GEOMETRIÆ THEORICO-PRACTICÆ LIBER QUARTUS.

De Sectionibus Rectarum Geometricis.

ELEMENTUM I.

De Lineis sectis in ratione reciproca, ac de Mediis Proportionalibus.

DEFINITIONES.

555. *Duæ rectæ*, AB, DE *dicuntur sectæ in ratione reciproca, quando pars una* AC *primæ est ad unam partem* DF *secundæ, uti pars altera* FE *secundæ est ad partem alteram* CB *primæ.*

Tab. XIII. Fig. 322.

Vel, quando pars una AC *primæ est ad unam partem* DF *secundæ, uti integra secunda linea* DE *est ad primam* AB.

In primo casu, *ubi* AC : DF :: FE : CB, *dicuntur duæ rectæ* AB, DE *sectæ in partes reciprocas, sive reciprocè proportionales; ac proinde* $AC \times CB = DF \times FE$.

In secundo casu, *ubi* AC : DF :: DE : AB, *duæ rectæ* AB, DE *reciprocæ, seu recipro-*

reciprocè proportionales uni ſuarum partium; *ac proinde* AC × AB = DF × DE.

PROPOSITIO I.

556. Theorema. *Si in eodem circulo duæ chordæ* BCDE *ſe ſe mutuò ſecuerint in quovis puncto* A, *erunt earum ſegmenta reciprocè proportionalia, nimirum* AB : AE :: AD : AC; *ac proinde rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis unius, æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo.* Euclid. lib. 3. prop. 35. Tab. XIII. Fig. 323.

Demonſtratio. Ducantur chordæ BD, CE per extremitates earum, quæ ſe interſecant. Perſpicuum eſt ex dictis triangula BAD, EAC eſſe æquiangula, & ſimilia. Ergò AB : AE :: AD : AC; & conſequenter AB × AC = AE × AD. Quod erat &c.

Corollarium I.

557. Si duarum chordarum una DE ſit ſecta bifariam, ita ut AD = AE, analogia modò inventa AB : AE :: AD : AC transformari per ſubſtitutionem poterit in hanc, AB : AD :: AD : AC; & conſequenter tres lineæ AB : AD, AC erunt continuè proportionales; & ſemiſſis AD chordæ DE ſectæ in duas æquas partes, erit media proportionalis inter duo ſegmenta AB AC alterius chordæ.

Corol.

Corollarium II.

558. Si chorda BC per centrum circuli tranſeat, ſecetque aliam DE perpendiculariter, hanc quoque ſecabit bifariam; & conſequenter recta AD, quam jam nominavimus ordinatam circulo reſpectu diametri BC, cui eſt perpendicularis, erit media proportionalis, inter duas ejuſdem diametri partes AB, AC; atque adeo AD × AD, ſive $\overline{AD}^2$ = AB × AC.

Corollarium III.

559. Perſpicuum hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo à quovis puncto diametri, ipſi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam uſque, mediam eſſe proportionalem inter duo diametri ſegmenta, quæ à perpendiculari facta ſunt.

PROPOSITIO II.

560. *Si extra circulorum ſumatur punctum aliquod, ab eoque ducantur duæ ſecantes* AB, AE, *quæ à cava circuli peripheria terminentur in duobus punctis* B *&* E, *erunt.*

I. Secantes integræ AB, AE *reciprocè proportionales ſuis partibus* AC, AD *circulo externis, nimirum,* AB : AE :

Tab. AD : AC.

XII. *II. Rectangula comprehenſa ſub inte-*

Fig. *gris ſecantibus* AB, AE, *& ſuis par-*

324. *tibus*

bus exterioribus AC, AD, *erunt inter se æqualia; hoc est*, $AB \times AC = AE \times AD$. Euclid. lib. 3. prop. 36. corol. 1.

Demonstratio. Ducantur chordæ BD, CE, Triangula ADB, ACE erunt æquiangula, & consequenter similia propter angulum A utrique communem, & angulos E & B ad circumferentiam insistentes eidem arcui DC æquales. Ergò

I. $AB : AE :: AD : AC$.

II. $AB \times AC = AE \times AD$. Quod erat &c.

PROPOSITIO III.

561. Theorema. *Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò tangat: quod sub tota secante* AB, *& ejus parte exteriori* AC *comprehenditur, rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.* Euclid. lib. 3. prop. 36. TAB. XIII. Fig. 325.

Demonstratio. Nam, si recta AE, quæ in præced. figura secans erat, evaderet tangens, duo puncta E & D commiscerentur in unicum, quod erit punctum contactus, & fiet $AE = AD$. Quare præcedens proportio $AB : AE :: AD : AC$ in hanc transformabitur, $AB : AD :: AD : AC$; ac proinde $\overline{AD}^2 = AB \times AC$. Quod erat &c.

Corollarium I.

562. Hinc manifeſtum eſt, ſi à puncto quovis extra circulum aſſumpto plurimæ lineæ rectæ circulum ſecantes ducantur, rectangula comprehenſa ſub totis lineis, & partibus exterioribus eſſe omnia inter ſe æqualia.

Demonſtratio ſequitur ex Prop. 2., atque etiam ex prop. 3. Nam ducta tangente circulum, erunt quadrato tangentis æqualia ſingula illa rectangula; quare & inter ſe omnia æqualia erunt.

Corollarium II.

563. Conſtat etiam duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter ſe eſſe æquales. Nam ducta ſecante, erunt per præced. quadrata tangentium æqualia eidem rectangulo, ac proinde æqualia inter ſe, & propterea tangentes æquales.

Corollarium III.

564. Ex eodem Theoremate facilè demonſtrabis, ab eodem puncto extra circulum aſſumpto duci tantùm poſſe duas lineas, quæ circulum tangant. Similiter, ſi duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in convexam peripheriam incidant, & earum una circulum tangat, alteram quoque circulum tangere demonſtrabis.

Scholion.

Quoniam ex Propoſitione I. facillimè conſe-

consequitur demonstratio Theorematis in Trigonometria maximè necessarii, quodque operosiùs ex aliis principiis demonstrari solet, placet hoc loco illud subdere.

PROPOSITIO IV.

565. Theorema. *In omni triangulo rectilineo* A C B, *si à vertice* C *cujusvis anguli demittatur perpendicularis* CD *in basim, seu latus oppositum* A B, *productum, si opus fuerit, hæc proportio obtinebitur.*

Uti basis AB *est ad summam* AC + CB *duorum laterum, ita horum differentia* AC — CB *est ad differentiam* AD — DB (*fig.* 326.), *vel ad summam* AD + DB (*fig.* 327.) *duorum segmentorum baseos.* TAB. XII. Fig. 326. 327.

Demonstratio. Centro C, radio CB describatur circulus; producaturque AC, donec occurrat circumferentiæ. Ex n. 560. patet fore

$$AB : AE :: AG : AF.$$

Cum autem $CE = CB$, & $DF = DB$, erit

I. $AE = AC + CB$,
II. $AG = AC - CB$,
III. $AF = AD - BD$, ut in fig. 326.
vel $AF = AD + BD$, ut in fig. 327.

Substitutis itaque hisce valoribus in superiori analogia, erit $AB : AC + CB :: AC - CB : AD - BD$,
vel $AB : AC + CB :: AC - CB : AD + BD$. Quod erat &c.

Quanti sit usûs hoc Theorema, constabit in Trigonometria.

PROPOSITIO V.

566. Problema. *Duabus datis rectis lineis* ab, ac, *mediam proportionalem invenire.* Euclid. lib. 6. prop. 13.

Media proportionalis quæsita esse potest vel ordinata, vel chorda, vel tangens circuli.

TAB. XIII. Fig. 328. *I. Resolvendi modus.* Datæ rectæ *a b*, *a c*, quibus media invenienda est proportionalis, disponantur in directum secundùm lineam unicam rectam B C, super qua, tanquam diametro, describatur semicirculus; deinde ex puncto A, in quo junguntur, perpendicularis educatur A D ad circumferentiam. Dico hanc esse mediam proportionalem inter A B & A C, hoc est, inter datas lineas *ab*, *a c*.

Demonstratio patet ex Construct. & n. 559.

TAB. XIII. Fig. 329. *II. Resolvendi modus.* Super recta A B = *a b* describatur semicirculus; tum abscindatur A C = *a c*; & à puncto C excitetur perpendicularis C D, quæ circumferentiæ occurrat in D. Chorda D A est media proportionalis quæsita inter A B & A C, hoc est, inter *a b* & *a c*.

Demonstratio. Ducatur chorda D B. Triangula rectangula A D B, A C D sunt æquiangula, & similia. Ergo A B : A D : : A D : A C. Quod erat &c.

III. Re-

III. Resolvendi modus. Super eadem recta linea, initio facto à puncto A, accipiantur duæ partes AB, AC æquales datis lineis *ab*, *ac*; tum super earum differentia BC describatur circulus; ad quem, si à puncto A ducatur tangens AD, hæc erit media proportionalis inter AB & AC. TAB. XIII. Fig. 330.

Demonstratio pendet ex n. 561.

Corollarium.

567. Hinc in omni triangulo rectangulo ADB, si ab angulo recto in basim AB demittatur perpendicularis DC, erit TAB. XIII. Fig. 329.

I. Perpendicularis DC media proportionalis inter baseos segmenta AC, CB.

II. Latus minus AD medium proportionale inter basim AB, & segmentum adjacens AC.

III. Latus majus DB medium proportionale inter basim AB, & segmentum adjacens BC.

PROPOSITIO VI.

568. Problema. *Datis tribus primis rectis* AC, AD, AB *progressionis geometricæ linearum, invenire reliquas in infinitum.* TAB. XIII. Fig. 331.

Resolutio. Tres datæ lineæ continuè proportionales ita disponantur, ut prima sit AC, secunda efficiens angulum quemvis in A sit AD, tertia primæ superimposita sit AB. Producantur AD, AB indefinitè in X & Z; tum diametro AB describaſcribatur ſemicirculus; & à puncto C educatur perpendicularis CD occurrens circulo in D, à quo rurſum excitetur perpendicularis DB, quæ occurret rectæ A Z in B, & hinc perpendicularis altera BE occurrens rectæ AX in E; atque ita porro per alternas vices. Dico fore

∺ A C. AD. AB. A E. AF. A G. A H &c.

Demonſtratio. Per Conſtr. triangula ADB, ABE, AEF &c. ſunt rectangula, & habent angulum communem in A, & conſequenter æquiangula ſunt, & ſimilia, & eorum latera homologa proportionalia. Ergò.

AC : AD : : AD : AB
AD : AB : : AB : AE
AB : AE : : AE : AF &c.

Quod erat demonſtrandum.

PRAXIS GEOMETRICA

ELEMENTI I. LIB. IV.

Problema I.

569. PARALLELOGRAMMO *æquale quadratum conſtruere.*

Reſolutio. Inveniatur media proportionalis inter baſim, & altitudinem parallelogrammi; hæc erit latus quæſiti.

Problema II.

570. *Triangulo æquale quadratum conſtruere.*

Reſolutio. Inveniatur media proportionationalis inter baſim, & ſemiſſem altitudinis, vel inter ſemiſſem baſeos, & altitudinem; hæc erit latus quadrati quæſiti.

Problema III.

571. *Cuicunque figuræ rectilineæ æquale quadratum conſtruere.*

Reſolutio. Cùm omnis figura rectilinea reduci poſſit in triangulum, quod per Probl. præcedens transformatur in quadratum; hinc patet reſolutio Problematis.

Problema IV.

572. *Triangulum* ABC *in aliud transformare, quod ſit ſimile dato triangulo* MNO. TAB. XIII. Fig. 332. 333.

Reſolutio. Ex baſi MO trianguli MNO aſſumatur pars ME æqualis baſi AC trianguli ABC, quod transformandum proponitur; tum in latere MN trianguli MNO ſeligatur punctum D, cujus altitudo ſupra latus alterum MO æquetur altitudini BK alterius trianguli ABC; ducatúrque DE. Conſtat ex dictis triangulum MDE æquale eſſe triangulo ABC; nam utriuſque baſes, & altitudines per conſtr. æquantur.

Jam verò, ſi recta DE ſit parallela rectæ NO, triangulum MDE erit & æquale triangulo ABC, & ſimile triangulo MNO, & conſequenter ſatisfaciet problemati.

Sin autem DE non ſit parallela rectæ NO, à puncto D ducatur DF parallela eidem lateri NO; tum fiat MG media proportionalis inter MF & ME; ac demum ducatur GI parallela lateri NO. Dico triangulum MIG & eſſe ſimile triangulo MNO, & æquale triangulo MDE, ſeu ABC.

Demonſtratio. Quoniam rectæ DF, IG ſunt parallelæ eidem NO, erunt inter ſe parallelæ; ac proinde triangula MDF; MIG ſunt ſimilia. Ergo (n. 499) MDF : MIG :: $\overline{MF}^2 : \overline{MG}^2$. Rurſum, quia per Conſtr. MF : MG :: MG : ME, erit $\overline{MF}^2 : \overline{MG}^2$ :: MF : ME. Atqui (n. 375) MF : ME :: MDF : MDE. Ergò MDF : MIG :: MDF : MDE; & conſequenter duo triangula MIG, MDE ſunt æqualia. Quare, cùm triangulum MIG ſit ſimile triangulo MNO, & præterea æquale triangulo MDE = ABC, perſpicuum eſt triangulum MIG ſatisfacere problemati.

Corollarium.

573. Cùm in ſuperioribus Elementis demonſtratum jam ſit, figuram quamlibet rectilineam reduci poſſe in triangulum, & per præced. Probl. triangulum quodvis transformetur in aliud ſimile triangulo dato: hinc patet figuram quam-

quamvis rectilineam transformari posse in triangulum simile dato triangulo.

Problema V.

574. *Datum triangulum* X *transformare in polygonum simile dato polygono* ABCDE. Tab. XIII. Fig. 334.

Resolutio. Juxta methodum explicatam n. 320. polygonum ABCDE transformetur in triangulum ABF, quod & latus AB, & angulum BAF commune habeat cum eodem, quod quæritur, polygono; dein per præced. probl. triangulum datum X transformetur in aliud triangulum AHG, simile triangulo ABF. Ductis insuper in polygono ABCDE diagonalibus AC, AD, à puncto H ducatur HI parallela lateri BC, & à puncto I parallela IK lateri CD, denique à puncto K parallela KL lateri DE. Patet (n. 447.) polygonum AHIKL simile esse polygono proposito ABCDE; Dico præterea æquari triangulo AHC=X.

Demonstratio. Cùm enim duo polygona ABCDE, AHIKL sint similia, erit (n. 498.)

$$AHKIL : ABCDE :: \overline{AH}^2 : \overline{AB}^2.$$

Atqui triangula AHG, ABF, cum sint pariter similia, dabunt (n. 499.) $\overline{AH}^2 : \overline{AB}^2 :: AHG : ABF.$

Ergo AHIKL : ABCDE :: AHG : ABF. Cum autem per Conſtr. ABCDE = ABF, erit etiam AHIKL = AHG = X. Quod erat &c.

Corollarium.

575. Cùm omnes figuræ rectilineæ transformari poſſint in triangula, & triangulum quodvis in polygonum ſimile dato polygono : hinc patet figuram quamvis rectilineam converti poſſe in polygonum dato ſimile.

ELEMENTUM II.

De Lineis ſectis extremâ, & mediâ ratione, ac de Pentagonis, & Decagonis regularibus.

DEFINITIO.

576. *Si linea recta quævis* AB *ita dividatur in* C *inæqualiter, ut ſit, quemadmodum tota* AB *ad majus ſegmentum* AC, *ita* AC *majus ſegmentum ad* CB *minus ſegmentum, dicetur diviſa ſecundùm extremam, & mediam rationem.*

TAB. XIII. Fig. 335.

Habet autem, inquit Clavius in Scholio prop. 30. lib. 6., admiranda hæc ſectio lineæ extremâ & mediâ ratione inſignes utilitates, proprietateſque, ut in Libris Stereometriæ manifeſtum erit, ut non ſine cauſâ à pleriſque Geometris linea ita diviſa divinam quodammòdo dicatur habere proportionem.

PRO-

PROPOSITIO I.

577. Problema. *Propositam rectam lineam* AB *extrema, ac media ratione secare.* Euclid. lib. 6. prop. 30., & lib. 2. prop. 11. TAB. XIII. Fig. 335.

Resolutio. Ab extremitate B rectæ AB excitetur perpendicularis BD æqualis semissi datæ rectæ AB; ducaturque DA; tum centro D, intervallo DB describatur circulus, qui rectam DA secabit in E. Fiat denique $AC = AE$: Dico rectam AB sectam esse extrema, & media ratione in C: hoc est, $AB : AC :: AC : CB$.

Demonstratio. Producatur AD, donec occurrat circulo in F, erit (n. 561. $AF \times AE = \overline{AB}^2$; atque hinc per regulas proportionum

$$AF : AB :: AB : AE.$$

Cum autem per Constr. sit $AE = AC$, fiet

$$AF : AB :: AB : AC.$$

In omni autem proportione geometrica ex dictis antecedens est ad suum consequens, uti differentia antecedentium est ad differentiam consequentium. Quare $AB : AC :: AF - AB : AB - AC$. Atqui $AB - AC = CB$; & $AB = EF$; adeoque $AF - AB = AF - EF = AE = AC$; substitutis itaque hisce valoribus in ultima analogia, fiet $AB : AC :: AC : CB$. Quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO II.

578. Theorema. *Si duorum angulorum quilibet* B *&* D *ad baſim trianguli iſoſcelis duplùs ſit anguli* A *ad verticem, ſecetúrque bifariam angulus* D *ad baſim per rectam* DC, *hæc ſecabit extremâ, & mediâ ratione latus oppoſitum* AB; *nimirum, fiet*

AB : AC : : AC : CB.

TAB. XIII. Fig. 336. *Demonſtratio.* Duo triangula BAD, BCD ſunt ſimilia, quippe quæ habent angulum communem B, per Conſtr. angulus BDC = A. Quia verò latera AB, AD trianguli iſoſcelis BAD ſunt æqualia, erunt quoque æqualia latera DB, DC alterius trianguli ſimilis BDC. Rurſum, quia in eodem trianguli ACD anguli A & CDA per Conſtr. ſunt æquales, etiam latera DC, AC iis oppoſita æqualia erunt. Itaque DB = DC = AC.

Jam verò propter ſimilitudinem triangulorum BAD, BDC, erit

AB : DB : : DB : CB;

Subſtitutáque AC loco ipſius BD, erit denique AB : AC : : AC : CB. Quod erat &c.

Scholion.

TAB. XIII. Fig. 336. *In hujus autem Theorematis demonſtratione animadvertere juvat baſim* BD *trianguli iſoſcelis* BAD, *cujus anguli ad baſim dupli ſunt anguli ad verticem, æquari majori ſegmento* AC *lateris* AB *ſecti media,*

media, & extrema ratione per rectam D C, quæ bifariam dividit angulum ad basim.

PROPOSITIO III.

579. Problema. *Isosceles triangulum* ABD *construere, quod habeat utrumque eorum, qui ad basim sunt, angulorum, duplum reliqui ad verticem.* Euclid. lib. 4. prop. 10.

Resolutio. Dividatur recta A B extremâ, & mediâ ratione in C; tum super minori segmento B C, tanquam basi, construatur triangulum isosceles ope duarum sectionum circulorum æqualium sub eodem intervallo segmenti majoris A C; jungaturque A D. Dico factum. Fig. 336.

Demonstratio. Nam externus angulus BCD duplus est interni A; & per Constr. BCD=CBD. Rursum, quia per hyp. AB:AC::AC:CB, hoc est, per Constructionem AB:BD::BD:CB, duo triangula BAD, BCD circa angulum communem B habebunt latera proportionalia, & consequenter similia erunt, & æquiangula. Ergò angulus B D A æqualis erit angulo BCD=B. Triangulum itaque B A D & isosceles est &c. Quod erat &c.

Corollarium.

580. Si à puncto A, intervallo, AB, vel AD ejusdem trianguli isoscelis describatur circulus, basis BD erit latus deca- Tab. XIII. Fig. 337.

decagoni circulo inſcripti. Nam propter naturam hujusmodi trianguli iſoſcelis BAD, utervis angulorum B & D ad baſim valet duas quintas duorum rectorum, hoc eſt, gradus 72; & conſequenter angulus A erit una quinta duorum rectorum, hoc eſt, graduum 36. Quare angulus A erit angulus ad centrum decagoni regularis circulo inſcripti. Nam, ſi 360 dividatur per 10 rodibit 36.

PROPOSITIO IV.

Fig. 337. 581. Problema. *Decagonum regulare circulo inſcribere.*

Reſolutio. Radius AB ſecetur extrema, & media ratione in C. Segmentum majus AC erit latus decagoni circulo inſcripti.

Demonſtratio conſtat ex Corollario præced.

PROPOSITIO V.

582. Theorema. *Si recta linea componatur ex latere hexagoni, & latere decagoni inſcripti in eodem circulo, tota compoſita dividetur extrema, & media ratione in eo puncto, in quo duæ rectæ ſe mutuò jungunt.*

TAB. XIII. Fig. 338. Eſto CB latus decagoni inſcripti circulo A, jungatúrque in directum linea CD æqualis radio AC, hoc eſt, lateri haxagoni. Dico totam compoſitam BD ſectam fore extrema, & media ratione in puncto C.

Demon-

Demonstratio. Jungatur D A. Triangula BDA, BAC sunt inter se similia; habent quippe angulum communem in B, & præterea angulum BDA æqualem angulo CAB; nam & propter triangulum isosceles CDA, angulus externus BCA est duplus interni BDA, & per n. 580. idem angulus BCA est duplus anguli CAB; ergò BDA = CAD. Quare DB:BA :: BA:BC; & substituendo CD loco ipsius AB, fiet DB : CD :: CD : DC. Quod erat &c.

PROPOSITIO VI.

583. Theorema. *Quadratum ex latere pentagoni inscripti circulo æquatur summæ quadratorum ex latere hexagoni, & ex latere decagoni inscripti eidem circulo.*

Esto AB latus pentagoni inscripti circulo; seceturque bifariam in puncto C arcus AB. Chorda AC, sive CB erit latus decagoni, & radius DB latus hexagoni. Dico $\overline{AB}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{AC}^2$.

Demonstratio. Arcus AC secetur bifariam in F per radium DF; ducatúrque EC. Triangulum AEC, cum sit isosceles, simile erit triangulo ACB; nam angulus CAB ad basim utrique communis est. Ergò AB:AC :: AC:AE; ac proinde $\overline{AC}^2 = AB \times AE$. TAB. XIII. Fig. 339.

Jam

Jam verò angulus ad centrum ADB pentagoni est 72 graduum; ergò angulorum quilibet ABD & BAD erit graduum 54; qui gradus sunt tres quartæ partes anguli ad centrum.

Cum autem angulus FDB habeat pro mensura arcum FB, continebit quoque tres quartas partes ejusdem anguli ad centrum ADB; ergò duo triangula ADB, DEB sunt similia; hinc AB : BD :: BD : BE; adeoque $\overline{DB}^2 = AB \times BE$.

Atqui $AB \times AE + AB \times BE = \overline{AB}^2$.

Ergò $\overline{AB}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{AC}^2$. Quod erat &c.

PROPOSITIO VII.

584. Problema. *In triangulo rectangulo* ACF *exhibere tria latera* AC, CF, AF *hexagoni, decagoni, & pentagoni regularis, quæ eidem circulo inscribi possint.*

Resolutio. Radius AC sit perpendicularis diametro BD; seceturque radius CD bifariam in E, à quo, tanquam centro, intervallo EA describatur arcus AF; ducatúrque chorda AF. Dico factum.

Tab. XIII. Fig. 340.

Demonstratio. I. Ostensum jam est radium AC esse latus hexagoni regularis eidem circulo inscripti. Quod erat primum.

II. Quoniam $CE = \frac{CD}{2} = \frac{AC}{2}$, si fiat $EG = CE$, erit hypothenusæ residuum

duum AG (n. 577.) æquale majori ſegmento AH radii AC ſecti extrema, & media ratione in H. Ergò latus decagoni regularis, quod inſcribi poſſit circulo ABID æquatur ipſi AG; cum autem $CE = EG$; ſi fiat $EF = AE$, erit $CF = AG$; & conſequenter CF erit latus decagoni eidem circulo inſcripti. Quod erat alterum.

III. In triangulo rectangulo ACF quadratum hypotenuſæ AF æquatur ſummæ quadratorum ex latere AC hexagoni, & ex latere FC decagoni. Ergo per præcedens hypotenuſa AF eſt latus pentagoni regularis eidem circulo inſcripti. Quod erat reliquum.

APPENDIX.

De mirabili natura lineæ cujusdam inflexæ, quam quadratricem Dinoſtratis vocant, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium inſcribitur, & circulus quadratur, & alia ſcitu jucundiſſima perficiuntur.

585. Docuimus alibi nondum repertam fuiſſe artem, quâ ſolo circino, & regulâ inſcribantur circulo figuræ ordinatæ laterum 7, 9, 11, 13, 17 &c.; cùm illa inſcriptio figurarum dependeat à diviſione circumferentiæ in partes datas, quæ etiamnum deſideratur. Licebit tamen ope lineæ cujusdam inflexæ, quam

quam quadratricem Dinoſtratis vocant, angulos, & circumferentias circulorum dividere in quotlibet partes æquales.

PROPOSITIO VIII.

586. Problema. *Quadratricem deſcribere.*

Reſolutio. Deſcribatur quadrans cir-
TAB. culi ABT; arcus AT, & diameter AB
XIII. dividantur in totidem partes æquales;
Fig. quod facilè obtinebitur, ſi & arcus AT
341. & diameter AB ſecetur primùm bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit. Quò autem plures extiterint diviſiones, eò accuratiùs quadratrix linea deſcribetur. Nos ad confuſionem vitandam ſecuimus tam arcum AT, quàm radium AB in 16 partes æquales.

Deinde ex centro B ad ſingula diviſionum puncta quadrantis AT ducantur radii BC, BD, BE, BF &c., & per puncta G, H, I, K totidem parallelæ ſemidiametro BT, quæ occurrent radiis in punctis L, M, N, O &c., per quæ quadratrix linea AS ducenda eſt, quæ exactior evadet, ſi quadrans circuli, & ſemidiameter dividantur in multò majorem numerum partium æqualium. Hâc enim ratione fiet, ut puncta L, M, N, O &c. ita proximè ad ſe invicem accedant, ut ſine errore ſenſibili per eadem puncta linea æquabiliter ſinuoſa progrediatur.

Corolla-

Corollarium.

587. Ex genesi hujus curvæ patet, quòd, si ducantur parallelæ HM & KO, occurrentes curvæ in punctis M & O, per quæ ducantur radii BD & BF, patet, inquam, quòd arcus AD ad arcum DF habebit eandem rationem, quam habet linea AH ad lineam HK.

PROPOSITIO IX.

588. Problema. *Angulum rectilineum OPQ trifariam dividere.* TAB. XIII. Fig. 342. 343.

Resolutio. Esto quadratrix AD, & circuli quadrans AC. Fiat angulus ABE æqualis dato; & à puncto F, ubi radius BE secat curvam AD, demittatur perpendicularis FG ad semidiametrum AB, cujus segmentum AG dividatur in tres partes æquales in punctis K & H, à quibus ducantur KL, HI parallelæ ipsi FG; quæ secent curvam in punctis L & I, per quæ à centro B transeant radii BLM, BIN, qui divident arcum AE, & angulum ABE in tres partes æquales.

Demonstratio. Nam per constructionem curvæ AK : AG :: AM : AE; est autem AK tertia pars ipsius AG; erit itaque arcus AM tertia pars arcûs AE. Quod erat &c.

Eâdem methodo angulus datus dividi poterit in quotvis partes æquales.

Sin autem trifariam dividendus pro-

ponatur angulus obtuſus RST, ſecetur
TAB. primò bifariam, ut habeatur acutus R
XII. SV, quem ſupponere liceat æqualem
Fig. angulo ABE; tum, ùt ante, dividatur
343. tur acutus trifariam in M & N; ſumatúrque
344. túrque arcus AN, qui, cùm ſit duplus ſextæ partis arcus RT, erit conſequenter tertia pars ejusdem arcûs RT.

PROPOSITIO X.

589. Problema. *Circulo nonagonum, hoc eſt, ſiguram novem laterum regularem inſcribere.*

Reſolutio. Radius circuli ſexies circumducatur peripheriæ, ut habeantur puncta B, C, D, E, F, G, quæ eandem divident in ſex partes æquales. Jam verò à primo puncto ad tertium, á tertio ad quintum, à quinto ad primum ducantur rectæ, quæ triangulum æquilaterum dabunt BDF, quod totam circumferentiam dividet in tres partes æquales; denique per Probl. præced. arcus quilibet trifariam ſecetur, & habebitur nona pars circumferentiæ, cujus chorda erit latus nonagoni.

PROPOSITIO XI.

590. *Circulo heptagonum inſcribere.*

Reſolutio. Quadrans circumferentiæ circuli dividatur in ſeptem partes æquales; harum partium quælibet erit vigeſima octava pars totius circumferentiæ. Acci-

Accipiatur jam arcus æqualis quatuor ſeptimis quadrantis circuli; is erit æqualis ſeptimæ parti circumferentiæ circuli; & conſequenter chorda hujus arcûs erit latus heptagoni.

PROPOSITIO XII.

591. Problema. *Circulo undecagonum inſcribere.*

Reſolutio. Quadrans circuli dividatur in undecim partes æquales. Chorda arcûs, qui quatuor undecimas quadrantis circuli contineat, erit latus quæſitum undecagoni.

Scholion.

592. Curva AFD dicitur quadratrix propter inſignem ipſius proprietatem, qua mechanica circuli quadratura obtinetur. Nam Pappus, Clavius, aliíque complures Geometræ demonſtrârunt ſemidiametrum BC eſſe mediam proportionalem inter baſim BD quadratricis, & circumferentiam AEC quadrantis circuli; ita ut BD : BC :: BC : AEC. Porrò deſcriptio lineæ quadratricis, inquit Clavius lib. 6. elem., geometrica jure appellari poteſt, quemadmodum & conicarum ſectionum deſcriptiones, quæ per puncta fiunt, ùt ab Apollonio traditur, geometricæ dicuntur; cùm tamen magis errori ſint ob-

obnoxiæ , quàm deſcriptio quadratricis , propter inventionem tot linearum mediarum proportionalium , quæ ad earum deſcriptiones ſunt neceſſariæ , quibus in quadratricis deſcriptione opus non eſt.

iptio quadratri-
m tot linearum
ium, quæ ad
nt necessariæ,
scriptione opus