Rossi, Roma sotterranea, 3 Bde., Rom 1864—1877; Roth J. F., mythol. Daktyliothek, Nürnb. 1805; Primisser A., die k. k. Ambraser Sammlung, Wien 1819; Tölken E. H., erkl. Verz. d. Gemmen u. antiken Münzen im Antiquarium d. k. Museums in Baiern, Berlin 1835; Welzl v. Wellenheim, Münz- und

Medaillensammlung, 3 Bde., Wien 1844 f., Rentzmann W., numismatisches Wappenlexikon, Berlin 1876; Jännicke F., Marken u. Monogramme, Stuttg. 1878; Stollberg Fr. Leop., Reise in Deutschland, Schweiz, Italien und Sicilien, 2 Bde., Mainz 1877; Haushoffer M., Lehr- und Handbuch der Statistik, Wien 1872. Fortgesetzt wurden: öster. Gymnas. Zeitschrift, Zeitsch. f. d. Gymnasialwesen, Berlin; Jahresbericht über d. Fortsch. d. class. Altertumswissenschaft; Zeitsch. f. Math. u. Physik v. Schlömilch etc.; Verordnungsblatt d. Minist. f. C. u. U.; Petermanns geogr. Mittheilungen; Numismatische Zeitsch., Wien 1878; Zeitsch. f. Numismatik, Berlin 1878.

b) Physikalisches Cabinet.

Gekauft wurde: Ei des Columbus, kleine Bramah-Presse, App. zum Beweise des Seitendrucks, Torricelli'sche Glasröhre mit Stahlhahn, App. zum Beweise d. Mariotte'schen Gesetzes f. d. Verdichtungsfall, Dasymeter, Gefrierapparat, App. f. d. Freiwerden von Wärme beim Erstarren, 4 Holzstäbe auf Stativ, Kaleidoskop, Photometer nach Zenger, Optometer nach Stampfer, Influenzapparat nach Riess.

c) Naturhistorisches Cabinet.

Geschenke: Panzer der Riesenschildkröte von Fräulein Josephine v. Mairhofen in Innsbruck; 2 Taenia solium u. 1 Taenia perfoliata von Hrn. Dr. Jos. Mutschlechner: 50 Stück Mineralien von Hochw. H. Simon Ortner, Benef. in Bruneck; 12 Stück Mineralien durch Hochw. H. Lorenz Mayr, Coop. in Schwaz.

Durch Kauf: 1 aquila fulva, strix flammea, anas boschas, herpestes ichneumon, canis aureus, corvus corax.

d) Die Münzensammlung.

zu der vor 6 Jahren ein Beutelchen Schatzgeld des Hochseligen Fürstbischofs Vinzenz den Grund legte, umfasst jetzt 4600 Stücke in 64 Laden mit je 63 Fächern und einem Glas-Kasten für Schaumünzen und grössere Medaillen, dessen Unterbau 24 Schubladen mit je 35 Fächern hat. Circa 500 Münzen und Medaillen sind noch nicht bestimmt; die übrigen sind nach Welzl, Mionnet und Grässe chronologisch und nach Ländern geordnet durch den Hochw. Herrn Stippler Joh. Vicekanzler.

VIII. Chronik.

Am 17. September trafen die Zöglinge in der Anstalt ein. Am 18. September nahm der Hochwürdigste Fürstbischof Vincenz die feierliche Benediction der neuen Kirche vor, celebrirte die erste heilige Messe in derselben und hielt die Exhorte.

Aus dem Lehrer-Collegium war Herr Ad. Rhomberg ausgetreten, zu den 6 Cursen des vorigen Jahres der 7. hinzugekommen, Herr Fr. Schratz als Präfect berufen worden.

Der 4. October war festlicher Ferialtag.

Im Herbsttermine legte Herr Schuchter Josef die Lehramtsprüfung aus der Fachgruppe: Philosophie mit Geographie u. Geschichte bei der k. k. Prüf.-Commission in Innsbruck ab.

Am 2. December besuchte Se. Excellenz der Herr Statthalter Graf Taaffe in Begleitung des Statthaltereirates Freih. v. Reden, des Bezirkshauptmannes v. Chizzali und d. f. b. Kanzlers Canonicus Lorenz die Anstalt.

Vom 16. bis 19. Dec. inspicierte der k. k. Landes-Schulinspector Herr Chr. Schneller die Lehranstalt.

Am 29. Jan. starb in Innsbruck der hochwürdige Herr Höllwarth Carl, Lehramtscandidat für klassische Philologie und bestimmt, im nächsten Schuljahre als Lehrer in die Anstalt zurückzukehren, in der er vor Beginn des philos. Trienniums bereits 2 Jahre gewirkt hatte. Welche Hoffnungen mit ihm zu Grabe getragen wurden, sagt die Aeusserung des Fürstbischofs Vinzenz, es sei ihm nie so schwer gefallen zu beten: fiat voluntas tua, wie beim Eintreffen dieser Trauerdepesche. R. I. P.

Am 15. Febr. Schluss des I., am 18. Beginn des II. Sem.

Am 16. März wurde die amtliche Mittheilung von der Verleihung des Oeffentlichkeitsrechtes praesentirt (s. Erlässe).

Am 6. April verkündete um die Mittagsstunde die grosse Glocke der Kathedrale das Hinscheiden des Hochwürdigsten Fürstbischofs **Vincenz Gasser**; am 9. nahm die Anstalt an der Begräbnisfeier, am 30. an dem letzten Trauergottesdienste im Dome Theil, wobei der Sängerchor des Seminars das Requiem und die Absolutionen sang. Sein Andenken ehrte der Lehrkörper durch den einstimmigen Beschluss, dass das Knabenseminar fortan den Namen seines Gründers führen und Seminarium, resp. Gymnasium Vincentinum heissen solle. Dieser Beschluss wurde vom Hochwst. Kapitel-Vicariat mit Erl. v. 1. Mai, Z. 1701, genehmiget und vom h. k. k. Landes-Schulrat zur Kenntnis genommen.

Hohe Besuche erhielt die Anstalt: Den 31. März v. Ihrer Majestät der Königin Mutter von Baiern, den 9. April von dem Hochwürdigsten Bischof Franz Josef Rudigier, den 10. April vom Hochwürdigsten Bischof Johann Amberg.

23. April. Nachmittag schulfrei; Abends zur Feier der silbernen Hochzeit des Erlauchten Kaiserpaares Versammlung im festlich geschmückten Theatersaale. Declamation patriotischer Gedichte wechselte ab mit Gesang (Partien aus Mendelssohn's Elias); der Septimaner Haider Silvester hielt die Festrede, deren letzte Worte:

VIEL TAVSENDFACHES RAVSCHENDES HOCH
AVF KAISER VND KAISERIN!

mächtig wiederklangen und in der Volkshymne einen erhebenden Abschluss fanden. Am 24. April wurde ein feierlicher Gottesdienst mit Te Deum in der Seminarkirche gehalten.

Am 24. Mai wurde Prof. Ferdinand Spielmann an der Universität in Innsbruck zum Doctor der Philosophie promovirt. Herr Oettl Franz bestand im Juni die Lehramtsprüfung für klassische Philologie im ganzen Gymnasium.

Vom 2.—12. Juli Versetzungsprüfungen.

Am 15. Juli zum Schluss des Schuljahres Dankamt, Te Deum und Prämienvertheilung.

2 Prämien sind Geschenk der A. Weger'schen Verlagshandlung.

3 hat der löbl. tirolische Stenographen-Verein gespendet.

IX. Erlässe.

Der Erlass d. hochl. k. k. Landes-Schulrathes in Tirol v. 14. Dec. 1878, Z. 19719, ertheilt Weisungen gegen das Ueberhandnehmen der Kurzsichtigkeit unter der studirenden Jugend.

Erlass derselben Behörde v. 26. Jan. 1879, Z. 1624, betreffend die Ertheilung der 3. allg. Fortgangsklasse; Zusatz bez. der Turnnote am 13. Mai d. J., Z. 7966.

Hoher Ministerialerlass v. 26. Febr. 1879, Z. 1250, womit das f. b. Knabenseminar für berechtigt erklärt wurde *„fortan den Namen eines Privat-Gymnasiums zu führen und dieser Anstalt zunächst für die Schuljahre 1878/79, 1879/80 und 1880/81, das Oeffentlichkeitsrecht, somit das Recht, staatsgiltige Gymnasial-Zeugnisse nach der in dem hohen Erlasse v. 10. Juni 1871, Z. 5432 vorgeschriebenen Form auszustellen“*, verliehen wurde.

Das nächste Schuljahr wird am 16. September mit dem festlichen Gottesdienste eröffnet werden. Sämmtliche Zöglinge haben sich am 15. Sept. in der Anstalt zu stellen.

Die Aufnahmsprüfung für jene Schüler, welche in die I. Klasse eintreten wollen, wird am 18. August in Imst, am 19. in Feldkirch, am 21. in Brixen stattfinden und um $8^1/_2$ Uhr Vormittag beginnen. Die Zulassung zu dieser Prüfung hängt von der Erledigung des Aufnahmsgesuches ab; die Forderungen beim Examen werden dieselben sein, wie in den vorausgegangenen Jahren.

Herzlichen Dank allen Wohlthätern!

Brixen, den 15. Juli 1879.

Dr. Alois Spielmann.
Director.

Das nächste … mit dem festlichen
Gottesdienste e… …e haben sich am
15. Sept. in der …

Die Aufnahı… … die I. Klasse ein-
treten wollen, w… … in Feldkirch, am
21. in Brixen s… …ag beginnen. Die
Zulassung zu di… …ung des Aufnahms-
gesuches ab; di… …dieselben sein, wie
in den vorausgeg…

Brixen, de…

…pielmann.
…or.