# GEOMETRIÆ THEORICO - PRACTICÆ LIBER TERTIUS

## De Ratione SUPERFICIERUM.

## ELEMENTUM I.

*De Ratione Superficierum in Parallelogrammis, Triangulis, & Figuris similibus generatim.*

### DEFINITIONES.

486. *SI antecedentes plurium rationum termini, sicuti etiam ipsarum, consequentes, nimirum,* $\frac{A}{a}, \frac{B}{b}, \frac{D}{d}$ *inter se mutuò respectivè multiplicentur, producta* $\frac{ABD}{abd}$ *dicuntur habere inter se rationem compositam ex illis omnibus datis rationibus.*

*Corollarium I.*

487. Datis ergò quotcunque rationibus, solâ multiplicatione antecedentium, & consequentium inter se mutuò respectivè, determinabitur ratio ex illis omnibus composita.

Coro-

## *Corollarium II.*

488. Cùm valor rationis ſit quotus antecedentis per conſequentem diviſi ( n. 360.), hinc ſequitur exponentem rationis compoſitæ pariter componi ex ſimplicium rationem exponentibus inter ſe multiplicatis. Sic $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ exprimit rationum $ac : bd$ ex ſimplicibus compoſitam, cujus exponens componitur ab exponentibus ſimplicium inter ſe multiplicatis. Sic ex ſimplici ratione dupla 4 : 2, & 9 : 3 tripla, componitur ratio 36 : 6 ſextupla, cujus exponens 6 eſt factum exponentium 2 × 3 rationum ſimplicium. Similiter ex ratione 4 : 2, & 9 : 3, & 20 : 5, oritur ratio 720 : 30, cujus exponens 24. eſt factum 2 × 3 × 4.

489. *Ratio geometrica cujusvis termini* A *ad alium quemvis* F *componitur ex rationibus omnibus intermediis continuè ſumptis, quæ oriuntur ex quovis numero terminorum interjacentium.* Sic ratio A : F æquatur rationi compoſitæ A : B, B : C, C : D, D : E, E : F, initio facto in A, & deſinendo in F, ſumptis terminis intermediis, quot libuerit. Similiter in numeris ratio 36:2 eſt compoſita ex 36: 18, 18 : 6, 6 : 12, 12: 4, 4 : 2. Ratio eſt, quia intermedii termini in antecedentibus, & conſequentibus occurrunt; unde ratio compoſita ex A : B, B : C, C:D,

C:D, D:E, E:F, eadem eſt, ac ratio ABCDE : BCDEF, in qua ſublatis terminis communibus, remanet ratio A:F compoſita ex omnibus intermediis.

*Corollarium.*

490. Hinc duplex ſequitur geometrica argumentandi ratio, *ex æquo*, ut ajunt *ordinatè*, & *ex æquo perturbatè*, vel, ut alii loquuntur, *ex æqualitate ordinata*, & *ex æqualitate perturbata*; Nam, ſi fuerint quotcunque quantitates A, B, C &c., aliæque ipſis numero æquales *a*, *b*, *c* &c. in duplici ſerie conſtitutæ, quæ binatim ſumptæ, ſint in eadem ratione, puta, A:B :: *a*:*b*, & B : C :: *b*:*c*, erit ex æqualitate ordinata, ut prima A ad tertiam C in prima ſerie, ita prima *a* ad tertiam *c* in ſecunda; hoc eſt, ratio duarum extremarum ex una parte æqualis erit rationi duarum extremarum ex alia. Ratio pendet ex numero præcedente. Nam ultimæ rationes ex intermediis æqualibus componuntur.

491. Sin autem fuerint quotcunque quantitates A, B, C, aliæque ipſis numero æquales *a*, *b*, *c* in duplici ſerie conſtitutæ, quæ binatim ſumptæ, ſint in eadem ratione: ſit autem perturbata earum proportio, nempe A : B :: *b*:*c*, & B:C :: *a*:*b*: erit ex æquo perturbatè, ut A prima ad tertiam C in prima ſerie, ita prima *a* ad tertiam *c* in ſecunda ſerie; hoc

hoc eſt, ratio duarum extremarum ex una parte æqualis erit rationi duarum extremarum ex alia. Ratio eadem, quæ numeri præced.

492. Si in ea per multiplicationem compoſitione rationum, quam definivimus n. 486., contingat, ut rationes componendæ ſint invicem ſimiles, ſeu æquales, ratio compoſita dici ſolet unius ſimplicis duplicata, triplicata &c., pro numero ſimilium rationum componentium. Quare *Ratio duplicata dicitur illa, quæ ex duabus: triplicata, quæ ex tribus: quadruplicata, quæ ex quatuor rationibus æqualibus inter ſe multiplicatis conſurgit*; atque ita deinceps.

*Corollarium I.*

493. Ratio geometrica, quam habet quadratum unius quantitatis ad quadratum alterius, eſt duplicata rationis illius, quam habent ipſæ quantitates ſimplices ad invicem: ratio cuborum triplicata; & ſic de reliquis poteſtatibus, quæ ex æqualium rationum multiplicatione componuntur. Et contra, ratio geometrica, quam habent inter ſe radices quadratæ, cubicæ &c., dicitur ſubduplicata, ſubtriplicata &c. rationis poteſtatum correſpondentium.

*Corollarium II.*

494. Hinc in omni geometrica progreſſione rationum æqualium, primus terminus ad tertium habere dicitur ratio-

nem

nem duplicatam primi termini ad ſecundum : primus ad quartum habere dicitur rationem triplicatam ; & ſic deinceps. Ratio eſt, quia rationes illæ componuntur ( n. 492. ) ex omnibus intermediis, quæ æquales ſunt inter ſe.

## *Corollarium III.*

495. Hinc patet, quâ de causâ Euclides rationem compoſitam definiens ex duabus $a:b$, & $c:d$, jubet, ut fiat conſequens primæ rationis $b$ ad novam quantitatem $e$, uti antecedens ſecundæ rationis $c$ eſt ad ſuum conſequens $d$; deinde rationem $a:e$ compoſitam vocans ex duabus prædictis ; quam definitionem ex noſtra, quam attulimus n. 486., ſtatim intelliges. Nam ratio $a:e$ componitur ex rationibus $a:b$, & $b:e$. Atqui ratio $b:e = c:d$ ex hypotheſi, Ergò ratio $a:e$ compoſita eſt ex rationibus $a:b$, & $c:d$.

Itaque cum Euclides demonſtrat. lib. 6. prop. 23. æquiangula parallelogramma habere proportionem compoſitam ex duabus rationibus, quas duo latera circa unum angulum unius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, jubet prius, ut duæ illæ rationes laterum continuentur in tribus quantitatibus ; tum demonſtrat eam proportionem parallelogramma inter ſe habere, quam prima quantitas habet ad tertiam.

# PROPOSITIO I.

496. Theorema *Duo quævis parallelogramma* ABCD, MNOP *sive similia ſint, ſive non ſimilia, ſunt inter ſe, uti facta baſis in altitudinem reſpectivè, nimirum ſunt in ratione compoſita baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem* (*n.* 486.)

TAB. XII. Fig. 295. 296.

*Demonſtratio.* Nam (n. 263.) parallelogramma ABCD, MNOP æquantur productis BC × AE, & NO × MQ, nimirum, eorum baſis in reſpectivam altitudinem. Ergò ſunt inter ſe, uti hæc producta, ſive in ratione compoſita BC ad NO, & AE ad MQ. Quod erat &c.

*Corollarium.*

Ergò duo triangula quæcunque BAC, NMO ſunt pariter inter ſe, uti producta BC × AE, NO × MQ, nimirum, eorum baſis in reſpectivam altitudinem. Sunt enim ſemiſſes horum productorum.

# PROPOSITIO II.

497 Theorema. *Parallelogramma* ABCD, MNOP, *quæ unum angulum uni habent æqualem, & conſequenter æquiangula ſunt, habent rationem compoſitam ex rationibus laterum æqualem angulum continentium; nimirum, ſi angulus* B=N, *erit* ABCD : MN

Fig. 295. 296.

OP ::

OP : : AB × BC : MN × NO. Euclid. lib. 6. prop. 23.

*Demonstratio.* Ab æqualibus angulis A & M demittantur perpendiculares A E, MQ super latera BC, NO æqualibus angulis B & N adjacentia. Triangula AEB, MQN erunt & æquiangula, & similia.

Ergò  AE : MQ : : AB : MN.
Atqui  BC : NO : : BC : NO.

Ergò multiplicatis respectivè terminis, habebitur AE × BC : MQ × NO : : A B × BC : MN × NO. Jam verò parallelogrammum ABCD = AE × BC, & parallelogrammum MNOP = MQ × NO. Ergò ABCD : MNOP : : AB × BC : MN × NO. Quod erat &c.

*Corollarium.*

Neque aliter ratiocinaberis de triangulis, quæ sunt semisses parallelogrammorum.

## PROPOSITIO III.

498. Theorema. *Parallelogramma similia* ABCD, MNOP *sunt inter se, uti quadrata laterum homologorum,* TAB.
*id est*, ABCD : MNOP : : $\overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$. XII.
Euclid. lib 6. prop. 19. Fig.

*Demonstratio.* Ab æqualibus angulis 295.
A & M demittantur perpendiculares A 296.
E, MQ in latera homologa BC, NO.

Triangula AEB, MQN æquiangula, erunt similia ; atque hinc.

$AE : MQ :: AB : MN.$

Atqui per hyp. parallelogramma AB CD, MNOP sunt pariter similia. Ergò

$BC : NO :: AB : MN.$

Multiplicatis itaque inter se antecedentibus, & consequentibus hujus duplicis analogiæ, erit

$AE \times BC : MQ \times NO :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$. (n 395.). Est autem $AE \times BC = ABCD$, & $MQ \times NO = MN OP$ [n. 263.

Ergò $ABCD : MNOP :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$. Quod erat &c.

*Corollarium.*

499. Duo triangula sunt pariter inter se, uti quadrata $\overline{AB}^2$, $\overline{MN}^2$, laterum homologorum ,seu in ratione duplicata eorundem (n. 493.).

## PROPOSITIO IV.

500. Theorema. *Similium polygonorum superficies* ABCDE, MNOP Q *sunt inter se, uti quadrata* $\overline{AB}^2$, $\overline{MN}^2$ *suorum laterum homologorum.* Euclid. lib. 6. prop. 20.

TAB. XII. Fig. 297. 298.

*Demonstratio.* A duobus punctis F & R similiter positis respectu duorum late-

laterum homologorum AB, MN, in duobus polygonis ducantur rectæ ad omnes angulos. Quoniam hæc puncta F & R sunt etiam similiter posita respectu omnium laterum homologorum [n. 460.], triangula AFB, BFC &c. erunt similia triangulis MRN, NRO &c., singula singulis (n. 451.). Ergò per præced. Corol. erunt inter se, ut quadrata laterum homologorum; hoc est, quia AB : MN :: BC : NO :: CD : OP &c., triangula invicem comparata, singula singulis, erunt, ut $\overline{AB}^2$, $\overline{MN}^2$. Ergo, ut omnium antecedentium triangulorum summa ad summam omnium consequentium, hoc est, polygonum ad polygonum, ita $\overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$. Quod erat &c.

### *Corollarium I.*

501. Ergò duo similia polygona ABCDE, MNOPQ sunt inter se, uti quadrata $\overline{FG}^2$, $\overline{RS}^2$, duarum rectarum, quæ terminata sint à punctis similiter positis respectu horum polygonorum.

Nam (n. 455.) AB : MN :: FG : RS.

### *Corollarium II.* TAB. X.

502. Hinc duo polygona similia ABCDEF, MNOPQR, quorum tres Fig. anguli eodem modo respondent circum- 275.

ferentiæ circuli, ſunt inter ſe, uti quadrata radiorum.

Nam ductis radiis GC, SO ad reſpectivos angulos C&O, centra G & S ſunt puncta ſimiliter poſita in duobus polygonis (n. 462.), & vertices angulorum C & O ſunt pariter puncta ſimiliter poſita (n. 454.). Ergò AB: MN : : GC: SO (n. 455.). Atqui per Theor. polygonum ad polygonum eſt, ut $\overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$ Ergò &c. Quod erat &c.

TAB. *Corollarium III.*

X. 503. Ergò duo polygona ſimilia A

Fig. BCDEF, MNOPQR circulis in-

277. ſcripta, ſunt, ut quadrata radiorum.

278. Habent enim ad minimùm tres angulos reſpondentes circumferentiæ ſuorum circulorum.

*Corollarium IV.*

504. Similiter duo polygona ſimilia ABCDEFGHI, *abcdefghi*, quæ

TAB. tribus lateribus homologis duos circu-

X. los tangant, erunt proportionalia qua-

Fig. dratis radiorum.

280. Nam Ductis radiis KN, *kn* perpen-

281. dicularibus ad puncta contactuum N, *n*, erunt (n. 453.) puncta N, *n* ſimiliter poſita reſpectu eorundem laterum. Quamobrem (n. 455) AB: *ab*: KN: *kn*. Atqui per Theor. polygona ſimilia

ſunt

ſunt inter ſe uti $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$. Ergò etiam, uti, $\overline{KN}^2 : \overline{kn}^2$. Quod erat &c.

*Corollarium V.*

505. Ergò duo ſimilia polygona circulis circumſcripta, radiorum quadratis ſunt proportionalia.

*Corollarium VI.*

506. Circuli ſunt inter ſe, uti quadrata radiorum.

Nam conſiderari poſſunt circuli tanquam polygona regularia ſimilia infinitorum laterum, inſcripta, vel circumſcripta iiſdem circulis, in quos deſinunt.

## ELEMENTUM II.

### *De Quadratis, & Figuris ſimilibus in Triangulo rectangulo invicem comparatis.*

### DEFINITIONES.

507. Quemadmodum, ſi numerus in ſeipſum ducatur, productum dicitur quadratum, ſeu poteſtas ſecunda, cum numerus ipſe poteſtas prima, ſeu radix dicatur; & ſi quadratum iterum ducatur in ſuum numerum, factum dicitur cubus, ſeu poteſtas tertia: ita, ſi valor rectæ lineæ conſideretur in certo quodam partium determinatarum numero, in quas intelligatur diviſa, quaſque vocamus menſuras, puta pedes, hexapedas &c., hæc recta linea appel-

labitur poteſtas prima; ſin autem idem menſurarum numerus in ſeipſum multiplicetur, productum erit poteſtas ſecunda, ſeu ejuſdem rectæ quadratum; cujus ſuperficies totidem menſuras quadratas, puta, pedes quadratos, continet, quot unitates habet idem productum. Atque ita de cubo, ſeu poteſtate tertia dicendum. Ultra poteſtatem tertiam, ſeu cubum extenſio geometrica non procedit; quippe natura loci, ſpatiique plures non patitur dimenſiones. Quadratum autem rectæ AC deſignari ſolet per $\overline{AC}^2$, & ejuſdem cubus per $\overline{AC}^3$.

Itaque quadrata invicem comparata habent inter ſe eam proportionem, quam obtinent numeri menſurarum æqualium, quas continent eorum ſuperficies. Quare, ſi quærenda ſit duorum quadratorum proportio, & latus primi ſit 2 menſurarum, ſecundi ſit 3: ducantur in ſe ipſos dati numeri; horum producta numerica dabunt rationem quadratorum inter ſe.

## LEMMA I.

508. *Si recta* AC *ſecta ſit utcunque* TAB. XII. Fig. 299. *in* B, *quadratum totius* AC *componitur ex quadratis partium* AB, BC, *& duplo rectangulo, cujus contigua latera ſint duæ partes* AB, BC, *hoc eſt*,

AC

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times BC$. Euclid. lib. 2. prop. 4.

*Demonstratio.* Super recta AC construatur quadratum ACDE; & lateris AE accipiatur portio AF = AB, vel FE = BC; ducantúrque rectæ FH, BI parallelæ lateribus AC, AE. Per Constructionem evidens est quadratum, totius ACDE componi ex quadratis partium AB, BC, & duplo rectangulo sub iisdem partibus contento. Quod erat &c.

## LEMMA. II.

509. *Si recta* AC *fuerit utcunque secta in* B, *quadratum unius segmenti* AB *æquatur quadratis totius* AC, *& segmenti alterius* BC, *minùs duobus rectangulis contentis sub tota* AC, *& eodem segmento* BC; *hoc est*, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AC \times BC$. Euclid. lib. 2. prop. 7.

*Demonstratio.* Per Constructionem præced. constat AG, GD esse quadrata duarum partium AB, BC ejusdem rectæ AC; ac præterea duo rectangula BD, FD contineri sub tota AC, ejusque parte BC, & consequenter utrumque rectè exprimi per AC × BC. Fig. 299.

His positis, perspicuum est excessum quadrati ACDE supra quadratum AG componi ex duobus rectangulis BD, FI. Si eidem quadrato ACDE addatur etiam quadratum GD, excessus summæ horum quadratorum supra quadratum AG erit compositus ex duobus rectangulis BD, FI, & quadrato GC, hoc est, per Constructionem, ex duobus rectangulis æqualibus BD, FD, seu ex duplo rectangulo BD. Ergò, si a duobus quadratis totius AC, & partis BC subducatur quantitas $2\,AC \times BC = 2\,BD$, residuum erit quadratum AG super AB constructum; hoc est, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AC \times BC$. Quod erat &c.

*Corollarium I.*

510. Quoniam $AB = AC - BC$, perspicuum est quadratum unius segmenti AB æquari quadrato differentiæ totius rectæ AC, & segmenti alterius BC.

*Corollarium II.*

511. Itaque tres termini $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times BC$ component quadratum summæ rectarum $AB + BC$. Tres alii termini $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AB \times BC$ component quadratum differentiæ rectarum $AB - BC$.

## Lemma III.

512. *Differentia duorum quadratorum, quæ super duabus rectis* AC, BC *construi intelligantur, æquatur pro-* *ducto*

*ducto summæ duarum rectarum in earundem differentiam.*

*Hoc est*, $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AC + BC} \times \overline{AC - BC}$

*Demonstratio.* Recta BC constituatur super rectà AC; construantúrque super iisdem duo quadrata ACDE, BCGF, quorum angulus C communis sit; productóque latere EA primi quadrati, donec AH = BC, ducatur à puncto H ipsi AC parallela HI, cui latus FB secundi quadrati protractum occurrat in I, & similiter latus idem BF ex altera parte protractum terminetur in K. Tab. XII. Fig. 300.

Itaque, quia per Constructionem AC = CD, & BC = CG, subducendo secundam æqualitatem à prima fiet AB = GD. Cum autem rursum per Constr. AH = BC = FG, erunt duo rectangula HB, FD æqualia; adjectóque utrisque eodem rectangulo AK, erit HB + AK, seu HK = FD + AK.

Jam verò FD + AK est differentia duorum quadratorum ACDE, BCGF, quæ constructa concipiantur super AC & BC. Ergò rectangulum HK erit pariter differentia eorundem quadratorum, nimirum, $ACDE - BCGF = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = HK = EH \times AB$.

Atqui

Atqui per Conſtr. $EH = AC + BC$, & $AB = AC - BC$.

Ergò $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AC + BC} \times \overline{AC - BC}$.

*Corollarium.*

Tab. XII. Fig. 300. 513. Si recta AD ſecetur æqualiter in C, & inæqualiter in B, quadratum dimidiæ AC, minùs quadrato partis intermediæ BC, æquabitur rectangulo ſub inæqualibus partibus AB, BD; hoc eſt, $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BD$. *Euclid. lib. 2. prop. 5.* Nam per Conſtr. $AB = AC + BC$.

$BD = CD - BC = AC - BC$.

Ergò formula præced. Theor., $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AC + BC} \times \overline{AC - BC}$, in hanc transformabitur, $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BD$. Quod erat &c.

## PROPOSITIO I.

514. Theorema. *In omni triangulo* ABC *rectangulo, quadratum lateris* AC, *quod recto angulo opponitur, & hypotenuſa dicitur, æquale eſt duobus ſimul reliquorum laterum* AB, CB *quadratis.* Euclid. lib. 1. prop. 47.

Tab. XII. Fig. 301. *Demonſtratio.* Ducantur IC, BF, & præterea BE parallela lateri AF. Si angulis IAB, FAC rectis, ac proinde æqualibus, addatur communis angulus

gulus BAC, erunt toti IAC, FAB æquales anguli. Atqui per Constr. in triangulis IAC, FAB etiam latera, quæ æquales illos angulos continent, inter se sunt æqualia, nimirum, IA, CA ipsis BA, FA, unum uni, alterum alteri. Ergò triangula IAC, FAB æquantur (n. 229.); quæ, quia cum parallelogrammis ABLI & ZAFE consistunt in iisdem basibus IA, FA, & in iisdem parallelis IA, LBC, & AF, EZB, sunt eorum dimidia (n. 250.). Ergò parallelogramma ABLI, ZAFE, utpote æqualium dupla, erunt æqualia inter se.

Eodem discursu ductis rectis AX, BR, demonstratur parallelogramma EC, BX æqualia esse. Totum igitur quadratum AR utrisque IB, & BX æquale erit. Quod erat &c.

*Aliter.*

Tab. XII. Fig. 302.

Ab anguli recti vertice A demittatur in hypotenusam perpendicularis AD, quæ producta occurrat in F lateri EG quadrati ejusdem hypotenusæ; cujus duo latera EB, GC, & ipsis parallela AF producantur, donec duorum quadratorum HK, ON lateribus productis occurrant in punctis I, M, L. Invenies itaque

I. Duo triangula BAC, BHI esse perfectè æqualia. Nam BA = BH; &

an-

anguli BAC, BHI ſunt æquales, utpote recti; tum etiam æquales anguli ABC, HBI, quippe complementa ejuſdem anguli ABI. Ergò (n. 230.) duo triangula BAC, BHI ſunt æqualia; & conſequenter BC = BI = BE.

II. Duo parallelogramma BF, ABIL ſuper æqualibus baſibus BE, BI, & inter eaſdem parallelas EI, FL conſtituta, ſunt æqualia. Atqui propter eandem rationem parallelogrammum ABIL æquatur quadrato AH. Ergò parallelogrammum BF æquatur quadrato AH.

Eodem diſcurſu oſtenditur parallelogrammum DG æquari quadrato AO. Ergò quadratum hypotenuſæ BC &c. Quod erat &c.

*Scholion.*

515. Inventio porrò admirabilis, atque pulcherrimi hujus Theorematis ad Pythagoram refertur, qui, ut ſcribit Vitruvius lib. 9., hoſtias Muſis immolavit, quòd ſe in tam præclaro invento adjuverint. Idem Theorema paulo infra ad omnes figuras ſimiles, ſimilitérque deſcriptas extendi poſſe demonſtrabimus longè univerſaliùs, quàm hoc Pythagoræ inventum, quod ſola quadrata includit.

TAB. XII. Fig. 302. Quamvis autem ad demonſtrationem ſecundam Theorematis parum interſit ſcire

ſcire, in quo puncto recta DA producta occurrat rectæ HK pariter productæ: tamen facilè demonſtrari poteſt rectam DA productam neceſſariò tranſire per punctum L, in quo occurrunt latera HK, ON producta, duorum quadratorum adjacentium angulo recto BAC. Tab. XII. Fig. 302.

Nam duo triangula AKL, BHI, perfectè æqualia eſſe conſtabit, & conſequenter KL $=$ HI $=$ AC $=$ AN &c.

*Corollarium I.*

516. Si ab angulo recto in hypotenuſam demittatur perpendicularis AD, erunt quadrata hypotenuſæ, & duorum laterum proportionalia toti hypotenuſæ, ejuſque partibus BD, DC.

Nam quadratum BG, & duo rectangula BF, DG inter eaſdem parallelas, eam inter ſe proportionem habent, quam eorum baſes; hoc eſt, Fig. 302.

BG : BF : CF :: BC : BD : DC.

Itaque, ſi duobus rectangulis BF, CF ſubſtituantur quadrata eisdem reſpectivè æqualia AH, AO, erit

BG : AH : AO :: BC : BD : DC.

*Corollarium II.*

517. In circulo BAEFC, ſi ab extremitate B diametri ducantur quotlibet chordæ BA, BE, BF, & à punctis A, E, F, demittantur in diametrum BC perpendiculares AD, EG, FH, erit Tab. XII. Fig. 303.

$\overline{BC}^2$:

$\overline{BC}^2 : \overline{BA}^2 : \overline{BE}^2 : \overline{BF}^2 :: BC : BD : BG : BH.$

Nam ductis rectis A C, E C, F C, triangula ſingula in eodem ſemicirculo erunt rectangula; conſtructóque quadrato B N, productíſque perpendicularibus, erit per Theor. $\overline{BC}^2 = BN; \overline{BA}^2 = BK; \overline{BE}^2 = BL; \overline{BF}^2 = BM.$
Atqui $BN : BK : BL : BM :: BC : BD : BG : BH.$
Ergò $\overline{BC}^2 : \overline{BA}^2 : \overline{BE}^2 : \overline{BF}^2 :: BC : BD\, BG : BH.$

Nimirum, quadrata diametri, & omnium chordarum, quæ ab extremitate B ducuntur, proportionalia ſunt diametro, ejuſque partibus interceptis à puncto B, & ſingulis perpendicularibus demiſſis ab extremitate chordarum.

*Corollarium III.*

518. Si quadratum ſuper uno trianguli latere AB deſcriptum, æquale ſit duobus reliquorum laterum AC, BC quadratis, angulus B C A, quem reliqua latera continent, rectus erit. *Euclid. lib. I. prop.* 48.

TAB. XII. Fig. 304. Nam, ſi ex puncto C erigatur ſuper CB perpendicularis C D, quæ fiat æqualis lateri C A, ducatúrque B D, erit (n. 514.) $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2$, hoc eſt, per Conſtr. $= \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$. Atqui per hy.

hyp. $\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$. Igitur $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$; adeoque BD = AB; ac propterea triangula ACB, BCD sunt sibi mutuò æquilatera, & (n. 232.) angulus ACB æqualis angulo BCD, qui rectus est per Constr.

## PROPOSITIO II.

519. Theorema. *Si tres figuræ similes* X, Y, Z *suis homologis lateribus* BC, BA AC *triangulum rectangulum* BAC *efficiant, demittaturque ab angulo recto perpendicularis* AD *super hypotenusam* BC: *Dico* I. X:Y:Z :: BC:BD:DC.

II. X = Y + Z.

*Demonstratur I. pars.* Quoniam tres figuræ X, Y, Z sunt similes, & rectæ BC, BA, AC sunt latera homologa terminata à punctis similiter positis respectu earundem, erit (n. 500.) Tab. XII. Fig. 305.

$$X : Y : Z :: \overline{BC}^2 : \overline{BA}^2 : \overline{AC}^2.$$

Atqui (n. 516.) $\overline{BC}^2 : \overline{BA}^2 : \overline{AC}^2 ::$ BC: BD : DC.

Ergo X:Y:Z :: BC:BD:DC.

Quod erat primum.

Hinc consequitur II. pars. Nam X:Y+Z :: BC : BD+DC. Atqui BC = BD+DC. Ergo X = Y+Z. Quod erat alterum.

*Corollarium I.*

520. Si à lateribus trianguli rectan-

guli ſimilia polygona quæcunque deſcribantur, illud, quod opponitur angulo recto, duobus ſimul reliquis æquale erit. Euclid. lib. 6. prop. 31.

*Corollarium II.*

521. Si trium circulorum radii, vel diametri triangulum rectangulum efficiant, ille, qui opponitur angulo recto, duobus ſimul reliquis æquatur. Nam conſiderari poſſunt tanquam tria polygona ſimilia infinitorum laterum.

*Corollarium III.*

522. Quamvis adhuc lateat artificium geometricè inveniendi dimenſionem circumferentiæ circuli, ejúſque aream: tamen à præced. Corollario conſequitur dimenſio areæ quorundam ſpatiorum, quæ à portionibus circumferentiæ circulorum terminantur, vocamuſque lunulas Hippocratis, cui hæc inventio adſcribitur.

TAB. XII. Fig. 306. Conſtruatur triangulum rectangulum iſoſceles ABG; tum ſuper tribus lateribus, tanquam diametris, deſcribantur ſemicirculi AGBDC, AFB, BEC. Spatium comprehenſum à quadrante circuli AGB, & ſemicircumferentia AFB vocatur lunula, uti etiam ſpatium BDCEB. Dico autem duas lunulas ſimul ſumptas æquari triangulo ABC.

Nam (n. 521.) area ſemicirculi AGBDC æqualis eſt duabus areis ſimul ſump-

sumptis semicirculorum AFB, BEC. Ergo ab area majoris semicirculi subducendo utrimque segmenta BGAH, & BDCI, residuum circuli majoris erit triangulum ABC. Duorum autem semicirculorum minorum residua erunt duæ lunulæ AFBG, BECD, quarum summa æquabitur triangulo ABC; & alterutra triangulo ABK.

*De Quantitatibus incommensurabilibus.*

## DEFINITIONES.

523. *Quantitates commensurabiles dicuntur illæ, quas aliqua communis mensura metitur: incommensurabiles, quæ nullam habent mensuram communem.*

Ejusmodi quantitates existere mox demonstrabitur.

*Ratio, seu proportio, quæ existit inter magnitudines commensurabiles, & numeris exprimi potest, dicitur rationalis, & ratio numeri ad numerum.*

*Ratio, quæ existit inter magnitudines incommensurabiles, & nullis numeris explicari potest, non est ratio numeri ad numerum; eáque dici solet irrationalis, aut surda.*

524. *Quemadmodum exponens rationis est quotus unius termini per alium divisi: ita exponentes rationis sunt minimi numeri, qui eandem inter se rationem habent, quam antecedens ad consequens.*

Inveniuntur autem exponentes rationis eâ planè ratione , quâ fractio reducitur ad minimos terminos, non mutato ejusdem valore. Nam , uterque terminus, puta, 8 ad 16, vel 32 ad 64 &c. dividatur per maximam communem menſuram 8, vel 32, quotientes 1 & 2 erunt exponentes rationis 8 ad 16, vel 32 ad 64.

## LEMMA.

525. *Ratio duplicata rationis numeri ad numerum neceſſariò habet pro ſuis exponentibus quadratos numeros.*

Nam, ſi rationis numeri ad numerum, puta, 3 ad 6, duplicatam habere veſim , huic neceſſariò adjicienda eſt ratio altera, quæ ſit primæ æqualis , nimirum, 3:6 : : 4 : 8 ; tum multiplicatis inter ſe duobus antecedentibus , & duobus conſequentibus , horum facta 12, 48 , dabunt rationem duplicatam alterius ſimplicis 3: 6 , vel 4 : 8 ; uti conſtat ex n. 487.

Jam verò hæc ratio 12 ad 48 revocetur ad minimos terminos 1 , 4 , qui erunt & exponentes rationis duplicatæ , & numeri quadrati. Quod univerſaliter verum eſſe ſic oſtenditur.

Duæ rationes æquales ita diſponantur , ut unam proportionem efficiant,

3:6 :: 4 : 8.

Revocentur ad minimos terminos ,

1:2 : : 1 : 2.

In hac reductione duarum rationum æqua-

æqualium, non mutato earum valore, evidens eſt duo antecedentia eundem prorſus numerum conficere, uti & duo conſequentia; quæ, ſi inter ſe reſpectivè multiplicentur, dabunt neceſſariò pro exponentibus duos numeros quadratos.

Nam horum quilibet erit factum ejusdem numeri in ſeipſum ducti.

*Corollarium.*

526. Si detur ratio duplicata, cujus exponentes non ſint numeri quadrati, ratio ſimplex, cujus illa eſt duplicata, non erit ratio numeri ad numerum.

## PROPOSITIO III.

527. Theorema. *In quadrato* ABCD *diagonalis* AD *lateri* AC *incommenſurabilis eſt longitudine; hoc eſt, ratio diametri ad latus, non eſt ratio numeri ad numerum.* Euclid. lib. 10. prop. 117. TAB.

*Demonſtratio.* Ratio quadrati rectæ AD ad quadratum rectæ AC eſt dupli- XII. cata (n. 498.) rationis ſimplicis, lineæ Fig. AD ad lineam AC. Ergò, ſi duo qua- 307. drata rectarum AD & AC non habeant pro ſuis exponentibus numeros quadratos, ratio ſimplex rectæ AD ad rectam AC non erit ratio numeri ad numerum ex præced. Corol. Atqui horum duorum quadratorum exponentes ſunt 2 & 1, adeoque numeri non quadrati; nam triangulum ACD rectangulum eſt, & latus AC æquale lateri CD.

Quadratum ergo hypotenusæ AD duplum est quadrati lateris AC. Quare ratio simplex, cujus est duplicata ratio 2 ad 1, non est ratio numeri ad numerum; id est, ratio diametri AD ad latus AC irrationalis est; & consequenter quadrati diameter est incommensurabilis lateri, quamvis harum rectarum quadrata sint commensurabilia, quorum ratio 2 ad 1 numeris exprimi potest. Quod erat &c.

*Scholion.*

*Geometræ, ut idipsum exprimant, dicunt, diametrum, & latus esse quantitates incommensurabiles longitudine, sed commensurabiles potentiâ.*

## PROPOSITIO IV.

528. Problema. *Invenire rectas lineas incommensurabiles non solùm longitudine, verùm etiam potentiâ, hoc est, quarum quadrata non habeant rationem, quæ numeris exprimi possit.*

*Resolutio.* Inveniatur media proportionalis inter diagonalem, & latus quadrati, uti docebimus Lib. 4. Dico hanc esse incommensurabilem tum longitudine, tum potentiâ respectu lateris, & diagonalis.

TAB. XII. Fig. 307. 308. *Demonstratur I. pars.* Sit recta EF media proportionalis inventa inter latus AC, & diametrum AD. Ratio rectæ AC ad rectam AD est duplicata rationis rectæ AC ad rectam EF (n. 494.).

Qua-

Quare brevitatis causâ sit $AC = X.$
$EF = Y.$
$AD = Z.$

Per suppositionem erit $x : y :: y : z.$ Multiplicentur inter se duo antecedentia $x$ & $y$, & duo consequentia $y$ & $z$ hujus continuæ proportionis, habebitur (n. 487.) ratio ex duabus rationibus composita $xy : zy.$

Hæc autem ratio non differt à ratione $x$ ad $z$; quippe quæ per eandem quantitatem $y$ multiplicatur. Ergò ratio $x$ ad $z$ componitur ex ratione $x$ ad $y$, & ex ratione $y$ ad $z$, nimirum ex duabus rationibus æqualibus; hoc est, (n. 492.) ratio $x$ ad $z$ est duplicata rationis $x$ ad $y$, nempe ratio rectæ AC ad rectam AD est duplicata rationis rectæ AC ad rectam EF.

His positis, [n 526.] erit recta AC longitudine incommensurabilis rectæ EF. Nam earum ratio duplicata, quæ est ratio rectæ AC ad rectam AD, pro exponentibus non habet quadratos numeros.

*Demonstratur II. pars.* Nam quadratum rectæ AC est ad quadratum rectæ EF in ratione duplicata rectæ AC ad EF: hoc est, in ea ipsa ratione, quam habet recta AC ad rectam AD. Atqui (n. 527.) recta AC est incommensurabilis rectæ AD. Ergò quadratum rectæ AC est incommensurabile quadrato rectæ EF. Quod erat &c.

Co-

*Corollarium I.*

TAB. XII. Fig. 308. 529. Hinc lineæ incommensurabiles in infinitum haberi possunt, si totidem mediæ proportionales semper quærantur, puta, inter rectam AC, & rectam EF; atque ita porro in infinitum.

*Corollarium II.*

530. Atque hoc vel unico argumento, tametsi cætera omnia deessent, evidenter demonstratur, quantitates ex definito punctorum numero componi non posse; alioqui nullæ essent incommensurabiles; omnium quippe mensura communis esset punctum.

*Corollarium III.*

531. Inventis lineis rectis longitudine incommensurabilibus, invenientur etiam aliæ quamplurimæ magnitudines, planæ scilicet, atque solidæ incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ AC & AD longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit EF. Quoniam (n. 498. & 500.) AC prima est ad AD tertiam, uti figura rectilinea quævis super AC constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterque positam super EF: sunt autem AC & AD longitudine incommensurabiles: erunt ergo pariter rectilineæ illæ figuræ super AC & EF incommensurabiles.

Rursum, si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata ejusdem altitudititudinis, quorum baſes ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ ſuper AC & EF: habebunt pyramides, & priſmata, uti alibi demonſtrabitur, eandem proportionem, quam baſes: hoc eſt, quam habent rectilineæ figuræ incommenſurabiles.

*Corollarium IV.*

532. Hæc rectarum incommenſurabilitas impedimento eſt, quo minùs in pleriſque operationibus uſus ſcalæ geometricæ univerſalis eſſe poſſit, puta, in additione figurarum ſimilium.

Propoſitum ſit conſtruere quadratum alterius dati duplum. Dividatur latus dati quadrati in maximum partium numerum id eſt, 100 partes. Duc 100 in 100: factum 10000 erit valor quadrati dati; ejuſque duplum 20000 valor quadrati quæſiti. Ab hoc tamen invento valore deduci methodus non poteſt, qua propoſitum quadratum conſtruatur, Oportet enim ipſius latus invenire expreſſum tali numero, qui in ſe ipſum ductus exhibeat 20000. At hic numerus fruſtra in ſcala geometrica quæreretur, cujus partes eſſent centeſimæ lateris quadrati primi. Nam numerus 141 in ſeipſum ductus dabit 19881; & 142 dabit 20164: uterque autem â quæſito numero vel deficeret, vel excederet. Idemque dicendum, ſi latus quadrati da-ei divideretur in plus quàm 100 partes Verùm id genus problemata facilè expedientur in praxi geometrica, quam ſubjicio, per Prop. 1., ejuſque Corol.

# PRAXIS GEOMETRICA.

## ELEMENTI II. LIB. III.

## *Similium Figurarum Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diviſio.*

### Problema I.

§ 133. *Datis quotcunque figuris ſimilibus, invenire unam æqualem omnium ſummæ, & ipſis ſimilem.*

TAB. XII. Fig. 309. *Reſolutio.* Figurarum ſimilium, quæ addi debent, determinentur latera homologa, quorum duo AB, AC conſtituantur ad angulum rectum BAC. Hypotenuſa BC erit latus homologum figuræ ſimilis, & æqualis ſummæ duarum.

Quibus ſi tertiam figuram ſimilem addi oporteat, ab extremitate hypotenuſæ BC excitetur perpendicularis CD æqualis lateri homologo tertiæ figuræ; ducatúrque hypotenuſa BD. Hæc erit latus homologum figuræ ſimilis, & æqualis ſummæ trium ſimilium figurarum, quarum latera homologa ſunt AB, AC, CD. Atque ita porrò, ſi plures aliæ ſimiles figuræ eſſent addendæ.

Si circulus quæreretur æqualis ſummæ plurium circulorum: horum radii, vel dia-

diametri diſponantur, ut jubet Problema; circulus, cujus radius, vel diameter ſit hypotenuſa, æquatur ſummæ reliquorum.

Omnia conſtant ex n. 520. & 521.

## Problema II.

534. *Figuram ſimilem ab altera ſimili ſubtrahere, ita ut reſiduum ſit figura ſimilis duabus primis.* TAB. XII. Fig. 305.

*Reſolutio.* Quoniam (in. 520.) $X = Z + Y$, perſpicuum eſt $X - Z = Y$; vel $X - Y = Z$.

Itaque duarum ſimilium figurarum, quarum minor à majore ſubtrahenda eſt, determinentur latera homologa; fiat deinde triangulum rectangulum BAC, cujus hypotenuſa BC ſit latus figuræ majoris, & alterutrum ex duobus lateribus anguli recti, puta, BA, ſit homologum latus minoris figuræ ſubtrahendæ. Tertium latus AC trianguli rectanguli erit homologum latus figuræ ſimilis, quæ duarum datarum ſit differentia.

Triangulum verò rectangulum, ut jubet Problema, ſic conſtruitur. Super recta BC, quæ ſit æqualis uni lateri majoris figuræ, deſcribatur ſemicirculus BAC; tum ab extremitate B ejuſdem diametri ducatur chorda BA æqualis lateri homologo figuræ ſimilis, & æqualis quæſitæ differentiæ duarum reliquarum. Nam angulus in ſemicirculo rectus eſt.

Si

Si circuli essent invicem subtrahendi, assumantur eorum radii, vel diametri pro lineis homologis.

## Problema III.

535. *Figuram construere multiplam, & similem figuræ datæ* X.

Tab. XII. Fig. 310. *Resolutio.* Si figura proposita multiplicanda sit per numerum, puta, 3, multiplicatio revocatur ad additionem, ut in Probl. 1.; sin autem multiplicanda sit in quavis alia ratione, quæ numeris etiam exprimi non possit:

Ducatur recta indefinita BZ, in qua à quovis puncto D excitetur perpendicularis DA; sumatúrque pro libitu portio BD, quæ respondeat datæ figuræ. Fiat deinde BC æquè multiplex ipsius BD, ac quæsita figura multiplex esse debeat propositæ figuræ X; tum super recta BC, tanquam diametro, describatur semicirculus, qui perpendiculari indefinitæ DA occurrat in puncto A; à quo ad extremitates diametri ducantur chordæ AB, AC, quæ rectum angulum efficient in A. Denique super chorda AB, quæ vergit versùs BD respondentem datæ figuræ sumatur AE æqualis rectæ MN ejusdem datæ figuræ X; ducatúrque EF parallela diametro BC. Dico rectam EF à duabus chordis interceptam, fore latus figuræ quæsitæ, homologum lateri MN propositæ figuræ X. De-

*Demonstratio.* Nam figura similis datæ X constructa super recta EF homologa ipsi MN, toties continebit figuram X, cujus latus homologum est AE, seu MN, quoties EF continet EG (n. 519.). Atqui EF : EG :: BC : BD; & per Constr. BC tot vicibus continet BD, quot vicibus figura quæsita continere debet propositam figuram X. Ergò &c. Quod erat &c.

*Scholion.*

536. *Assuescant Tirones radices quadratas cujusvis summæ quadratorum invenire, easque geometricè, & per literas designare.* TAB. XII. Fig. 309.

*Itaque I. latus quadrati est ejusdem radix, nimirum,* $AB = \sqrt{\overline{AB}^2}$.

*II. In triangulo rectangulo* BAC, *quia* $\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$, *hypotenusa* BC *est radix summæ quadratorum* $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$, *nimirum*, $BC = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2}$.

*III. In triangulo rectangulo* BCD, *hypotenusa* BD *est radix trium quadratorum, & ita exprimitur* : $BD = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2}$ *&c.*

*Monitum.*

*Caveant itaque Tirones, ne radicem quadratam summæ plurium quadratorum;* $\sqrt{}$

$\overline{BA}^2$

$\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$ *putent esse summam radicum* BA + AC + CD *eorundem; nam ex dictis sola hypotenusa* BD *est illorum radix.*

*Similiter in triangulo rectangulo* BAC *radix differentiæ quadratorum* $\overline{BC}^2 - \overline{BA}^2$ *non est* BC—BA, *sed* $AC = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BA}^2}$.

## Problema IV.

537. *Invenire lineas rectas proportionales totidem figuris* X, Y, Z, *&c., quarum nota sint latera homologa* bc, ba, be, *&c,*

TAB. XII. Fig. 311. 312. 313. 314.

*Resolutio.* Super recta BC æquali rectæ *bc* majoris figuræ X, describatur semicirculus BEAC; ductisque chordis BA, BE &c, quæ sint æquales lineis *ba*, *be* homologis ipsi *bc*, ab earum chordarum extremitatibus demittantur perpendiculares AD, EF &c. ad diametrum BC. Dico X : Y : Z &c. : : BC : BD : BF &c.

*Demonstratio*, Quoniam figuræ X, Y, Z &c. sunt similes, ac præterea rectæ *bc* : *ba*, *be* &c. sunt earum lineæ homologæ, habebitur (n. 500.) X : Y : Z &c. : : $\overline{bc}^2 : \overline{ba}^2 : \overline{be}^2$ &c. Atqui [n. 517.) $\overline{bc}^2 : \overline{ba}^2 : \overline{be}^2$ : &c., sive per Const. $\overline{BC}^2 : \overline{BA}^2 : \overline{BE}^2$ &c. : : BC : BD : BF &c.

Er-

Ergò X : Y : Z &c. : : BC : BD : BF &c. Quod erat &c.

*Corollarium.*

538. Inventis lineis, quæ proportionales ſint totidem figuris ſimilibus, quemadmodum facilè invenitur, quoties una linea alteram contineat, ita peræquè decerni poterit, quot vicibus major duarum figurarum ſimilium contineat minorem.

*Scholion.*

*Docuimus alibi, quo artificio figura quævis data dividi poſſit in plures partes quæ ſint in data ratione. Cùm verò partes ab hac diviſione provenientes non ſint ſimiles figuræ diviſæ, reliquum eſt, ut hoc etiam ſcitu digniſſimum Problema geometricum reſolvatur.*

Problema V.

339. *Propoſitam figuram* X *dividere in partes, quæ ſint ipſi ſimiles, ac præterea proportionales datis numeris, ſeu lineis* bd, de, ef, fc. TAB. XII. Fig. 315. 316.

*Reſolutio.* In data figura X eligatur recta *bc* in hanc rem commodior, cui æqualis fiat recta BC, quæ dividatur in partes BD, DE, EF, FC proportionales datis numeris, ſeu lineis *bd*, *de*, *ef*, *fc*, quæ ſint in ea ipſa ratione, in qua eſſe debent partes quæſitæ figuræ X; tum ſuper recta BC, tanquam diametro deſcribatur ſemicirculus BAC; & ab extremitatibus D&F partium BD, FC, excitentur perpendiculares DA, FG, occurrentes ſemicircumferentiæ in A&G; dein ducantur chordæ BA, CG; ac ſuper his, tanquam lineis homologis ipſi *bc*, conſtruantur duæ figuræ ſimiles figuræ X.

Dico I. has duas figuras fore duas partes propoſitæ figuræ X reſpondentes duabus proportionalibus *bd*, *fc*.

Ut autem inveniantur reliquæ partes figuræ X reſpondentes reliquis proportionalibus *de*, *ef*, transferantur diametri partes intermediæ DE, EF in BQ, BP, hæc lege, ut earum origo communis ſit punctum extremum B diametri; tum excitatis diametro perpendicularibus QN, PM, ducantur chordæ NB, MB; ac rurſum ſuper his, tanquam lineis homologis ipſi *bc*, conſtruantur duæ figuræ ſimiles figuræ X.

Dico II. haſce novas figuras fore reliquas partes figuræ X reſpondentes duabus reliquis proportionalibus *de*, *ef*.

*Demonſtratio.* Ut hæc conſtructio reſolvendo Problemati idonea demonſtretur, duo præſtanda mihi ſunt.

Oſtendam I. ſummam harum figurarum ſimilium figuræ X, eidem æquari.

Oſtendam II. eaſdem figuras proportionales eſſe datis rectis *bd*, *de*, *ef*, *fc*; quod utrumque conditio Problematis poſtulat. Ita-

Itaque I. figura X, quæ conſtructa intelligitur ſuper diametro $BC = bc$, omneſque reliquæ figuræ ſimiles ipſi X, pariter conſtructæ ſuper chordis AB, NB, MB, GC, tanquam lineis homologis rectæ BC, ſeu $bc$, erunt per Probl. IV. proportionales rectis BC, BD, BQ, BP, FC, ſive rectis BC, BD, DB, EF, FC, quippe $BQ = DE$, & $BP = EF$; & conſequenter (n. 394.) figura conſtructa ſuper $BC = bc$ erit ad ſummam aliarum ſimilium ſuper chordis AB, NB, MB, GC conſtructarum, uti BC eſt ad ſummam $BD + DE + EF + FC$. Atqui $BD + DE + EF + FC = BC$. Ergò &c. Quod erat primum.

II. Ex prima parte conſtat figuras ſimiles conſtructas ſuper chordis AB, NB, MB, GC proportionales eſſe rectis BD, DE, EF, FC. Atqui per Conſtr. rectæ BD, DE, EF, FC proportionales ſunt lineis datis $bd$, $de$, $ef$, $fc$, ſeu datis numeris. Ergò &c. Quod erat alterum.

*De Circino proportionis.*

## Problema I.

540. *Lineam planorum circino proportionis inſcribere.* TAB.

*Reſolutio.* Voco lineam planorum, illam, in qua exhibentur latera homologa figurarum planarum ſimilium. In utra- XII. Fig. 317.

que regula inſcribuntur duæ lineæ, quæ in centrum commune circini cöeunt. Incipiendo à centro ambæ ita dividuntur, ut primæ diviſioni apponatur unitas, & eſt latus quadrati omnium minimi, & primi; ſecunda diviſio habet 2, deſignatque latus quadrati dupli; atque ita porrò juxta ſeriem naturalem numerorum deſignantur latera quadratorum, quæ primum, ſeu minimum contineant bis, ter, quater &c. Hujuſmodi autem diviſiones, & latera quadratorum multiplicium inveniuntur ope trianguli, & n. 533., uti conſtare poteſt ex adjecta figura.

## Problema II.

541. *Figuram planam minure, aut augere ſecundùm datam rationem.*

*Reſolutio.* Si figura propoſita ſit regularis, nimirum, quadratum, pentagonum, circulus, triangulum æquilaterum, ſufficiet invenire latus figuræ quæſitæ. Proponatur ergò quadratum quodcunque augendum ſecundùm rationem 4 ad 9. Latus dati quadrati transfero ad intervallum 4 & 4 notatum in linea planorum. Intervallum 9 & 9 exhibebit latus quadrati, quod ſe habeat ad propoſitum quadratum, ut 9 ad 4.

*Demonſtratio.* Lineæ transverſales eandem inter ſe rationem habent, ac latera. Sed lineæ 4 & 9 ſunt latera quadra-

torum

torum eandem rationem habentium, ac 4 ad 9. Ergò & lineæ transverſales erunt latera quadratorum eandem rationem habentium. Quod erat &c.

Idem dicendum de omnibus figuris ſimilibus.

Quod ſi figura propoſita irregularis fuerit, ita ut requirantur plura latera ad deſcriptionem figuræ ſimilis, pro ſingulis lateribus eodem modo operandum eſſet.

## Problema III.

542. *Invenire, quam rationem habeant inter ſe figuræ planæ ſimiles.*

*Reſolutio.* Ut nota fiat ratio, quam habet figura plana quæcunque ad aliam ſimilem, comparari debent duo tantùm latera homologa; Si enim latus utriusque figuræ applicetur lineæ planorum, incipiendo à centro, numeri, quos attingent, indicabunt, quam rationem habeant prædictæ figuræ.

Vel, ita aperiatur circinus proportionis, ut latus unius figuræ propoſitæ interjiciatur inter numeros eoſdem transverſaliter, puta, inter 5 & 5: intervallum 9 & 9, cui congruet latus alterum figuræ homologum, indicabit numerum 9, ad quem numerus 5 eandem rationem habebit, ac prima figura ad ſecundam.

## Problema IV.

543. *Circinum proportionis ita aperire, ut duæ lineæ planorum angulum rectum efficiant.*

*Resolutio.* Super linea planorum, incipiendo à centro, accipe circino communi intervallum cujuslibet numeri planorum, puta, 8; hoc idem intervallum applicetur utrimque transversim numero, qui sit semissis præcedentis, nimirum, 4 & 4 ejusdem lineæ planorum; quo facto, duæ lineæ planorum efficient in centro angulum rectum.

Demonstratio pendet ex n. 518.

## Problema V.

544. *Datis quotcunque figuris planis similibus construere figuram similem omnibus simul sumptis æqualem.*

*Resolutio.* Circinus proportionis ita aperiatur, ut duæ lineæ planorum angulum rectum comprehendant; tum latera duarum figurarum transfer hinc, atque inde in lineas planorum: linea iis subtensa, seu intervallum inter duos numeros inventum, dabit latus homologum figuræ similis, & æqualis primis duabus.

Pariter latus inventum transferatur in unam lineam planorum, & latus tertiæ figuræ in oppositam: linea utrique subtensa, erit latus figuræ similis, & æqualis tribus primis.

Hac praxi uti poſſumus, etiamſi latera transferri non poſſint in lineam planorum, modò ſubſtituantur pro pedibus, aut hexapedis totidem partes æquales ex ſcala geometrica.

## Problema VI.

545. *Invenire latus figuræ ſimilis, æqualis differentiæ duarum figurarum ſimilium.*

*Reſolutio.* Proponantur duæ figuræ planæ ſimiles, veluti, duo quadrata, duo circuli &c. Quæratur autem latus quadrati, aut circuli, qui ſit æqualis earum figurarum differentiæ.

Aperiatur circinus proportionis, ita ut lineæ planorum angulum rectum comprehendant; tum latus minoris figuræ transfer à centro in alterutram lineam planorum, puta, à centro in punctum 9; dein in circino communi accipe latus alterum homologum figuræ majoris, ac pedem circini ita in extremo 9 primi lateris colloca, ut alius pes aliam lineam planorum in aliquo puncto diviſionis attingat, puta, in 4. Diſtantia à centro ad punctum 4 inventa in altera linea planorum, indicabit latus homologum alterius figuræ ſimilis, quæ differentiam propoſitam adæquet duarum ſimilium figurarum, quarum ratio ponitur eſſe, ut 9 ad 13.

Demonſtratio pendet ex n. 534.

# ELEMENTUM III.

## *De Quadratis in triangulo non rectangulo, & in parallelogrammo invicem comparatis, & de Quadrilateris circulo inscriptis.*

### PROPOSITIO I.

546. Theorema. *In omni triangulo obtusangulo* BCD, *si ab angulo acuto* D *perpendicularis* DF *demittatur in latus* BC *productum, & eidem angulo oppositum, erit*

Tab. XII. Fig. 318.

$$\text{I. } \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CF.$$

$$\text{II. } \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 + 2BC \times BF.$$

Euclid. lib. 2. prop. 12.

*Demonstratur I. pars.* Triangula BFD, CFD sunt rectangula in F.

Ergo $\overline{BD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{BF}^2$

& $\overline{DF}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{CF}^2$.

Quia verò BF = BC + CF, erit (n. 508.)

$$\overline{BF}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CF}^2 + 2BC \times CF.$$

Ergo in prima æquatione utrique quadrato $\overline{DF}^2$ & $\overline{BF}^2$ substituendo valorem suum, fiet

$\overline{BD}^2$

$$\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CF.$$

Quod erat primum.

*Demonstratur II. pars.* Triangula CFD, BFD rectangula in F, dabunt.

$$\overline{CD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{CF}^2$$

$$\overline{DF}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BF}^2$$

Quia verò CF = BF — EC, erit (n. 509.)

$$\overline{CF}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BF.$$

Ergo in prima æquatione utrique quadrato $\overline{DF}^2$ & $\overline{CF}^2$ ſubſtituendo valorem ſuum, fiet

$$\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BF.$$

Adde utrique membro eandem quantitatem $- \overline{BC}^2 + 2BC \times BF$; deletíſque terminis ſe mutuò deſtruentibus propter ſigna contraria $\pm$, habebitur

$$\overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 + 2BC \times BF = \overline{BD}^2.$$

Quod erat alterum.

## PROPOSITIO II.

547. Problema. *In omni triangulo obtuſangulo* BCD, *ſi ab angulo acuto* D *demittatur perpendicularis* DF *in latus eidem oppoſitum productum, invenire* TAB. XII. Fig. 318.

$$\text{I. } CF = \frac{\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}{2BC},$$

$$\text{II. } BF = \frac{\overline{ED}^2 \times \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}{2BC}.$$

*Resolutio & demonstratio.* Ex præced. Theor. habes

$$\text{I. } \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CF.$$

$$\text{II. } \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 + 2BC \times BF.$$

In prima æqualitate adde utrique membro $-\overline{CD}^2 - \overline{BC}^2$, & in secunda adde pariter utrimque $-\overline{CD}^2 + \overline{BC}^2$: erit

$$\text{I. } \overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = 2BC \times CF,$$

$$\text{II. } \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = 2BC \times BF.$$

Harum duarum æqualitatum utrumque dividatur per $2BC$: fiet

$$\text{I. } \frac{\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}{2BC} = CF,$$

$$\text{II. } \frac{\overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}{2BC} = BF.$$

Quod erat &c.

*Corollarium.*

Fig. 318. 548. Hinc ex notis BF, vel CF statim innotescet perpendicularis DF. Nam in triangulo rectangulo BFD, si à quadrato BD subtrahas quadratum BF, vel in triangulo rectangulo CFD, si à quadra-

to CD ſubtrahas quadratum CF: in utroque caſu reſiduuum erit quadratum DF, cujus radix quadrata dabit DF perpendicularem quæſitam.

## PROPOSITIO III.

549. Theorema. *In omni triangulo ABC, ſi ab angulo A in latus oppoſitum BC demittatur perpendicularis AE, quæ intra triangulum cadat, erit*

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BE.$$

Euclid. lib. 2. prop. 13.

*Demonſtratio.* Duo triangula AEC, AEB ſunt rectangula in E. TAB. XII. Fig. 319.

Ergò $\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2$,

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2.$$

Et quoniam $EC = BC - BE$, habebitur (n. 509.)

$$\overline{EC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BE}^2 - 2BC \times BE.$$

His itaque valoribus ſubſtitutis in prima æqualitate, erit

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BE.$$

Quod erat &c.

Eodem modo demonſtrabitur $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times EC.$

*Corollarium. I.*

550. In eadem figura ex notis lateri-

bus AC, AB, BC invenietur ſegmentum BE, & conſequenter perpendicularis AE.

Nam (n. 549.) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BE$.

Ergò utrique membro æquationis addendo $2BC \times BE$, & utrinque ſubducendo $\overline{AC}^2$, erit

$$2BC \times \overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - AC;$$

& utrumque membrum dividendo per $2BC$, fiet

$$BE = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2BC}.$$

Invento ſegmento BE, invenies, ut nuper, in triangulo rectangulo ABE perpendicularem AE.

*Corollarium II.*

551. Hinc habetur dimenſio cujuſcunque trianguli, cujus tria latera ſint nota, licet aream habeat imperviam. Horum quippe Theorematum beneficio innoteſcit perpendicularis, etiamſi eam impedimenta loci non ſinant deſignari. Perpendicularis autem multiplicata per ſemiſſem lateris, producit aream trianguli; ut patet ex dictis.

## PROPOSITIO IV.

552. Theorema. *In omni parallelogrammo* ABCD *ſumma duorum quadra-*

*dratorum ex diagonalibus* AC, BD *æquatur summæ quatuor quadratorum ex lateribus* AB, AD, BC, CD; *hoc est*, Tab. XII. Fig. 320.

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2.$$

*Demonstratio.* Ab extremitatibus lateris AD demittantur perpendiculares AE, DF in latus oppositum BC. Constat BE = CF, & consequenter 2 BC + BE = 2BC × CF.

His positis, triangulum ABC dabit (n. 549.)

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BE.$$

Et (n. 546.) triangulum BCD dabit

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2BC \times CF.$$

Addantur simul hæ duæ æquationes, suppressis terminis æqualibus $-2BC \times BE$, $+2BC \times CF$, qui contrarietate signorum se mutuò destruunt, fiet

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2;$$

Et uni ex duobus $\overline{BC}^2$ substituitur $\overline{AD}^2$: erit

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$$

Quod erat &c.

PRO-

## PROPOSITIO V.

TAB. XII. Fig. 321. 553. Theorema. *Si quadrilaterum ABCD circulo ſit inſcriptum, factum duarum diagonalium AC, BD æquatur ſummæ factorum laterum oppoſitorum, nimirum,*

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

*Demonſtratio.* Fiat angulus BAP = angulo CAD: erit etiam angulus BAC = angulo DAP. His poſitis.

I. Triangula BAP, CAD erunt æquiangula, & ſimilia. Nam angulus BAP = angulo CAD per Conſtr., & angulus ABP = angulo ACD. Quare AB : AC :: BP : CD; & conſequenter (n. 379.)

$$AC \times BP = AB \times CD.$$

II. Duo triangula CAB, DAP ſunt pariter ſimilia. Nam præter angulum BAC = angulo DAP, erit etiam angulus ACB = angulo ADP.

Ergo $AC : AD :: BC : PD$;

atque adeo $AC \times PD = AD \times BC$.

Utriuſque æquationis membra invicem addantur: prodibit $AC \times BP + AC \times PD = AB \times CD + AD \times BC$, hoc eſt, quia $BP + PD = BD$,

$$AC \times BD = AB \times CD.$$

Quod erat &c.

## PROPOSITIO VI.

554. Theorema. *In quadrilatero* AB CD, *quod circulo ſit inſcriptum, ſi ducantur diagonales* AC, BD, *diagonalis* AC *aliam* BD *ſecabit in partes* BE, DE *proportionales factis* AB × BC, AD × DC *laterum huic diagonali adjacentium, nimirum*, TAB. XII. Fig. 321.

BE : DE : : AB × BC : AD × DC.

*Demonſtratio.* I. Triangula AEB, DEC ſunt ſimilia; nam angulus BAE = angulo CDE. Itaque

BE : CE : : AB : CD.

II. Triangula BEC, AED ſunt pariter ſimilia.

Ergò CE : DE : : BC : AD.

Harum itaque duarum proportionum terminis reſpectivè multiplicatis, ſuppreſſóque termino CE, qui invenitur in primo antecedente, & primo conſequente, prodibit BE : DE : : AB × BC : AD × CD. Quod erat &c.

GEO-