GEOMETRIÆ THEORICO-PRACTICÆ LIBER SECUNDUS

DE PROPORTIONE LINEARUM RECTARUM.

ELEMENTUM I.

De Rationibus, & Proportionibus.

DEFINITIONES.

356. DUARUM *ejusdem generis magnitudinum mutua quædam ſecundùm quantitatem comparatio dici ſolet à Geometris Ratio.*

357. Hæc comparatio duplex eſt. In prima quæritur duarum quantitatum differentia, quæ dicitur Ratio Arithmetica, & ſubductione inveſtigatur. Sic ratio ſeptenarii ad ternarium eſt exceſſus, ſeu differentia 4.

358. In ſecunda quæritur, quoties una quantitas major minórve ſit alterâ, ſeu, quoties una alteram contineat, vel in eadem contineatur: quæ dicitur Ratio Geometrica, & diviſione deprehenditur. Nam quotus oſtendit rationem dividui ad diviſorem, nempe, quoties una quantitas alteram contineat. Sic ratio 6 ad 2 deprehenditur dividendo 6 per 2.

Scholion.

Ratio, de qua unicè in hoc tractatu ſermo habebitur, eſt ratio geometrica.

359. *Antecedens rationis dicitur illa quantitas, quæ ad aliam refertur: Consequens verò illa, ad quam refertur.*

360 *Quotus antecedentis per consequentem divisi, dici solet Exponens, seu Denominator rationis. Est enim Quotus quantitas integra, vel fracta, modum definiens, quo antecedens rationis terminus consequentem contineat, vel in illo contineatur.* Hinc quotus dicitur etiam denominator rationis, quia denominat quamlibet proportionum speciem: puta, si quotus antecedentis per consequentem divisi sit 2, dicitur ratio dupla, si 3, tripla, si $\frac{1}{2}$, subdupla, si $\frac{1}{3}$, subtripla; & universaliter ratio ipsius a ad b est, quæ denominatur ab $\frac{a}{b}$, hoc est, à quotiente quantitatis a per b divisæ.

361. Sicuti duæ magnitudines inter se mutuò comparantur; ita duæ rationes peræquè conferri possunt.

Proportio itaque est duarum rationum æqualitas. Unde quatuor quantitates dicuntur proportionales, cum ratio inter primam, & secundam æqualis est rationi inter tertiam, & quartam.

362. *Æqualitas duarum rationum arithmeticarum est æqualitas excessuum, vel defectuum, & vocatur Proportio Arithmetica. Æqualitas duarum rationum geometricarum est æqualitas quotorum, & Proportio Geometrica appellatur.*

363. Prima expressio proportionis geometricæ est hujusmodi: 8 : 2 : : 12 : 3. Altera usita-

tatior expressio est $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$. Nam ratio geometrica ex quoto æstimanda est (n. 360.), & æqualitas rationum ex æqualitate quotorum (n. 362.); ubi enim quoti invicem æquantur, ibi & quantitates sunt in eadem ratione constitutæ; cum autem divisionum quotientes indicari soleant interjectâ lineolâ dividuum inter, & divisorem: hinc rationes singulæ exprimuntur instar fractionum, quarum numerator, & denominator perinde sunt, atque rationis antecedens, & consequens. Omnis autem proportio sic pronuntiari solet: 8 est ad 2, uti 12 ad 3.

Corollarium.

364. Hinc duæ rationes 8 ad 2, & 12 ad 3 dicuntur similes, æquales, eædem, quando antecedentes termini per suos consequentes divisi, dant quotientes æquales. Et vicissim si quotientes sint æquales, magnitudines erunt proportionales, id est, ratio rationi erit eadem, æqualis, similis. Quare, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, erunt quantitates illæ proportionales: hoc est, $a : b = c : d$; quo signo æqualitatis $=$ exprimitur æqualitas ipsa exponentium, seu quotorum.

365. *Rationes inæquales, seu dissimiles sunt, quarum antecedentes termini per suos consequentes divisi, dant exponentes inæquales; & illa ratio major est, cujus denominator, seu quotus major.*

Inæqualitas rationum iisdem planè ſignis notatur, quibus inæqualitas magnitudinum. Sic $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, ſive $a : b > c : d$ ſignificat rationem a ad b majorem ratione c ad d: hoc eſt, exponentem primæ rationis majorem exponente ſecundæ rationis.

366. *In omni proportione geometrica, quæ exhibeatur per* a : b : : c : d, *vel* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *primus terminus* a *primæ rationis appellatur Primum Antecedens, ſecundus terminus* b *Primum Conſequens. Primus terminus* c *ſecundæ rationis vocatur Secundum Antecedens; & ſecundus terminus* d *Secundum Conſequens.*

367. *Primus terminus* a, *& ultimus* d *ejuſdem proportionis vocantur Extrema. Secundus terminus* b, *& tertius* c *appellantur Media.*

368. *Rationes æquales in eadem ſerie progredientes, vocantur rationes ordinatæ*; & ſcribi ſolent inſtar fractionum æqualium, $\frac{12}{3} = \frac{8}{2} = \frac{20}{5} = \frac{28}{7}$ &c.; vel, 12 : 3 : : 8 : 2 : : 20 : 5 : : 28 : 7. Vel etiam, quod interdum commodiùs erit, ſcribi poterunt omnia ſucceſſivè antecedentia, duobus interjectis punctis inter ſingula, & ſimiliter omnia ſucceſſivè conſequentia, interjectis rurſum duobus punctis, ſeriémque omnium antecedentium à ſerie conſequentium ſeparando quatuor punctorum notatione, hâc ſemper obſervatâ lege, ut antecedens,

tecedens, & conſequens cujuslibet rationis eundem locum obtineant in utraque ſerie. Itaque earundem rationum æqualium ſeries ita exprimi poterit : 12 : 8 : 20 : 28 :: 3 : 2 : 5 : 7; quod ſignificat generatim terminos componentes primam ſeriem proportionales eſſe terminis reſpectivis componentibus ſecundam ſeriem, ſingulos ſingulis.

Hæc ſcribendi, notandíque methodus in ſerie plurium rationum æqualium commodiſſima videri ſolet, præſertim cum partes ejusdem figuræ, antecedentium vicem obeunt, & partes alterius figuræ, conſequentium locum ſuſtinent. Nam juxta hanc methodum omnes partes primæ figuræ ſcribi poſſunt ſucceſſivè, reſpondentes partibus in ſecunda figura uniformiter ſucceſſivis; quâ factâ ſeparatione, facilè ſecernuntur partes illæ, quæ ad primam figuram pertinent, ab iis, quæ ad alteram figuram; ita ut ſtatim in oculos incurrant partes, quæ invicem comparantur in utraque figura, & ex quibus rationes, & proportiones gignuntur, nimirum,

Si duæ figuræ ABCDE, MNOPQ habeant latera invicem proportionalia, hoc eſt, ſi TAB. VIII.

AB : MN :: BC : NO Fig.

BC : NO :: CD : OP 213.

CD : OP :: DE : PQ &c., 214.

 con-

consultiùs erit in una serie scribere successivè latera AB, BC, CD, DE &c. primæ figuræ, quæ sunt antecedentia rationum æqualium; & in altera serie similiter successivè latera MN, NO, OP, PQ &c. secundæ figuræ, quæ earundem rationum æqualium consequentia sunt: observatâ utrobique lege, quòd respectiva latera eundem locum obtineant in utraque serie; & ita habebitur

AB : BC : CD : DE &c. : : MN : NO : OP : PQ &c.

Tab. VIII. Fig. 215. 216. 369. *Si duæ figuræ* X *&* Z *sint ejusmodi, ut latus* AB *primæ sit ad latus* MN *secùndæ, sicuti latus* BC *primæ est ad latus* NO *secundæ, dicentur habere latera directè, seu simpliciter proportionalia.*

Quòd si omnia latera primæ X *eandem habeant rationem cum omnibus lateribus secundæ* Z, *duæ figuræ* X *&* Z *dicentur habere omnia latera mutuò proportionalia.*

In utroque casu proportionis directæ latera primæ X sunt antecedentia in serie rationum æqualium ordinatarum, & latera secundæ Z sunt consequentia.

Tab. VIII. Fig. 217. 218. 370. *Si duæ figuræ* X *&* Z *sint ejusmodi, ut latus* AB *primæ sit ad latus* MN *secundæ, uti latus* NO *secundæ ad latus* BC *primæ, dicentur habere latera reciprocè proportionalia, seu reciproca.*

Quare,

Quare, si duæ figuræ X & Z habeant duo latera reciproca, hoc est, si AB : MN :: NO : BC, latera AB, BC primæ figuræ vocantur Extrema proportionis, latera MN, NO secundæ vocantur Media ejusdem proportionis.

371. *Si tres magnitudines invicem comparatæ, quemadmodum 2, 10, 50, sint ejusmodi, ut prima sit ad secundam, uti secunda ad tertiam, proportio dicitur continua*; & ita exprimitur : 2 : 10 :: 10 : 50, vel ÷÷ 2 : 10 : 50.

Corollarium.

372. Hinc si eadem quantitas duabus quantitatibus comparetur, vel duæ quantitates æquales eidem tertiæ, sive aliis inter se æqualibus comparentur, duæ rationes semper erunt æquales (n. 364.).

Et reciprocè duæ quantitates erunt æquales, si ad eandem, vel æquales quantitates comparatæ habeant eandem rationem ; puta, duæ quantitates A & B erunt æquales, si A : C :: B : C.

AXIOMA.

373. *Si duas quantitates* A & B *multiplicet, aut dividat eadem quantitas: hinc facta, inde quoti erunt quantitatibus multiplicatis, aut divisis in eadem proportione.*

In primo casu A : B :: 2A: 2B :: 3A: 3B :: 4A :: 4B &c.; hoc est, (n. 362.) $\frac{A}{B} = \frac{2A}{2B} = \frac{3A}{3B}$ &c.

In secundo casu A : B :: $\frac{1}{2}$ A: $\frac{1}{2}$ B :: $\frac{1}{3}$ A : $\frac{1}{3}$ B &c.

PROPOSITIO I.

374. Theorema. *Si duo parallelogramma* AC, DE, *inter easdem existant parallelas, eam inter se proportionem habent, quam bases* BC, CE, *sive* AC: DE :: BC : CE. Euclid. lib. 6. prop. 1.

TAB. VIII. Fig. 219. *Demonstratio.* Quoniam parallelogramma AC, DE inter easdem parallelas existunt, habebunt quoque eandem altitudinem, quæ per duarum parallelarum distantiam AM exprimitur. Quare (n. 263.) parallelogrammum AC = BC × AM; & parallelogrammum DE = CE × AM. Atqui BC × AM: CE × AM :: BC: CE (n. 373.). Ergò AC: DE :: BC : CE. Quod erat &c.

Scholion.

Ab hoc Theoremate dependet quidquid uspiam de figuris sive planis, sive solidis per proportiones demonstratur. Euclidea de-

demonstrandi ratio operosior est, quàm ferre possint Tirones in primo aditu scientiæ proportionum. Quam attuli demonstrationem, omnium expeditissima est.

Corollarium.

375. Ergò triangula BAC, CAE, quorum bases BC, CE in eadem recta linea existunt, & vertex communis A, hoc est, altitudo eadem est, eam inter se proportionem habent, quam bases BC, CE. TAB. VIII. Fig. 220.

Nam parallelogramma ABCD, DCEF, quorum eadem altitudo est, dupla sunt triangulorum BAC, CAE. Ergò, uti illa, ita hæc erunt inter se, ut bases BC, CE.

PROPOSITIO II.

376. Theorema. *Parallelogramma, aut triangula æqualia* X, Z, *quæ unum angulum* ABE *uni* DBC *habent æqualem, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca : hoc est,* AB : BC : : DB : BE.

Et vicissim, si latera sic habent reciproca, parallelogramma, aut triangula sunt æqualia. Euclid. lib. 6. prop. 14 & 15. TAB. VIII. Fig. 221. 222.

Demonstratur I. pars. Quoniam anguli ABE, DBC sunt æquales, ita opponi ad verticem possunt, ut latera

AB, DB, efficiant singula unam rectam lineam cum lateribus singulis BC, BE. Hoc posito, erit (n. 374. & 375.)

AB : BC :: X : Y.

X : Y :: Z : Y (n. 372.)

Z : Y :: DB : BE (n. 374. & 375.).

Ergò AB : BC :: DB : BE. Quod erat primum.

Demonstratur II. pars. Quoniam per hyp. latera circa æquales angulos sunt in proportione reciproca, erit AB : BC :: DB : BE. Atqui AB : BC :: X : Y (n. 374.); & DB : BE :: Z : Y. Ergò X : Y :: Z : Y; & consequenter X = Z. Quod erat alterum.

Corollarium I.

377. Ex prima parte hujus Theore-
TAB. matis constat criterium proportionalita-
VIII. tis quatuor terminorum AB, BC,
Fig, DB, BE illud esse, si AB × BE pro-
221. ductum, seu rectangulum extremorum
222. æquale sit ipsi BC × DB producto mediorum.

Corollarium II.

378. Si quatuor termini AB, BC,
TAB. DB, BE, sint ejusmodi, ut parallelo-
VIII. grammum AE, cujus duo latera contigua
Fig. sunt extrema, majus sit parallelogram-
223. mo æquiangulo DC, cujus latera contigua sint media; sive, si ex quatuor terminis AB, BC, DB, BE, productum extremorum AB × BE majus sit

pro-

producto mediorum $BC \times DB$, erit ratio $AB : BC > DB : BE$, Sin autem productum extremorum minus ſit producto mediorum, erit ratio $AB : BC < DB : BE$.

Demonſtratio repetenda à n. 376.

PROPOSITIO III.

379. Theorema. *In omni proportione geometrica* $AB : BC :: DB : BE$, *rectangulum, ſeu productum* $AB \times BE$ *extremorum, æquatur rectangulo, ſeu producto* $BC \times DB$ *mediorum.* Euclid. lib. 6. prop. 16. TAB. VIII. Fig. 221.

Demonſtratio. Fiat rectangulum X, cujus duo latera contigua ſint hæc eadem extrema AB, BE dictæ proportionis; & aliud rectangulum Z, cujus ſimiliter duo latera contigua ſint ipſa media BC, DB. Duo hæc rectangula habebunt latera circa æquales angulos, nimirum rectos, reciproca; & conſequenter erit $X = Z$ (n. 376.). Atqui (n. 263.) rectangulum $X = AB \times BE$ producto extremorum & rectangulum $Z = DB \times BC$ producto mediorum. Ergò in omni proportione geometrica &c. Quod erat &c,

Corollarium.

380. Quoniam proportio $AB : BC :: DB : BE$ dat $AB \times BE = BC \times DB$:

I. Dividendo utrumque membrum æqua-

æquationis per AB, erit $BE = \frac{BC \times DB}{AB}$: hinc Regula generalis. *Cognitis tribus primis terminis* AB, BC, DB, *proportionis geometricæ*, *habetur quartus incognitus* BE, *multiplicando inter ſe duo media* BC, DB, *productúmque dividendo per primum extremum* AB.

II. Eandem æquationem $AB \times BE = BC \times DB$ dividendo utrimque per BE, fiet $AB = \frac{BC \times DB}{BE}$; hinc Regula. *Cognitis tribus ultimis terminis proportionis geometricæ obtinetur primus* AB, *multiplicando inter ſe duo media* BC, DB, *& productum dividendo per ultimum extremum* BE.

III. Eandem æquationis formulam dividendo utrinque per BC, fiet $DB = \frac{AB \times BE}{BC}$; hinc Regula. *Cognitis duobus extremis*, *& primo mediorum proportionis geometricæ*, *obtinetur ſecundum medium*, *multiplicando inter ſe duo extrema*, *productúmque dividendo per primum medium.*

IV. Vel eandem dividendo utrinque per DB, erit $BC = \frac{AB \times BE}{DB}$; hinc Regula inveniendi primum medium, datis extremis, & ſecundo medio.

PRO-

PROPOSITIO IV.

381. Theorema. *Si ratio* $AB : BC > DB : BE$ *parallelogrammum* AE, *cujus latera contingua ſunt ipſa extrema, majus erit parallelogrammo æquiangulo* DC, *cujus contingua latera ſunt media; & conſequenter rectangulum* AE, *æquale producto* $AB \times BE$ *extremorum, majus erit rectangulo* DC, *hoc eſt, producto* $BC \times DB$ *mediorum.* Tab. VIII. Fig. 223.

Demonſtratio. Nam, ſi à primo termino AB ſubducatur portio AI, quantùm ſatis eſt, ut reſiduum IB ſit reliquis tribus terminis proportionale, hoc eſt, $IB : BC :: DB : BE$, ducatúrque IF parallela rectæ DBE : habebitur (n. 376.) parallelogrammum $IE = DC$. Atqui per hypotheſim $AB > IB$. Ergò parallelogrammum $AE > IE$; & conſequenter $AE > DC$. Quod erat &c.

Corollarium.

382. Contra verò, ſi $AB : BC < DB : BE$, demonſtrabitur ſimiliter parallelogrammum $AE < DC$. Nam, ſi recta AB minor eſt, quàm ut ſit tribus reliquis proportionalis, producatur BA in L, donec $LB : BC :: DB : LE$; ducatúrqne LM parallela rectæ BE : erit (n. 376.) $LE = DC$. Sed $AE < LE$. Ergò $AE < DC$. Tab. VIII. Fig. 224.

PRO-

PROPOSITIO V.

383. Theorema. *In omni proportione geometrica* A : B : : C : D, *quocunque modo diſponantur termini, ſemper habebitur proportio, dummodo duo media maneant media, aut ambo evadant extrema, vel duo extrema perſeverent extrema, aut ambo evadant media.* Euclid. lib. 6. prop. 16.

Demonſtratio. Nam factum extremorum ſemper æquabitur facto mediorum: hinc per n. 376. & 377. magnitudines illæ erunt geometricè proportionales.

Quod, ut evidentiùs conſtet, animadvertendum eſt quatuor illos terminos juxta conditionem à Theoremate præſcriptam nonniſi octo permutationes ferre poſſe, & in harum qualibet, productum extremorum ſemper æquari producto mediorum.

$a : b :: c : d$	$ad = bc$
$d : b :: c : a$	$da = bc$
$a : c :: b : d$	$ad = cb$
$d : c :: b : a$	$da = cb$
$b : a :: d : c$	$bc = ad$
$b : d :: a : c$	$bc = da$
$c : a :: d : b$	$cb = ad$
$c : d :: a : b$	$cb = da$

Ex hiſce octo terminorum proportionalium permutationibus proficiſcuntur varii argumentandi modi, ac Regulæ proportionum, quas partim Eunoclides lib. 5. exponit, & demonstrat, ac nomine quamque suo notat, & definit, partim à Geometris inter demonstrandum adhibitæ sunt, & suis nominibus carent.

Juvabit autem ad exercitationem, ut Tirones rem in numeris explorent, quos litteris in prima anologia substituant, & in reliquis omnibus permutationibus.

Regula I.

384. *Si* 8 : 4 : : 6 : 3, *erit alternando*, 8 : 6 :: 4 : 3. Euclid. lib. 5. prop. 16.
Nam 8 × 3 = 6 × 4.

Corollarium.

385. *Si* 12 : 4 > 6 : 3, *erit alternando*, 12 : 6 > 4 : 3. Euclid. 5. prop. 27.
Nam 12 × 3 > 6 × 4 (n. 378.).
Idem similiter demonstrabitur de proportione minore.

Regula II.

386. *Si* 8 : 4 :: 6 : 3, *erit invertendo*, 4 : 8 :: 3 : 6. Euclid. lib. 5. prop. 4. corol.
Nam 4 × 6 = 8 × 3.

Corollarium.

387. *Si* 12 : 4 > 6 : 3, *erit invertendo*, 4 : 12 < 3 : 6. Euclid. lib. 5. prop. 26.
Nam 4 × 6 < 12 × 3 (n. 378.).

Ac

Ac prætereaPropoſitio per ſe patet; quò enim major eſt ratio quævis, eò minor eſt ipſius converſa.

Regula III.

388. *Si* $8:4::6:3$, *erit componendo*, $8+4:4::6+3:3$. Euclid. lib. 5. prop. 18.

Nam $8+4 \times 3 = 6+3 \times 4$.

Præterea perſpicuum eſt, in hac hypotheſi utrumque antecedens 8 & 6 ſuo conſequente auctum, proportionaliter augeri.

Corollarium.

389. *Si* $12:4>6:3$, *erit quoque componendo*, $12+4:4>6+3:3$. Euclid. lib. 5. prop. 28.

Nam productum extremorum majus eſt producto mediorum [n. 378].

Regula IV.

390. *Si* $8:4::6:3$, *erit etiam dividendo*, $8-4:4::6-3:3$. Euclid. lib. 5. prop. 17.

Nam utrumque antecedens ſuo conſequente proportionaliter mulctatur.

Corollarium.

391. *Si* $12:4>6:3$, *erit dividendo*, $12-4:4>6-3:3$. Euclid. lib. 5. prop. 29.

Nam $3 \times 12-4 > 4 \times 6-3$.

Regu-

Regula V.

392. *Si antecedens unum* a + b *fuerit ad conſeqnens* b, *ut antecedens alterum* c + d *ad conſequens alterum* d, *etiam antecedens primum* a + b *erit ad* a *exceſſum ſuum ſupra conſequens, ut antecedens alterum* c + d *eſt ad* c *exceſſum ſuum ſupra conſequens alterum; nimirum, ſi* a + b : b :: c + d : d, *erit per converſionem rationis*, a + b : a :: c + d : c. Euclid. lib. 5. prop. 18. corol. 1.

Nam, ſi $a + b : b :: c + d : d$, erit dividendo per Regulam IV., $a : b :: c : d$; & invertendo per Regulam II., $b : a :: d : c$; & per Reg. III. componendo, $a + b : a :: c + d ; d$; quæ eſt converſio rationis.

Corollarium.

393. *Si prima quatuor magnitudinum ad ſecundam habeat majorem rationem, quàm tertia ad quartam, per converſionem rationis prima ad exceſſum primæ ſupra ſecundam habebit minorem rationem, quàm tertia ad exceſſum tertiæ ſupra quartam.*

Nam, ſi $a + b : b > c + d : d$, erit (n. 391.) dividendo, $a : b > c : d$; & (n. 387.) invertendo, $b : a < d : c$; & componendo [n. 389.], $a + b : a < c + d : c$.

Regula VI.

394. *Omnis proportio geometrica* AC: DE :: BC: BE *poteſt in hanc transformari* AC: DE :: AC — BC: DE — BE. *hoc eſt, ut antecedens ad ſuum conſequens, ita differentia antecedentium ad differentiam conſequentium.*

Nam, quia AC: DE :: BC: BE, erit alternando, AC: BC :: DE: BE; & per converſionem rationis, AC: AC — BC :: DE: DE — BE; & rurſum alternando, AC: DE :: AC — BC: DE — BE.

Similiter, ſi fuerint magnitudines quotcunque proportionales, quemadmodum ſe habuerit una antecedentium ad unam conſequentium, ita ſe habebit ſumma antecedentium ad ſummam conſequentium; hoc eſt, ſi A: a :: B: b :: C: c *&c., erit* C: c :: A + B + C: a + b + c. Euclid. lib. 5. prop. 12.

Nam, quia A: *a* :: B: *b*, erit alternando, & componendo, & rurſum alternando, A + B: *a* + *b* :: B: *b* :: C: *c* ex hypotheſi. Ergò rurſum alternando, A + B: C :: *a* + *b*: *c*; & componendo, & iterum alternando erit A + B + C: *a* + *b* + *c* :: C: *c*.

Regula VII.

395. *Si quatuor quantitates proportionales per alias quatuor proportionales mul-*

multiplicentur, vel dividantur: etiam factæ, vel quotæ quantitates proportionales erunt.

$$\text{Sint } A : 3A :: a : 3a,$$
$$B : 2B :: b : 2b,$$
$$\text{Ergo I. } A \times B : 3A \times 2B :: a \times b : 3a \times 2b,$$
$$\text{II. } \frac{A}{B} : \frac{3A}{2B} :: \frac{a}{b} : \frac{3a}{2b}.$$

Nam in utroque casu, si fiat productum extremarum, & mediarum, reperientur producta constare iisdem quantitatibus inter se multiplicatis, ac proinde esse æqualia; quod esse criterium proportionalitatis quatuor terminorum demonstravimus n. 376. & 377.

Scholion.

Reliquas, quæ usui erunt, proportionum regulas, prout occasio tulerit, exponam.

ELEMENTUM II.

De *Lineis proportionaliter sectis, de Triangulis Similibus, ac Lineis ad idem punctum concurrentibus.*

DEFINITIONES.

396. *Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos, singulos singulis, æqua-*

les habent, atque etiam latera, quæ circùm æquales angulos exiſtunt, proportionalia,

Tab. Sic triangula ABC, PQR ſimilia
VIII. dicuntur, ſi fuerint, æquiangula, ita
Fig. ut angulus A angulo P, & B ipſi Q,
225. & C ipſi R æqualis ſit; & pariter la-
226. tera circa æquales angulos proportionalia habuerint: nimirum, AB : BC :: PQ : QR, & AB : AC :: PQ : PR, & AC : CB :: PR : RQ.

Quòd ſi anguli unius figuræ æquales fuerint angulis alterius, ſinguli ſingulis; at latera circa æquales angulos proportionalia non fuerint, aut contra: non dicentur tales figuræ ſimiles: cujuſmodi ſunt quadratum, & rectangulum oblongum. Nam hæ figuræ habent quidem angulos æquales, utpote rectos; at latera unius, lateribus alterius proportionalia non ſunt.

Tab. Hæc eadem definitio convenit qua-
VIII. dratis, pentagonis, aliiſque id genus
Fig. figuris ſimilibus ABCDE, MNOPQ
213. invicem comparatis.
214. *Figurarum ſimilium latera æqualibus angulis adjacentia, vocantur latera homologa, uti* AB, MN.

Tab.
PROPOSITIO I.

VIII
Fig. 397. Theorema. *Si ad unum trianguli* BAC *latus* BC *ducta fuerit pa-*
227. *rallela* MN, *hæc proportionaliter ſecabit ipſius*

ipsius trianguli latera AB, AC, *nimirum, erit* AB : AM : : AC : AN. Euclid. lib. 6. prop. 2.

Demonstratio. Ductis enim rectis MC, NB, erunt triangula BMN, CMN super eandem basim MN, & inter easdem parallelas constituta, inter se æqualia; utrique adjiciatur idem triangulum MAN: fiet triangulum BNA = CMA. Atqui hæc duo triangula æqualia habent angulum æqualem, seu communem in A. Ergò [n. 376.] circa æquales angulos habent latera in proportione reciproca, nimirum, AB : AM : : AC : AN. Quod erat &c.

Corollarium I.

398. In eadem hypothesi erit etiam AM : MB : : AN : NC.

Nam ex Th. AB : AM : : AC : AN
& per conv. rat., AB : AB—AM : : AC : AC—AN
hoc est, AB : MB : : AC : NC
& divid., AB—MB : MB : : AC—NC : NC
hoc est, AM : MB : : AN : NC.

Corollarium II.

399. Stante eâdem Theorematis hypothesi habebitur etiam AB : AM : MB : : AC : AN : NC.

Nam per Theor. AB : AM : : AC : AN; & per Corol. I. AM : MB : : AN : NC; tum alternando primam, &

ſecundam analogiam, habebitur AB: AC :: AM : AN,

AM : AN :: MB : NC.

Rationum itaque æqualium (n. 368.) antecedentibus in una ſerie, & conſequentibus in altera ritè diſpoſitis, erit AB : AM : MB :: AC : AN : NC.

Corollarium III.

TAB. VIII. Fig. 228. 400. Si ad unum trianguli BAC latus BC ductæ fuerint plures parallelæ MN, PQ, erunt reliquorum laterum ſegmenta proportionalia, hoc eſt, AB : AM : MB : AP ; PB : PM :: AC : AN : NC : AQ : QC : QN. *Euclid. prop. 2. lib. 6. Corol.*

Quoniam MN ponitur parallela lateri BC, erit per Corol. præced. AB : AM : MB :: AC : AN : NC ; hoc eſt,

AB : AC :: AM : AN :: MB : NC.

Rurſum, quia PQ ponitur parallela lateri BC, erit per idem Corol. AB : AP : PB :: AC : AQ : QC ; hoc eſt,

AB : AC :: AP : AQ :: PB : QC.

Cum autem rationes omnes hactenus inventæ æquales ſint eidem rationi AB : AC, hinc erit

AM : AN :: AP : AQ.

Atqui (n. 394.) AM : AN :: AM — AP : AN — AQ ; hoc eſt, AM : AN :: PM : QN.

Quare, cum ratio AM : AN ſit jam in ſerie rationum æqualium ipſi AB : A

C,

C, etiam ratio PM : QN poterit in eadem ſerie collocari. Erit itaque AB : AC :: AM : AN :: MB : NC :: AP : AQ :: PB : QC :: PM ; QN, ſive AB : AM : MB : AP : PB : PM :: AC : AN : NC : AQ : QC : QN.

PROPOSITIO II.

401. Theorema. *Si recta* AD *angulum* BAC *bifariam ſecans, etiam ſecet baſim* BC, *habebunt baſis ſegmenta* BD, DC, *eandem proportionem, quam reliqua latera* AB, AC : *ſive* BD : DC :: AB : AC. Euclid, lib. 6. prop. 3. TAB. VIII. Fig. 229.

Demonſtratio. Latus AC producatur quantitate AE = AB ; jungatúrque EB. Trianguli æquicruris anguli E & ABE ſunt æquales. Quia igitur angulus externus BAC duobus internis E & ABE æqualis eſt [n. 221.] angulus DAC, qui per hypotheſim dimidius eſt totius anguli BAC, æquabitur angulo E. Ergò [n. 114.] DA, BE ſunt parallelæ, atque hinc (n. 397.) BD : DC :: AE : AC ; & quia AE = AB, erit BD : DC :: AB : AC. Quod erat &c.

PROPOSITIO III.

402. Problema. *Datam rectam* AC *ſimiliter ſecare, ut altera data* AB *fuerit ſecta in* P & M. Euclid. lib. 6. prop. 10. TAB. VIII. Fig. 228.

Reſolutio. In vertice communi A efficiant duæ rectæ angulum quemvis ; & extre-

extremitates sectæ & insectæ jungat recta BC: huic ex punctis P & M duc parallelas PQ, MN ad rectam secandam AC occurrentes in Q & N. Dico factum.

Demonstratio. Patet ex n. 400. Nam AB : AM : MB : AP : PB : PM :: AC : AN : NC : AQ : QC : QN; & consequenter AP : PM : MB :: AQ : QN : PC. Quod erat &c.

PROPOSITIO IV.

TAB. VIII. Fig. 228.

403. Problema. *Datam rectam AC in quotvis æquales partes secare.* Euclid. lib. 6. prop. 10. Schol.

Resolutio. Cum recta secanda AC faciat quemvis angulum in vertice A recta altera indefinita AB; ex qua circino cape tot æquales partes AP, PM, MB, in quot secare placuerit datam rectam AC: duc rectam BC, eique parallelas PQ, MN. Dico factum.

Demonstratio. Patet ex n. 400. Nam AP : PM : MB :: AQ : QN : NC. Quod erat &c.

PROPOSITIO V.

TAB. VIII. Fig. 230.

404. Problema. *Datis tribus rectis* ab, am, ac *quartam proportionalem invenire.* Euclid. lib. 6. prop. 12.

Resolutio. Fiat angulus quivis XAZ; tum super latus AX à vertice A sumantur

tur duæ partes AB, AM æquales duabus primis proportionalibus *a b*, *a m*; & rursum super secundum latus AZ accipiatur pars AC æqualis tertiæ proportionali *a c* junganturque extremitates B & C primæ, ac tertiæ proportionalis per rectam BC, cui à puncto M ducatur parallela MN. Dico rectam AN esse quartam proportionalem quæsitam.

Demonstratio, Nam AB : AM :: AC : AN (n. 397.) Quod erat &c.

Corollarium I.

405. Si tribus datis rectis *a m*, *m b*, *a n* quærenda sit quarta proportionalis : disponantur tres datæ rectæ super lateribus anguli XAZ, ut in fig. præced., jungaturque MN, cui parallela fiat BC, occurrens in C lateri AZ indefinitè producto. Dico NC esse quartam proportionalem quæsitam. Fig. 230.

Nam [n. 398.] AM : MB :: AN : NC.

Corollarium II.

406. Eadem constructio adhibenda, si duabus AB, AM datis rectis tertia proportionalis sit invenienda; perinde enim est quartam proportionalem tribus datis AB, AM, AM quærere.

PROSITIO VI.

407. Theorema. *Si latera* AB, AC *trianguli* BAC *secta fuerint proportio-*
TAB. *naliter, ita ut* AB : AM :: AC : AN,
VIII. *secans* MN *erit parallela basi* BC. Eu-
Fig. clid. lib. 6. prop. 2.
227. *Demonstratio*, Ducantur rectæ NB, MC. Triangula BNA, CMA sunt æqualia (n. 376.); nam & habent angulum communem in A, & latera circa eundem sunt reciproca, nimirum, AB : AM :: AC : AN. Subducatur utrinque triangulum MAN : fiet triangulum BMN = CMN, & utrumque super eadem basi MN. Ergò (n. 259.) rectæ MN, BC sunt parallelæ. Quod erat. &c.

Corollarium I.

408. Quoniam recta MN est parallela basi BC, si AB : AM :: AC : AN: erit quoque eadem secans MN parallela basi BC,

I. Si AM : AB :: AN : AC,
II. Si MB : AM :: NC : AN,
III. Si AB : MB :: AC : NC.

Nam ex prima analogia omnes hujusmodi proportionalium terminorum permutationes inferuntur per regulas proportionum.

TAB. *Corollarium II.*
VIII. 409. Quadrilateri ABDC si latera
Fig. secentur in punctis M, N, P, hac lege,
231. ut AB : AC : DB : DC :: AM : AN :
232. DP

DP : DQ, quatuor rectæ, quæ in quatuor punctis junguntur, parallelogrammum efficient MPQN.

Nam ductis diagonalibus AD, BC,

I. In triangulo BAC, quia AB : AN : : : AC : AN, erit MN parallela ipsi BC [n. 407.]. Et similiter in triangulo BDC, quia DB : DP : : DC : DQ, erit PQ parallela ipsi BC. Ergò MN, PQ sunt invicem parallelæ.

II. In triangulo ABD, quia AB : AM : : DB : DP, erit MP parallela ipsi AD [n. 407.]. Et in triangulo ACD, quia AC : AN : : DC : DQ, erit NQ parallela eidem AD. Ergò MP, NQ sunt invicem parallelæ. Ergò quadrilaterum MPQN parallelogrammum est.

PROPOSITIO VII.

410. Theorema. *Triangula* BAC, CMN *sibi mutuò æquiangula, sunt similia: hoc est, etiam latera æqualibus angulis opposita, habent proportionalia.* Euclid. lib. 6. prop. 4. Tab. VIII. Fig. 233.

Demonstratio. Disponantur triangula in ea positione, ut latera homologa BC, NC unam rectam lineam efficiant, producantúrque latera BA, NM, donec concurrant in puncto O. Quoniam igitur angulus ACB = MNC per hyp., erunt rectæ AC, ON parallelæ, & similiter, quia per hyp. angulus ABC = MCN, rectæ OB, MC erunt parallelæ.

lelæ. Ergò OC parallelogrammum eſt, cujus latera oppoſita ſunt æqualia. Cum autem AC parallela ſit ipſi ON, erit B A : AO :: BC : CN.

Et rurſum, quia MC parallela eſt ipſi OB, erit

BC:CN :: OM: MN.

Quare in hiſce duabus analogiis ſubſtituendo CM ipſi AO, & AC ipſi OM, fiet

BA:CM:: BC:CN:: AC: MN: hoc eſt, BA:BC:AC:: CM:CN:MN. Ergò triangula ſibi mutuò æquiangula, ſunt ſimilia. Quod erat &c.

Corollarium I.

411. Duo triangula iſoſcelia ſunt ſimilia, ſi angulorum ad baſim unum uni æqualem habeant, vel, ſi angulum à lateribus æqualibus comprehenſum habeant æqualem.

Nam ex Elem. Lib. I. triangula in utroque caſu erunt æquiangula.

Corollarium II.

TAB. VIII. Fig. 225. 226. 412. Duo triangula ABC, PQR ſunt ſimilia, ſi latera ſingula ſingulis fuerint parallela; quippe quæ æquiangula eſſe demonſtratur ex theoria parallelarum.

Corollarium III.

TAB. VIII. Fig. 234. 413. Duo triangula ABC, PQR ſunt ſimilia, ſi latera unius perpendicularia ſint lateribus alterius, ſingula ſingulis.

Nam-

Nam, si per quadrantem integræ revolutionis convertatur triangulum PQR, hujus latera evadent parallela lateribus trianguli ABC; & consequenter triangula erunt æquiangula, & similia.

PROPOSITIO VIII.

414. Theorema. *Si triangula* ABC, AMN *habeant angulum inter duo latera proportionalia æqualem, vel communem* A, *triangula erunt similia.* Euclid. lib. 6. prop. 6. TAB. VIII. Fig. 228.

Demonstratio. Quia AB : AM :: AC : AN, erit recta MN parallela basi BC (n. 407.); & consequenter tres anguli unius æquales erunt tribus alterius, singuli singulis; hinc (n. 410.) duo triangula BAC, MAN sunt similia. Quod erat &c.

PROPOSITIO IX.

415. Theorema. *Triangula* ABC, PQR *sunt similia, si omnia latera habeant sibi mutuò proportionalia : hoc est, si* AB : AC : BC :: PQ : PR : QR, *sive si* AB : PQ :: AC : PR :: BC : QR. Euclid. lib, 6. prop. 5. TAB. VIII. Fig. 235.

Demonstratio. Minoris trianguli duo latera PQ, PR producantur, donec lateribus homologis AB, AC fiant æqualia, nimirum, PM = AB, & PN = AC; ducatúrque MN. Itaque

I. Quia per hyp. AB : PQ :: AC : PR, erit PM : PQ :: PN : PR; duo er-

ergò triangula PQR, PMN erunt similia (n. 414.).

II. Atqui triangulum ABC ∺ triangulo PMN; nam per hyp. BC: QR:: AB: PQ:: PM: PQ; & propter similitudinem triangulorum PMN, PQR, PM: PQ:: MN:QR. Ergò BC: QR :: MN: QR; & consequenter BC ∺ MN. Est etiam per Constructionem AB ∺ PM, AC ∺ PN. Quare triangulum PMN ∺ ABC. Ergò duo triangula ABC, PQR sunt pariter similia. Quod erat, &c,

PROPOSITIO X.

416. Theorema. *Si ab extremitatibus* B
TAB. *&* E, *& ab aliis diversis punctis* C*&*D
VIII. *ejusdem rectæ* BE *ducantur ad idem*
Fig. *punctum* A *rectæ indefinitæ* AB, AC,
236. AD, AE: *quævis recta* MP *parallela*
237. *ipsi* BE, *hisce lineis intercepta dividetur in partes proportionales partibus rectæ* BE: *hoc est*,

BC: CD: DE :: MN: NO: OP

Demonstratio. Triangula BAC, MAN; CAD, NAO; DAE, OAP, quæ sunt similia binatim dabunt.

BC:MN :: AC:AN

AC:AN :: CD:NO :: AD:AO

AD:AO :: DE:OP

Ergò BC:MN :: CD:NO ::DE:OP

hoc est, BC:CD:DE::MN:NO: OP.

Quod erat &c.

Co-

Corollarium.

417. Ex hoc Theoremate habes methodum expeditam secandi unam, aut plures lineas in partes datis proportionales: uti per te ipsum intelliges ex apposito schemate. TAB. VIII. Fig. 238.

PROPOSITIO XI.

418. Theorema. *Si à duobus punctis* P *&* Q *ejusdem rectæ* PQ *discedant duæ parallelæ* PO, QR *inæquales, & similiter duæ aliæ parallelæ* PM, QN *proportionales duabus primis, hoc est,* PM: QN :: PO: QR: *duæ rectæ* OR, MN *ductæ per extremitates harum linearum, quæ binatim sunt invicem parallelæ, productæ, si opus fuerit, necessariò concurrent in idem punctum* S *cum recta* PQ, *pariter, si opus sit, producta.* TAB. VIII. Fig. 239. 240.

Demonstratio. Pone rectam OR occurrere rectæ PQ in S, & rectam MN occurrere in T. Dico duo puncta S&T in unicum coire. Nam, quia triangula MPT, NQT sunt similia, erit

$$PT : QT :: PM : QN.$$

Est autem per hyp. PM : QN :: PO : QR. & propter similitudinem triangulorum OPS, RQS,

$$PO : QR :: PS : QS$$

Ergò $\quad PT : QT :: PS : QS$

& div. $PT - QT : QT :: PS - QS : QS$

hoc

hoc eſt, PQ : QT : : PQ : QS
Ergò QT = QS; & conſequenter punctum T coincidit cum S.

Vel in alia figurarum ſequentium ſerie, eandem proportionem PT : QT : :
Fig. PS : QS : transformabis componendo,
241. PT+QT : QT : : PS+QS : QS,
242. ideſt, PQ : QT : : PQ : QS.
243. Ergò QT = QS; adeoque punctum
244. T coincidit cum puncto S.

Quamobrem in omni caſu puncta T & S coibunt. Quod erat &c.

Hinc reſolutio ſequentis Problematis.

PROPOSITIO XII.

419. Problema. *A puncto dato* P *rectam ducere* PQ, *quæ tranſeat per punctum concurſus duarum aliarum rectarum, quando punctum concurſus magis diſtat, quàm facilè determinari poſſit.*

TAB. *Reſolutio.* Per datum punctum P du-
VIII. catur utcumque recta POM, quæ datis
Fig. rectis AB, CD occurrat in O & M;
245. huic à quovis puncto parallela ducatur
246. QRN, occurrens iiſdem datis rectis in
247. punctis R & N; tum ſuper recta MO
248. à duabus rectis AB, CD intercepta, conſtruatur triangulum æquilaterum MSO. Dein alterius parallelæ QRN portio NR à datis rectis intercepta transferatur in S*n*, & S*r* ſuper lateribus SM, SO trianguli æquilateri, productis, ſi opus fuerit; ducatúrque *n r*. Tri-

angu-

angulum nSr erit æquilaterum (n. 414.) & consequenter $nr = Sn = NR$ ex Constr. Denique à vertice S trianguli æquilateri per datum punctum P ducatur SP, quæ producta, si opus fuerit, secabit in q rectam nr, pariter productam, si opus fuerit; tum portio qr transferatur in QR, super recta QRN; & à puncto Q sic determinato, per datum punctum P ducta recta PQ necessariò dirigetur versùs punctum concursus duarum rectarum AB, CD.

Demonstratio. Nam per Constructionem erit PM : PO :: $qn : qr$ (n. 416.) Atqui rursùm per Constr. QR $= qr$. Itaque, si duæ istæ partes æquales subducantur ab æqualibus NR, nr, residuum QN $= qn$. Quamobrem substitutis QN, QR loco partium qn, qr in priori analogia, habebitur PM : PO :: QN : QR. Ergo tres rectæ AB, CD, PQ concurrent ad idem punctum (n. 418.). Quod erat &c.

PRAXIS GEOMETRICA

ELEMENTI II. LIB. II.

Ab hisce Theorematis, numero quidem paucis, sed usu amplissimis, complurium instrumentorum inventio profecta est, quorum aliqua hoc loco, præsertim celebriora attingam, & eorum descriptionem, usumque tradam.

Itaque I. agam de Circino, út vocant, proportionis, quo utimur ad cognoſcendam proportionem lineæ ad lineam, plani ad planum, ſolidi ad ſolidum; quemque jure dixeris totius Geometriæ compendium.

II. De Scala geometrica, quâ perpetuò utuntur Geometræ, præſertim ubi Ichnographiæ vel ampliandæ, vel contrahendæ dant operam.

Problema I.

420. *Circinum proportionis conſtruere, eique lineam partium æqualium, quam vocant arithmeticam, inſcribere.*

Conſtruantur ex cupro, ligno, aliáve materiâ ſolidâ duæ regulæ AB, AC, ut in tabula ſequenti, quæ circa commune centrum ita circumvolvi poſſint, ut quemcunque angulum comprehendant. Regulæ utriuſque longitudo terminata non eſt, uti & latitudo, quæ tanta eſſe debet, quanta opus eſt, ut plures lineæ à centro protenſæ inſcribi poſſint, & earum diviſiones facilè diſtingui. Harum linearum primam conſidero, quæ in utraque ſuperficie regularum inſcripta eſt ſecundùm earum longitudinem, vocatúrque linea partium æqualium, ſeu arithmetica. Hæc pro minoribus circinis in 100 partes æquales, pro majoribus in 200 dividitur.

Tab. IX. Fig. 249.

Debet & haberi circinus communis, cujus

cujus cuſpides ſint acutiſſimæ, quibus exactè diſtantiæ omnium punctorum inſtrumenti transferantur, & inter ſe comparentur.

Problema II.

421. *Fundamentum circini proportionum exponere.*

Artificium omne pendet ex Prop. 7. hujus Elem. n. 410, hoc eſt, ex ſimilitudine triangulorum, quæ huic inſtrumento inſcribi intelliguntur. TAB. XI. Fig. 250.

Sint ergò duæ lineæ AB, AC quemcunque angulum comprehendentes, & æqualiter diviſæ, ita ut diviſiones unius ſint omninò æquales diviſionibus alterius. Per diviſionum puncta, quæ mutuò reſpondent, aut ducantur, aut duci intelligantur lineæ tranſverſales DE, FG, HI.

Conſtat I. triangula ADE, AFG, AHI eſſe iſoſcelia ex ſuppoſitione, nimirum, AE = AD, AG = AF &c., & conſequenter angulos ad baſes eſſe inter ſe æquales.

II. Cum angulus A ſit communis, erunt anguli ADE, AFG &c. æquales, & conſequenter lineæ DE, FG &c. parallelæ.

III. Cum autem omnes lineæ tranſverſales ſint ſimiliter parallelæ, æquiangula erunt triangula; & conſequenter [n. 410.] AE : AG : : DE : FG. Ergò, ut linea AE quota pars eſt lineæ AG, ita linea transverſalis DE erit ſimilis pars lineæ FG. Et ſic de reliquis.

Corollarium.

422. Si lineæ AB, AC diviſæ ſint ſecundùm aliquam proportionem, etiam rectæ transverſales eandem proportionem obſervabunt, quemcunque tandem angulum lineæ AB, AC comprehendant. Cum igitur regulæ, ex quibus componitur inſtrumentum, ita compingantur, ut diduci, aut coarctari, hoc eſt, omnem angulum formare poſſint: hinc infinitas habes in eodem inſtrumento ſeries linearum tranſverſalium æquivalenter inſcriptas, quæ eandem inter ſe proportionem obſervabunt, ac lineæ re ipsâ regulis inſcriptæ. Sicuti ergò latera circini diviſa ſunt in partes æquales, ita etiam habes innumeras tranſverſales diviſas in partes æquales ab aliis tranſverſalibus; eádemque ratiocinatio accom̃odabitur aliis linearum ſpeciebus, quas inſcriptas vides in eodem inſtrumento, quarum uſum ſuo loco exponemus.

Problema III.

423. *Datam rectam in quotlibet partes æquales dividere, puta, ſeptem.*

Reſolutio. I. Aſſumatur pro libito numerus, qui exactè per 7. dividi poſſit, quemadmodum 35, 70, 140.

II.

II. Tum circino communi cape inter- TAB.
vallum datæ lineæ; atque ita aperiatur IX.
circinus proportionis, ut hæc diſtantia Fig.
accommodari utrique brachio poſſit ad 249.
aſſumptum numerum, puta, 140 & 140.

III. Stante hâc inſtrumenti poſitione, accipiatur diſtantia transverſalis inter 20 & 20. Hæc erit ſeptima pars propoſitæ lineæ.

Vel, ſi longitudo datæ rectæ accommodata fuiſſet inter 70 & 70, diſtantia inter 10 & 10 eſſet ſeptima pars quæſita.

Demonſtratio conſequitur ex ſimilitudine triangulorum.

Corollarium.

424. Quamvis linea, cujus ſeptima pars quæritur, ducta eſſet in ſolo, atque adeò in inſtrumentum transferri non poſſet, ejus tamen ſeptima pars ſic poſſet deſiniri. Ut, ſi linea 140 pedum proponeretur, aſſume circino communi 140. partes in linea arithmetica partium æqualium: hoc intervallum transfer hinc inde in notas numeri, qui per 7 dividi poſſit, puta, à 70 in 70: intervallum à 10 in 10 circino acceptum, & translatum in lineam partium æqualium, exhibebit 20 numerum pedum, quem continet ſeptima pars lineæ propoſitæ.

Problema IV.

425. *Tribus datis rectis* AB, BC, AD *quartam proportionalem* DE *invenire.*

Tab. IX. Fig. 251. *Reſolutio.* Linea AB transferatur à centro A circini in lineam partium æqualium; tum ita aperiatur inſtrumentum, ut intervallum ſecundæ lineæ conſtituatur in BC tranſverſim; deinde in eandem lineam partium æqualium ſtatue menſuram tertiæ AD. Dico intervallum DE æquale eſſe quartæ proportionali quæſitæ.

Demonſtratio. Nam AB: BC :: AD: DE. Quod erat &c.

Problema V.

426. *Duabus datis rectis* AB, BC *tertiam proportionalem invenire.*

Tab. IX. Fig. 252. *Reſolutio.* In eadem figura ponantur æquales BC & AD, erit tranſverſalis DE tertia proportionalis duabus AB, BC.

Problema VI.

427. *Circino proportionis lineam chordarum inſcribere,*

Tab. IX. Fig. 253. 254. *Reſolutio.* A centro circini ad extremitatem regularum inſcribantur hinc atque inde duæ lineæ AE, AF, quæ bifariam dividantur in K & L; deinde in charta, aut tabellâ ſeparatâ, ſemidiametro AK, aut AL ſemicirculus deſcriſcribatur, & in gradus 180 dividatur; tum ab eodem puncto A aut ducantur, aut ductæ intelligantur ſubtenſæ AI, AO, AS, nempe unius, duorum, trium, quatuor graduum &c., quæ tranſferantur ſucceſſivè in regulas AE, AF, initio ſemper facto à puncto A centro circini, ita ut ſubtenſa graduum 60, utpote æqualis ſemediametro, ad puncta K & L, 60 & 60 perveniat. Hâc methodo habebis lineam chordarum inſtrumento inſcriptam.

Vel deſcribatur ſemicirculus diviſus in 180 gradus, cujus diameter ſit longitudo aſſumpta lineæ chordarum, tum facto centro in extremitate diametri, & lineæ chordarum unâ eàdemque operà transferantur chordæ, ac diviſiones peragantur, utì factum vides in appoſito ſchemate. Tab. IX. Fig. 255.

Problema VII.

428. *In dato puncto A rectæ AB angulum efficere graduum 30.*

Reſolutio. I. Facto centro in dato puncto A, intervallo quovis deſcribatur arcus EF; dein ita aperiatur inſtrumentum, ut intervallum aſſumptum AE aptetur inter 60 & 60. Stante hâc inſtrumenti poſitione accipiatur circino communi diſtantia inter 30 & 30, quæ transferatur in arcum EF, à puncto E ad G; ducatúrque AG. Dico Tab. IX. Fig. 256. 253.

 chor-

chordam EG, & arcum EOG, & angulum EAG esse graduum 30, uti propositum fuerat.

Demonstratio. Duo triangula ABC, AKL sunt similia. Ergò AB : AK :: BC : KL; & consequenter, si AK sit radius circuli, seu chorda 60 graduum, AB est chorda 30 graduum; ac præterea, si KL sit radius, BC est chorda graduum 30. Quod erat &c.

Problema VIII.

429. *Circinum proportionis ita aperire, ut lineæ chordarum angulum determinatum, puta, 30 graduum comprehendant.*

Resolutio. Circino communi assumatur in instrumento chorda 30 graduum, quæ transferatur à 60 in 60. Dico lineas chordarum comprehendere angulum graduum 30.

Demonstratio. Nam per n. 427. chorda graduum 60 æqualis est semidiametro circuli, cui omnes chordæ conveniunt. Ponatur radio quovis hic circulus descriptus, in eúmque transferri chordam 30 graduum; perspicuum est duas illius circuli diametros per extremitatem chordæ 30 graduum ductas comprehendere angulum 30 graduum. Applicatur autem chorda huic circulo, dum transfertur à 60 in 60. Ergò translatâ chordâ 30 graduum à 60 in 60, lineæ chor-

chordarum angulum 30 graduum comprehendunt. Quod erat &c.

Corollarium.

430. Eadem methodus adhibenda eſt, dum proponitur ita aperiendus circinus proportionis, ut lineæ arithmeticæ, ſeu partium æqualium angulum efficiant transferendo chordam 30 graduum à puncto 100 unius lateris in punctum 100 alterius lateris.

Eodem modo operaberis circa lineam planorum, & ſolidorum, de quibus alibi dicendum erit.

Problema IX.

431. *Aperto circino proportionis invenire angulum, quem linea chordarum, aut arithmetica comprehendat.*

Sit primò inveniendus angulus, quem lineæ chordarum inſtrumento notatæ comprehendunt. Extende pedes circini communis à puncto 60 unius brachii in punctum 60 alterius, eamque diſtantiam transfer in lineam chordarum, incipiendo à centro: nota numeri, ad quem alter pes circini proveniet, indicabit numerum graduum illius anguli.

Eâdem praxi determinabis angulum, quem lineæ partium æqualium comprehendunt, ſi nempe diſtantiam puncti medii unius lineæ, à puncto medio alterius lineæ transferas in lineam partium æqualium, incipiendo à centro; nam alter pes circini cadet in notam numeri indicantem quot gradus contineat ille angulus.

Eodem modo operaberis circa lineas planorum, & ſolidorum, de quibus alibi.

Problema X.

432. *Determinare, quot graduum ſit datus angulus* BAG.

TAB. IX. Fig. 256. 253. I. Si angulus ſit notatus in charta, quolibet intervallo AE fiat arcus EOG, eádemque diſtantia transferatur à 60 in 60; tum circinus communis ad intervallum EG extenſus, applicetur circino proportionali, ita ut cuſpis utraque conveniat duabus numerorum notis ſimilibus, puta, 30 & 30, experiendo ſcilicet cui diviſioni aptetur. Perſpicuum eſt angulum BAC fore graduum 30, ſi chorda EG æqualis ſit rectæ BC, hoc eſt intervallo inter 30 & 30.

II. Si angulus propoſitus comprehendatur à duabus lineis cogitatione tantùm intellectis, ut in ſolo, vel in aëre, neceſſe eſt primò, ut ſingulis regulis inſtrumenti duæ infigantur dioptræ, per quas collineare liceat, atque hâc ratione inſtrumentum idoneum fiat metiendæ horum angulorum quantitati; dein collocato circini centro in linearum concurſu, ſi per ejus dioptras reſpicias duo ſigna in lineis angulum propoſitum formantimantibus posita, in hac positione apertus erit circinus secundùm talem angulum. Quare, si intervallum à 60 in 60 circino communi acceptum transferas in lineam chordarum, incipiendo à centro, habebis quantitatem illius anguli.

Corollarium.

Hinc cognita etiam quantitate graduum, puta, 50, alicujus arcus circuli A B, invenietur ejusdem radius A C. TAB. IX. Fig. 257.

Nempe circinus proportionis ita aperiatur, ut chorda A B dati arcus accommodari possit transversim inter 50 & 50: distantia inter 60 & 60 dabit radium quæsitum.

Problema XI.

433. *Circino proportionis lineam polygonorum inscribere,*

Polygonorum linea eo fine potissimùm inscribitur circino proportionis, ut datus circulus in quotlibet partes æquales dividatur, eídemque polygona regularia inscribantur, à triangulo ad duodecagonum, quæ majoris sunt usûs.

Itaque ad invenienda latera omnia polygonorum usui est linea chordarum. Hæc autem inventio facilis est, si habemus angulum centri cujuslibet polygoni. Hunc autem reperiemus, dividendo

360

360 per numerum laterum illius polygoni; puta si dividas 360 per 5, habebis gradus 72 pro angulo centri; ideóque subtensa, seu chorda graduum 72, est latus pentagoni circulo inscripti, cujus semediameter æqualis est chordæ graduum 60. Quare vides in ipsa linea chordarum haberi latera omnium polygonorum, non solùm à triangulo æquilatero ad duodecagonum, sed etiam reliquorum.

Triangulum subtendit chordam graduum 120, quadratum 90, pentagonum 72, hexagonum 60, heptagonum 51 $\frac{3}{7}$, octogonum 45, nonagonum 40, decagonum 36, undecagonum 32 $\frac{8}{11}$, duodecagonum 30.

Hæc linea continens certum numerum laterum polygonorum regularium in eodem circulo, separatim inscribitur circino proportionis, sumpto initio à centro ejusdem. Quia verò latera polygonorum regularium eidem circulo inscriptorum eò magis diminuuntur, quò plura sunt polygoni latera, hinc latus trianguli est omnium maximum, æquatúrque longitudini totius lineæ polygonorum; huic proximum est latus quadrati, dein latus pentagoni &c.

Problema XII.

434. *Dato circulo* H, *invenire latus cujuscunque polygoni regularis in eo inscribendi.* *Reso-*

Resolutio. Oporteat dato circulo octogonum inscribere. Semediametrum HI dati circuli circino communi acceptum transfer in lineam polygonorum à B in C, nimirum, à 6 in 6: distantia transversalis inter 8 & 8, hoc est, inter F & G, erit latus octogoni dato circulo H inscribendi. Atque ita de reliquis. TAB. IV. Fig. 258. 259.

Demonstratio eadem semper est. Nam duo triangula ABC, AFG sunt æquiangula, & similia. Quare AB : AF : : BC : FG. Sicuti ergò AF latus exhibet octogoni circulo inscripti, cujus radius est AB per constructionem lineæ polygonorum: ita FG latus est alterius octogoni circulo inscripti, cujus radius sit BC. Nam lineæ transversales, seu bases eandem rationem habent ac latera.

Scholion.

Si proposita semidiameter major esset, quàm ut in circinum proportionis transferri posset inter 6 & 6, accipienda erit ejusdem semissis, vel tertia pars, vel quarta &c.; quo facto, duplum, triplum, quadruplum lineæ inventæ erit latus polygoni quæsiti.

Problema XIII.

435. *Super data recta* KL, *polygonum regulare, puta, octogonum describere.*

Reso.

Reſolutio, Datam rectam KL circino
Tab. communi acceptam transfer in circinum
IX. proportionis inter 8 & 8; dein ſump-
Fig. to intervallo BC, hoc eſt, ex 6 in 6,
258. ab extremitatibus K & L agantur duo
259. arcus ſe ſecantes in H; tum centro H radio HL deſcribatur circulus, Hic circumſcribat octogonum regulare dati lateris KL.

Problema XIV.

Tab. VIII. Fig. 260. 436. *Scalam geometricam ſimplicem conſtruere.*

Scalam vocant Geometræ lineam rectam in partes ſectam progreſſionis decuplæ. Uſum habet inſignem non ſolùm in Geometria practica, ſed in Architectura civili, & militari, & in omni Matheſi mixta.

Eſto linea definita ABD ex qua à puncto B abſcindantur 10 æquales particulæ B 1; 1, 2; 2, 3 &c. uſque ad A; quæ, quò majores, vel minores erunt, eò tota ſcala erit major, minórve,

Deinde totum intervallum AB particularum 10 circino acceptum tranſcribatur, quoties libuerit, in rectam indefinitam AF, nimirum, ex B in C, ex C in D &c. Hæc erit ſcala, quæ petebatur.

In qua, ſi velis particulam B 1 repræſentare pedem unum, B 2 pedes duos,

duos, B 3 tres &c., repræſentabit B A pedes 10, C A pedes 20, D A pedes 30. Si autem velis B 1 accipere pro decempeda, hoc eſt, pro 10 pedibus, B 2 pro 20 pedibus &c., tunc B A referet pedes 100, C A pedes 200, & ſic deinceps.

Itaque, ſi cupiam unicâ circini aperturâ ſumere intervallum partium, puta, 27: ex D in B ſunt pedes 20; ex B in 7 ſunt pedes 7. Circini igitur crure uno fixo in D, & altero extenſo uſque ad 7: habes lineam D 7 partium 27.

Eodem modo operandum erit, ſi cupias intervallum pedum 280. Tunc enim D B referet partes 200, & B 8, partes 80, ac proinde D 8 partes 280.

Scholion.

Sed quoniam ſcala hujuſmodi ſolùm poteſt exhibere partium decades, & unitates, aut centenas, & decades, aut millia, & centenas, hoc eſt, duos tantùm gradus progreſſionis decuplæ: aliam practici Geometræ excogitârunt, quæ tres gradus progreſſionis decuplæ contineat nimirum, millenas, centenas, decades; vel centenas, decades, unitates; vel decades, unitates, & unitatis decimas.

Problema XV.

437. *Scalam geometricam exactiorem conſtruere.*

Cor-

Construatur, ut supra, scala simplex AF; & in A excitetur perpendicularis AC arbitrariæ longitudinis, in qua signentur 10 æquales particulæ ex A in C, sive eæ æquales sint particulis B 1, B 2, sive non.

TAB. VIII. Fig. 261.

Tum ex termino 9 particulæ A 9 ducatur 9 C, ut constituatur triangulum AC 9, cujus ope invenientur partes decimæ ipsius A 9.

Deinde per singula divisionum puncta rectæ AC, ducantur parallelæ ad AB, quarum postrema est CDL; & à singulis divisionum punctis ipsius rectæ AF, nimirum, à punctis B, E, F excitentur totidem perpendiculares BD, FL &c.

Denique puncta 10 & 9, 9 & 8, 8 & 7 &c. lineis transversis connectantur, quæ invicem erunt parallelæ. Quibus peractis, absoluta est scala exhibens tres gradus progressionis decuplæ.

Nam lineolæ interceptæ in triangulo AC 9 sunt partes decimæ ipsarum A 9, 9 & 8 &c; quæ rursum decimæ sunt ipsarum AB, BE &c. Quod facilè demonstratur ex triangulorum similium indole in hunc modum.

Quoniam recta linea 6 & 6 per Constructionem est parallela ipsi A 9, erit (n. 397.), ut A 9 ad 6 & 6, ita AC ad 6 C. Atqui rursum per Constr., quarum partium A C est 10, earum 6

C est

C est 4. Ergò etiam, quarum partium A 9 est 10, earum recta 6 & 6 est 4; hoc est, quatuor decimæ ipsius A 9.

Eodem modo ostendam rectam 7 & 7 esse tres decimas, rectam 8 & 8 duas decimas, ac tandem 9 & 9 esse unam decimam rectæ A 9; atque ita porro de aliis interceptis lineis.

Itaque in hac scala, si in triangulo A C 9 intercepta prima 9 & 9 supponatur pro unitate quamlibet mensuram repræsentare, uti pedem unum: tunc intercepta secunda erit 2, tertia erit 3; & sic deinceps usque ad A 9, quæ erit 10; A 8 erit 20, AB 100, AE 200 &c.

Quòd si in eodem triangulo AC 9 intercepta prima 9 & 9 ponatur pro 1 decimâ unitatis quamlibet mensuram repræsentantis, tunc intercepta secunda erit 2 decimæ, tertia 3 decimæ, & sic deinceps; A 9 verò erit 1, A 8, 2, A B, 10, & sic deinceps.

Idem dicendum de triangulo BDI in partem contrariam posito, ut instrumenti usus commodior sit.

Scholion.

Quemadmodum hic linea exigua A 9, *vel* D 1 *in* 10 *partes æquales dividitur; ita eadem in quotcumque alias eodem artificio dividi potest. Neque opus est, ut angulus* A *sit rectus, sed idem obliquus esse potest.*

Usum hujus instrumenti ostendent Praxes sequentes.

Praxis I.

438. *Tres gradus proportionis decuplæ, 145 ex scala desumere unâ circini aperturâ, hoc est, unam centenam, 4 decades, 5 unitates.*

In triangulo DBI ex interceptis lineolis à vertice B quære quintam lineam MN, quæ dabit 5 unitates; tum in MN continuata versùs K numera 4 decades, seu 40 ex M usque in K; rursum ex N usque in I accipe unam centenam; denique circini pede uno fixo in I, alterum extende usque ad K. Recta, seu intervallum IK continet partes scalæ 145.

Eodem modo fuisset operandum, si quæsitæ forent partes 14 & 5 decimæ.

Praxis II.

439. *Quot partes scalæ recta quævis X in charta descripta contineat, invenire.*

TAB. VIII. Fig. 261. Accipiatur circino quantitas datæ rectæ X, quæ, si major sit, quàm IN, vel ON, eligatur ex parallelis EI, FL &c. recta illa, cujus distantia à BD sit minor proximè, quàm data X; ea sit FL. Deinde in recta FL eligatur intersectio talis, puta, O, ut uno circini crure posito in O, alterum etiam incidat in aliquam parallelæ O 5 intersectionem, puta, in K; quo præstito, nota erit recta X.

Nam

Nam ON = 200, MK = 40, MN = 5; ac proinde tota OK, hoc eſt, X continet partes ſcalæ 245.

Quòd ſi data recta X minor fuiſſet, quàm AB, aut BE, tunc ejus quantitate, ut prius, circino accepta, eligenda eſt in recta BD interſectio talis, puta, N, ut uno circini crure poſito in N, alterum etiam incidat in aliquam parallelæ N5 interſectionem, puta, in K; quo obtento, nota erit rurſum data recta X partium 45.

Praxis III.

440. *Diſtantiam locorum* A *&* B, *à flumine, vel ab alia quavis cauſa variè impeditam, & intercluſam, ope ſcalæ geometricæ metiri.* TAB. X. Fig. 262.

Eligatur ſtatio quælibet C, cujus diſtantiam à puncto B metiri liceat. Ope quadrantis, & linearum viſualium BA, CA notentur anguli B & C; deinde in charta probè complanata fiat recta *b c* tot partium ſcalæ, quot pedes in dato intervallo BC continentur; fiántque anguli *b* & *c* æquales angulis B & C. Itaque lateribus *b a*, *c a* coëuntibus in aliquo puncto *a*, exploretur, quotnam in ſcala particulas contineat latus *a b*: totidem pedes, vel hexapedas, vel decempedas intervallum AB continebit.

Nam triangula BAC, *b a c* ſunt æquiangula, ac proinde ſimilia; hinc latera habent proportionalia.

Praxis IV.

441. *Aream trianguli imperviam invenire.*

Ex dictis Lib. 1. patet ad dimensionem trianguli opus esse, ut notum sit latus unum unà cum perpendiculari in illud cadente ex opposito angulo. At quando trianguli area est impervia, non potest in eo perpendicularis designari, & mechanicè mensurari. Hujus autem inventio repetenda est, non solùm ex aliis Geometriæ principiis, de quibus infra, sed ex triangulorum similitudine, usuque scalæ geometricæ, hoc pacto.

Fig. 262. Sit A B C area, ut in fig. præced., cujus mensura in quadratis pedibus inquiritur. Fiat, ut prius, in charta triangulum simile *b a c*; demittatúrque in basim *b c* perpendicularis *a d*; & inveniantur particulæ, quas perpendiculum *a d* in scala continet; tot enim pedes continebit perpendiculum A D, ob similitudinem triangulorum ADB, *adb*; ejusque dimidium in basim ductum dabit aream ABC in pedibus quadratis.

Praxis V.

442. *Altitudinem montis, seu turris* AD, *datâ distantiâ* BD *metiri.*

Quando distantia montis, turrísve sive æstimatione communi, sive aliunde est nota, expeditissima erit altitudinis dimensio.

Trian-

Triangulo rectangulo ADB fiat simile in charta, *adb*, ita ut *bd* tot partium scalæ sit, quot passuum datur distantia BD: inquire, quot partes scalæ contineat *ad*; totidem enim passus continebit altitudo quæsita AD. Tab. X. Fig. 263.

Praxis VI.

443. *Altitudinem* AD *montis, seu turris inaccessam metiri.*

Eligantur in subjecta planitie duæ stationes B & C, quarum distantiam metiri liceat. Angulo B in prima statione invento describatur in charta æqualis *abd*; & quot pedum fuit intervallum stationum, totidem partes ex scala acceptas transcribe in latus *bd* ex *b* in *c*. Fiat deinde noto jam angulo ACD stationis secundæ æqualis *acd*; & latus *ca* occurrat lateri *ba* in *a*; tum ex *a* demitte perpendicularem *ad* occurrentem lateri *bc* in *d*. Constat triangula *bad*, *cad* triangulis opticis utriusque stationis æquiangula esse, adeóque similia, ac proinde *bc* referre intervallum stationum; *bd*, vel *cd* utramque distantiam, & *ad* altitudinem. Inquire igitur, quot partes scalæ contineant *cd*, vel *ad*; totidem quippe pedes distantia ipsa, & altitudo continebunt.

Corollarium.

Hâc methodo inveniuntur latera, & area trianguli, cujus unum detur latus cum duobus angulis.

Praxis VII.

444. *In triangulo quovis datis tribus lateribus, angulos invenire.*

TAB. X. Fig. 264. Sumptis ex ſcala tribus rectis *bm*, *bc*, *cn* totidem partium, quot in datis lateribus pedes continentur, centris *b* & *c*, intervallis *bm*, *cn* deſcribantur arcus circulorum ſe mutuò interſecantium in *a*; ductiſque *ab*, *ac*, erit triangulum *bac* dato triangulo æquiangulum ob latera proportionalia, unde & altitudo, & area innoteſcet. Sed de his planiùs in Trigonometria conſtabit.

ELEMENTUM III.

De Polygonis ſimilibus generatim, & de Punctis ſimiliter poſitis.

445. FIGURÆ rectilineæ, ut ſimiles denominentur, utrumque poſtulant, quòd & angulos ſingulos ſingulis æquales habeant, atque etiam latera, quæ circum æquales angulos exiſtunt, proportionalia.

Demonſtravimus quidem n. 410. & 415., triangula, quorum anguli ſunt æquales, habere etiam latera homologa proportionalia, & reciprocè; atque hinc, ut duo triangula ſimilia dici poſſint, ſatis ſupérque eſſe, ſi vel eorum anguli ſint æquales, vel latera proportionalia.

At non eadem eſt ratio de polygonis, quæ plura habent, quàm tria latera, ùt notavimus n. 396. Nam & angulos habere

bere poſſunt mutuò æquales, quin habeant latera proportionalia, & reciprocè. Utrumque igitur demonſtrandum eſt de polygonis, ut dicantur ſimilia; neque enim in his unum ex altero ſequitur; quemadmodum in triangulis.

PROPOSITIO I.

446. Theorema. *Si ab angulis* A *&* M *mutuò reſpondentibus duorum ſimilium polygonorum* ABCDEF, MNOPQR *ducantur rectæ ad reliquos angulos, triangula* ABC, ACD *&c. primi polygoni ſimilia erunt triangulis* MNO, MOP *&c. ſecundi.* Euclid. lib. 6. prop. 20. TAB. X. Fig. 265.

Demonſtratio. Quoniam polygona ſunt ſimilia, erit (n. 445.) angulus B = N, & AB : MN : : BC : NO; itaque [n. 414.] duo triangula ABC, MNO erunt ſimilia; & conſequenter angulus ACB = MON. Sed per hyp. angulus BCD = NOP. Quare ſubductis duobus primis angulis æqualibus ab hiſce ſecundis, erit angulus ACD = MOP. Præterea habebitur

AC : MO : : BC : NO

At rurſum ex hyp. BC : NO : : CD : OP.

Ergò AC : MO : : CD : OP.

Quamobrem duo triangula ACD, MOP habent latera proportionalia circa æquales angulos ACD, MOP, & conſequenter ſimilia ſunt (n. 414.).

Eâdem ratione demonſtrabitur ſimilia

lia esse duo triangula ADE, MPQ; atque ita de reliquis. Quod erat &c.

PROPOSITIO II.

447. Theorema. *Si duo polygona* AB
TAB. CDEF, MNOPQR *eodem numero la-*
X. *terum terminata, dividantur in triangu-*
Fig. *la similia, singula singulis, & similiter*
265. *posita, per rectas ab angulis* A *&* M *du-*
265. *ctas ad reliquos omnes angulos: duo hæc polygona erunt similia, hoc est, & angulos omnes habebunt æquales, singulos singulis, & latera circa æquales angulos proportionalia.*

Demonstratio. I. Quoniam per hyp. utriusque polygoni triangula sunt inter se similia, & similiter posita, anguli horum polygonorum componuntur ex eodem numero angulorum mutuò æqualium, & consequenter æquales sunt inter se, singuli singulis.

II. Duo triangula ABC, MNO similia esse ponuntur; adeoque AB:MN::BC:NO; hoc est, latera circa æquales angulos B & N directè sunt proportionalia.

Rursum eadem triangula similia ABC, MNO exhibent BC:NO::AC:MO.

Atqui per hyp. AC:MO::CD:OP.
Ergò BC:NO::CD:OP;
hoc est, latera circa æquales angulos C & O sunt directè proportionalia.

Eodem

Eodem modo demonſtrabitur reliqua latera circa æquales angulos eſſe proportionalia, & conſequenter duo polygona eſſe ſimilia. Quod erat &c.

Corollarium I.

448. Si ab angulo quovis A polygoni ABCDEF ducantur rectæ indefinitæ ACc, ADd, AEe &c. per omnes reliquos angulos: deinde à puncto *b* ſumpto in latere AB, etiam producto, ducatur *b c* parallela lateri BC; & rurſum à puncto *c*, ubi hæc parallela occurrit rectæ ACc, ducatur *c d* parallela ipſi CD, & ſimiliter *de*, *ef*: hoc novum polygonum A*bcdef* ſimile erit primo polygono ABCDEF. TAB. X. Fig. 266.

Nam utrumque componitur ex triangulis ſimilibus, & ſimiliter poſitis.

Hinc habes methodum conſtruendi polygonum dato ſimile.

Corollarium II.

449. Si ab angulis mutuò reſpondentibus duorum polygonorum ſimilium ABCDEF, MNOPQR ducantur duæ diagonales AD, MP, duæ partes ABCD, ADEF primi polygoni ſimiles erunt duabus partibus MNOP, MPQR ſecundi polygoni, ſingulæ ſingulis. TAB. X. Fig. 265.

Nam intra eaſdem partes ductis diagonalibus AC, MO, triangula, quæ partem ABCD componunt, ſimilia erunt triangulis, quæ ſecundam partem conſtituunt MNOP; & præterea utrinque hæc triangula ſunt ſimiliter poſita. Ergò duæ partes ABCD, MNOP erunt ſimiles (n. 446.).

Eodem ratiocinio demonſtrabis, duas reliquas ADEF, MPQR ſimiles eſſe.

Corollarium III.

450. Ergò duæ diagonales AC, M
TAB. O, ductæ per angulos reſpondentes
X. duorum ſimilium parallelogrammorum
Fig. ABCD, MNOP, divident eadem in
267. duo triangula ſimilia, ſingula ſingulis.
268. Quamobrem duo triangula ſimilia ABC, MNO conſiderari poterunt tanquam ſemiſſes duorum parallelogrammorum ſimilium ABCD, MNOP.

De Punctis ſimiliter poſitis.

DEFINITIONES.

451. *Duo puncta* G *&* S *dicuntur ſimiliter poſita reſpectu duarum rectarum* AB, MN, *ſeu reſpectu punctorum* A, B, *&* M, N, *quæ eaſdem lineas terminant, quando diſtantiæ* GA, GB *unius puncti* G *ab extremitatibus rectæ* AB, *ad diſtantias* SM, SN *alterius puncti* S *ab extremitatibus rectæ* MN,
TAB. *ſunt in eadem ratione, quam habet* AB
X *ad* MN.
Fig. Hoc eſt, quando GA: GB: AB::
269. SM:SN:MN.

Caſus I. Si puncta G & S ſita ſint

in

in ipsis rectis AB, MN: ut demonstrentur esse similiter posita respectu harum linearum, satis erit ostendere, quòd GA : GB :: SM : SN,
sive GA:SM :: GB:SN.

Ratio est, quia in hoc casu haberetur (n. 394.)
GB : SN :: GA + GB:SM + SN;
hoc est GB:SN:: AB : MN.
Collectis itaque in una serie antecedentibus harum rationum æqualium, & in altera serie consequentibus, erit, ut in definitione.

GA:GB:AB :: SM:SN:MN.

Rursum in eodem casu, satis erit ostendere, quòd AB:GA :: MN:SN,
vel AB:MN :: GB:SN.

Ratio est, quia in hoc casu haberetur
AB:MN :: AB — GA:MN — SM
(n. 394.), sive AB:MN:: GB : SN.
Collectis itaque, ut prius, in una serie antecedentibus harum rationum æqualium, & consequentibus in altera, fiet:

AB:GA:GB :: MN:SM:SN.

Casus II. Si puncta G & S sint extra rectas AB, MN: ut demonstretur hæc puncta esse similiter posita respectu harum linearum, satis erit ostendere, triangula AGB, MSN esse similia. Nam in hoc casu erit. TAB. X. Fig. 269.

GA:GB:AB :: SM:SN:MN. TAB. X.

Si duæ rectæ FG, RS, *terminentur à punctis similiter positis respectu duarum* Fig. 270.

recta-

rectarum AB, MN: *eædem rectæ* FG, RS *dicentur lineæ homologæ respectu rectarum* AB, MN.

TAB. X. Fig. 271. *Duo puncta* G & S *dicuntur etiam similiter posita respectu duorum polygonorum similium* ABCDE, MNOPQ, *quando sunt similiter posita ad omnia eorum respectivè latera.*

Corollarium.

TAB. X. Fig. 269. 452. Ergò extremitates B & N duarum rectarum AB, MN sunt similiter positæ respectu earundem rectarum. Nam & hæc duo puncta B & N sunt in ipsis rectis AB, MN, & eorum distantiæ ab extremitatibus A & M sunt hisce duabus rectis proportionales, ùt patet.

PROPOSITIO III.

TAB. X. Fig. 269. 453. Theorema. *Duobus punctis* G & S *similiter positis respectu duarum rectarum* AB, MN: *si ab iisdem punctis ad hasce lineas ducantur rectæ* GH, ST *hâc lege, ut duo anguli* GHB, STN *sint æquales, & similiter positi, erunt pariter duo puncta incidentiæ* H & T *similiter posita respectu earundem rectarum* AB, MN.

Demonstratio. Nam, si à punctis G & S ducantur rectæ GA, GB, & SM, SN ad extremitates rectarum AB, MN, triangula AGB, MSN erunt similia (n. 451.); & consequenter angulus ABG = MNS.

Quia

Quia verò angulus GHB=STN per hyp., duo triangula BGH, NST duos angulos habebunt æquales, unum uni, alterum alteri, & consequenter erunt similia. (n. 410.)

Atqui in triangulis similibus AGB, MSN est

AB:MN::GB:SN;

& in triangulis pariter similibus BGH, NST est

GB:SN::HB:TN.

Ergò AB:MN::HB:TN;

adeoque per Def. (n. 451.) puncta H& T erunt similiter posita in duabus rectis AB, MN. Quod erat &c.

Corollarium.

454. Quoniam demonstratum est n. 446. similia polygona ABCDEF, MNOPQR dividi in similia triangula, hinc sequitur [n. 451.] vertices quoscunque A&M duorum angulorum mutuò respondentium in iisdem polygonis, esse similiter positos respectu omnium laterum homologorum, non exceptis lateribus AB, AF, & eorum homologis MN, MR, respectu quorum demonstratum est n. 452. A&M esse similiter posita. TAB. X. Fig. 265. 265.

Quare vertices A&M erunt similiter positi respectu horum polygonorum.

PROPOSITIO IV.

455. Theorema. *Si duo puncta* F,

R,

R, & alia duo G, S sint similiter posita respectu duarum rectarum AB, MN: rectæ homologæ FG, RS ab iisdem punctis terminatæ, erunt in eadem ratione, quam habent inter se duæ rectæ AB, MN.

Hoc est, FG: RS : : AB, MN.

Demonstratio. Quoniam puncta F & R sunt similiter posita respectu duarum rectarum AB, MN, triangula AFB, MRN erunt similia (n. 451.), & consequenter anguli FAB, RMN æquales.

TAB. X. Fig. 270.

Rursum, quia puncta G & S sunt similiter posita respectu earundem rectarum AB, MN, triangula AGB, MSN sunt similia, atque hinc anguli GAB, SMN æquales.

Ergò ab æqualibus angulis GAB, SMN subducendo utrinque æquales FAB, RMN, erunt reliqui FAG, RMS inter se æquales.

Quia verò triangula AFB, MRN sunt similia, erit AF : MR : : AB : MN. Sed triangula pariter similia AGB, MSN exhibent

AB:MN : : AG:MS.

Ergò AF:MR : : AG:MS.

Quare duo anguli æquales FAG, RMS â lateribus proportionalibus intercipiuntur; & consequenter duo triangula erunt similia (n. 414.); atque hinc

FG:RS : : AF:MR.

Atqui

Atqui demonſtratum eſt AF : MR : : AB : MN.

Ergò FG : RS : : AB : MN.

Quod erat &c.

Corollarium.

456. Hinc, ſi duæ rectæ FG, RS terminentur à punctis ſimiliter poſitis reſpectu duarum aliarum rectarum AB, MN: etiam extremitates harum AB, MN erunt puncta ſimiliter poſita reſpectu duarum rectarum FG, RS. TAB. X. Fig. 270.

Nam, quoniam oſtenſum eſt (n. 455.) triangula FAG, RMS eſſe ſimilia, erunt puncta A & M ſimiliter poſita reſpectu duarum rectarum FG, RS [n. 451.].

Eodem modo propter ſimilitudinem triangulorum BFG, NRS demonſtrabis, duo puncta B & N eſſe ſimiliter poſita reſpectu duarum rectarum FG, RS.

PROPOSITIO V.

457. Theorema. *Si tria puncta* F, G, H *reſpectu rectæ* AB *ſint ſimiliter poſita, quemadmodum tria puncta* R, S, T *reſpectu alterius rectæ* MN, *erit triangulum* FGH *ſimile triangulo* RST.

Demonſtr. Nam (Num. 455.) $\left[\begin{array}{l} FG : RS :: AB : MN \\ GH : ST :: AB : MN \\ FH : RT :: AB : MN; \end{array}\right.$ TAB. X. Fig. 272.

hoc eſt, tria latera unius trianguli ad tria latera alterius ſingula ſingulis, erunt in

eadem

eadem ratione AB ad MN ; & consequenter &c. Quod erat &c.

Corollarium.

458. Factâ eâdem suppositione sequitur etiam propter similitudinem triangulorum FGH, RST, quòd tria puncta F, G, H, & alia tria R, S, T sint etiam inter se similiter posita : hoc est, quodvis H ex tribus primis respectu duorum reliquorum F, G, aut rectæ FG, similiter esse positum, atque aliud respondens punctum T ex tribus ultimis respectu duorum aliorum R, S, aut rectæ RS.

PROPOSITIO VI.

459. Theorema. *Si duo puncta* H, T *sint similiter posita respectu duarum rectarum* FG, RS, *quæ terminatæ sint à punctis similiter positis respectu duarum aliarum* AB, MN : *Dico hæc puncta* H, T *fore etiam similiter posita respectu earundem rectarum* AB, MN.

TAB. X. Fig. 272.

Demonstratio. Quoniam per hyp. extremitates duarum rectarum FG, RS sunt similiter positæ respectu duarum AB, MN, etiam harum extremitates erunt reciprocè similiter positæ respectu duarum FG, RS (n. 456.).

Quia verò per hyp. etiam duo puncta H, T sunt similiter posita respectu duarum FG, RS, sequitur tria puncta A, B, H, & ipsis respondentia M, N, T fore

fore ſimiliter poſita reſpectu duarum F G, R S.

Quare triangula AHB, MTN erunt ſimilia (n. 457.); & conſequenter duo puncta H, T erunt ſimiliter poſita reſpectu duarum rectarum AB, MN, Quod erat &c.

Corollarium I.

460. Demonſtravimus (n. 454.) latera mutuò reſpondentia duorum ſimilium polygonorum ABCDE, MNOPQ eſſe ſimiliter poſita reſpectu omnium laterum homologorum, & conſequenter reſpectu eorundem polygonorum. TAB. X. Fig. 271. 273. 274.

Ergò, ſi duo puncta G, S ſint ſimiliter poſita reſpectu duorum laterum homologorum AB, MN, erunt etiam ſimiliter poſita reſpectu omnium laterum homologorum, & conſequenter reſpectu ipſorum polygonorum.

Corollarium II.

461. Si duæ rectæ FG, RS terminentur à punctis ſimiliter poſitis reſpectu polygonorum ſimilium ABCDE, MNOPQ, vel etiam duorum laterum homologorum AB, MN: puncta H, T, quæ erunt ſimiliter poſita reſpectu duarum rectarum FG, RS, erunt etiam ſimiliter poſita reſpectu horum laterum homologorum AB, MN (n. 459.), & conſequenter (n. 460.) reſpectu eorundem polygonorum. TAB. X. Fig. 273. 274.

Sequitur etiam puncta G, S, quæ sint similiter posita respectu duarum diagonalium homologarum CE, OQ, fore etiam similiter posita respectu polygonorum ABCDE, MNOPQ.

PROPOSITIO VII.

462. Theorema. *Si in duobus polygonis similibus* ABCDEF, MNOPQR *circumducatur circulus per vertices* A, C, E *trium quorumlibet angulorum primi polygoni, & alter per vertices* M, O, Q *trium mutuò respondentium angulorum secundi: Dico centra* G & S *horum circulorum esse puncta similiter posita respectu eorundem polygonorum.*

Tab. X. Fig. 275. 276.

Demonstratio. Quoniam (n. 454.) in duobus polygonis similibus vertices angulorum respondentium sunt similiter positi respectu omnium laterum homologorum: erunt tria puncta A, C, E, & alia tria M, O, Q similiter posita respectu laterum homologorum AB, MN; & consequenter (n. 457.) duo triangula erunt similia, & anguli CAE, OMQ, quorum vertices ad circumferentiam existunt, æquales, & arcus CE, OQ, quibus insistunt, similes, seu ejusdem numeri graduum. Ergò, si à centris duorum circulorum ducantur radii ad extremitates arcuum CE, OQ, duo anguli ad centra G & S æquales erunt; adeóque duo triangula isoscelia CGE, OSQ erunt similia (n. 411.).

Itaque

Itaque (n. 450.) centra G & S erunt similiter posita respectu duarum diagonalium homologarum CE, OQ, atque etiam (n. 461.) respectu duorum polygonorum similium. Quod erat &c.

Corollarium.

463. Ergò, si polygona similia AB CDEF, MNOPQR sint circulis inscripta, centra G & S circulorum erunt similiter posita respectu eorundem polygonorum. TAB. IX. Fig. 277. 278.

LEMMA.

464. *Si angulus* BAD *à duabus ejusdem circuli tangentibus comprehendatur, recta* AC *ab ejus vertice per centrum* C *ducta, eundem angulum bifariam secabit.* TAB. X. Fig. 279.

Demonstratio. A centro ad duo puncta contactuum ducantur radii CB, CD, qui perpendiculares erunt tangentibus AB, AD (139). Ergò obliqua CA ab hisce duabus perpendicularibus æqualiter recedet; quod dabit AB = AD. Itaque duo triangula ABC, ADC mutuò æquilatera, erunt etiam mutuò æquiangula; & angulus BAC = DAC. Quod erat &c.

PROPOSITIO VIII.

465. Theorema. *In duobus polygonis similibus* ABCDEFGHI, abcdefg hi *si describantur duo circuli, quos respectivè tangant tria latera homologa quæcunque* AB, DE, FG, *&* ab, de, fg: TAB. X. Fig. 280. 281.

Dico centra K, k *duorum circulorum fore puncta similiter posita in hisce duobus polygonis.*

Demonstratio. Producantur in primo polygono latera tangentia AB, DE, FG, donec concurrant in L & M; ducantúrque diagonales AG, BD, & à centro K rectæ KL, KM, quæ per Lemma divident bifariam angulos MLF, LME. Eadem constructio fiat in secundo polygono: utì vides in adjecto schemate.

His positis, quoniam duæ diagonales AG, *ag* transeunt per angulos respondentes duorum similium polygonorum, erunt partes pariter respondentes ABCDEFG, *abcdefg* inter se similes (n. 449.), & anguli BAG, FGA æquales angulis *bag*, *fga*, uterque utrique. Ergò illorum complementa LAG, LGA æqualia erunt horum complementis *lag*, *lga*; atque adeo (n. 411.) duo triangula ALG, *alg* erunt similia, & puncta L & *l* similiter posita respectu duarum homologarum diagonalium AG, *ag* (n. 451.), atque etiam respectu polygonorum similium ABCDEFGHI, *abcdefghi* (n. 461.).

Eodem modo demonstrabitur triangula BMD, *bmd* fore similia, & puncta M & *m* pariter similiter posita in polygonis similibus.

Jam verò triangula ALG, BMD cum sint similia triangulis respondentibus *alg*,

bmd

bmd, anguli L & M, quos tangentes efficiunt, æquales erunt angulis *l* & *m*, quos aliæ tangentes intercipiunt, & illorum ſemiſſes MLK, LMK æquales erunt horum ſemiſſibus *mlk*, *lmk*.

Quare triangulum LKM ſimile erit triangulo *lkm*; & conſequenter centra K, *k* erunt ſimiliter poſita reſpectu duarum rectarum LM, *lm*.

Quia verò duæ rectæ LM, *lm* terminantur à punctis ſimiliter poſitis reſpectu duorum polygonorum ABCDEFGHI, *abcdefghi*, erunt centra K, *k* (n. 461.) ſimiliter poſita reſpectu horum ſimilium polygonorum. Quod erat &c.

Corollarium.

466. Hinc, ſi duo polygona ſimilia ABCDEF, *abcdef* ſint circulis circumſcripta, centra K, *k* horum circulorum erunt puncta ſimiliter poſita in hiſce duobus polygonis. TAB. X. Fig. 282, 283.

Quia verò duo circuli conſiderari poſſunt inſtar duorum ſimilium polygonorum, quorum latera numero augentur, & magnitudine minuuntur in infinitum: hinc perſpicuum eſt centra duorum circulorum eſſe puncta ſimiliter poſita in eiſdem circulis.

PRAXIS GEOMETRICA
DE RE ICHNOGRAPHICA.

In ſuperioribus Theorematis præclarè jacta ſunt fundamenta totius Ichnographiæ, cujus rude quoddam ſpecimen dabo Tironibus, quantum ſatis eſt, ut hiſce principiis inſtructi, ad eos Scriptores conferre ſe poſſint, qui hanc facultatem ſingulari ſtudio excoluerunt; hortórque imprimis eos, qui rei ichnographicæ daturi ſunt operam, ut legant, terántque manibus egregium ſanè opus Joannis Jacobi de Marinonis celeberrimi Profeſſoris Matheſeos, & præſertim Aſtronomiæ in Aula Viennenſi, ac Cæſarei Regii Conſiliari, qui & Tabulæ Prætorianæ uſum, atque præſtantiam mirificè explicavit, & totius rei ichnographicæ ſcientiam novis animadverſionibus; inventíſque ita amplificavit, ut in hàc illuſtrandâ paucos ſanè noſtra hâc ætate habuerit pares, ſuperiorem fortaſſe neminem.

DEFINITIO.

467. *Ichnographia Regni, Toparchiæ, Urbis, Oppidi, vel eorum partis cujuſpiam, eſt delineatio baſis, veſtigii, ſituúmque horizontalium, in quibus apparerent omnia ex ſublimi quodam verticali puncto, ſi ſingula diſtinctè conſpici poſſent.*

Hujuſ-

Hujuſmodi delineatio Mappa vocari ſolet, in qua multò diſtinctiùs, quàm in pictura proſpectuum, apparet partium poſitio, diſtantia, earúmque proportio; & ope Scalæ geometricæ quantitas areæ elici poteſt ex delineata ejus extenſione, utpote ad ſimilem figuram reducta.

Problema I.

468. *Areæ cujusdam campeſtris rectilineæ liberè permeabilis Ichnographiam perficere; hoc eſt, figuram areæ campeſtri ſimilem deſcribere.* TAB. X. Fig. 284.

Reſolutio. I. Seligantur in ea planitie puncta quædam ſpectabilia A, B, C, D, E, F, G, H, I &c. nimirum, domus, arbores &c, quorum poſitio determinanda eſt, eáque in Mappam traducenda.

II. In aliqua ejusdem areæ parte, quæ latè pateat, & permeabilis ſit, menſuretur exactè, & juxta quamlibet directionem recta M N, à cujus extremitatibus plura ſpectari poſſint puncta, quorum poſitionem determinare velis.

III. Sumptô ad capiendos angulos idoneô inſtrumentô, in utraque extremitate rectæ M N metire angulos, quos hæc linea efficit cum lineis directis versùs puncta A, C, D, E, quæ à duobus punctis M & N ſpectari poterunt; hoc eſt, in prima ſtatione M capiendi erunt anguli NMA, NMB, NMC, NMD, NME; & in ſecunda ſtatione N ſimiliter anguli MNA', MN B, MNC, MND, MNE.

IV. Puncta A, B, C, D, E obſervata à duabus extremitatibus rectæ M N, erunt vertices totidem triangulorum M AN, MBN, MCN, MDN, MEN, quorum baſis communis jam nota in aliqua menſura, erit MN, notis pariter ſingulorum angulis ad baſim. Ex hiſce datis reliqua elicientur in eiſdem triangulis; atque hinc derivabitur conſtructio aliorum ſimilium triangulorum, quorum communis baſis referatur ad eandem M N.

Tab. X. Fig. 285. V. Itaque, ut in Mappa repræſentetur poſitio punctorum A, B, C, D, E, quæ obſervata fuerint à duabus extremitatibus rectæ M N, ducenda erit recta *mn*, quæ totidem partes æquales cujuſcunque magnitudinis continebit ope Scalæ geometricæ, quot pedes, vel hexapedæ, vel decempedæ &c. inventæ fuerint in recta M N.

VI. A puncto *m* ducantur rectæ *m a*, *mb*, *mc*, *md*, *me*, quæ cum recta *mn*, efficiant angulos *nma*, *nmb*, *nmc*, *nmd*, *nme* æquales angulis NMA, NMB, NMC, NMD, NME, quorum quantitas jam explorata eſt. Similiter fiat ab altera extremitate *n*. Hâc methodô ſuper rectà *m n* conſtruentur triangula *man*, *mbn*, *mcn*, *mdn*, *men*, quæ ſimilia erunt, ſingula ſingulis, triangu-

lis

lis MAN, MBN, MCN, MDN, MEN, quæ constituta sunt super recta MN; ac propterea vertices *a*, *b*, *c*, *d*, *e* triangulorum in charta, repræsentant vertices A, B, C, D, E triangulorum in campo.

VII. Siverò aliorum etiam punctorum positio in campo determinanda sit, ut notetur in charta: concipiatur recta AB inter puncta A & B, quorum positio inventa jam sit; capiantúrque anguli, quos radii visuales efficiunt ab extremitatibus A & B versùs nova puncta F & G, quæ erunt vertices totidem triangulorum AFB, AGB super eâdem basi AB; quorum duo ad basim anguli noti fient per instrumentum. Quamobrem in Mappa construi poterunt similia triangula *afb*, *agb* super recta *a b* terminata à duobus punctis *a* & *b*, quæ jam repræsentant puncta A & B in campo; & horum triangulorum *afb*, *agb* vertices *f* & *g* repræsentant duo puncta F & G.

VIII. Simili methodo in eadem Mappa per nova puncta *b* & *i* designabitur positio aliorum punctorum H & I, quæ conspici poterunt à duobus punctis B, D; atque ita de reliquis.

Demonstratio. Ut planum faciam singula puncta in Mappa repræsentare exactè positionem punctorum notabilium in campo, satis est ostendere distantias omnes inter puncta A, B, C, D, E, F, G

TAB. X. Fig. 284. 285.

G &c. proportionales eſſe diſtantiis reſpectivis inter puncta *a*, *b*, *c*, *d* &c. in Mappa.

Itaque puncta A, B, C, D, E, quæ obſervata ſunt ab extremitatibus baſis M N, & eorum relativa *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in Mappa, cum ſint vertices triangulorum ſimilium, ſingulorum ad ſingula, & ſimiliter poſitorum reſpectu eorum baſis M N, *m n*, erunt pariter ſimiliter poſita reſpectu earundem baſium M N, *m n* (n. 451.)

Idem dicendum de punctis F, G, & eorum reſpectivis *f*, *g* reſpectu ſuarum baſium A B, *a b*. Cum autem duæ iſtiuſmodi baſes AB, *a b* terminentur à punctis ſimiliter poſitis reſpectu duarum rectarum MN, *m n* : etiam puncta F, G, & eorum reſpectiva *f*, *g* erunt pariter ſimiliter poſita reſpectu earundem rectarum MN, *m n* (n. 459.).

Eodem ratiocinio utendum circa puncta H, I, & eorum reſpectiva *h*, *i*.

Ergo diſtantiæ inter puncta A, B, C, D &c. in campo, proportionales erunt diſtantiis inter puncta *a*, *b*, *c*, *d* &c. reſpectiva in Mappa, & conſequenter erunt utrobique eodem modo diſpoſita. Quod erat &c.

Recta autem *m n* uſui erit inſtar Scalæ geometricæ ad metiendas diſtantias inter diverſa puncta ejusdem Mappæ.

Scho-

Scholion.

Quamvis methodus, quam attulimus, accommodari etiam possit ad determinandum cursum fluminum, riparum, ac sinuositatem viarum, ut in Mappam traducantur: tamen, quia, ut exactè repræsententur, opus est sæpius percurrere, & metiri singulas camporum partes, quarum positio, & figura determinanda est: idcirco in hisce casibus commodiorem methodum dabo.

Problema II.

469. *Sinuosam fluminis ripam ope Pixidis magneticæ pinnulis instructæ ichnographicè in Mappa describere.*

Resolutio. Inter puncta A & E determinare oporteat in Mappa vel cursum fluminis, vel sinuosum iter ABCDE. TAB. X. Fig. 286. 287.

I. Notissima res est versorium acus magneticæ constanter dirigi ad eandem mundi plagam, borealem, & australem, cum aliqua levi declinatione pro varietate regionum, eidémque lineæ meridianæ semper respondere. Quare, si acus magnetica successivè collocetur in diversis ripæ punctis A, B, C, D, omnes versorii directiones AN, BN, CN, DN considerari poterunt tanquam invicem parallelæ.

II. Figantur pali in extremitatibus A, E; & in singulis ripæ flexibus B, C, D; tum explorentur anguli NAB, NBC,

N

NCD, NDE, quos directio acûs magneticæ efficit cum radio visivo ad proximiorem palum; mensurenturque omnes distantiæ AB, BC, CD, DE.

III. Antequam transferentur in Mappam quantitates horum angulorum, notæque distantiæ, separatim in charta ducatur recta *a n*, quæ repræsentet directionem A N magnetis; & punctum *a* designet primum punctum A ripæ flexuosæ. Fiat deinde angulus *n a b* æqualis angulo N A B; sumatúrque *a b* totidem partium Scalæ, quot pedes, vel hexapedæ inventæ fuerint in AB.

IV. Ducatur à puncto *b* recta *b n* parallela ipsi *a n*, ut repræsentetur directio BN magnetis in secunda statione B; & reliqua peragantur, ut prius, in punctis *b*, *c*, *d*. Dico factum.

Demonstratio. Nam rectæ AB, BC, CD, DE sunt per Constructionem proportionales totidem respectivè rectis *ab*, *bc*, *cd*, *de*, angulíque æquales, singuli singulis. Ergò puncta omnia A, B, C, D, E, & eorum relativa *a*, *b*, *c*, *d*, *e* sunt similiter posita. Ductis enim rectis AC, BD, CE, & *ac*, *bd*, *ce*, triangula ABC, BCD, CDE similia erunt triangulis *abc*, *bcd*, *cde*. Ergò figura *abcde*, quam construximus, sinuosam fluminis ripam exactè repræsentat. Quod erat &c.

Problema III.

470. *Aream campestrem ichnographicè delineare per Dioptram, seu normam Mensorum, quam Itali vocant* Squadra, *Galli* l'Equerre d'Arpenteur. Tab. XI. Fig. 288.

Inter instrumenta in campo usitata, simplicissimum illud est, ac sæpè, & utiliter adhibetur, inquit laudatus de Marinonis, in areis perviis, & plerúmque in planitie jacentibus, ut dirimantur in triangula rectangula, quadrata, & oblonga, vel in trapezia duorum laterum æquidistantium, & ad communem basim normalium; narrátque citatus Auctor Geometris Insubriæ tantâ in æstimatione fuisse, ut diu potuerit de palma contendere cum ipsâ Tabula Prætoriana, cujus usum, atque præstantiam ex eodem eximio Scriptore mox exponam. Hæc norma mensoria quatuor pinnulis instructa sit, quarum dioptræ sint in duobus planis invicem perpendicularibus.

Esto planities ABCDEF ichnographicè delineanda.

I. Designetur bacillis recta F D, quæ transeat per duo quævis puncta, quæ Mensori videantur magis idonea; dein subsidio hujus normæ in eadem recta F D quærantur puncta G, H, I, K, quæ perpendiculariter respondent vertici angulorum A, B, C, E propositæ figuræ.

II. Mensurentur perpendiculares A G, B H, BH, CI, EK, & præterea partes à perpendicularibus interceptæ FG, GH, HI, IK, KD.

III. Omnes iſtiuſmodi menſuræ ope Scalæ geometricæ transferantur in chartam, erectis perpendicularibus, junctíſque punctis f, a, b, c, d, e. Dico hujus perimetrum repræſentare exactè areæ campeſtris perimetrum ABCDEF.

TAB. XI. Fig. 288. 289. *Demonſtratio.* Triangula rectangula FGA, AGD, FHB, BHD, FIC, CID, FKE, EKD, & eorum relativa fga, agd, fhb &c. ſunt ſimilia, ſingula ſingulis, quippe quæ per Conſtr. habent latera circa angulum rectum proportionalia. Quare triangula FAD, FBD, FCD, FED, & eorum reſpectiva fad, fbd, fcd, fed compoſita erunt ex triangulis ſimilibus; & conſequenter (n. 447.) ſimilia erunt, ſingula ſingulis. Hinc (n. 451.) puncta A, B, C, E, & eorum reſpectiva a, b, c, e erunt ſimiliter poſita reſpectu duarum rectarum FD, fd, & omnia puncta A, B, C, D, E, F, & eorum reſpectiva a, b, c, d, e, f erunt pariter inter ſe ſimiliter poſita. Quod erat &c.

Problema IV.

471. *Tabulæ Prætorianæ deſcriptio ex Joanne Jacobo de Marinonis.*

Inſtrumentis omnibus, quæ ad angulorum, diſtantiarúmque menſuras ritè capien-

capiendas excogitata ſint à Geometris, præferri meretur hodierna Tabula, quam Prætorianam vocant, celebris Inventoris ſui Joannis Prætorii adſcito nomine anno 1576., quámque novis animadverſionibus, inventiſque ad meliorem formam, uſúmque revocavit Joannes Jacobus de Marinonis, qui eo ipſo tempore, quo hæc Geometriæ Elementa typis edere parabam, ad me Viennâ transmiſit egregium opus ſuum de re ichnographica; cui, & me plurimùm debere fateor in hac Geometriæ practicæ parte, atque, prout ordo Elementorum feret; ſic ejus inventa breviter perſtringam, ut Tironibus meis acuam ſitim, quò fiat, ut relictis rivulis, ad fontes, ac totius rei ichnographicæ ſcientiam, quam in hoc opere complexus eſt, quantocius ſe conferant. Deſcriptionem Tabulæ referam Auctoris verbis.

Primùm oſtenditur oblonga lignea tabula AB, *& quidem in poſtica, vel infima ejus parte, ut appareat quomodo ſuſtineatur à fulcro in tripodem deſinente.* TAB. XI. Fig. 290.

Deinde conſpicitur fulcri epiſtylium CD *cylindricum, baſim ſupremam habens pedalis diametri, & craſſitiem pollice majorem, ut tripodis genua contineat, ipſi epiſtylio adglutinata, cuneiſque firmata.*

Genibus inſeruntur tripodis crura EF, *trajectis clavis* GH, *qui motui axem ſuppeditant, additis matricibus* IK, *quæ genibus*

nibus crura in unam compagem adſtringunt, & motum liberiorem impediunt.

Ad epiſtylii ſtructuram parati erant tres lignei ſemicylindri L, *quorum in ſingulis pars media integram ſuam retinuit craſſitiem : duo autem reliqui trientes non niſi mediam ; ut ſex hi ſectores exciſi, ſimúlque conjuncti, & adglutinati unicum cylindrum componerent, ligni alterationibus minùs obnoxium.*

Quadrum Q R (*hoc nomine uti liceat*) *aptatur Tabulæ in poſtica ejus parte ; inſéritur nempe ſubſcudibus ibi affixis, pérque cochleas* Y, X *Tabulæ adſtringitur. In medio hujus quadri firmatus eſt axis orichalcicus, aut ligneus* S T, *qui centrum epiſtylii pervadens, cum quadro, ac Tabula volvitur, à matrice ſua* M *adſtringendus, interjectâ laminâ octogonâ* O, *quæ priſmati* P *congruit.*

Axis centralis N *in quadro firmatus oſtenditur. Non raró tamen ſolet idem axis Tabulæ affigi, vel adglutinari; ſed conſultiùs eſt quadro ipſum apponi, ut Tabula queat à fulcro ſejungi, aliáque ſubſtitui ; ſicque idem axis duabus, aut pluribus Tabulis inſerviat.*

Menſura Tabulæ arbitraria relinquitur. Olim erat unius pedis quadrati, ideóque modici uſûs. Nunc ejus longitudo excrevit ad tres pedes, latitudo ad duos cum dimidio, ut nimirum excedat folium chartæ majoris, quam imperialem appellant.

Charta

Charta Tabulæ apponenda, resectis extremis marginibus, ut fiat rectangula, tota madefit ope humidæ spongiæ, vel humidi penicilli majoris, sicque convoluta relinquitur ad horæ spatium.

Deinde margines tenaci glutine farinaceo in adversa parte obducti, Tabulæ adglutinantur; postque levem extensionem charta rursum madefit intra margines, ut hi exsiccentur, folio adhuc humido manente.

Nocet autem hujusmodi folio paulo ante extenso proximitas fenestræ, vel januæ patentis; quia ob liberum aëris ingressum nimis citò exsiccatur; ideóque à glutine non detinetur. Nocet quoque vicinia calefactæ fornacis, vel, si æstivo tempore soli exponitur; quoniam, si fuerit exsiccatum, & à glutine detineatur, vi caloris contrahitur, & laceratur.

Addit prætereà accuratè, more suo, complures alias observationes in constructione hujus Tabulæ, ac præsertim, ut ubivis situm horizontalem exactè obtineat, aliáque ejuscemodi in praxi obeunda; quæ singula Lector, cum occasio feret, poterit ex ipsius opere facilè cognoscere. Venio jam ad alteram hujus Instrumenti partem, quæ praxim spectat, ex eodem Scriptore luculenter descriptam.

Problema V.

472. *Tabulæ Prætorianæ usus, atque præstantia. Quoniam fulcrum per motum*

tripodis ad horizontem adducitur, charta ſupra tabulam fulcro parallelam extenſa, planum horizontale præſefert.

In hoc itaque plano punctum eligitur primæ ſtationi datæ, vel ad libitum ſumptæ reſpondens, & acu verticaliter infixa ſignatur. Tabula verò ita dirigitur ſecundùm viſam, vel relatam extenſionem areæ, ut complura ſequentium ſtationum, aliáque ichnographica puncta in Tabulæ charta ſignari queant; cúmque prima baſis pervia, & apta electa fuerit, ad ejus terminum viſum recta linea in tabula ducitur, & ſtationis adeundæ linea vocatur.

Hæc porro, quatenus ab aliis, quæ ductæ, vel ducendæ ſunt, diſtingui poſſit, acu altera, in eadem directione, prout ſpatium patitur, antrorſum, vel retrorſum fixa, & non parum diſtante notatur.

Signo ibi poſito, niſi quodpiam ſtabile fuerit, tranſitur ad ſequentem ſtationem; & in ipſo tranſitu ſumitur menſura diſtantiæ, quæ baſim conſtituit.

Ejus longitudo reducta, ſive à Scala deſumpta, transfertur in ejus lineam, ut habeatur terminus baſis aſſumptæ, nempe ichnographicum punctum ſecundæ ſtationis, acu pariter infixa ſignandum. Ex hoc novo centro licebit alias rectas quotcunque ducere lineas, poſtquam tabula in debito ante omnia ſitu conſtituta, & punctum præcedentis ſtationis directum fuerit ad ſignum in ipſa relictum.

Ita

Ita porrò per Tabulæ motum circularem, & rectum linea stationis redit ad verticale planum, in quo signata fuit; & reliquæ lineæ omnes prius ductæ evadunt parallelæ verticalibus planis, in quibus eæ ducebantur. Proinde collineando ad objecta prius visa, & intersecando lineas in præcedenti statione ad eadem ductas, puncta intersectionum fiunt puncta ichnographica objectorum distantium.

Verùm hæc exemplis, & praxi multò evidentiùs intelligent Tirones.

Problema VI.

473. *Aream rectilineam perviam ex unica statione ichnographicè describere.* TAB. XI. Fig. 291.

Resolutio. I. Positâ Tabulâ Prætorianâ in situ horizontali, ut semper esse debet, ac præterea, si lubeat, in uno figuræ angulo, ita ut punctum *a* vertici ejus immineat: per dioptras regulæ affixas collineatio fiat in baculos in singulis angulis B, C, D, E defixos; ducantúrque lineæ indefinitæ *a b*, *a c*, *a d*, *a e*.

II. Investigetur longitudo rectarum *a* B, *a* C, *a* D, *a* E.

III. Deinde juxta scalam modicam determinentur in Tabula rectæ *a b*, *a c*, *a d*, *a e*.

IV. Ducantur *b c*, *c d*, *d e*.

Dico *a b c d e* esse similem figuræ A B C D E.

Demonstratio. Nam triangula *a b c*,

a B C per Conſtr. ſimilia ſunt, cum habeant latera ab, ac, aB, aC circa communem angulum a proportionalia. Atque ita porro de reliquis triangulis. Quod erat &c.

Aliter.

TAB. XI. Fig. 292. I. Tabulâ intra figuram poſitâ, eligatur punctum g, ex quo per dioptras regulæ affixas, ut ante, collineatio fiat in bacillos defixos in A, B, C, D, E, F; ducantúrque rectæ indefinitæ ga, gb, gc &c.

II. Inveſtigetur longitudo rectarum gA, gB, gC &c.

III. Inde determinetur longitudo rectarum ga, gb, gc &c. juxta ſcalam modicam.

IV. Tandem ducantur ab, bc, cd. &c. Dico $abcdef$ eſſe ſimilem figuræ AB CDEF.

Demonſtratio eſt eadem.

Problema VII.

TAB. XII. Fig. 293. 474. *Ichnographiam areæ* A B C D E *non ubique perviæ, cujus anguli videri poſſint, ex duabus ſtationibus* A & B *perficere.*

Reſolutio. I. Poſitâ tabulâ in A, collineatio fiat in ſingulos areæ angulos B, C, D, E; ducantúrque in menſula versùs eorundem vertices rectæ ex puncto a.

II. Quæratur diſtantia ſtationum A, B, & in menſulam ex Scala geometrica transferatur in ab.

III.

III. Menſula ex A deferatur in B, hac lege, ut punctum cognomine *b* in eâ deſignatum, ipſi B reſpondeat, & regulâ ad lineam *b a* applicatâ, per dioptras collineanti baculus in A defixus occurrat.

IV. Ex puncto *b* ſecundæ ſtationis in ſingulos rurſus figuræ angulos collineatio fiat, & versùs eosdem rectæ ducantur, quæ priores in *e*, *d*, *c* interſecant.

V. Denique jungantur interſectionum puncta *a* & *e*, *e* & *d*, *d* & *c*, rectis *a e*, *e d*, *d c*.

Dico Ichnographiam eſſe abſolutam.

Demonſtratio. Nam per Conſtructionem in utraque ſtatione A & B, eadem linea *a b* & *b a* congruit eidem directioni; angulíque E *a* D, D *a* C, C *a* B primæ ſtationis, æquantur angulis *e a d*, *d a c*, *c a b* ſecundæ ſtationis, ſinguli ſingulis; adeóque lineæ *a* E, *a* D, *a* C parallelæ ſunt lineis *a e*, *a d*, *a c*. Hinc facilè demonſtrabis triangula E *a* D, D *a* C, C *a* B ſimilia reſpectivè triangulis *e a d*, *d a c*, *c a d*; adeóque &c. Quod erat &c.

Scholion.

Hæc curſim indicare libuit, quantùm ſatis eſſet, ut Tirones intelligerent abſtracta hæc, ut vocant, Theoremata exercendæ praxi viam ipſis ampliſſimam aperire, & quod caput eſt, ideoneos reddi legendis Scriptoribus majoris notæ, qui hanc materiam accuratiùs tractârint.

ELEMENTUM IV.

De Ratione Laterum homologorum, & de Perimetro Figurarum similium.

475. Si duæ rectæ, puta, F G, R S terminentur à punctis similiter positis respectu duarum rectarum A B, M N, quæ possint esse latera homologa duorum similium polygonorum A B C D E, M N O P Q, demonstravimus n. 455. easdem rectas F G, R S in eadem esse ratione, quam habent inter se duæ rectæ, seu latera homologa A B, M N.

TAB. X. Fig. 272.

Quoniam verò polygona similia habent omnia latera homologa proportionalia; hinc omnes rectæ, puta, F G, R S, quæ terminentur à punctis similiter positis respectu duorum laterum homologorum A B, M N, erunt pariter inter se in eadem ratione, quam habent reliqua latera polygonorum. His animadversis sit

PROPOSITIO I.

476. Theorema. *Duorum similium polygonorum perimetri sunt inter se, uti eorum latera homologa.*

TAB. X. Fig, 273. 274.

Demonstratio. Quoniam polygona sunt similia, erit AB : MN : : BC : NO : : CD : OP : : DE : PQ : : EA : QM. Ergò per regulas proportionum, ut summa omnium antecedentium AB + BC + CD

+ CD &c., hoc eſt, perimeter primi polygoni, ad ſummam omnium conſequentium MN + NO + OP &c., hoc eſt, perimetrum ſecundi: ita antecedens unum AB, latus primi eſt ad ſuum conſequens MN, latus nempe homologum ſecundi. Quod erat &c.

Corollarium.

477. Hinc duorum ſimilium polygonorum petrimetri ſunt inter ſe, uti lineæ homologæ FG, RS, quæ à punctis ſimiliter poſitis terminantur. Nam per præced. perimetri ſe habent utì latera homologa AB, MN: hæc autem ſunt proportionalia lineis homologis FG, RS (n. 275.).

PROPOSITIO II.

478. Theorema. *Si duo polygona ſimilia* ABCDEF, MNOPQR *vel circulis ſint inſcripta, vel tres dumtaxat angulos habeant reſpectivis circumferen-*
tiis reſpondentes, erunt ambitus polygo- Tab.
norum inter ſe, ut diametri. X.
Demonſtratio. Quoniam ſimilium po- Fig.
lygonorum perimetri ſunt inter ſe, uti 275.
eorum latera homologa AB, MN, & 276.
præterea circulorum radii in eiſdem po- 277.
lygonis terminantur à punctis ſimiliter 278.
poſitis: erunt latera homologa AB, MN proportionalia radiis circulorum, & conſequenter diametris. Ergò ambitus polygonorum proportionales erunt diametris ſuorum circulorum. Quod erat &c.

PROPOSITIO III.

479. Theorema. *Si duo polygona similia* ABCDEF, a b c d e f *circulis sint*
TAB. *circumscripta, vel eorum tria latera ho-*
X. *mologa circulos tangant, erunt polygono-*
Fig. *rum ambitus proportionales radiis.*
280. *Demonstratio.* Nam ambitus polygo-
381. norum proportionales sunt lateribus ho-
282. mologis A B, *a b* (n. 476.); & horum
283. circulorum centra (n. 465.) sunt similiter posita in duobus polygonis. Ergò latera homologa AB, *a b* sunt proportionalia radiis KN, *k n*; & consequenter ambitus polygonorum &c.

PROPOSITIO IV.

480. Theorema. *Si duorum circulorum arcubus sine fine bisectis plura semper, ac plura in infinitum latera circumscribi, & inscribi intelligantur: ambitus polygonorum desinunt in circuli peripheriam. Et duorum circulorum circumferentiæ, sunt inter se, ut eorum radii, seu diametri*

Demonstratio. Excessus ambitus circumscripti supra ambitum inscriptum tandem fiet quovis dato minor. Ergò multò magis excessus ambitus circumscripti supra peripheriam fiet quocunque dato minor. Similiter perspicuum est defectum ambitus inscripti ab ambitu circumscripto fieri quovis dato minorem, multóque magis defectum inscripti ambitus

bitus à peripheria. Ambitus igitur polygoni tam inſcripti, quàm circumſcripti in peripheriam deſinunt. Eſt enim inſtar axiomatis, quod à Newtono lib. 1. princip. Mathem. lem. 1. proponitur: *Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito conſtanter tendunt & ante finem temporis illius propiùs ad invicem accedunt, quàm pro data quavis ratione, fieri ultimò æquales.*

Pars altera conſequitur ex Theor. præced.

PRAXIS GEOMETRICA

Figurarum ſimilium perimetrum addere, ſubtrahere, multiplicare, ac dividere, hâc lege, ut figuræ ſubnaſcentes ſint datis ſimiles.

Problema I.

481. *Figuram Z conſtruere, cujus perimeter æquetur ſummæ ex perimetris duarum figurarum* X, Y, *quæ eidem ſimiles ſint, & quarum* AB, CD *ſint latera homologa.* TAB. XII. Fig. 294.

Reſolutio. Accipiatur recta EF æqualis ſummæ AB+CD; tum ſuper rectâ EF, conſideratâ inſtar lateris homologi ipſi AB & CD, conſtruatur (n. 448.) polygonum Z duobus datis X & Y ſimile. Dico hujus ambitum æqualem fore ſummæ ambitus duorum datorum X & Y.

Demonstratio. Nam ambitus polygonorum similium Z, X, Y proportionales sunt eorum lateribus homologis. Atqui per Constructionem E F = A B + CD. Ergò ambitus polygoni Z æquatur summæ ex perimetris duorum reliquorum X, Y. Quod erat. &c.

Problema II.

482. *Invenire polygonum* X, *cujus perimeter æquetur differentiæ inter perimetros duorum polygonorum* Z, Y, *quæ eidem sint similia, & quorum duo latera* EF, CD *sint homologa.*

TAB. XII. Fig. 294. *Resolutio.* Accipiatur recta AB æqualis differentiæ EF — CD laterum homologorum. Super rectâ AB, considerata instar lateris homologi ipsi E F, aut CD, construatur polygonum X simile dato Z, aut Y. Dico factum.

Demonstratio. Nam, quia AB = EF — CD, si utrinque adjiciatur + CD, erit AB + CD = EF — CD + CD; hoc est, AB + CD = EF. Ergò summa ex perimetris duorum polygonorum X, Y æquabitur perimetro polygoni Z. Ergò ab utroque hujus æqualitatis membro, subducendo eundem perimetrum polygoni Y, remanet perimeter polygoni X æqualis perimetro polygoni Z minùs perimetro polygoni Y, hoc est, æqualis differentiæ inter perimetros duorum dapolygonorum Z & Y. Quod erat &c.

Pro-

Problema III.

483. *Invenire polygonum* Z, *cujus perimeter ſit multiplex perimetri polygoni ſimilis* Y.

Reſolutio. Accipiatur recta EF, quæ ſit æquè multiplex lateris CD polygoni Y; tum ſuper rectà EF, conſiderata inſtar lateris homologi ipſi CD, conſtruatur polygonum Z ſimile dato Y. Dico perimetrum hujus novi polygoni Z fore tantundem multiplum perimetri polygoni dati Y, ac recta EF fuerit multiplex rectæ CD. Fig. 294.

Demonſtratio. Nam perimeter ad perimetrum erit, ut EF ad CD. Quod erat &c.

Problema IV.

484. *Perimetrum dati polygoni* Z *dividere in ratione data, ſuiſque partibus perimetrum conſtruere polygonorum* X & Y *dato ſimilium.* Fig. 294.

Reſolutio. Dividatur recta EF dati polygoni Z in ratione data; tum partibus ipſius EF æquales ſume AB, CD; ſuper quibus, conſideratis inſtar laterum homologorum ipſi EF, conſtrue polygona X & Y ſimilia dato Z. Dico novorum polygonorum perimetros fore partes quæſitas perimetri polygoni Z.

Demonſtratio. Nam I. perimetri polygonorum X & Y ſimul ſumpti æquantur perimetro polygoni Z.

II. Duo

II. Duo Polygona X & Y perimetros habent proportionales eorum lateribus homologis AB, CD, quæ æquales ſunt partibus, in quas per Conſtr. diviſa eſt recta EF in ratione data. Ergò perimeter polygoni Z diviſa eſt in data ratione &c. Quod erat &c.

Monitum.

485. *Si figuræ, circa quas operari oporteat, ſint ex ſimplicioribus polygonis, eorum latera homologa erunt rectæ homologæ, quæ commodiùs aſſumi poſſint. Quod ſi figuræ ſimiles ſint inſcriptæ, vel circumſcriptæ circulis, vel cum eiſdem immediatè connectantur, vel denique figuræ ipſæ ſint circuli, commodiſſimùm erit radios circulorum aſſumere pro lineis homologis.*

GEO-