GEOMETRIÆ ELEMENTARIS THEORICO-PRACTICÆ

LIBER PRIMUS.

GEOMETRIÆ
PROLEGOMENA.

1. GEOMETRIA eſt ſcientia extenſorum, quæ non modò magnitudinem, ſeu quantitatem in ſeipſa conſiderat, ſed illius etiam rationem cum alia quavis ejusdem generis magnitudine.

2. Duplex Geometria eſt, Theorica, & Practica. Illa quantitatis continuæ, quam unô nomine Geometræ magnitudinem appellant, affectiones abſtractè, & generatim conſiderat, ac demonſtrat, & cum Arithmetica, ſive numerica, ſive ſpecioſa, Matheſeos univerſæ baſis eſt, ac fundamentum. Ab hac, ejúsque elementis, veluti fonte uberrimo, illa, quam practicam vocant, Geometria profluxit: nimirum omnis latitudinum, longitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, inſularum dimenſio, atque diviſio, omnis in cœlo per inſtrumenta ſyderum obſervatio, omnis machinarum vis, & ponderum ratio; ac denique quidquid uſpiam terrarum vaſtô licet ambitu continetur, mentis noſtræ oculis, munere, ac beneficiô Geometriæ ſubjectum conſpicimus.

3. Nobilitas verò, atque præſtantia hujus ſcientiæ ex certitudine demonſtrationum, quibus utitur, facilè apparet; id quod aliis ſcientiis vix tribuere poſſumus. Omnis autem à

Geometris adhibita demonſtrandi ratio dividitur in Problema, ac Theorema.

4. Problema vocant eam demonſtrationem, quæ jubet, ac docet aliquid conſtruere: puta, ſi quis conetur demonſtrare, quâ ratione data recta linea finita bifariam ſecetur.

5. Theorema autem appellant eam demonſtrationem, quæ ſolùm affectionem aliquam, proprietatémque unius, vel plurium ſimul quantitatum perſcrutatur; utì, ſi quis demonſtret duarum rectarum ſe mutuò ſecantium, angulos ad verticem oppoſitos æquales eſſe, vocabitur hæc demonſtratio theorema, quia non jubet, aut docet angulum, ſive quidpiam aliud conſtruere, ſed contemplatur tantummodò hanc angulorum ad verticem affectionem.

6. In omni itaque problemate duo potiſſimùm ſunt conſideranda, Conſtructio illius, quod proponitur, & Demonſtratio, quâ oſtenditur, conſtructionem rectè eſſe inſtitutam. Quamvis autem theoremata conſtructionem non jubeant, nec ſibi proponant, tamen, ut demonſtretur ea, quæ affirmatur, quantitatis proprietas, ſæpenumerò conſtruendum eſt, atque efficiendum priùs aliquid, ut via demonſtrationi aperiatur, ſicuti manifeſtum erit in ſequentibus. Enim verò pauca admodùm ſunt theoremata, quæ nullam requirant conſtructionem.

7. Cæterùm tam problema, quàm theorema dici conſuevit apud Geometras Propoſitio, propterea quòd utrumque nobis aliquid proponit. Id ergò omne, quod in quæſtionem

nem cadit, dicitur propositio. Geometræ autem propositionum alias dixêre theoremata, alias problemata. Problematum demonstrationes concluduntur his ferè verbis: *Quod faciendum erat*; theorematum verò hisce: *Quod erat demonstrandum*; habitâ nimirum ratione finis utriusque.

8. Quoniam verò ad demonstrationes problematum, ac theorematum requiruntur interdum alia quædam theoremata, vel problemata minùs principalia, ut faciliùs demonstrari possint ea, de quibus præcipuè agitur: idcirco à Geometris illa vocantur Lemmata, propterea quòd solùm assumuntur ad alias demonstrationes, non autem de illis præcipua disputatio instituatur, quemadmodùm de aliis. Itaque Lemma dici potest demonstratio, seu constructio illius, quod ad demonstrationem alicujus theorematis, vel problematis principalis assumitur, ut demonstratio expeditior fiat, & brevior.

9. Cùm autem omnis, quæ ratione quâdam, ac methodô traditur, demonstrandi forma ex assumptis, & concessis quibusdam principiis ad alias ignotas, abstrusásque veritates progrediatur, quod proprium est munus, atque officium disciplinarum omnium; habebit utique & Geometria principia sua, quibus positis problemata, ac theoremata confirmet. Horum autem tria sunt genera: Definitiones, Postulata, & Axiomata.

10. Definitiones vocabula artis explicant, ne in ipsa tractatione fiat, ut ambiguitate no-

minum, aut obſcuritate circumventi, in paralogiſmos incidamus.

11. Poſtulatum eſt, quod facilè fieri poſſe manifeſtum eſt.

12. Axiomata, ſeu communes animi notiones, quas præclarè Tullius Pronunciata, ſeu Effata vocat, dicuntur veritates illæ, quæ non ſolùm in ſcientia propoſita, ſed etiam in omnibus aliis ita manifeſtæ ſunt, ut ab eis nullâ ratione diſſentire queat is, qui ipſa vocabula rectè perceperit.

Scholion.

Porrò in hujuscemodi principiis tradendis hic ordo ſervabitur, ut in hoc primo Geometriæ aditu proponantur principia toti ſcientiæ communia; in aliis autem elementorum libris ea exponantur principia, quæ propriè, & peculiari quâdam ratione ad materiam illorum ſubjectam videntur ſpectare.

DEFINITIONES.

13. Tria ſunt, quæ menſurandis corporibus adhibentur, dimenſionum genera: Longitudo, Latitudo, & Profunditas.

14. *Longitudo, quæ mente concipiatur veluti præciſa à latitudine, & profunditate, dicitur linea.*

Scholion.

Cùm lineas audis, non eas ſolùm intelligas oportet, quæ atramento in charta, aut alia ratione deſcribuntur in tabula, ſed eas præſertim, quæ rebus inſunt: hoc eſt, omnium hujus univer-

universi superficierum, ac corporum aspectabilium in longum, latum, ac profundum dimensiones.

15. *Longitudo, & latitudo, quæ absque profunditate cogitentur, vocari solent Superficies.*

16. *Longitudo, latitudo, & profunditas simul considerata vocantur Corpus, seu solidum.*

Scholion.

Quamvis corpus omne tribus dimensionibus constet, nec una à reliquis sejungi possit: tamen partim necessitate, partim utilitate ducimur, ut unam absque reliquis consideremus. Nam & limitatio intellectûs facit, ut, quas unicâ cogitatione complecti non potest corporum dimensiones, saltem singulas quasi per gradus cognoscat; atque hinc per abstractionem mens humana divellat, quæ nexu indivulsô naturæ conjunxit: & utilitatem hujus abstractionis casus innumeri persuadent, in quibus unam dimensionem, neglectis cæteris, cognoscere jubemur, puta, altitudinem turris sine latitudine, & profunditate ipsius; latitudinem fluminis absque longitudine, & profunditate ejusdem.

17. *Punctum est signum in magnitudine individuum.* Hoc est, quod dividi ne cogitatione quidem potest.

18. Cave autem putes punctum partem lineæ saltem esse, cujus præcisè terminus existit. Quid sit terminus lineæ, mente assequeris, etiamsi hujus exemplum in rebus materialibus reperire nullum possis; nisi fortè velis, inquit Clavius, extremitatem alicujus acûs acu-

tiſſimæ ſimilitudinem puncti exprimere; quod quidem verum non eſt, quoniam ea extremitas dividi poteſt, & ſecari infinitè, punctum verò individuum debet exiſtimari.

19. Hæc eſt Euclidis, & Geometrarum veterum notio. Cùm autem ad geometricas demonſtrationes vel minimè neceſſaria ſit idea puncti planè individui, vel interdum alia aliis majora puncta admittere oporteat, aut ſaltem plura diverſorum ordinum fateri, utì deinceps demonſtrabimus, ac præſertim in calculo infiniteſimali: hinc factum eſt, ut recentiores Geometræ duplicem invexerint puncti mathematici notionem, alteram puncti relativi, alteram abſoluti.

Punctum Relativum dicitur ea portio materiæ, quæ, quamvis certam, & determinatam habeat magnitudinem, tamen, ſi cum alia magnitudine comparetur, perinde accipi poteſt, ac ſi omni prorſus extenſione careret. Sic Aſtronomi terram inſtar puncti conſiderant, reſpectu immenſæ cœlorum, ac fixarum diſtantiæ; pariterque in Gnomonica, diſtantia, quam habet ſuperficies terræ à ſuo centro, pro nihilo reputatur, ſi cum eâ, quam ſol à centro terræ obtinet, diſtantiâ comparetur.

Punctum Abſolutum vocant quantitatem quavis datâ minorem, ſeu, ùt aliis placet, *infinitè parvam, vel* ùt Newtono, *evaneſcentem.* Quantitates autem infinitè parvas, aut evaneſcentes, & quidem diverſorum ordinum pro nihilo habendas eſſe in multis demonſtrationibus tanquam axioma poſuerunt Euclides, & Archimedes

medes, ut progreſſu ipsô conſtabit; atque hinc Bonaventura Cavalerius indiviſibilium methodum Geometriæ accommodavit. Hæc autem quantitatum indiviſibilium hypotheſis cum durior; minúſque geometrica Newtono videretur, loco indiviſibilium evaneſcentia diviſibilia ſubſtituit, ùt alibi fuſiùs exponemus.

Scholion.

In iis verò, quæ mox tradentur, demonſtrationibus geometricis, niſi præmoneam, non aliam, quàm Euclidæam notionem puncti uſurpabo, vel cum Recentioribus quantitatem evaneſcentem.

Corollarium.

Tres igitur dimenſiones habet corpus, ſuperficies duas, linea unam, punctum vel nullam abſolutè, vel nullam reſpectivè.

Scholion.

20. *Magni refert, ut quam antiqui, & recentiores Geometræ excogitârunt harum trium dimenſionum geneſin, Tirones multò ante concipiant; quippe quæ uſum habet inſignem in ea Geometriæ parte, quam tantoperè Recentiores excoluerunt. Itaque Euclidis interpretes, aliique, ut nobis inculcent veram lineæ notionem, imaginantur punctum jam deſcriptum n.* 17. *&* 18. *è loco in locum moveri. Cùm enim punctum ſit prorſus individuum, relinquetur ex iſto motu imaginario veſtigium quoddam longum omnis latitudinis expers. Hinc factum eſt, ut alii dixerint lineam nihil eſſe aliud, quàm puncti*

fluxum, & punctum omnis magnitudinis quasi principium esse, sicut unitas est numeri. Similiter monent iidem, ut intelligamus lineam aliquam in transversum moveri; vestigium enim relictum ex isto motu erit quidem longum propter longitudinem lineæ, latum quoque propter motum, qui in transversum est factus, nullâ verò ratione profundum esse poterit, cùm linea ipsum describens omni careat profunditate. Quare superficies dicetur, quam ex fluxu lineæ generari imaginabimur, ejúsque extremitates esse lineas, quemadmodùm lineæ termini sunt puncta. Simillima prorsus est solidi genesis ex fluxu superficiei.

21. *Omnis quantitas iisdem elementis constat, quibus generari concipitur. Cavalerius quidem hoc primum posuerat suæ methodi indivisibilium veluti decretum, lineas nempe ex infinitis punctis constare, superficies ex infinitis lineis, & solida ex infinitis superficiebus; deinde indivisibilia illa elementa, totámque eorum summam comparabat in unâ magnitudine cum singulis elementis, eorúmque summâ in alia magnitudine, ut sic duarum magnitudinum rationem determinaret. Nevvtonus verò, ut methodi indivisibilium brevitatem assequeretur, tutiùs tamen, & accuratiùs procederet, quantitates mathematicas considerat, non ut ex partibus quàm minimis constantes, sed ut motu continuò descriptas; nimirum lineas cogitat describi, ac describendo generari, non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum, superficies per motum linearum,*

nearum, solida per motum superficierum, angulos per rotationem laterum, & sic in cæteris. Quare has fluxiones infinitè parvas, seu evanescentes, vocat ille totidem quantitatum elementa respectivè; atque hinc methodo indivisibilium substituit Nevvtonus fluxionum methodum, de qua suo loco dicendum multò accuratiùs.

22. *Recta linea est omnium brevissima, quæ inter duo puncta duci possit.* Si namque punctum rectà fluere concipiatur per brevissimum spatium, ita ut neque in hanc partem, neque in illam deflectat, dicetur linea illa descripta recta, quæ dici etiam solet Distantia ab uno puncto ad aliud.

Corollarium I.

23. Ab uno puncto ad aliud, sicuti unica via est, quæ sit omnium brevissima, ita & unica linea recta duci potest.

Corollarium II.

24. Datis duobus punctis, determinatur positio lineæ rectæ; hoc est, si directionem rectæ lineæ determinare oporteat, satis erit duo ejusdem rectæ puncta invenire.

Corollarium III.

25. Duæ rectæ in unico puncto se mutuò intersecant. Nam si in duobus punctis se se intersecarent, haberent ambæ eandem positionem per Corol. II., atque in unicam lineam commiscerentur: quod esset contra hypothesin.

Corollarium IV.

76. Duæ rectæ lineæ non habent unum, &

idem ſegmentum commune; quod etiam ex notione lineæ rectæ per ſe conſequitur. Cùm enim linea recta directô ſemper itinere, nullam in partem deflectendo producatur, fieri nullà ratione poteſt, ut duæ lineæ rectæ habeant unam partem, quamvis minimam, communem, præter unicum punctum, in quo ſe mutuò interſecant.

Corollarium V.

27. Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt. Ut enim duæ rectæ AB, AC ſpatium comprehendant, ambæ diſcedant oportet ab eodem puncto A, &
TAB. I. Fig. I. coëant in idem punctum B, ſive C, quin uſpiam commiſceantur; quod fieri non poteſt ex Corol. II. Quare, ut ſuperficies, ſpatiúmque quodvis rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis *ab*, *ac*, tertia quædam linea *bc* adjungenda eſt; ita enim conficietur ſpatium triangulare *abc*, ſeu figurarum rectilinearum prima.

Corollarium VI.

28. Si tres rectæ lineæ *ab*, *bc*, *ac*, claudant ſpatium, earum duæ quælibet *ab*, *bc*, ſimul ſumptæ, tertiâ *ac* longiores, ſeu majores erunt. *Euclid. lib.* I.
Fig. I. *prop.* 20.

Cùm enim linea *ac* recta ſit, erit omnium breviſſima à puncto *a* ad punctum *c*. Hujus Corollarii uſus erit frequens deinceps.

29. *Linea curva dicitur ea, quæ non est omnium brevissima, quæ inter duo puncta duci possint.*

Difformium harum linearum numerus est prope infinitus, quarum genesin ex fluxu puncti non est opus hìc recensere.

30. *Linea mixta est partim curva, partim recta.*

31. *Plana superficies est minima, seu brevissima omnium, quæ eadem habent extrema, vel, cujus omnibus partibus recta linea accommodari potest.*

Solent Geometræ superficiem planam frequenter appellare Planum. Cæteræ omnes superficies, quibus non ex omni parte accommodari potest recta linea, appellantur curvæ, & non planæ.

Scholion.

Ne definitionum copia plus æquô oneret Tironum memoriam, reliquas tractationibus singulis, atque elementis multò commodiùs præponam.

POSTULATUM I.

32. *A quovis puncto ad quodvis punctum duci posse rectam lineam.*

Scholion.

Cùm nobis propositum sit in hac elementari scientia theoriam praxi conjungere, hinc ordiri placet. Praxis duplex est, alia, quæ exercetur in charta, alia, quæ in campo. Ad primam exercendam ad manus esse debet circinus, regula, norma, parallelismus &c.; ad eandem

verò

verò in campo exercendam requiruntur bacilli cum catenula, vel fune cannabino in pedes, & decempedas, illorúmque digitos legitimè diviso, unà cum reliquis instrumentis, quorum artificium, & usus, uti se dabit occasio, explicabitur. Utrovis modò instituenda est operatio, sive in charta, sive in campo, ut intelligas, num ea facere possis, quæ jubentur.

Praxis. *In charta linea recta ducitur graphiô, aut pennâ juxta regulam ad duo puncta data applicatam. In campo rectam lineam designabis, si funem extendas inter duos limites datos. Absque funis adminiculo idem efficies, si per quadrantis aut alterius instrumenti binas dioptras collimans in terminum datum, jubeas plures bacillos certis intervallis infigi ope libellæ perpendiculariter terræ, sic ut omnes simul bacillos per dioptras conspicias; ità enim, quot placuerit, puncta ad rectam lineam quæsitam notabuntur.*

POSTULATUM II.

33. *Rectam lineam terminatam utrimque produci posse, ita ut recta maneat.*

Praxis *eadem, quæ priùs. Vel, duobus baculis in data recta defixis, tertius in eadem recta producta infigetur, si oculô in unum directô, cæteri non appareant. Ratio à luminis rectilinea propagatione petenda est.*

Scholion.

Duo sunt, quæ in metiendis intervallis irrepere solent vitia ex funibus cannabe compositis. I. Hu-

I. Humor eosdem contrahit ; & vires diversæ inæqualiter tendunt. Schvventerus Geom. pract. lib. 1. *narrat , cùm aliquando metiendæ longitudini in campo vacaret , funis longitudinem , quæ erat* 16 *pedum , cadente pruinâ , horæ unius intervallo ad pedes* 15 *rediisse. Huic vitio occurri posse docet Wolfius Geom. pract. parte* 1, *si funiculi , ex quibus conficiuntur funes , in gyros contrarios contorqueantur ; ac præterea funis oleo ad ignem ferventi immittatur ; & postquam exsiccatus fuerit , per ceram liquefactam trahatur , eáque obliniatur. Nullum longitudinis decrementum , inquit Wolfius, notabis , etiamsi funem istiusmodi per diem integrum sub aquis demersum detineas.*

II. Pondus funis horizontaliter extensi impedimento est, quominùs in rectam lineam conformari possit. Notat Camus lib. 1. *cap.* 1. *Geom. filum* 24 *pedes longum, ponderans* 161 *grana* $\frac{5}{8}$, *& cujus* 33 *diametri efficiant duos pollices , si horizontaliter tendatur decem virium libris, curvari in medio lineâ unâ cum semisse. Hæc itaque deviatio à linea recta impedienda erit appositis per intervalla sustentaculis.*

POSTULATUM III.

34. *Quovis centrô, & intervallô circulum posse describere.*

Praxis. *In charta ope circini res absolvitur. In planitie, & ubicumque circini apertura tanta fieri nequit , quanta requiritur , ejus vicem obire potest filum, aut virga , sive lignea , sive ferrea. Sed de circulo, cujus usus latissimè patet, plura mox erunt dicenda.*

Pos-

POSTULATUM IV.

35. *Ex recta majore partem auferre minori æqualem.*

Scholion.

Præter hæc quatuor postulata, quibus Euclides, ejúsque Interpretes contenti fuêre, sunt alia multa æquè facilia, quæ prudens Lector per se ipse assequi poterit, utì translatio intervalli ex uno loco in alium, & alia ejusdem modi. Quidquid autem geometricè fit, per hæc postulata perficietur; aliter non dicetur geometricè factum.

AXIOMATA.

36. *I. Quæ eidem sunt æqualia, inter se sunt æqualia. Et quod unô æqualium majus, aut minus est, majus quoque, aut minus erit alterô æqualium.*

II. Si æqualibus æqualia demas, vel addas, residua in primo, aggregata in secundo casu sunt æqualia. Et si æqualibus inæqualia, aut inæqualibus æqualia demas, vel addas, ea, quæ remanent, sunt inæqualia.

III. Quantitates, quæ certam aliquam quantitatem tantundem continent, vel ab ea tantundem continentur, sunt æquales.

Unde quantitates æquales in eandem quantitatem ductæ, vel per eandem divisæ, sunt æquales.

IV. Quæ sibi mutuò superimposita perfectè congruunt, sunt æqualia.

V. Totum quâlibet suî parte majus est.

APPENDIX I.

De mensuris.

Geometriæ praxis, quam theoriæ conjungimus, id jure postulat, ut mensurarum omnium

nium, quarumuſus præcipuus eſt apudGeometras, notionem diligenter hoc loco exponamus.

DEFINITIO.

37. *Metiri idem eſt, ac quantitatem aliquam pro unitate aſſumere, & aliarum homogenearum rationem ad eandem exprimere.*

Strictiùs ab Euclide menſura definitur: *Quantitas, quæ aliquoties repetita alteri fit æqualis*, quæque ab Arithmeticis pars aliquota nuncupatur.

Menſuræ longitudo, & diviſio non eadem eſt ubivis gentium, uti luculenter demonſtrat Ricciolius in Geogr. reform. lib. 2. cap. 7. Exponam itaque priùs varias menſuras, quæ à Scriptoribus in rebus geometricis, & phyſicis paſſim adhibentur.

Hexapeda valet	6 pedes.
Pes regius pariſienſis	12 pollices.
Pollex	12 lineas.
Linea	10 puncta.

Ubi major accuratio non requiritur, negliguntur in praxi puncta propter parvitatem.

Milliare italicum valet	8 ſtadia.
Stadium	125 paſſus geom.
Paſſus geometricus	5 pedes.
Paſſus communis	$2\frac{1}{2}$ pedes.
Cubitus geometricus	9 pedes.
Cubitus communis	$1\frac{1}{2}$ ped.
Major cubitus	9 cubitos comm.
Minor leuca gallica	2000 paſ. geom.
Leuca communis gallica	2400 paſ. geom.
Major leuca gallica	3000 paſ. geom.

*Milliare germanicum commune 22824 ped. Pariſienſes.

38. Por-

38. Porrò hæ menſuræ incertæ ſunt, niſi pedis quantitas, ad quam illæ referuntur, fuerit determinata. Pes verò tot prope magnitudines ſortitur diverſas, quot ſunt civitates. Quare, ut hæc tanta, quæ in legendis Scriptoribus occurrebat, obſcuritas tolleretur, Recentiores optimum factu cenſuerunt menſuras reliquas ad notam quantitatem pedis regii pariſini referre, cujus longitudinem aut ejusdem ſemiſſem metallo inciſam exhibent ea, quæ omnium tractantur manibus, inſtrumenta pleraque, & earum menſurarum, ſaltem celebriorum varietates repræſentare in particulis iſtiuſmodi, qualium pes regius pariſinus eſt 1440. Nam, uti jam expoſuimus, continet is 12 pollices, pollex 12 lineolas, lineola 10 particulas, adeóque pes integer particulas 1440.

Itaque pes regius pariſinus	1440.
Rhenanus	$1391\frac{2}{10}$.
Romanus	1320.
Londinenſis	1350.
Venetus	1540.
Bononienſis	$1682\frac{2}{5}$.
*Colonienſis	$1283\frac{1}{25}$

Scholion.

Commodiùs à Recentioribus, ad vitandam fractorum moleſtiam, menſura dividitur in 10 partes æquales, quæ vocantur pedes: unde ipſa Decempeda appellatur; pes ſubdividitur in 10 digitos, digitus in 10 lineas; & ità porrò. Diviſionem decimalem primus introduxit Stevinus, qui indicem decempedarum conſtituit 0,

hoc

hoc pacto : $3^{\circ}\ 5^{\prime}\ 7^{\prime\prime}\ 8^{\prime\prime\prime}$, *nimirum, tres decempedæ, quinque pedes, ſeptem digiti, & octo lineæ. Vide lib.* 1. *cap.* 1. *n.* 3. *comment. in Arith. univerſ. Newtoni. P. Franciſcus Noel in obſervationibus mathematicis in India, & China factis ſcribit diviſionem decimalem non modò in menſuris, ſed & ponderibus ſinicis adhiberi.*

39. Diximus in definitione, menſuram homogeneam eſſe oportere quantitati menſurandæ. Cùm autem tres ſint quantitatis ſpecies, linea, ſuperficies, corpus, triplex quoque menſura eſt, linearis, ſuperficialis, & corporea, ſeu ſolida; lineæ ſiquidem per lineam, ſuperficies per ſuperficiem, corpora, ſeu ſolida per ſolidum menſurantur. Non tamen ſuperficies per quamlibet ſuperficiem, neque ſolida per quodlibet ſolidum; ſed hæc per cubum, illa per quadratum metimur; quia quadratum, & cubus figuræ ſunt maximè ſimplices, adeóque notiores; quadratum enim fit ex uno ductu lineæ in ſeipſam; cubus verò ex ductu lineæ in ſeipſam duplicato generatur; nam linea in ſe ducta facit quadratum, quô ductô rurſum in eandem lineam gignitur cubus. Omnia conſtant ex geneſi harum quantitatum explicata n. 20. Cùm tamen menſura ſimpliciter nominatur, ſemper linearis intelligitur.

APPENDIX II.

Explicatio ſignorum, quorum frequens eſt uſus in Geometria.

40. Signum additionis eſt $+$, & dicitur *plus*. Sic $5 + 3$ denotat ſummam quantitatum 5 & 3.

$-$ Signum ſubtractionis, & dicitur *minus*. Sic $5 - 3$ denotat exceſſum quantitatis 5 ſupra 3.

$=$ Signum æqualitatis, Sic $5 + 3 = 8$ denotat, quantitates 5 plus 3 æquari 8.

$\times$ ſignum multiplicationis. Sic 5×3 denotat, productum ex quantitatibus 5 & 3 in ſe invicem multiplicatis.

$>$, $<$ duo ſigna inæqualitatis. Primum $>$ vocatur ſignum exceſsûs, ſecundum $<$ defectûs. Sic $5 + 4 > 8$ denotat, ſummam $5 + 4$ majorem eſſe, quàm 8. Contrà verò $8 < 5 + 4$ deſignat, 8 minorem eſſe ſummâ $5 + 4$.

$\frac{a}{b}$ Signum quotientis quantitatis *a* per *b* diviſæ. Et ſimiliter $\frac{7}{4}$ eſt quotiens numeri 7 per 4 diviſi, ſive $1\frac{3}{4}$. Et cujuslibet fractionis, utì $\frac{1}{3}$, numerator pro dividendo, denominator pro diviſore habendus eſt, & ipſa fractio $\frac{1}{3}$ pro quoto.

Reliqua autem ſigna opportuniùs ſuis quæque locis adjiciam.

ELEMENTUM I.

De variis Linearum Rectarum sibi mutuò occurrentium affectionibus.

Ex vario linearum occursu prima hæc Geometriæ quasi lineamenta ducimus: rectarum nimirum vel perpendiculariter, vel obliquè in alias incidentium indolem contemplamur, affectionésque multiplices. Quoniam verò, occurrentibus inter se lineis, primam genesin nanciscuntur anguli, hinc ordiendum nobis est.

DEFINITIONES.

41. *Angulus est duarum linearum in plana aliqua superficie se mutuò tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.* Hoc est, quia duæ lineæ AB, AC concurrunt in A, & non jacent in directum, ideo efficiunt angulum A in eadem existentem superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicentur autem duæ lineæ non in directum jacere, quando altera earum versùs concursum protensa non coincidit cum altera. TAB. I. Fig. I.

Corollarium.

42. Consistit itaque anguli cujusvis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; lineæ enim longiùs excurrentes, sicuti non augent anguli inclinationem, ità neque ejusdem magnitudinem.

43. *Angulus rectilineus est, quem re-
ctæ lineæ efficiunt: curvilineus, quem*
TAB. *curvæ: mixtus, quem recta, & curva.*
I. Rectilineum angulum hoc loco unicè
Fig. consideramus.
1.2.3. 44. *Latera, seu crura anguli sunt lineæ*
AB, AC, *quæ angulum efficiunt.*

Vertex anguli est punctum A, *in quo
latera sibi mutuò occurrunt.*

45. Cùm angulus est unicus BAC,
unicâ etiam litterâ A ad verticem positâ
Fig. designari solet. Cum plures anguli ad
1. unum punctum existunt, solent Geome-
træ, ut tollatur confusio, angulum quem-
libet exprimere tribus litteris BAC, qua-
rum media A ostendit punctum A, in
quo lineæ conficiunt angulum; extremæ
verò litteræ B & C significant initia li-
Fig. nearum, quæ angulum continent; in-
4. terdum etiam unicâ litterâ O interiùs po-
sitâ designatur,

46. *Anguli æquales, vel potiùs similes
dicuntur, si, cùm sibi invicem vertices* A
& a *imponuntur, latera unius* AB, AC
Fig. *congruant lateribus alterius* ab, ac.
1. Ad hoc non requiritur, ut latera sint
æquè longa.

47. *Cùm recta* AB *super rectam* FG
consistens in neutram inclinat partem, ac
Fig. *proinde angulos facit utrinque æquales* A
5. BF, ABG, *recta* AB *alteri insistens di-
citur perpendicularis.*

Uterque æqualium angulorum ABF,
vel ABG *dicitur rectus.* 48.

48. *Sin verò recta DB super rectam FG consistens in alteram partem magìs inclinet, ac proinde angulos faciat utrimque inæquales DBF, DBG, recta DB vocatur obliqua; angulus DBG rectô minor, acutus nominatur; & angulus DBF rectô major, obtusus.* Fig. 5.

Corollarium I.

49. Omnes anguli recti sunt inter se æquales. Nam, ùt ex dictis colligitur, angulus rectus nullam patitur varietatem, nec unus alterô major, minórve dici potest; cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magìs in unam partem, quàm in alteram inclinare. Obtusus verò, & acutus augeri possunt, & minui infinitis modis; cùm ab illa inflexibilitate, inquit Clavius, lineæ perpendicularis infinitis etiam modis recta linea possit recedere.

Corollarium II.

50. Ad idem punctum B datæ rectæ FG, & in eadem superficie perpendicularis unica duci potest. Nam quævis alia DB in unam magìs, quàm in alteram partem inclinaret. Fig. 5.

Corollarium III.

51. Si recta AB perpendicularis sit rectæ FG in puncto medio B, quodvis punctum, puta, C ejusdem perpendicularis AB æqualiter distabit ab extremitatibus F & G datæ rectæ. Perspicuum est enim rectas CF, CG, quæ Fig. 6.

metiuntur diſtantiam ejuſdem puncti C ab iiſdem extremitatibus, fore æquales; aliter perpendicularis AB in unam magìs partem, quàm in alteram vergeret contra hypotheſin.

Corollarium IV.

52. Si recta AB perpendicularis ſit rectæ FG in puncto medio B, quodvis aliud punctum D, quod extra perpendicularem in eadem plana ſuperficie ſumatur, non erit æqualiter diſtans ab extremitatibus F & G. Nam FC = CG ex Corol. I. Si æqualibus addas utrimque CD, erit per Ax. II. FC + CD = CG + CD. Atqui (n. 28.) CD + CG > DG. Ergo per Ax. I. FC + CD, hoc eſt, DF > DG.

Fig. 7.

Corollarium V.

53. Itaque quodvis punctum, quod æqualiter diſtet ab extremitatibus rectæ FG, erit in perpendiculari AB, quæ bifariam ſecat rectam FG; eadémque perpendicularis AB tranſit per omnia puncta æqualiter diſtantia ab iiſdem extremitatibus.

Fig. 6.

Corollarium VI.

54. Denique, quod maximè notandum, ſi duo puncta A & C, vel A & B ſint æqualiter diſſita ab extremitatibus rectæ FG, recta linea AB, quæ per hæc duo puncta tranſit, erit perpendicularis in medio rectæ FG. Nam duo puncta

Fig. 6.

puncta determinant poſitionem lineæ. (n. 24.)

Scholion I.

55. *Duæ regulæ ſic compactæ, ut angulum rectum coutineant, inſtrumentum efficiunt, quod Norma appellatur. Normæ examen ſic inſtituitur. In quavis recta* BF, *ſumptô punctô* A, *normæ latus* AE *applica ſuper* AF; *& juxta latus alterum deſcribatur recta* CA; *converſâ deinde normâ verſus* B, *ſi utroque latere congruat rectis* BA, CA, *ſcito eſſe legitimam, & exactam. Ratio pendet ex def. perpendicularis* [*n.* 47.] Fig. 8.

Scholion II.

Quia arcus circuli metitur quantitatem angulorum, idcirco definitionem circuli hoc loco antevertimus.

56. *Circulus eſt plana ſuperficies unius lineæ circuitu comprehenſa, quæ circumferentia dicitur, à qua ad aliquod punctum* A *intra contentum, quod centrum dicitur, omnes, quæ duci poſſunt, rectæ lineæ, ſive radii circuli,* AB, AC, AD, AE *ſunt æquales.* Omnia itaque circumferentiæ puncta B, C, D &c. æquidiſtant à centro. Fig. 9.

Scholion.

57. *Si intelligatur recta* AD *circa punctum* A *quieſcens moveri, donec ad eumdem redeat locum, à quo dimoveri cœpit, deſcribet ipſa recta totum ſpatium circulare: punctum verò alterum extremum* D Fig. 9.

delineabit circumferentiam, ſeu, ut vocant, peripheriam BCDE.

58. *Diameter circuli eſt recta quædam linea* BAD *per centrum ducta, & ex utraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam ſecat, in duos ut vocant, ſemicirculos, quorum ſemiſſem* BAC *appellant quadrantem circuli.*
Fig. *Arcus circuli eſt pars circumferentiæ*
9. *major, minórve ſemicirculo.*

Corollarium.

Circuli æquales ſunt, quorum radii ſunt æquales.

Scholium.

59. *Circumferentiam Mathematici partiri ſolent in 360 partes æquales, quas gradus vocant, ob multas illius numeri commoditates, ſemicircumferentiam in 180, quadrantem in 90; gradum verò quemlibet dividunt in 60 alias partes æquales, quas vocant minuta prima, quorum unumquodque dividitur rurſum in 60 alias par-*
TAB. *tes æquales, quas appellant minuta ſecun-*
II. *da; atque ita porrò, ſi modò inſtrumen-*
Fig. *ti magnitudo id patiatur. Ejuſmodi di-*
39. *viſio in minuta prima, & ſecunda adhibetur, cùm exactiſſima angulorum inventio ad uſus potiſſimùm Aſtronomicos requiritur. Quâ verò methodô, quóve artificiô hæc diviſio peragenda ſit, alibi trademus.*

60. *Cur autem ad circumferentiæ diviſionem ex omnibus numeris Mathematici*

tici elegerint numeros 360, 90, *&* 60, *causa est, quòd hi numeri plurimas habeant partes aliquotas, quod in calculo solet esse percommodum. Numerus quippe* 360 *aliquotas habet* 22, *ùt in adjecto schemate patet.*

Partes aliquotæ numeri 360.

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10,
180, 120, 90, 72, 60, 45, 40, 36,
12, 15, 18,
30, 24, 20.

Partes aliquotæ numeri 90.

2, 3, 5, 6, 9,
45, 30, 18, 15, 10.

Partes aliquotæ numeri 60.

2, 3, 4, 5, 6,
30, 20, 15, 12, 10.

In his seriebus numeri oppositi sese invicem denominant, quales nempe sint partes totius; puta, 45 *in primo ordine oppositum sibi habet* 8; *ac proinde* 45 *est octava pars numeri* 360; 8 *autem est quadragesima quinta pars numeri* 360. TAB. II. Fig. 39.

61. *Mensura anguli est arcus circuli* AC, *qui ab ejusdem anguli vertice* B *tanquam centro, & intervallô quovis describitur, & à lateribus* BA, BC *terminatur.* Quare angulus ABC totidem graduum, & minutorum esse dicetur, quot gradus, & minuta continet arcus interceptus AC. TAB. I. Fig. 10.

62. *Mensura anguli recti est semper*

quadrans circuli, nempe gradum 90. Nam si duæ diametri BD, CE sese ad angulos rectos secent, circumferentiam circuli divident in quatuor partes æquales,
TAB. I. Fig. 9. quarum quælibet est mensura anguli recti, qui illi respondet. Hinc dici etiam potest, semicirculum esse mensuram duorum rectorum.

Corollarium.

63. Intelliges jam multò etiam planiùs, quare angulus non minuatur, neque augeatur, licet crura minuas, vel augeas. Nam, si à vertice B dati anguli C B A, tanquam centrô, describantur intervallô quôvis plures circuli; & arcus I F,
TAB. I. Fig. 11. puta, sit sexta pars suæ circumferentiæ: etiam reliqui E D, C A &c. erunt similiter sexta pars suæ circumferentiæ; adeóque arcus quilibet interceptus erit ejusdem anguli mensura.

Scholion.

64. *Atque hinc praxis consequitur examinandi gradus, seu quantitatem dati anguli* E B G *per semicirculum corneum transparentem in* 180 *gradus divisum.*
TAB. I. Fig. 12. *Centrum semicirculi pone supra verticem* B *anguli dati, & semicirculi radium* B D *supra anguli latus* B G. *Arcus* C D *inter anguli crura interceptus ostendet, quot graduum sit datus angulus* E B G.

65. *In planitie. I. Instrumentum goniometricum ità collocatur, ut radius ejus* C G *uni lateri dati anguli immineat; quod facilè obtinetur, collineando per dioptras*

F &

F & G, *seu pinnulas immobiles ad diametrum perpendiculariter erectas, versùs hastam in extremitate lateris defixam.* TAB. III. Fig. 41 & 43.

II. Centrum C *vertici ejusdem anguli immineat, ope perpendiculi ad centrum instrumenti.*

III. Regula HI *circa centrum mobilis, versùs latus anguli alterum promoveatur, donec per dioptras ipsi affixas, hasta in extremitate lateris defixa collineanti occurrat.*

IV. Gradus in arcu GI *inter crura anguli* GC, IC *intercepti notantur.*

* Figura 41 TAB. III. exhibet instrumentum goniometricum, sive semicirculum in gradus & minuta ope scalæ geometricæ divisum. Dioptras seorsim expressas vide TAB. II. N. 5. & 6.

PROPOSITIO I.

66. Problema. *Ex dato extra rectam indefinitam* BF *puncto* A *perpendicularem ducere.* Euclid. lib. 1. prop. 12. TAB. I. Fig. 13.

Constructio. Centrô A describe circulum, qui secet datam BF in D & C: centris D & C describe duos alios æquales circulos, sed primô minores, qui se invicem secent in E; ducatúrque recta AEG. Hæc erit perpendicularis quæsita.

Demonstratio. Ducantur AC, AD, & rursum EC, ED. Per constructionem rectæ AC, AD sunt æquales; quippe quæ sunt radii ejusdem circuli (n. 56.) Smiliter EC, ED sunt æquales, nimi-

rum

rum æqualium circulorum radii. Ergò recta A G habet duo puncta A & E æqualiter distantia a punctis C & D. Itaque [n. 54.] recta A G, quæ per hæc duo puncta transit, erit perpendicularis quæsita. Quod erat faciendum.

Scholion I.

67. *Animadvertis, opinor, in omni problemate duo potissimùm esse consideranda: constructionem illius, quod proponitur, & demonstrationem, quâ ritè factum ostenditur, quod fieri jubebatur.*

Scholion II.

Probè apponunt Geometræ in problemate hanc particulam, indefinitam; *si enim linea esset finita, non posset semper à puncto extra ipsam dato perpendicularis ad eam deduci. Volunt itaque Geometræ rectam datam esse indefinitam: hoc est, non habere magnitudinem determinatam, ut saltem ad ipsam productam perpendicularis duci possit.*

Corollarium.

68. Hinc sequitur lineæ perpendicularis terminum, nimirum punctum G æqualiter distare à punctis C & D, & rectam CD bifariam sectam in puncto G perpendicularis incidentis.

69. Praxis. *Applica latus normæ puncto dato* A, *basin verò datæ rectæ. Linea secundùm normæ latus ducta, est perpendicularis quæsita.*

Verùm

Verùm, quia longitudo normæ, quâ in mechanicis utimur, ad summum est pedum trium, quatuórve, idcirco in campo, & planitie aliter quæsitum obtinebitur

Quadrante mensoriô. *Fige palos in dato puncto* A, *& puncto aliquo* E *datæ rectæ* BD : *deinde in data recta quære punctum* C, *supra quod constitutô quadrantis centrô possis per dioptras laterum* CF, CG *intueri palos fixos in* E *&* A. *Recta per* C *ad* A *extensa, est perpendicularis quæsita.* TAB. I. Fig. 14.

Aliter solô fune. *Funem in dato puncto* A *fixum obliquè ad datam rectam* B D *extende, donec eam tangat extremitate sua in* E : *extende similiter ad partem alteram in* F : *intervallum* EF *seca bifariam in* C : *quod fiet funem ipsi* EF *æqualem complicando conjunctis extremitatibus. Recta per* A *&* C *ducta, est perpendicularis quæsita. Ratio pendet ex Corol. præc.* TAB. I. Fig. 15.

PROPOSITIO II.

70. Problema. *Ex puncto dato* A *in data recta* BF *perpendicularem excitare.* Euclid. lib. 1. prop. 11.

Constructio. Circinô cape æquales A B, AC: centris B & C describe duos æquales circulos se secantes in D. Ex D ad A ducta recta erit perpendicularis quæsita

Demon-

TAB. I. Fig. 16. *Demonstratio.* Puncta B & C æquidistant à puncto A ; & radius B D æqualis est radio D C per construct. Quare recta D A in neutram partem inclinat ; atque hinc perpendicularis est ex def., & n. 54.

71. Praxis. *Applica normæ basin rectæ datæ, sic ut latus normæ respondeat dato puncto. Funis secundùm latus normæ extensus dabit perpendicularem quæsitam.*

In magna distantia non satis tuta est praxis tradita ; nam funis à latere tam brevis normæ deviatio, quamvis oculo percipi vix possit, si valde longa perpendicularis quæritur, in fine erit sensibilis, & magna. Quare

Aliter, & certiùs quadrante. *Instrumentum constitue horizonti parallelum, sic ut ejus centrum sit directè supra rectæ datæ* B F *punctum datum* A: *quô ità permanente, unum latus instrumenti* A E *sic verte, ut per ejus dioptras conspicias baculum perpendiculariter humi defixum in datæ rectæ puncto quopiam* C : *quô factô* TAB. I. Fig. 27. *instrumenti latus* A E *respondebit rectæ datæ* B F, *Deinde baculum alterum jube perpendiculariter defigi ex adverso, quantô placuerit intervallô in* L, *sic ut in eum collimans per dioptras lateris* A G *ad gradum* 90 *constituti, intueri possis. Recta per* A & L *extensa, est perpendicularis quæsita.*

Aliter solô fune. *Ad puncti dati* C *partem*

tem utramque sume duo æqualia intervalla CE, CF : *in* E *&* F *fige duos funes æquales justæ longitudinis ; eósque supra terram extende, dum se mutuò tangant in* A *Recta per* C *ad* A *ducta, est perpendicularis quæsita. Ratio patet ex Probl.* TAB. I. Fig. 15.

Corollarium.

72. Si recta perpendiculariter rectæ insistens infra illam directè producatur, etiam inferius segmentum erit eidem rectæ perpendiculare.

PROPOSITIO III.

73. Problema. *Datam rectam finitam* AB *bifariam, & perpendiculariter secare.* Euclid. lib. 1. prop. 10.

Constructio. Centris A & B eâdem aperturâ circini, sed intervallô majore, quàm sit semissis datæ rectæ AB, describe hinc atque indè duos arcus se se invicem secantes in punctis C & D, per quæ ducatur recta CD. Hæc secabit bifariam, & perpendiculariter rectam AB. TAB. I. Fig. 17.

Demonstratio. Quia arcus eodem intervallo descripti sunt per constructionem, puncta C & D æquidistant ab extremitatibus A & B rectæ AB. Ergò omnia puncta rectæ CD ab iisdem æquidistant ; & consequenter punctum E bifariam, & perpendiculariter secat rectam AB [n. 54.]. Quod erat &c.

Praxis. *In planitie extremitatibus* A *&* B *datæ*

B *datæ longitudinis defige duos clavos, quibus connecte duos funiculos inter se æquales, sed majores semisse datæ rectæ* AB: *extende hos funiculos, donec hinc atque indè se contingant in punctis* C & D, *ubi clavo aliquo retineantur distenti. Funis à puncto* C *ad* D *ductus secabit bifariam longitudinem datam* AB.

PROPOSITIO IV.

74. Theorema. *Cùm recta linea* EB *super rectam* AG *consistens angulos facit,*
TAB. *aut duos rectos efficiet, aut duobus rectis*
I. *æquales.* Euclid. lib. 1. prop. 13.
Fig. *Demonstratio.* Si EB fuerit perpendi-
12. cularis ad rectam AG, perspicuum est (n. 47.) effici duos rectos.

Si EB non fuerit perpendicularis, faciet unum quidem angulum obtusum, alterum verò acutum. Dico igitur, eosdem simul sumptos duobus esse rectis æquales.

Centro B intervallo quovis describatur semicirculus ACD. Arcus AC metitur angulum ABE; & arcus CD metitur angulum EBG. Atqui duo istiusmodi arcus complent semicirculum, qui est mensura duorum rectorum [n. 61.] Duo igitur anguli ABE & EBG duobus rectis sunt æquales. Quod erat &c.

Scholion.

TAB. 75. *Videtur hæc propositio, inquit Cla-*
I. *vius, pendere ex communi quadam ani-*
Fig. *mi notione. Quò enim angulus obtusus*
12. *supe-*

superat rectum angulum, eô reliquus angulus acutus superatur ab eodem recto angulo. Quocirca duo anguli ABC, CBD *duobus rectis æquales esse demonstratur, siquidem tantum unus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.*

DEFINITIO.

76. *Duo anguli, quos efficit perpendicularis* AB, *vel obliqua* DB, *vocantur deinceps positi, vel consequentes.* TAB. I. Fig. 5.

Corollarium I.

77. Duo quicunque anguli deinceps positi, seu consequentes æquantur duobus aliis quibuslibet deinceps positis. Omnes siquidem valent duos rectos.

Corollarium II.

78. Si duo anguli DBF, DBG, quorum latus commune DB, & vertex idem punctum B, simul sumpti vel duos rectos excedant, vel ab iisdem deficiant, duæ lineæ FB, BG non efficient unam rectam, sed angulum FBG comprehendent in puncto B. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 14. TAB. I. Fig. 18. 19

Nam, si linea FBG unam rectam efficeret, duo anguli DBF, DBG simul sumpti duos rectos æquarent, contra hypothesin.

Corollarium III.

79. Itaque, si linea FBG detorqueatur in B, hoc est, angulum efficiat in B, duo anguli DBF, DBG simul sumpti vel à duobus rectis deficient, vel eosdem excedent. Ut patet, productâ lineâ FB in C.

Corollarium IV.

Fig. 80. Si duo anguli DBF, DBG ſimul
20. ſumpti duobus rectis æquantur, linea
F G unam rectam efficiet,

Corollarium V.

TAB. 81. Eôdem modô demonſtrabitur, ſi
I. plures rectæ, quàm una, eidem rectæ ad
Fig. idem punctum inſiſtant, angulos effici
21. duobus rectis æqnales.

Corollarium VI.

Fig. 82. Duæ rectæ ſe invicem ſecantes
22. efficiunt angulos, quatuor rectis æquales.
23. *Corollarium VII.*

83. Omnes anguli circa unum punctum conſtituti conficiunt quatuor rectos Sunt enim quatuor recti in plures partes ſecti.

DEFINITIO.

84. *Si duo anguli deinceps poſiti* D B F,
TAB. D B G *duos rectos efficiant, eorum quili-*
I. *bet reſpectu alterius vocatur angulus com-*
Fig. 5. *plementi ad duos rectos.*

Similiter ſi duo anguli ABD, DBG, *ſimul ſumpti unum rectum efficiant, eorum quilibet reſpectu alterius vocatur angulus complementi ad unum rectum.*

TAB. *Si duæ rectæ* AB, DE *ſe invicem ſe-*
I. *cent in puncto* C, *duo anguli* A C D,
Fig. B C E, *vel alii duo* A C E, B C D *vocan-*
22. *tur anguli oppoſiti ad verticem.*
23.

Corol.

Corollarium I.

85. Ergò anguli æquales habent complementa æqualia. Et duo anguli erunt æquales, quando uterque vel eſt complementum ejusdem anguli, vel angulorum æqualium.

PROPOSITIO V.

86. Theorema. *Si duæ rectæ* AEB, CED *ſe mutuò ſecuerint, angulos ad verticem oppoſitos* AEC, DEB *æquales inter ſe efficient.* Euclid. lib. 1. prop. 15. TAB. I. Fig. 24.

Demonſtratio. Centro E deſcribatur arcus circuli CADB. Si à duobus ſemicirculis CAD & ADB ſubtrahatur communis arcus AD, erit reſiduus arcus AC æqualis reſiduo arcui DB. Itaque anguli ad verticem oppoſiti AEC, DEB æquales ſunt, quos nempe metiuntur arcus æquales.

Simili ratione demonſtrabis, angulos AED, CEB eſſe inter ſe æquales. Quod erat, &c.

Aliter. Angulus ACD eſt complementum anguli ACE ad duos rectos [n. 84.]. Atqui angulus BCE eſt pariter complementum ad duos rectos ejusdem anguli ACE. Ergo anguli ACD, BCE oppoſiti ad verticem ſunt æquales (n. 85.). Eôdem modô demonſtrabis angulos ACE, BCD eſſe æquales. Quod erat &c. TAB I. Fig. 25.

Corollarium.

Fig. 23. Ergò, si recta A B est perpendicularis rectæ E D, erit pariter recta E D reciprocè perpendicularis rectæ AB.

PROPOSITIO VI.

TAB. I. Fig. 25. 87. Theorema. *Si quatuor anguli rectilinei* ACD, ACE, BCD, BCE *ad communem verticem* C *constituti, & in eodem plano descripti, sint ejusmodi, ut anguli ad verticem oppositi æquales fuerint, nimirum,* ACD = BCE, *&* ACE = BCD, *erunt quælibet duæ lineæ adversæ* CD, CE, & CA, CB *in directum sibi, & continuum adjunctæ.*

Demonstratio. Quoniam per hypothesin ACD = BCE, & ACE = BCD, erit

I. ACD + ACE = BCE + BCD. Sed isti quatuor anguli simul sumpti quatuor rectos conficiunt (n. 82. & 83.). Ergò duo ACD + ACE duos rectos conficiunt; & consequenter D E est linea recta (n. 80.)

II. ACD + BCD = BCE + ACE. Sed quatuor anguli simul sumpti quatuor rectos efficiunt [82.]. Ergò duo ACD + BCD duos rectos; & consequenter A B est pariter linea recta [n. 80.]. Quod erat &c.

88. Lemma. *Si à terminis unius lateris* A *&* C *figuræ rectilineæ* ABC *tribus lateribus comprehensæ, jungantur intra*

tra figuram duæ rectæ AD, CD, *hæ simul sumptæ minores erunt summâ* AB + CB *duorum reliquorum laterum figuræ*: Euclid. lib. 1. prop. 21. pars 1.

Demonstratio. Producatur AD in E: erit TAB. I.

I. AB + BE > AE (n. 28.); & Fig. utrinque adjectâ EC, erit AB + BC 26. > AE + EC (n. 36.).

II. Similiter DE + EC > DC (n. 28.); & utrinque additâ AD, erit AE + EC > AD + DC [n. 36.].

Ergò multò magìs AB + BC > AD + DC: hoc est, AD + DC < AB + BC. Quod erat &c.

PROPOSITIO VII.

89. Theorema. *I. Si à quovis puncto* A TAB. *ad rectam* FG *perpendicularis ducatur,* I. *hæc erit omnium rectarum* AD, AF *&c.* Fig. *brevissima, quæ ab eodem puncto* A *ad* 28. *eandem rectam* FG *duci possint.*

II. Ex duabus obliquis AD, AF, *longior est* AF, *quæ à perpendiculari* AB *magìs recedit.*

Et vicissim,

I. Si recta AB *sit omnium linearum brevissima, quæ ab eodem puncto* A *ad rectam* FG *duci possint, erit eadem perpendicularis huic rectæ* FG.

II. Ex duabus obliquis AD, AF, *quæ longior est, à perpendiculari* AB *magìs recedit.*

Demonstratio. Producatur A B in H hac lege, ut $AB = BH$; ducantúrque rectæ D H, F H. Quia A B est perpendicularis super F G, erit eadem F G reciprocè perpendicularis super A B [n. 87.). Rursum, quia per constructionem $AB = BH$, erit F G perpendicularis in medio rectæ A H. Quare punctum quodvis rectæ F G æquidistabit ab extremitatibus rectæ A H (n. 51.)

Erit ergo $AB = BH$ (per constr.)
$AD = DH$ (n. 51.)
$AF = FH$ (n. 51.)

Et consequenter $AB = \frac{AH}{2}$

$$AD = \frac{AD + DH}{2}$$

$$AF = \frac{AF + FH}{2}$$

Atqui $AH < AD + DH$ (n. 28.), & $AD + DH < AF + FH$ (n. 88.). Ergò, si harum quantitatum inæqualium sumantur semisses, habebitur $\frac{AH}{2} < \frac{AD+DH}{2}$, & $\frac{AD+DH}{2} < \frac{AF+FH}{2}$: sive $AB < AD$, & $AD < AF$.

Habes ergò, quod I. quærebatur, rectam A B à quovis puncto A perpendiculariter ductam super F G, esse omnium rectarum A D, A F brevissimam.

II. Ex duabus obliquis A D, A F inæqualiter à perpendiculari A B recedentibus,

tibus, longiorem fore illam, quæ magìs recedit.

Et reciprocè ab hiſce duabus propoſitionibus conſequitur

I. Rectam A B, ſi breviſſima ſit omnium rectarum, quæ à puncto A ſuper F G duci poſſunt, fore perpendicularem ipſi F G. Nam, utì nuper demonſtravimus, ſi eadem A B non eſſet perpendicularis, neque eſſet contra hypotheſin omnium linearum, quæ à puncto A ſuper F G duci poſſunt, breviſſima.

II. Conſequitur pariter ex duabus obliquis, quæ ab eodem puncto A ad eandem rectam F G ducuntur, longiorem fore illam, quæ magìs recedet à perpendiculari. Nam, ſi minùs à perpendiculari recederet; non eſſet contra hypotheſin reliquis obliquis longior, utì demonſtratum jam eſt.

Corollarium I.

90. Ab eodem puncto A ad eandem Fig. rectam F G ſicuti unica linea omnium 28. breviſſima, ita & perpendicularis unica duci poteſt.

Corollarium II.

91. Duæ perpendiculares A B, C D ad TAB. eandem rectam F G, quamvìs in infini- I. tum producantur, nuſquam concurrent. Fig. Nam, ſi in aliquo puncto concurrerent, 29. ab hoc puncto ad eandem rectam duæ perpendiculares duci poſſent: quod eſt abſurdum ex Corol. I.

Corollarium III.

TAB. I. Fig. 28. 92. Itaque, si duæ obliquæ æquales AF, AG ab eodem puncto A ad eandem rectam FG ducuntur, erunt illæ æqualiter distantes à perpendiculari AB. Et reciprocè, si illæ sint æqualiter distantes à perpendiculari, erunt æquales.

Corollarium IV.

93. Ex prima parte Corol. præced. consequitur, quòd, si duæ rectæ æquales AF, AG ab eodem puncto A ad eandem rectam FG ducantur, ambæ erunt obliquæ eidem rectæ FG. Perpendicularis autem AB cadet inter easdem in medio rectæ FG, quæ bifariam à perpendiculari secabitur.

Corollarium V.

94. Quamobrem ab eodem puncto A ad eandem rectam FG tres lineæ rectæ æquales duci minimè possunt. Nam ad eandem partem ejusdem perpendicularis AB duas rectas æquales ducere oporteret: quod est absurdum.

Similiter tria puncta ejusdem lineæ rectæ FG non possunt æqualiter distare ab eodem puncto A. Et quemadmodum ex def. n. 56. omnia puncta ejusdem circumferentiæ æquidistant ab eodem puncto, quod dicitur centrum; ita perspicuum est, tria puncta ejusdem rectæ lineæ ad eandem circumferentiam minimè posse pertinere. Itaque recta linea, & circuli circumferentia in tribus punctis non possunt concurrere.

ELE-

ELEMENTUM II.

De variis Rectarum Linearum nunquam concurrentium affectionibus.

PARALLELARUM theoria independenter à triangulis planiore methodô demonstrata, quanti momenti futura sit in universa Geometria, usu ipsô intelligent Tirones.

DEFINITIONES.

95. *Rectæ lineæ* AB, CD, *parallelæ, seu æquidistantes sunt, quæ utrinque in infinitum protractæ æqualibus semper intervallis inter se distant.* Tab. I. Fig. 30.

Æqualia autem intervalla desumuntur penes perpendiculares EF, EF.

Generantur parallelæ, si recta EF ad rectam CD perpendicularis, per CD semper perpendiculariter moveatur. Tunc enim ejus extremum E describit parallelam AB.

Scholion I.

96. *Ratio verò cur Geometræ intervalla, altitudines, omnia denique metiantur lineâ perpendiculari, ea est, quia mensura alicujus rei debet esse stata, & determinata, & non indefinita; inter cunctas autem lineas rectas, penes quas sumitur omnis mensura, sola linea perpendicularis est certæ, determinatæque longitudinis, aliæ verò omnes indeterminatæ, modò breviores, modò longiores, quæque sexcentis modis variari possunt.*

Scholion II.

97. *Est & aliud instrumenti genus, quo in ducendis juxta varias positiones in charta parallelis interdum utimur, & Parallelismum vocamus, ex duabus regulis* A B, C D *compositum, quæ ejusdem ubique latitudinis, retinaculis uniformibus ita conjunguntur, ut retinacula intervallis æqualibus* E G, F H *à se invicem distent; ipsæ autem regulæ variis intervallis diduci queant.*

TAB. I. Fig. 31.

Corollarium I.

98. Perpendiculares omnes inter rectas parallelas comprehensæ, sunt inter se æquales.

Corollarium II.

99. Recta, quæ uni parallelarum perpendicularis est, erit pariter perpendicularis alteri parallelæ.

Corollarium III.

TAB. I. Fig. 30.

100. Perpendiculares omnes inter duas parallelas comprehensæ, sunt pariter inter se parallelæ. Nam, si duæ rectæ EF, EF perpendiculares eidem rectæ CD non sunt inter se parallelæ, productæ concurrent in aliquo puncto O; itaque ab eodem puncto O duæ perpendiculares duci poterunt ad eandem rectam CD; quod est absurdum (n. 90.)

Corol-

Corollarium IV.

101. Parallelarum partes EE, FF à perpendicularibus EF, EF interceptæ, sunt inter sè æquales. Nam rectæ EE, FF perpendiculares sunt super lineas EF, EF, quæ per Corol. præced. sunt parallelæ; & consequenter EE, FF sunt æquales inter se (n. 98.). Fig. 30.

Corollarium V.

102. A puncto extra rectam lineam dato unica eidem parallela duci potest. Nam alia quæcunque vel ad eandem converget, vel ab eadem diverget.

PROPOSITIO I.

103. Problema. *Dato extra rectam* CD *puncto* E *parallellam ducere.* Euclid. lib. 1. prop. 31.

Constructio. A puncto E demittatur EF perpendicularis rectæ CD: in qua sumatur quodvis aliud punctum G, à quo excitetur perpendicularis GH (n. 70.): fiat GH æqualis EF; & à puncto dato E per H ducatur recta EH. Dico factum. Tab. I. Fig. 38.

Demonstratio. Constat ex constructione, & n. 95.

Aliter. Ex dato puncto E duc EF perpendicularem ad CD: ad EF deinde ex dato puncto E excita perpendicularem EB [n. 70.]. Hæc est parallela quæsita [n. 91.] Quod erat &c.

Scholion.

In planitie funibus, & hastis obtinebitur, quod in charta circinô, & regulâ.

PROPOSITIO II.

TAB. I. Fig. 32. 104. Problema. *Datâ rectâ* AB *obliquè incidente inter duas parallelas* EF, GH, *ducere ab alio quovis puncto* C, *sumpto in linea* EF, *obliquam alteram æqualiter inter duas paralellas inclinatam.*

Constructio. Ab extremitate A, ubi recta AB obliquè incidens secat parallelam EF, demittatur perpendicularis AP super paralellam GH; & similiter à puncto dato C demittatur perpendicularis altera CQ; tum circinô intervallum BP transferatur à Q in D: à quo ducta recta DC erit æqualiter inclinata.

Demonstratio. Perpendiculares AP, CQ inter duas parallelas sunt æquales (n. 98.): distantiæ pariter BP, DQ sunt per constructionem æquales. Quarè, si intelligamus figuram CDQ figuræ ABP superponi, rectæ CQ, QD perfectè congruent sibi æqualibus rectis AP, PB, sic ut duo puncta C & D cadant supra duo puncta A & B, adeóque (n. 22,) recta CD supra rectam AB; atque hinc CD, AB erunt æqualiter inclinatæ. Quod erat &c.

Corol-

Corollarium I.

105. Rectæ AB, CD æqualiter inclinatæ inter parallelas, ſunt æquales.

Corollarium II.

106. Partes AC, BD ex iiſdem parallelis comprehenſæ inter duas æqualiter inclinatas AB, CD, ſunt pariter inter ſe æquales. Nam partes AC, PQ, TAB.
à perpendicularibus interceptæ, ſunt æ- I.
quales [n. 101.]: diſtantiæ BP, DQ Fig.
ſunt pariter æquales per conſtructionem. 32.
Ergò, ſi à PQ auferatur DQ, & eidem PQ adjiciatur BP æqualis ipſi DQ, recta BD fiet æqualis rectæ PQ, & conſequenter rectæ AC.

Corollarium III.

107. Rectæ AB, CD æqualiter inclinatæ inter duas parallelas MN, OP, ſunt inter ſe parallelæ. Si enim non eſſent parallelæ, neceſſariò concurrerent in aliquo puncto, puta, R: à quo demiſſâ perpendiculari RS ſuper parallelam TAB.
OP, obliqua RB remotior eſſet ab ea- I.
dem perpendiculari, quàm obliqua RD; Fig.
ergò illa magìs eſſet inclinata, contra ſup- 33.
poſitionem.

PROPOSITIO III.

TAB. I.
108. Theorema. *Si duæ rectæ parallelæ* AB, CD *in tertiam* EF *incidant*, Fig.
efficient angulos ABF, CDF *ad eandem* 34.
partem conſtitutos æquales.

Demon-

Demonstratio. Cùm enim anguli quantitas nihil sit aliud, quàm linearum inclinatio, unius in alteram [n. 41.], æqualitas harum inclinationum erit æqualitas angulorum. Duæ autem rectæ AB, CD non poterunt esse invicem parallelæ, quin sint æquè pariter inclinatæ super lineam EF. Perspicuum itaque est angulum ABF æquari angulo CDF. Quod erat &c.

DEFINITIO.

TAB. I. Fig. 35. 109. *Incidente rectâ* EF *in duas parallelas* AB, CD *duo anguli* BGH, DHG *dicuntur interni ad easdem partes, sicuti etiam duo* AGH, CHG. *Duo anguli* AGH, DHG *vocantur alterni. Angulus* EGB *dicitur externus; at verò internus ad easdem partes angulus* GHD.

PROPOSITIO IV.

110. Theorema. *Si duas rectas* AB, CD *parallelas secuerit recta* EF, *erunt æquales alterni anguli* AGH *&* GHD. Euclid. lib. 1. prop. 27. pars 1.

Demonstratio. Per præced. anguli AGH & CHF ad eandem partem constituti, sunt æquales. Atqui [n. 86.] angulus CHF æquatur angulo GHD opposito ad verticem. Itaque anguli alterni AGH & GHD æquales sunt. Quod erat &c.

TAB. I. Fig. 35.

Corollarium.

PRAXIS. *Ex hoc theoremate consequitur*

tur

tur resolutio problematis, quo jubemur per datum punctum G *parallelam ducere ad datam rectam* CD. *Ex* G *ducatur utcunque* GF *secans datam* CD *in puncto* H: *ad punctum* G *fiat angulus* AGH *par angulo alterno* DHG: *erit* AB *parallela ad datam rectam* CD.

PROPOSITIO V.

111. Theorema. *Si recta* EF *in duas rectas parallelas* AB, CD *inciderit, angulus externus* EGB *interno* EHD *ad eandem partem æqualis erit.* Euclid. lib. 1. prop. 27. pars 2.

Demonstratio patet ex Prop. 3.

Aliter. Angulus EGB æquatur opposito ad verticem AGH [n. 86.]. Atqui angulus AGH æquatur sibi alterno EHD: ergò angulus externus EGB æquatur interno ad easdem partes EHD. Quod erat &c. TAB. I. Fig. 35.

PROPOSITIO VI.

112. Theorema. *Recta* EF *incidens in duas rectas parallelas* AB, CD, *angulos ad easdem partes internos, nimirum,* AGH, CHG *duobus rectis æquales efficit.* Euclid. lib. 1. prop. 27. pars 3. TAB. I. Fig. 35.

Demonstratio. Angulus AGH plus angulô BGH æquatur duobus rectis (n. 74.). Atqui per præced. angulus BGH æquatur sibi alterno CHG. Ergò angulus AGH plus angulô CHG æquatur duobus rectis. Eôdem modô

duos

duos angulos BGH, DHG ad easdem partes internos, duobus rectis æquales esse demonstrabis. Quod erat &c.

PROPOSITIO VII.

113. Theorema. *Si duas rectas* AB, CD *secans recta* GO *alternos angulos* AEO, EOD *æquales fecerit, erunt* AB, CD *parallelæ.* Euclid. lib. 1. prop. 28.

Demonstratio. Si negas, sit ergò alia
TAB. XEZ per punctum E ad CD parallela.
I. Ergò [110] angulus XEO par est al-
Fig. terno EOD; quod fieri non potest,
36. cùm per hypothesin AEO par sit eidem EOD. Quod erat &c.

PROPOSITIO VIII.

114. Theorema. *Si duas rectas* AB, CD *secans recta* GO *fecerit externum angulum* GEB *æqualem opposito interno* GOD, *erunt* AB, CD *parallelæ.* Euclid. lib. 1. prop. 29. pars 1.

Fig. 36. *Demonstratio.* Angulus GEB æquatur [n. 86.] angulo AEO opposito ad verticem. Atqui per hypothesin GEB æquatur GOD. Ergò etiam AEO æquatur sibi alterno EOD. Ergò per præced. AB, CD sunt parallelæ. Quod erat &c.

PROPOSITIO IX.

Fig. 36. 115. Theorema. *Si duas rectas* AB, CD *secans recta* GO *fecerit duos ad easdem partes internos angulos* AEO, EOC *pares*

pares duobus rectis , *erunt* AB , CD *parallelæ*. Euclid. lib. 1. prop. 29. pars 2.

Demonſtratio. Angulus COE cum DOE facit duos rectos. Sed per hypotheſin idem COE cum AEO facit duos rectos. Ergò AEO , DOE alterni ſunt æquales. Ergò (n. 113.) rurſum AB, CD ſunt parallelæ. Quod erat &c.

PROPOSITIO X.

116. Theorema. *Si duæ rectæ* AB, CF *ſint parallelæ ad eandem rectam* DN , *erunt inter ſe parallelæ*. Euclid. libr. 1. prop. 30.

Demonſtratio. Patet per ſe , & ex præcedentibus. Nam , ſi omnes ſecentur rectâ GO , erit [n. 111.] angulus externus GEB par interno EHN. Eſt verò EHN externus reſpectu HOE , ac proinde æquales. Ergò etiam GEB par eſt EOF ; ac proinde [n. 114] AB, CF ſunt inter ſe parallelæ , Quod erat &c. Tab. II. Fig. 37.

PRAXIS GEOMETRICA

LIBELLATIONIS.

Parallelarum , ſeu æquidiſtantium linearum theoria artificium aperit , quô ars librandi inſtituitur , ſeu ars libellandi , ùt alii vocant ; cujus ſcopus eſt inquirere , an duo , vel plura puncta , lineæ in terræ ſuperficie exiſtentis ſint æquè alta, & quantus sit excessus unius altitudinis supra alteram. Hoc artificiô inæquales altitudines ad æqualitatem reducimus; & potissimùm ex altiore loco aquas in depressiorem deducimus tantâ velocitate, quantâ opus est. Quare, ut in hiscè nostris Elementis Tirones discant theoriam praxi conjungere, pauca quædam de libellatione hoc locô attingam.

DEFINITIONES.

117. *Duo puncta, quæ à centro terræ æquidistent, vocantur libellæ puncta.*

Linea, cujus omnia puncta æquidistent à centro terræ, appellatur linea veræ libellæ, quæ idcirco curva esse debet.

Scholion.

Cùm partes omnes fluidorum quiescentium eandem à centro telluris distantiam habeant, alioqui remotiores vi gravitatis ruerent versus locum depressiorem: hinc stagnantes superficies lacuum sunt ad veram libellam constitutæ.

118. *Linea libellæ apparentis est recta* BD, *tangens terræ circulum, & consequenter perpendicularis semidiametro* AB.

Hæc linea dicitur libellæ apparentis, quia puncta extrema B & D non æquidistant à centro terræ. Omnis itaque linea horizonti parallela, quæ producta à superficie terræ divergit, quemadmodum

TAB. IV. Fig. 45.

dùm tangens producta recedit à circumferentia circuli., vocatur linea libellæ apparentis.

Recta CD *intercepta à tangente, & circulo, est differentia libellæ apparentis à vera.*

Scholion.

Quando linea libellæ apparentis protenditur ad 100, *vel* 150 *hexapedas, hæc differentia contemni potest. Quòd si hanc longitudinem excedat, habenda erit hujus differentiæ ratio, ùt alibi in Trigonometria demonstrabitur.*

Corollarium.

119. Hinc pavimenta plano horizontali exæquari solita à cæmentariis libellatione compositâ, componuntur quoque ex pluribus superficiebus planis polygonam superficiem constituentibus. Nam hoc ipso quòd libellatio composita sit ex pluribus applicationibus regulæ, cui superponitur libella cum perpendiculo tendente ad centrum terræ, necesse est pavimenti superficiem constare ex tot planis superficiebus, quot sunt regulæ collocationes diversæ. Nam perpendicula extra eandem rectam lineam posita non sunt in rigore geometrico parallela, sed convergunt in centrum terræ; & consequenter planæ illæ superficies rectos angulos cum suis quæque perpendiculis

efficientes, inclinantur ad invicem, neque conſtituunt unicam planam ſuperficiem, ſed compoſitam ex pluribus.

120. Libella eſt inſtrumentum, quô invenitur linea horizontalis, & ad datum quodcunque intervallum continuatur. Quamvìs autem plura libellarum genera à Viris celeberrimis Philippo de la Hire, Roemero, Hugenio, Picardo, aliíſque excogitata ſint: tamen omnium commodiſſimum in praxi videtur illud, quod propriâ experientiâ fretus commendat P. Ricciolius Geograph. reform. lib. 6. cap. 16., & paſſim noſtrâ hâc ætate à Recentioribus uſurpatur.

TAB. IV. Fig. 46. I. Super regula AB pedum 12, aut ad ſummum 20 canaliculô excavatô inſeratur tubus metallicus CD ex bracteis ferreis, ſtannô contra rubiginem oblitis, conflatus, cruribus CA, BD ad angulos rectos reclinatis.

II. In C & D afferruminentur cochleæ orichalceæ, quibus inſeri poſſint aliæ duæ cochleæ E & F, & tubus claudi quàm arctiſſimè.

III. Cochleis autem E & F inſerantur, & peculiari quôdam glutine vitrariis notô conferruminentur cryſtallini duo tubi G & H pellucidi, & ad A B normales; orificia verò tuborum E & F obturentur, ne aqua effluere poſſit.

IV, Medium autem regulæ K ſuperpoſitum ſit ſuo fulcro ſic, ut liberè huc illuc-

illucque libella moveri possit, & in situ eodem, si necesse sit, immota servari.

V. His peractis, si tubus aquâ impleatur, & oculus O per utriusque aquæ superficiem in scopum P collimet, erit OLIP linea parallela horizonti; quia aquarum summitates I & L consistentes distant æqualiter à centro terræ. Si aqua fuerit colorata, distinctiùs internoscentur ejus summitates. At, qui nondum fuerit assuetus collineationi per summitates aquæ, inquit Ricciolius, poterit uti setis equinis horizonti parallelis, & altitudini aquæ utriusque tubi congruentibus, attollendo eas, aut deprimendo, prout opus fuerit, donec congruant aquæ superficiei.

VI. Jam verò, ut evidentiùs discernatur scopus, perticis præaltis inseruntur bracteæ H & K, ùt in sequenti figura, candidô colore in suî centro notatæ intra campum cæruleum, aut nigrum, vel lucernulæ, si libellatio de nocte fiat: quæ bracteæ, vel lucernæ possint attolli, deprimíque, & sisti ubilibet. Fig. 47.

Exemplum I.

121. Esto solum ACB. Oporteat metiri, an A sit altiùs, quàm B, & quantò.

I. Præparentur duo hastilia AF, BG, plurium pedum, puta, 8, aut 10, & amplius: pedes dividantur in uncias duodenas, & unciæ in duodena puncta, juxta usitatam in nostris regionibus divisio- TAB. IV. Fig. 47.

visionem: hastilibus inserantur bracteæ H & K jam descriptæ.

II. His paratis, & libellâ inter duos terminos A & B collocatâ, librator admoveat oculum ad E superficiem aquæ, jubeátque gestatorem hastilis AF perpendiculariter defixi in A, attollere, aut deprimere bracteam H, donec radius visivus per summitates, seu extrema aquæ E & D transmissus incidat opticè in meditullium scopi candidi H: quô factô numerentur pedes, unciæ, & puncta intercepta inter terminum A, & centrum scopi H.

III. Transferat deinde librator oculum in D, & eôdem modô collineet in scopum K.

IV. Subtrahatur altitudo AH ab altitudine BK: differentia BL dabit declivitatem termini A supra terminum B.

Scholion.

Intervalla inter libellam, & scopos, quantò breviora sumuntur, minoris erroris periculum erit. P. Ricciolius putat justum intervallum inter libellam, & hastile esse passuum inter 50, *&* 100.

Exemplum II.

122. Sit invenienda altitudo puncti A supra punctum R. Factâ autem primâ libellæ collocatione in E, observatísque scopis B & C, notentur in Scheda, cui titulus sit sinistra columna, partes intervalli AB, quæ sint, puta, pedes 2, unciæ 3, puncta 5; & sub altera dextera colum-

Tab. IV. Fig. 48.

columna notentur partes intervalli C D, quæ ſint pedes 4, unciæ 2, puncta 3.

Fiat deinde ſtatio ſecunda in F, manente interim haſtâ in D; & ita ferente ſitu obſerventur puncta G & H; notentúrque in finiſtra partes intervalli G D, quæ ſint pedes 2, unciæ 10, puncta 6, & in dextera partes H I, quæ ſint pedes 9, unciæ 2, puncta 7.

Manente verò haſtâ ſupra I, fiat tertia ſtatio libellæ in K; obſervatiſque punctis L & M, notentur ſub ſiniſtra partes I L, nimirum, pedes 4, unciæ 3, puncta 8, & ſub dextera partes M N, nempe, pedes 10, unciæ 3, puncta 2.

Tandem manente haſtâ ſupra N, fiat quarta ſtatio in O; & obſervatis punctis P & Q, notentur ſub ſiniſtra partes P N, & ſub dextera partes Q R, ùt in appoſita tabella. Quare, ſummâ partium ſiniſtrarum ſubtractâ à ſumma dextrarum, exhibebit totam altitudinem A S pedum 24, unciarum 3, punctorum 1, quâ punctum A altiùs eſt puncto R, ùt vides.

	Siniſtra.			Dextra.		
Stationes	Pedes. Unciæ. Puncta.			Pedes. Unciæ. Puncta.		
1.	2.	3.	5.	4.	2.	3.
2.	2.	10.	6.	9.	2.	7.
3.	4.	3.	8.	10.	3.	2.
4.	4.	5.	9.	14.	6.	5.
Summa	13.	11.	4.	38.	2.	5.
			Subtrahe	13.	11.	4.
			Altitudo	24.	3.	1.

Exemplum III.

123. Sit punctum A; quaeratúrque, an ſit altius punctô B. Prima ſtatio ſit in C: in qua obſervatis ſcopi utriuſque centris D & E, notentur ſub ſiniſtra partes AD, quas fingamus eſſe pedum 4, unciarum 3, punctorum 2, & ſub dextera partes EF, quae ſint pedes 7, uncia 1, puncta 4.

TAB. IV. Fig. 49. Secunda ſtatio ſit in G; notentúrque partes ſiniſtrae HF, & dextrae KI.

Similiter tertia ſtatio ſit in M, & quarta in P; & eâdem methodô notentur partes ſiniſtrae, & dextrae, ùt in adjuncta tabella.

His peractis, redigantur in unam ſummam numeri partis ſiniſtrae ſeorſim, & ſeorſim numeri partis dextrae. Nam, ſi ſummae fuerint utrinque aequales, puncta A & B erunt aequè alta; ſin autem fuerint inaequales, ſumma minor punctum altius, & major punctum depreſſius oſtendet; & ſubtrahendo minorem, differentia erit quantitas pedum, unciarum &c., quibus unum alterô altius eſt. Nam quotcunque fuerint diverſitates aſcendendi, & deſcendendi, computatio altitudinis quaeſitae obtinetur, ſi ſumma numerorum ſiniſtrae comparetur cum ſumma numerorum dextrae, & minor à majore ſubtrahatur.

Stationes	Sinistra. Pedes.	Unciæ.	Puncta.	Dextra. Pedes.	Unciæ.	Puncta.
1.	4.	3.	2.	7.	1.	4.
2.	10.	3.	5.	3.	3.	7.
3.	2.	9.	4.	12.	1.	6.
4.	3.	10.	9.	11.	9.	10.
Summa	21.	2.	8.	34.	4.	3.
			Subtrahe	21.	2.	8.
			Altitudo	13.	1.	7.

Scholion.

In libellationibus præsertim longioribus alii dioptras adhibent, ut certiùs colliment, alii dioptrarum locô telescopia.

ELEMENTUM III.

De Lineis Circularibus, earúmque mutuô inter se, & cum Lineis Rectis occursu.

SUPERIORIBUS Elementis, postquam rectarum linearum invicem concurrentium, & earum etiam, quæ nunquam concurrunt, symptomata persecuti fuimus, ordo rerum postulat, ut hæc eadem consideratio ad lineas circulares traducatur.

DEFINITIONES.

124. Planam superficiem comprehensam circuitu unius lineæ ABGDE, cujus omnia puncta æqualiter distent ab eodem TAB. IV. Fig. 50.

eodem puncto C ejusdem plani, diximus n. 56. vocari circulum, punctum C centrum, lineam ABGDE circumferentiam, quamlibet portionem circumferentiæ arcum, & lineam quamvis rectam à centro ad circumferentiam ductam radium nominari. Hisce definitionibus sequentes addendæ sunt.

125. *Omnis recta linea, puta, BD, cujus duæ extremitates B & D in circumferentiam desinunt, dici solet Chorda, quæ, si per centrum transit, uti AD, vocatur etiam Diameter, & duobus radiis æquatur.* Atque hinc omnes diametri ejusdem circuli sunt æquales.

126. *Si recta EF ita circulum tangat in E, ut producta ad F, nullâ ratione circulum secet, sed tota jaceat extra ipsum, dicetur recta EF Tangens circuli.*

TAB. IV. Fig. 50. 127. *Segmentum circuli est figura, quæ sub arcu BGD, ejúsque chordâ BD comprehenditur.*

Spatium, seu figura comprehensa ab arcu AB, & duobus radiis CA, CB, nominatur Sector circuli.

128. *Si à quovis circumferentiæ puncto B ad diametrum AD ducatur perpendicularis BH, hæc dicitur ordinata circuli respectu diametri AD; & partes AH, HD diametri, vocantur abscissæ ordinatæ BH.*

Omnis recta, quæ circulum secat, generatim dicitur Secans.

Circu-

Circuli Concentrici ſunt, qui idem TAB.
centrum habent: Excentrici, qui centra IV.
habent diverſa. Fig. 51. 52.

Corollarium. I.

129. Duæ circumferentiæ concentricæ, quarum radii ſint æquales, in unicam commiſcentur; quarum autem radii ſunt inæquales, nuſquam concurrunt.

Corollarium II.

130. Hinc circuli ſe mutuò ſecantes, aut interiùs tangentes non habent idem centrum. *Euclid. lib. 3. prop. 5. & 6*

PROPOSITIO I.

131. Problema. *Per data tria puncta non in directum jacentia* A, B, D *circulum deſcribere.* Euclid. lib. 4. prop. 5.

Reſolutio. Puncta data A, B, D binis rectis AB, BD connecte, quas [n. 73.] biſeca perpendicularibus MN, OP, concurrentibus in C. Hoc erit centrum circuli per A, B, D tranſeuntis.

Demonſtratio. Quia recta MN perpen-
dicularis eſt in medio rectæ AB, punctum TAB.
C ejusdem perpendicularis erit (n. 51.) IV.
æqualiter diſtans ab extremitatibus A Fig.
& B. Et rurſum, quia OP perpendi- 53.
cularis eſt in medio rectæ BD, punctum pariter C erit æqualiter diſtans à punctis B & D [n. 51.]. Itaque punctum C æquidiſtat à tribus punctis A, B, D, & conſequenter (n. 56.) erit centrum circum-

circumferentiæ tranſeuntis per tria data puncta A, B, D. Quod erat &c.

PROPOSITIO II.

132, Theorema. *Si extra circulum, vel in ipſa circumferentia circuli, vel in circulo quodvis aliud à centro C accipiatur punctum A, ex quo rectæ plures in circumferentiam cadant.*

TAB. IV. Fig. 54. 55. 56.

I. Maxima erit AB, *quæ per centrum tranſit.*

II. Aliarum AE, AD *major eſt illa* AD, *cujus extremitas* D *eſt propior extremitati* B *maximæ* AB.

Et reciprocè.

I. Si recta AB *à quovis puncto* A, *quod non ſit centrum, ducta ad circumferentiam, ſit omnium rectarum maxima, quæ ab eodem puncto* A *ad circumferentiam duci poſſint, recta* AB *tranſibit per centrum.*

II. Si duarum rectarum inæqualium AD, AE *neutra per centrum tranſeat, rectæ* AD, *quæ major eſt, extremitas* D *propior erit extremitati* B *ejus rectæ* AB, *quæ per centrum tranſit.* Euclid. lib. 3. prop. 7, & 8.

Demonſtratio. Ducantur radii CD, CE ad extremitates rectarum AD, AE, quæ per centrum non tranſeunt: erit

I. $CB = CD$; additáque utrinque communi AC, fiet $AB = AC + CD$.

Atqui

Atqui [n. 28.] $AC + CD > AD$. Ergò $AB > AD$. Eôdem modô demonstrabitur $AB > AE$. Quare maxima erit AB, quæ per centrum transit. Quod erat primum.

II. $CD = CE$. Atqui [n. 28.] $CO + OD > CD$. Ergò $CO + OD > CE$. Aufer OC ex utroque membro: residuum $OD > OE$. Adde AO utrinque: fiet $AO + OD$, seu $AD > AO + OE$. Sed $AO + OE > AE$ (n. 28.) Ergò multò magìs $AD > AE$. Quare rectarum per centrum non transeuntium major est illa, quæ maximæ propior. Quod erat alterum.

Et reciprocè.

I. Quia ex prima parte hujus, recta, quæ non transit per centrum, non est omnium maxima linearum, quæ ab eodem puncto A, quod non est centrum, in circumferentiam cadunt: perspicuum est, rectam AB per centrum transire, si omnium maxima sit. Quod erat tertium.

II. Si duarum rectarum inæqualium AD, AE, quæ major est AD, non esset maximæ proprior, per primam partem hujus minor esset, contra hypothesin. Quæ omnia erant demonstranda.

Corollarium I. TAB.

133. Si duæ rectæ AD, AG ab eodem puncto A, quod non sit centrum, ad circumferentiam ductæ, sint æquales, IV. Fig. 57. 58 59.

earum

earum extremitates D, G erunt æqualiter diſſitæ ab extremitate B rectæ AB tranſeuntis per centrum: hoc eſt, arcus BD, BG erunt æquales.

Et reciprocè, ſi ſint æquidiſtantes, erunt æquales.

Corollarium II.

134. Fieri ergò non poteſt, ut ab eodem puncto A, quod non ſit centrum, ad circumferentiam tres rectæ æquales duci poſſint: hoc eſt, ut tria puncta ejusdem circumferentiæ æquidiſtent ab eodem puncto A, quod non eſt centrum. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 8. & 9.

TAB. IV. Fig. 60. Similiter tria puncta ejusdem circumferentiæ, cujus centrum C, pertinere non poſſunt ad aliam circumferentiam, cujus centrum A.

Ergò duæ circumferentiæ FBDF, EBDE in tribus punctis ſe mutuò ſecare non poſſunt. *Euclid. lib.* 3. *pro.p* 10.

Corollarium III.

135. I. Diameter AB eſt omnium chordarum maxima (n. 132.) Et reciprocè. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 15.

II. Duorum arcuum inæqualium AED, AE, quorum uterque ſit ſemicirculô minor, ſive in eodem circulo, ſive in circulis æqualibus, major arcus AED majorem chordam AD ſubtendit (n. 132.)

III. Dua-

III. Duarum chordarum inæqualium AD, AE, five in eodem circulo, five in circulis æqualibus, major AD majorem etiam arcum fubtendit.

IV. Si chordæ AD, AG fint æquales, eorum arcus AED, AHG erunt æquales. Et reciprocè. (n. 133.) *Euclid. lib. 3. prop. 26. & 27.*

V. Si punctum A bifariam dividat arcum DAG punctum æqualiter diftabit à punctis D & G. Nam chordæ AD, AG erunt æquales.

PROPOSITIO III.

136. Theorema. *I. Omnium rectarum, quæ à puncto* A, *quod non fit centrum, in circumferentiam cadunt, minima eft* AM, *quæ producta tranfit per centrum* C.

Et reciprocè.

II. Si recta AM *fit omnium minima linearum, quæ à puncto* A, *quod non fit centrum, in circumferentiam incidunt, eadem* AM *producta femper tranfit per circuli centrum* C. Euclid. lib. 3. prop. 7. & 8.

Demonftratur I. pars. Efto quævis alia recta AN ab eodem puncto A ad circumferentiam ducta, quæ producta non tranfeat per centrum C. Dico hanc fore majorem ipsâ AM. TAB. IV.

Ducatur radius CN. Si punctum A eft intra circulum, erit NA + AC > N Fig. 54.

NC [n. 28.]. Sed NC = MC. Ergò NA + AC > MC; ſublatóque utrinque AC, erit [n. 36.] AN > AM.

Si verò punctum A ſit extra circulum,
TAB. erit AN + NC > AC; ſublatíſque
IV. utrinque æqualibus, id eſt, radio NC ex
Fig. una parte, & radio MC ex altera, erit
56. (n. 36.) AN > AM. Quot erat primum.

Demonſtratur II pars. Nam, ſi AM non tranſiret per centrum C, non eſſet ex prima parte hujus Theor. omnium linearum minima, contra hypotheſin. Quod erat alterum.

PROPOSITIO IV.

137. Theorema. *Si recta* FG *circumferentiæ occurrat in duobus punctis* A & B, *circulum ſecat.* Euclid. lib. 3. prop. 2.

TAB. *Demonſtratio.* Ducantur radii CA,
IV. CB ubi circumferentiæ occurrit recta
Fig. FG. Hi duo radii, cùm ſint æquales,
63. perpendiculares eſſe non poſſunt rectæ FG, ſed æquidiſtantes erunt à perpendiculari ductâ à centro C. [n. 92.]. Itaque perpendicularis CD à centro ducta cadet in medio rectæ AB. Atqui hæc perpendicularis CD minor eſt radiô CA, aut CB; quin imò omnes rectæ ductæ à centro C inter A & B minores ſunt eiſdem radiis CA, CB (n. 89.). Ergò omnia puncta rectæ AB inter

inter A & B contenta, intra circulum cadunt. Omnes pariter rectæ à centro C ductæ ad F G, inter A & F, vel inter B & G erunt longiores radiis C A, C B (n. 89.) Ergò partes A F, B G ejusdem rectæ F G extra circulum cadunt. Itaque recta F G, quæ circumferentiæ occurrit in duobus punctis A & B, circulum ſecat. Quod erat &c.

Corollarium I.

138. Ergò tangens F G circumferentiæ occurrit in unico puncto E; aliter ſecaret circulum. Tab. IV. Fig. 64.

Corollarium II.

139. Recta C E, à centro C ad punctum contactûs E ducta, tota intra circulum cadit; & quævis alia recta, puta, C D à centro ad tangentis punctum quodvis aliud à puncto contactûs ducta, egreditur à circulo. Hinc ſequitur Tab. IV. Fig. 64.

I. Rectam C E, à centro ductam ad punctum contactûs, minimam fore omnium linearum, quæ duci poſſint à centro ad tangentem, & conſequenter huic tangenti perpendicularem eſſe (n. 89.). *Euclid. lib, 3. prop.* 18.

II. Aliam quamvis lineam C D, quæ à centro ad punctum contactûs ducta non ſit, non eſſe minimam linearum, quæ duci poſſint à centro ad tangentem, & conſequenter huic tangenti perpendicularem non eſſe.

III. Tangens itaque F G tota cadit extra circulum, eúmque tangit in E. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 16. *part* 1.

Corollarium III.

TAB. IV. Fig. 64. 140. Recta igitur CE, quæ à centro C perpendiculariter ducatur ad tangentem F G, transit per punctum contactûs; aliter non esset tangenti perpendicularis.

Hoc Corollarium usui est resolutioni problematis, in quo quæratur, ut determinetur punctum, in quo tangens occurrit circumferentiæ circuli.

Corollarium IV.

141. Quia radius CE, à centro ad punctum contactûs ductus, tangenti F G perpendicularis est, erit reciprocè tangens F G perpendicularis radio C E in puncto contactûs, seu in extremitate ejusdem radii.

Corollarium V.

TAB. IV. Fig. 64. 142. Et reciprocè recta F G, quæ perpendiculariter ducatur ad extremitatem radii CE, tanget circulum in Puncto E.

Nam, si hæc perpendicularis F G circulum non tangeret in puncto E, recta, quæ circulum tangeret in eodem puncto E, non esset perpendicularis radio CE in ejusdem extremitate: quod repugnat præced. Corol.

Habés hinc methodum facillimam, quâ ad datum circumferentiæ punctum tangentem ducas.

PRO-

PROPOSITIO V.

143. Theorema. *Si recta* AE *perpendiculariter, & bifariam secet chordam* FG,

I. Recta AE *transibit per centrum* C.

II. Eadem bifariam secabit arcum FEG.

Demonstratur I. pars. Puncta omnia, quæ æqualiter distabunt à duabus extremitatibus rectæ FG, erunt necessariò in perpendiculari AB [n. 51.]. Atqui centrum C est æqualiter distans à duabus extremitatibus F & G, quæ sunt in circumferentia (n. 56.). Ergò centrum C est in perpendiculari AB; & consequenter hæc perpendicularis per centrum transit. Quod erat primum. TAB. IV. Fig. 65.

Demonstratur II. pars. Punctum medium E arcûs FEG est æqualiter distans à suis extremitatibus F & G [n. 135.]. Ergò perpendicularis AB transibit etiam per hoc punctum medium E (n. 51.), & consequenter arcum FEG secabit bifariam. Quod erat alterum.

Scholion.

144. *Hoc Theorema viam aperit resolvendi duo problemata.*

Nam ex prima parte hujus invenies centrum dati circuli, aut arcûs ABD; *si nempe in hoc arcu ducantur duæ chordæ* AB, BD, *& in earum medio excitentur perpendiculares* MN, OP, *quarum* TAB. IV. Fig. 53.

rum utraque transibit per centrum; & consequenter in puncto C *concursûs determinabitur centrum. Eôdem artificiô datum arcum perficies.* Euclid. lib. 3. prop. 25.

. Secunda pars Theorematis docet methodum secandi arcum bifariam.

Corollarium I.

TAB. IV. Fig. 65. 145. Quoniam ex præced. Theor. recta A E perpendicularis in medio chordæ F G transit per centrum, & secat arcum F E G bifariam: perspicuum est, quòd punctum medium B chordæ F G, punctum medium E sui arcûs F E G, & centrum C circuli in eadem recta linea consistant. Quarè, si linea recta per duo ejusmodi trium punctorum B, E, C ducatur, necessariò per tertium transibit, erítque simul perpendicularis in medio chordæ F G: hoc est,

I. Si recta A E transit per centrum C, & per punctum medium B chordæ F G, eadem dividet arcum F E G bifariam, & erit perpendicularis in medio chordæ F G. *Euclid. lib. 3. prop. 3. & 30.*

II. Si recta A E transit per centrum C, & per punctum medium E arcûs F E G, eadem erit perpendicularis in medio B chordæ F G.

III. Si recta A E bifariam secat & chordam F G, & arcum F E G, eadem transibit per centrum, & erit perpendicularis in medio chordæ F G.

Ita-

Itaque duobus datis dantur reliqua.

Corollarium. II.

146. Quoniam ad idem punctum medium B chordæ F G perpendicularis unica duci poteſt (n. 50.); & præterea ex præced. Theor. hæc perpendicularis tranſit per centrum C, & per punctum medium E arcûs F G E : illud evidenter conſequitur, quòd, ſi linea recta ſit perpendicularis chordæ F G , & tranſeat per unum ex tribus punctis B, E, C , tranſibit quoque neceſſariò per duo reliqua , hoc eſt ,

I. Si recta AE ſit perpendicularis chordæ F G, ac bifariam ſecet arcum F E G, eadem tranſibit per centrum C, & per punctum B medium chordæ F G.

II. Si recta A E ſit perpendicularis chordæ F G , & tranſeat per centrum C , eadem ſecabit bifariam & chordam, & arcum. *Euclid. lib. 3. prop. 3.*

Corollarium III.

147. Duo arcus AF , B G à duabus chordis parallelis AB , F G intercepti, ſunt æquales. Nam, ſi à centro C ducatur recta C E perpendicularis ſuper AB , erit eadem perpendicularis alteri parallelarum F G. Itaque per Corol. præced. recta C E tranſibit per punctum medium E duorum arcuum A E B, F E G. Erit ergò arcus AFE= arcui B G E; & arcus F E= arcui GE.

Quarè, ſi ſecunda æqualitas ſubducatur à prima, reſiduum erit arcus AF = arcui BG.

TAB. IV. Fig. 66. Et reciprocè, ſi in eodem circulo duo arcus AF, BG ab iiſdem chordis AB, FG intercepti, ſint æquales, chordæ erunt parallelæ. Nam, ſi ad punctum medium E arcûs FEG ducatur radius CE, hic erit perpendicularis chordæ FG (n. 145.). Atqui punctum E eſt quoque per conſtructionem medium arcûs AFEGB. Ergò radius CE erit etiam perpendicularis chordæ AB (n. 145.): hinc idem radius CE erit perpendicularis duabus chordis AB, FG. Ex quo ſequitur, (n. 87.) duas chordas AB, FG perpendiculares eſſe eidem rectæ CE, & conſequenter parallelas [n. 91.].

148. Hinc diſces per datum punctum F parallelam ducere datæ rectæ AB. Sumptô enim quovis punctô C pro centro, deſcribatur per punctum F arcus AFEGB, qui rectam AB ſecabit in duobus punctis A & B; dein accipiatur arcus BG æqualis arcui AF: recta à puncto G ad punctum datum F ducta, erit parallela quæſita.

Corollarium IV.

TAB. IV. Fig. 66. 149. Ergò duo arcus AE, BE ſunt æquales, ſi intercipiantur à chorda AB, & tangente FG, quæ ſint invicem parallæ rallelæ. Nam radius CE ad punctum contactûs E ductus, tangenti perpendicularis eſt (n. 139.), & pariter perpendicularis chordæ parallelæ AB (n. 99.); & conſequenter dividet arcum AEB bifariam. Ergò punctum contactûs E tangentis, quæ chordæ AB ſit parallela, ſecat arcum AEB in duos arcus æquales.

PROPOSITIO VI.

150. Theorema. *Duæ circumferentiæ, quæ ſe invicem ſecant, in duobus tantùm punctis ſibi mutuò poſſunt occurrere.*

Et viciſſim.

Duæ circumferentiæ, quæ in duobus punctis B *&* D *ſibi mutuò occurrunt, ſe invicem ſecant.* Euclid. lib. 3. prop. 10. TAB. IV.

Demonſtratur I. pars. Nam duæ circumferentiæ in tribus punctis non poſſunt occurrere, quin mutuò congruant, & in unicam confundantur (n. 134.). Ergò duæ circumferentiæ, quæ ſe invicem ſecant, in duobus tantùm punctis ſibi mutuò occurrunt, hoc eſt, in puncto ingreſsûs unius in alteram, & in puncto egreſsûs. Quod erat primum. Fig. 68.

Demonſtratur II. pars. Ex A centro unius ciruli ducantur radii AB, AD ad puncta, in quibus circumferentiæ ſibi mutuò occurrunt. Itaque, cùm duæ rectæ AB, AD ſint æquales, neutra earum tranſibit per centrum C alterius circuli B G D E, ſed ambo deſinent in puncta B & D æquè diſtantia ab extremitate E rectæ A E, quæ tranſit per centrum C hujus circuli (n. 133.). Concipe jam ab eodem puncto A ad omnia circumferentiæ B G D E B puncta infinitas rectas duci : rectæ, quæ ab arcu B G D terminantur, minores erunt radiis A B, A D (n. 136.); rectæ, quæ ab arcu B E D terminantur, majores erunt iisdem radiis A B, A D (n. 132.). Ergò arcus B E D erit extra eundem; & conſequenter duo circuli, qui in duobus circumferentiæ punctis ſibi mutuò occurrunt, ſe invicem ſecant. Quod erat alterum.

Corollarium I.

Tab. IV. Fig. 69. 70. 151. Duæ ergò circumferentiæ, quæ ſe tangunt vel exteriùs, vel interiùs, in unico puncto E ſibi mutuò occurrunt; alioqui contra hypotheſin ſe invicem ſecarent. *Euclid. lib. 3. prop. 13.*

Quinimò omnes, quotquot ducere libuerit, circuli, qui habent centra in una recta, eámque ſecant in eodem puncto E, ſe mutuò in puncto illo contingunt. Quod perſpicuum eſt, inquit P. Tacquet, ex notione ipſa linearum, quæ comparantur. Neque enim aut recta linea, & curva circuli peripheria, aut peripheriarum inæqualium diverſæ curvaturæ ſecundùm ullam ſuî partem poſſunt con-

congruere; congruerent autem, si se in tota invicem parte aliqua tangerent.

Corollarium II.

152. Ergò recta AE, quæ à centro A circuli X ad punctum contractûs E utrique circulo X & Z commune ducitur, est omnium rectarum minima, quæ duci possint ab eodem puncto A ad circumferentiam circuli Z. Nam, ùt paret, AB > AE.

Corollarium III.

153. Si duo circuli X & Z se intus, vel exteriùs tangant, recta AE, quæ à centro A unius X ducitur ad punctum contactûs E, ulteriùs producta transibit per centrum C alterius circuli Z. Nam AE in utroque casu est omnium rectarum minima, quæ duci possint à puncto A ad circulum Z [n. 136.].

Duorum ergò circulorum se intus, vel exteriùs contingentium duo centra, & punctum contactûs sunt in una eadémque linea recta.

Itaque, si duo circuli se intus, vel exteriùs tangant, recta conjungens eorum centra C & A transibit per contactum E. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 11. & 12.

Corollarium IV. TAB.

154. Hinc duorum circulorum se se tangentium facilè determinatur punctum contactûs E: si nimirum per eorum centra ducatur recta AC. IV. Fig. 69. 70.

Corollarium V.

155. Ex Corol. 4. consequitur etiam methodus describendi quemvis circulum, aut arcum, qui datum circulum tangat in dato puncto. Nam per dati circuli centrum, & per datum punctum contactûs ducta recta transibit per centrum alterius circuli intervallô quôvis describendi.

Scholion.

156. *Postrema hæc operatio Architectis maximi usûs esse solet; quippe qui, adhibitis portionibus ejusdem circuli, vel diversorum circulorum se se contingentium, diversas curvas eô artificiô describunt, ut curva ex his segmentis composita, una eadémque, suæque originis esse videatur. Exponam itaque hoc loco in gratiam Tironum praxes ab Architectis adhibitas.*

TAB. IV. Fig. 71. 72. 157. Praxes. *Cymatium* E D C *est curva sinuosa, quæ punctum inflexionis habet in* D, *quæque componitur ex duobus segmentis circulorum se se tangentium in hoc puncto inflexionis* D. *Quare centra* A *&* B, *& punctum contactûs* D *duorum arcuum sunt in eadem recta linea* A D B.

TAB. IV. Fig. 73. 158. *Arcus depressi, qui ad similitudinem semiellipsium accedunt, constant tribus segmentis circulorum, quorum medium* D F *tangit extremitatibus suis* D

&

& F duos alios arcus ED, FG. *Itaque centrum* A *arcûs* ED, *centrum* B *arcûs* DF, *& punctum commune contactûs* D, *quô hi duo arcus junguntur, sunt in unica recta linea* BAD. *Similiter centrum* B *arcûs* DF, *centrum* C *arcûs* FG, *& punctum contactûs* F, *quô duo istiusmodi arcus connectuntur, sunt in eadem recta* BCF.

159. *Helices, quæ spiralium formam imitantur, constant pluribus arcubus* ED, DF, FG, *sibi invicem succedentibus, qui se contingunt in punctis, ubi uniuntur. Itaque centrum* A *primi arcûs* ED, *& centrum* B *secundi* DF, *& punctum contactûs* D, *ubi connectuntur hi duo arcus, sunt in eadem recta linea* DB. *Pariter centrum* B *arcûs* DF, *centrum* C *arcûs sequentis* FG, *& punctum contactûs* F *commune duobus arcubus, sunt in eadem recta* BF. *Atque ità porrò de reliquis arcubus, qui connecti possent, & curvam non interruptam componere videntur.* TAB. IV. Fig. 74.

PROPOSITIO VII.

160. Theorema. *Inter tangentem* ED, *& arcum circuli nulla duci potest recta linea, quin circulum secet.* Euclid. lib. 3. prop. 16. TAB. IV. Fig. 75.

Demonstratio. Infra ED, si fieri potest, cadat FB tota extra circulum. Quoniam tangens ED per B extremitatem diame-

diametri perpendicularis eſt radio A B (n. 139.), erit eadem F B obliqua radio A B, & reciprocè radius A B obliquus rectæ F B; duci ergò poteſt à centro A ad rectam F B perpendicularis A B, quæ minor erit radio A B (n. 89.). Itaque punctum C intra circulum cadet; adeóque recta F B circulum ſecat. Quod erat &c.

Corollarium I.

TAB. IV. Fig. 76. 161. Quæ ab hoc Theoremate conſequuntur Corollaria, vel potiùs paradoxa, breviſſimè in gratiam Tironum juvat attingere, eíſque infiniti myſteria hoc loco primùm aperire, varióſque infinitorum ordines, hoc eſt, calculi infiniteſimalis principia. Angulus igitur contactûs tangente H L, & arcu M L interceptus, eſt quovis rectilineô minor. Angulus verô ſemicirculi inter radium C L, & arcum M L interceptus, eſt quovis rectilineô acutô major.

Scholion.

162. *Hoc paradoxum Euclidis exercuit Mathematicorum ingenia. Agitata eſt hæc de angulo contactûs controverſia inter Jacobum Peletarium Cenomani in Gallia Matheſeos Profeſſorem, & Chriſtophorum Clavium. Hic in ſchol. ad 16. elem. 3. angulum contactûs rectilineo heterogeneum agnovit, quemadmodum linea eſt ſuperficiei heterogenea; ille verò*

angu-

angulum contactûs è numero angulorum sustulit, & pro non quanto declaravit. Egregium etiam de angulo contactûs, & semicirculi tractatum conscripsit Wallisius vol. 2., ubi cum Peletario angulum contactûs omni assignabili minorem, adeóque nullius magnitudinis esse defendit. Verùm nemo meliùs mysterium hoc enucleavit, quàm Newtonus lib. 1. princip. philosoph. natural. lem. 6., ubi prima jacit calculi infinitesimalis principia, demonstrátque, quomodo angulus rectilineus sub tangente, & chorda, quæ versùs tangentem continuò accedat, comprehensus, minuatur in infinitum, & ultimò evanescat: nimirum

163. LEMMA. Si arcus quilibet positione datus ACB subtendatur chordâ AB, & in puncto aliquo A, in medio curvaturæ continuæ, tangatur à recta utrinque producta AD, dein puncta A & B ad invicem accedant, & coëant: Dico, quòd angulus BAD sub chorda, & tangente contentus minuetur in infinitum, & ultimò evanescet. Nam, si angulus ille non evanescit, continebit arcus ACB cum tangente AD angulum rectilineo æqualem; & propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothesin. TAB. IV. Fig. 77.

Itaque inter tangentem AD, & chordam infinitesimam AB nulla duci potest recta linea, quæ angulum finitum cum chor-

chorda, vel tangente efficiat; ideóque inter arcum AB, & tangentem AD nulla duci poteſt recta linea, quæ arcum non ſecet.

Corollarium II.

164. Cùm recta linea omni carens latitudine inter tangentem, & circulum ad contactum duci non poſſit, quin circulum ſecet: perſpicuum eſt ſpatium inter tangentem, & circulum fore infinitè parvum.

Corollarium III.

165. Hoc tamen ſpatium in ſe ipſo infinitè parvum dividi adhuc poteſt in alia infinita minora ſpatiola infinitè parva. Nam per idem punctum contactûs infiniti circuli majores duci poſſunt. Quâ in re latet totum myſterium aſymptoticum, hoc eſt, lineæ rectæ ad hyperbolam unà ſecum in infinitum productam accedentis ad intervallum quocunque datô minus, nunquam tamen concurrentis.

Corollarium IV.

166. Ex his ſequitur diverſos eſſe, & pariter infinitos infinitè parvorum ordines. Quod P. Guido Grandus luculenter expoſuit, & demonſtravit in opere egregio, quod inſcribit: *De infinitis infinitorum, & infinitè parvorum ordinibus.* Atque hinc calculi infiniteſimalis principia ſanè fœcundiſſima. Verùm hæc alibi multò accuratiùs tractabuntur.

ELE-

ELEMENTUM IV

De Angulorum Menſura.

HACTENUS cujusvis anguli verticem conſideravimus tanquam in centro circuli intervallô quovis deſcripti conſtitutum ; & arcum à lateribus anguli ininterceptum menſuram eſſe ejuſdem quantitatis definivimus n. 60. Quoniam verô angulus quilibet tres reliquas poſitiones diverſas , etiam reſpectu circuli , obtinere poteſt , ità ut ejus vertex vel ſit in circumferentia circuli, vel inter centrum , & circumferentiam , aut denique extra circulum ; ſancienda erit in hoc Elemento generalis lex, quâ elicienda ſit angulorum menſura ex eodem circulo, datis tribus hiſcè poſitionibus.

DEFINITIONES.

167. *Segmentum circuli eſt figura , quæ ſub chorda , & circumferentia comprehenditur* ; quemadmodum chorda CE circulum dividit in duo inæqualia ſegmenta, nimirum, majus CBE, & minus CAE.

168. *Angulus* FCE *comprehenſus à tangente* FG , *& chorda , ſeu ſecante* CE *à puncto contactûs ductâ*, *dicitur angulus minoris ſegmenti.* TAB. IV. Fig. 78.

Angulus GCE *comprehenſus ab eadem chorda* CE , *eâdémque tangente* FG, *dicitur majoris ſegmenti.*

Uter-

Uterque autem ſimpliciter vocari ſolet angulus ſegmenti.

169. *Angulus* CAE , *cujus vertex eſt in circumferentia minoris ſegmenti , & cujus latera à chordæ terminantur, vocatur angulus in ſegmento minore ; & ſimiliter angulus* CBE *vocatur angulus in ſegmento majore.*

Omnis autem angulus ſive in majore , ſive in minore ſegmento dicitur angulus in ſegmento , ſive angulus inſcriptus , & angulus ad circumferentiam.

170. *Angulus* CBE *inſiſtere dicitur arcui* CAE , *qui illi opponitur.*

PROPOSITIO I.

171. Theorema. *Angulus quilibet* CAB , *cujus vertex* A *eſt in circumferentia circuli, comprehenſus vel à duabus chordis* AC , AB , *vel à tangente* CA , *& chorda, ſeu ſecante* AB , *hoc eſt , à duobus lateribus , quæ ultra verticem producta nuſquam circumferentiæ poſſint occurrere , habet pro menſura medietatem arcûs à ſuis lateribus intercepti.*

Quoniam Propoſitio tres caſus complectitur , idcirco tripartitâ demonſtratione opus erit.

TAB. V. Fig. 79. 80. 172. *Domonſtratio caſûs I.* Si latus AB anguli BAC tranſit per centrum O, ducatur per idem centrum O recta PM parallela alteri lateri AC. His ſtantibus, angulus BAC= BOP (n. 108.).

Atqui

Atqui angulus BOP, cujus vertex eſt in centro, habet pro menſura arcum DP [n. 60.]. Ergò angulus BAC habet pro menſura eundem arcum DP. Reliquum jam eſt, ut demonſtretur arcum DP ſemiſſem eſſe arcûs DPE.

Anguli ad verticem oppoſiti BOP, AOM, quorum vertex eſt in centro O, ſunt æquales (n. 86.). Ergò arcus DP = AM. Atqui arcus AM = PE (n. 147.). Ergò arcus DP = PE; & conſequenter DP eſt ſemiſſis arcûs DPE. Angulus itaque BAC habet pro menſura medietatem arcûs DPE à ſuis lateribus intercepti. Quod erat &c.

173. *Demonſtratio casûs II.* Si cen- Fig.
trum O inter duo latera anguli BAC ſit 81.
poſitum, ducatur recta AP à vertice A 82.
per centrum O. Hæc angulum BAC in duos angulos ſecabit BAP, PAC, ad normam Caſûs I.; hoc eſt, utriuſque anguli latus unum AP tranſibit per centrum O. Quarè

I. Angulus BAP habebit pro menſura ſemiſſem arcûs DP.

II. Angulus PAC habebit pro menſura ſemiſſem arcûs PE.

Ergò totius anguli BAC menſura erit ſemiſſis totius arcûs DPE à ſuis lateribus intercepti. Quod erat &c.

174, *Demonſtratio caſûs III.* Si cen- Fig.
trum O neque in uno latere reperiatur, 83.
neque inter latera anguli BAC, à verti- 84.

ce A per centrum O ducatur recta AP. Itaque

I. Summa duorum angulorum BAC, CAP, ſive angulus totalis BAP, cujus unum latus tranſit per centrum, habet per Caſum I. pro menſura medietatem arcûs DEP, hoc eſt, $\frac{DE}{2} + \frac{EP.}{2}$

II. Atqui angulus CAP per Caſum I. habet ſimiliter pro menſura ſemiſſem arcûs EP, ſive $\frac{EP.}{2}$

Ergò alter angulus BAC habet pro menſura $\frac{DE}{2}$, id eſt, ſemiſſem arcûs à ſuis lateribus intercepti. Quod erat &c.

Scholion.

175. *Habes hinc univerſalem regulam metiendi quemcunque angulum ad circumferentiam, ſive in ſegmento circuli, hoc eſt, ùt vocant, circulo inſcriptum, ſive angulum ſegmenti à tangente, & ſecante à puncto contactûs comprehenſum. Ex hac autem propoſitione ſpontè fluunt pleraque, quæ ab Euclide lib. 3. multò operoſiùs demonſtrantur, Theoremata.*

Corollarium. I.

TAB. V. Fig. 85. 176. Anguli ABD, DCE, quorum vertices B & C ſunt in eadem circumferentia, & æqualibus arcubus AD, DE inſiſtunt, inter ſe omnes ſunt æquales.

Vel:

Vel: anguli BAC, BDC, BEC, quorum vertices A, D, E sunt in eadem circumferentia, & eidem arcui BC insistunt, inter se omnes sunt æquales. *Euclid. lib. 3. prop. 21.*

Corollarium II.

177. Angulus ad centrum CAD duplus est anguli CBD ad circumferentiam, cum idem arcus CD est basis angulorum. *Euclid. lib. 3. prop.. 20.* Tab. V. Fig. 86.

Nam angulum ad centrum CAD metitur integer arcus CD, ejúsque semissis [171.] metitur angulum CBD ad circumferentiam.

Scholion.

178. *Dominus Deidier in egregio Opere, quod inscripsit:* Science des Geom. p. 1. n. 159, *Geometras coarguit, quasi verò hoc Theorema non satìs circumscriptè pronunciaverint. Ait enim eosdem contentos fuisse hâc expressione :* Angulus ad centrum duplus est anguli ad peripheriam, cùm uterque eidem arcui insistit, *vel, ùt exponit Clavius*, cùm fuerit eadem peripheria basis angulorum. *Monet itaque Deidier, addi oportere* : cùm uterque angulus summitatem habet ad easdem partes arcûs conversam.

Ratio est, inquit ipse, I. quia angulus BAC *ad circumferentiam est angulus in semicirculo; neque tamen ad cen-*

trum angulus ullus fieri potest, qui eidem arcui insistat.

II. Angulus BAC *ad circumferentiam est angulus in segmento minore; angulus autem ad centrum* BDC, *cujus vertex ad oppositam partem convertitur, non semper duplus erit anguli ad peripheriam. Nam angulum ad centrum* BDC *metitur arcus* BAC; *& angulum ad peripheriam* BAC *metitur* (171.) *semissis arcûs* BEC, *quæ semissis non æquat arcum* BAC, *nisì quando arcus* BAC *est tertia pars totius circumferentiæ.*

TAB. V. Fig. 87. 88.

At, pace tanti Viri, hoc additamentum & inutile mihi videtur, & alienum censeo à trita Geometrarum loquendi consuetudine. Quid enim aliud sibi volunt, cùm dicunt: utrumque angulum eidem arcui debere insistere, *vel*, eundem arcum basim esse utriusque anguli, *nisi idipsum quod Deidier adjiciendum putat*, verticem utriusque anguli ad easdem partes arcûs debere converti?

Duo autem, quos Deidier recenset casus de angulo in semicirculo, & de angulo in segmento minore, neque à Theoremate comprehenduntur, utì palam est, eósque multò antè prospexerat Clavius lib. 3. elem., qui, quam relationem habere adhuc possent ad angulum centri, luculenter explicat, & demonstrat hisce verbis.

Quod

Quod si rectæ BD, CD in centro angulum non constituant ad partes basis BC; quod tum demum fit, quando segmentum BAC est vel semicirculus, vel segmentum minus: nihilominùs spatium illud ad centrum duplum erit anguli ad circumferentiam, qui eandem habeat basim, quam spatium illud. Ductâ enim rectâ AE per centrum, erit tam angulus BDE ad centrum duplus anguli BAE ad circumferentiam, quàm angulus CDE ad centrum, anguli CAE ad circumferentiam: ùt ostensum est. Spatium igitur ad centrum D, basim habens BEC, constánsque ex duobus angulis BDE, CDE, duplum est totius anguli BAC. Quod est propositum.

Corollarium III.

179. In circulis æqualibus, vel in eodem, si anguli sive ad centra, sive ad circumferentiam sint æquales, etiam arcus, quibus insistunt, sunt æquales.

Et reciprocè, si arcus sunt æquales, etiam anguli æquales erunt. *Euclid. lib. 3. prop. 26. & 27.*

Constat pariter duos angulos inæquales, quorum vertices sunt in circumferentia ejusdem circuli, insistere arcubus inæqualibus, majorémque angulum insistere majori arcui.

Et reciprocè.

Corollarium IV.

Tab. V. Fig. 89. 180. Angulus BAC in ſemicirculo rectus eſt. *Euclid lib. 3. prop. 31. pars 1.*

Nam ſemiſſis ſemicirculi, cui inſiſtit idem angulus ad circumferentiam, eſt quadrans, menſura anguli recti (n. 61).

Corollarium. V.

Tab. V. Fig. 90. 181. Angulus BAC in ſegmento majore eſt minor rectô, id eſt, acutus. *Euclid. lib. 3. prop 31. pars 2.*

Nam inſiſtit arcui, qui ſemicirculô minor eſt, ejúſque ſemiſſis quadrante minor, menſura anguli acuti.

Corollarium VI.

Tab. V. Fig. 91. 182. Angulus BAC in ſegmento minore eſt major rectô, id eſt, obtuſus. *Euclid. lib. 3. prop. 3 . pars 3:*

Nam inſiſtit arcui: qui ſemicirculô major eſt, ejúſque ſemiſſis quadrante major, menſura anguli obtuſi.

Corollarium VII.

Tab. V. Fig. 92. 183. Hinc examen normæ, num exactè rectangula ſit, inſtituitur. In circulo enim quocunque, poſitô ad circumferentiæ punctum quodvis A normæ vertice, ſi latera per diametri extrema B, C tranſeunt, angulus eſt rectus; ſin minùs, aut acutus, aut obtuſus erit.

Si normæ latera ad puncta B & C continuò adjuncta teneantur, interea

dum

dum angulus utrinque circumagatur : vertex anguli A deſcribet circumferentiam circuli, cujus diameter eſt linea BC,

Corollarium VIII.

184. Ab extremitate A rectæ AC, quæ ultra punctum A produci non possit, perpendicularem excitare. Tab.
V.
Fig.
93.

Sumptô quovis extra datam lineam punctô F, ex quo, tanquam centrô, intervallô FA deſcribatur circulus, qui datæ rectæ AC occurrat in E, ductáque diametrô EFB, recta BA erit perpendicularis quæſitá (n. 180.).

Similiter ex dato extra rectam BC punctô quôvis A, ad eandem ducenda ſit perpendicularis.

Ex puncto dato A ducatur obliqua AE, quæ occurat rectæ BC in aliquo puncto E ; tum ſuper AE, tanquam diametro, deſcribatur ſemicirculus ABE, qui rectæ BC occurrat in alio puncto B : recta AB erit perpendicularis quæſita. Tab. V. Fig. 94.

Corollarium IX.

185. Ex puncto dato A rectam ducere, quæ datum circulum Bb tangat. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 17.

Centrum C, & datum punctum A junguntur rectâ CA : ſuper qua, tanquam diametrô, deſcribatur circulus ABCb occurrens dato in punctis B & b. Utraque recta Ab, AB erit tangens Tab. V. Fig. 96.

quæſita. Nam ductis radiis Cb , CB , anguli CbA, CBA in ſemicirculo utrinque recti ſunt ; & conſequenter rectæ Ab , AB erunt perpendiculares extremitati radiorum Cb , CB , atque adeò tangentes (n. 142.).

Corollarium X.

TAB. V. Fig. 97. 186. Si recta B C circulum tangat, & alia ex contactu A ducta A D eundem ſecet, erit angulus C A D à tangente, & ſecante factus, par angulo A E D, qui fit in ſegmento alterno. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 32.

Nam utriuſque anguli C A D & A E D menſura eſt ſemiſſis ejusdem arcûs A F D.

Corollarium XI.

Fig. 97. 187. Angulus C A D minoris ſegmenti , & angulus A F D inſcriptus in eodem ſegmento , ſimul ſumpti æquantur duobus rectis.

Nam ex dictis angulum C A D metitur ſemiſſis arcûs A F D ; & angulum A F D metitur ſemiſſis arcûs reliqui A E D. Ergò utrumque angulum ſimul ſumptum metitur ſemiſſis totius circumferentiæ , ideſt , menſura duorum rectorum. Simili ratiociniô demonſtrabis, angulum B A D majoris ſegmenti , & angulum A E D inſcriptum in eodem ſegmento , ſimul ſumptos æquari duobus rectis.

Corollarium XII.

188. Duo anguli circulo inſcripti AD B & ACB, oppoſiti, & inſiſtentes iisdem punctis A & B, æquantur duobus rectis. *Euclid. lib.* 3. *prop.* 22. TAB. V. Fig. 98.

Nam alterutrum metitur ſemiſſis arcuum, quibus inſiſtunt. Ergò utrumque metitur totius circumferentiæ ſemiſſis, quæ eſt menſura duorum rectorum.

Corollarium XIII.

189. Si centris in eadem recta linea A O in infinitum protracta acceptis deſcribantur per A plures circuli in amplitudinem quamcunque excreſcentes, & à puncto contactus A ducatur ſecans A B C D: arcus ſinguli, intercepti à tangente AG, & chordis AB, AC, AD, erunt totidem graduum. TAB. V. Fig. 99.

Nam eundem angulum GAD metitur ſemiſſis arcûs AB, ſemiſſis arcûs A C, & ſemiſſis arcûs AD &c.

PROPOSITIO II.

190. Problema. *A dato circulo X ſegmentum* DGE *auferre capiens angulum* DGF *parem dato.* Euclid. lib. 3. prop, 34. TAB. V. Fig. 100.

Reſolutio. Ducatur tangens DF (n. 142.); & à puncto contactûs D age ſecantem DE, quæ cum tangente efficiat angulum FDE parem dato. Hæc ſecans

DE auferet ſegmentum DGE capiens angulum dato parem.

Demonſtratio. Nam angulus quivis DGE inſcriptus circulo, & inſiſtens arcui DE habet pro menſura ſemiſſem ejusdem arcûs [n. 173.]. Atqui ſemiſſis arcûs DE eſt menſura anguli FDE = dato angulo (n. 174.). Ergò factum eſt, quod jubebatur faciendum.

PROPOSITIO III.

TAB. V. Fig. 101. 191. Problema. *Super data recta* BD *ſegmentum circuli conſtruere capiens angulum dato parem.* Euclid. lib. 3. prop. 33.

Reſolutio. Super BD fac angulum FBD parem dato: à puncto B excitetur BG perpendicularis ipſi BF; & in medio rectæ BD perpendicularis altera EC, quæ ſecabit rectam BG in puncto C, à quo circulus intervallo BC deſcribatur. Dico factum.

Demonſtratio. Ex puncto quovis N ſegmenti BND jungantur rectæ NB, ND. BF perpendicularis radio BC tanget circulum [n. 142.]. Quare angulum FBD, æqualem per hypotheſin angulo dato, metitur ſemiſſis arcûs BED. Sed idem angulus FBD æquatur angulo BND ſegmenti alterni (n. 186.). Ergò ſegmentum circuli BND capit angulum dato parem. Quod erat &c.

Scho-

Scholion.

192. *Ex eadem Prop. I. Corol. I., nimirum, quòd omnes anguli ad circumferentiam inſcripti, eidem arcui inſiſtentes, ſint æquales, conſequitur methodus omnium expeditiſſima, quâ portio cujusvis circuli deſcribi poſſit, tot graduum, quot libuerit, ſinè circino, aut centro ejuſdem circuli; quæ praxis eſt maximæ utilitatis.*

Eſto AB *chorda arcûs quæſiti. Oporteat autem arcum deſcribere graduum* 10. *Angulus itaque in hoc arcu inſcriptus habebit pro menſura ſemiſſem graduum* 350, *hoc eſt, gradus* 175. TAB. V. Fig. 102.

His poſitis, duas regulas CD, CE *ita firmiter conjungo in* C, *ut* DCE *ſit graduum* 175, *quíque nunquam variari poſſit; dein duos clavos extremitatibus chordæ* AB *defigo; & verticem anguli* C *eâ lege circumago, ut duæ regulæ* CD, CE *ſemper radant clavos* A & B, *iiſque in motu adrepant. Hâc ratione vertex* C *lineam circularem* ACB *deſcribet, hoc eſt, arcum circuli quæſitum graduum* 10.

Hâc praxi portio circuli cujuslibet magnitudinis deſcribi poteſt. Verùm, cùm hæc operatio mechanica ſit, geometricam alteram exhibeo ex iiſdem principiis.

PROPOSITIO IV.

193. Problema. *Datâ cujusvis ſegmenti circuli chordâ* AB, *datóque angu-*

lô

TAB. V. Fig. 103. *lô in eodem ſegmento, invenire puncta omnia, per quæ tranſibit arcus ejuſdem chordæ AB, quin cognoſcatur, aut quæratur centrum circuli, cujus eſt portio arcus quæſitus.*

Reſol., *& Demonſtratio* A puncto B ducatur utcunque recta BC: fiat angulus BCG par dato; tum ab extremitate altera A ejuſdem chordæ BA ducatur AF parallela ipſi CG, quæ rectæ BC occurrat in puncto F. Angulus BFA=BCG [n. 111.], hoc eſt, per hypotheſin angulo datô. Itaque arcus quæſitus tranſibit per F. Eâdem methodô invenies alia puncta ejuſdem arcûs, quin quæratur centrum circuli, cujus eſt portio arcus quæſitus. Quod erat &c.

Scholion.

194. *In Propoſitione I. hujus elementi angulum, cujus vertex ſit in circumferentia circuli, ita circumſcripſimus, ut ejus latera ultra verticem producta nuſquam circumferentiæ occurrere poſſint; atque adeò Theorema I. unicè locum habet, vel quando angulus inſcribitur in ſegmento, vel quando angulus ſegmenti à tangente, & ſecante à puncto contactûs comprehenditur. Fieri autem interdum poteſt, ut anguli, cujus vertex eſt in circumferentia, latus unum ultra verticem productum ſecet eandem circumferentiam: in quo caſu, quâ lege definien-*

definienda sit bujus anguli mensura, sic statuimus.

PROPOSITIO V.

195. Theorema. *Angulus* BAC, *cujus vertex* A *est in circumferentia circuli, comprehensus à chorda* AC, *& extra circulum à recta* BA, *quæ tamen, si ultra verticem* A *producatur, circulum secet, & aliam chordam* AD *subtendat, habet pro mensura medietatem duorum arcuum, hinc* AFE, *inde* AMD, *quos duæ chordæ* AC, AD *subtendunt.* TAB. V. Fig. 104.

Demonstratio. Anguli BAC, CAD æquantur duobus rectis (n. 74.); & consequenter horum mensura est semissis totius circumferentiæ (n. 61.), nimirum, $\frac{AFE}{2} + \frac{AMD}{2} + \frac{ED.}{2}$ Atqui per Theorema I. anguli CAD mensura est $\frac{ED.}{2}$ Ergò anguli BAC mensura erit semissis reliquorum duorum arcum, id-est, $\frac{AFE,}{2} + \frac{AMD}{2}$. Quod erat &c.

196. *Aliter.* Per punctum A ducatur tangens NAO. Angulus BAC æquatur duobus angulis BAN, NAC. Atqui BAN = OAD opposito ad verticem. Ergò totus angulus BAC æquatur duobus simul sumptis angulis segmenti, nimirum, NAC & OAD, quorum mensura est semissis arcuum AFE,

A

AMD. Itaque angulum totalem BAC metiuntur ſemiſſes eorumdem arcuum, quos duæ chordæ AE, AD ſubtendunt. Quod erat &c.

PROPOSITIO VI.

TAB. V. Fig. 105. 197. Theorema. *Angulus quivis* BAC, *cujus vertex* A *eſt inter centrum, & circumferentiam, habet pro menſura ſemiſſem arcûs* BC *à ſuis lateribus intercepti, cui inſiſtit, ac præterea ſemiſſem arcûs* EF *comprehenſi à lateribus ad circumferentiam productis anguli* EAF *oppoſiti ad verticem.*

Hoc eſt ſumma ſemiſſium eorundem arcuum BC & EF, ſive $\frac{BC}{2} + \frac{EF}{2}$, erit menſura ſolius anguli BAC.

Demonſtratio. A puncto F, ubi latus unum BA occurrit circumferentiæ, ducatur recta FD parallela alteri lateri AC. Erit angulus BAC = BFD (n. 108.). Atqui (n. 171.) angulum BFD metitur ſemiſſis arcûs BD, nimirum, $\frac{BC}{2} + \frac{CD}{2}$. Ergò pariter angulum BAC metitur $\frac{BC}{2} + \frac{CD}{2}$. Sed $\frac{CD}{2} = \frac{EF}{2}$, quia CD = EF [n. 147.]. Ergò angulus BAC habet pro menſura $\frac{BC}{2} + \frac{EF}{2}$. Quod erat &c.

Hinc

Hinc etiam demonstrari facilè potest, angulum BAE, cujus vertex est inter centrum, & circumferentiam, habere pro mensura semissem arcûs BE à suis lateribus intercepti, ac praeterea semissem arcûs FC comprehensi à lateribus oppositi anguli ad verticem.

Nam anguli BAE, BAC simul æquantur duobus rectis, & consequenter habent pro mensura semicirculum, nimirum, $\frac{BE}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{FC}{2} + \frac{EF}{2}$. Atqui ex nuper dictis angulus BAC habet pro mensura $\frac{BC}{2} + \frac{EF}{2}$. Ergò angulus BAE habet pro mensura $\frac{BE}{2} + \frac{FC}{2}$. Quod erat &c.

PROPOSITIO VII.

198. Theorema. *Angulus* BAC, *cujus vertex* A *est extra circulum, ejúsque latera* AB, AC *arcum concavum* DPE *intercipiunt, & arcum convexum* MN, *habet pro mensura semissem differentiæ duorum arcuum* DPE, MN, *quos eadem latera comprehendunt.* Tab. V. Fig. 106.

Hoc est, si ab arcu concavo subducatur arcus convexus, semissis residui arcûs erit mensura anguli BAC,

Demonstratio. A puncto M, ubi latus unum AB occurrit circumferentiæ, ducatur

catur recta M P parallela alteri lateri A C. Angulus BAC = BMP propter parallelas [n. 108.]. Atqui angulus BMP habet pro menſura $\frac{DP}{2}$ (n. 171.). Ergò angulus BAC habet pariter pro menſura $\frac{DP}{2}$. Sed PE = MN (n. 147.). Ergò DP eſt duorum arcuum DPE, MN differentia. Itaque angulus BAC habet pro menſura ſemiſſem differentiæ duorum arcuum, concavi D PE, & convexi MN, quos eadem latera intercipiunt. Quod erat &c.

Fig. 107. 108. 199. Demonſtratio univerſalis eſt, ſive anguli B A C duo latera circulum ſecent, ſive latus unum B A circulum tangat, & alterum C A ſecet, ſive utrumque latus circulum tangat.

Corollarium.

Ab hiſce tribus Theorematis nuper demonſtratis hæc conſequuntur.

I. Angulus, cujus menſura eſt ſemiſſis arcûs concavi à ſuis lateribus intercepti, habet verticem ad circumferentiam circuli, cujus eſt pars datus arcus.

II. Angulus, cujus menſura eſt major ſemiſſi arcûs concavi à ſuis lateribus intercepti, habet verticem intra circulum, cujus eſt portio datus arcus.

III. Angulus, cujus menſura eſt minor ſemiſſi arcûs concavi, cui inſiſtit, habet verticem extra circulum, cujus eſt pars datus arcus.

ELE-

ELEMENTUM V.

De Triangulis Rectilineis.

Axioma Euclideum eſt, duas rectas lineas ſpatium non comprehendere. Si enim duæ rectæ lineæ ex una parte coëant ad efficiendum angulum, neceſſariò ex altera parte ſemper magìs ac magìs disjungentur, ſi producantur. Perſpicuum eſt ergò, ut ſuperficies plana, ſpatiúmve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertiam adjungi oportere; ità enim conficietur ſpatium triangulare, ſeu figurarum rectilinearum prima, ex qua Quintum hocce Elementum ordimur.

DEFINITIONES.

200. *Figura rectilinea eſt plana ſuperficies rectis lineis, quæ latera vocantur, terminata. Hæc figura Triangulum nominatur, ſi tribus dumtaxat rectis circumſcribatur: Quadrilaterum, ſi quatuor: Polygonum, ſi plus, quàm quatuor rectis lineis terminetur.*

201. Habitâ ratione laterum, dividitur triangulum planum rectilineum, de quo dumtaxat agimus in hoc Elemento, in æquilaterum, iſosceles, & ſcalenum; habitâ verò ratione angulorum, dividitur in rectangulum, amblygonium, ſeu obtuſangulum, & oxygonium, ſeu acutangulum.

TAB. *202. Triangulum Æquilaterum eſt*
V. *illud, cujus tria latera ſunt inter ſe æqua-*
Fig. *lia: Iſoſceles, cujus duo tantùm latera*
113. *ſunt æqualia: Scalenum, cujus omnia la-*
114. *tera ſunt inæqualia.*
115. *203. Triangulum Rectangulum dici-*
tur illud, quod unum trium angulorum
Fig. *habet rectum: Amblygonium, ſeu Obtu-*
111. *ſangulum, cujus unus angulorum eſt obtu-*
110. *ſus: Oxygonium verò, ſeu Acutangulum,*
113. *cujus tres anguli ſunt acuti.*

204. Latus, ſuper quo conſtrui trian-
gulum intelligitur, vocari ſolet Baſis
trianguli. Huic oppoſitus angulus ap-
pellatur ejusdem ſummitas, ſeu Vertex;
& perpendicularis à ſummitate in baſim
demiſſa, dicitur Altitudo trianguli; quip-
pe quæ eſt omnium linearum minima,
quæ diſtantiam ſummitatis à baſi me-
tiatur.

Fig. Quamobrem, ſi in triangulo ABC
109. ſumatur latus BC pro baſi ejusdem, an-
gulus A erit ſummitas, & perpendicu-
laris AD erit altitudo.

Fig. Quòd ſi triangulum ſit inclinatum, per-
110. pendicularis BD in baſim AC produ-
ctam cadit; & ſimiliter trianguli altitu-
dinem metitur.

Fig. 205. *In omni triangulo rectangulo* ABC
111. *latus* AC *oppoſitum angulo recto* B, *voca-*
tur Hypotenuſa.

Fig. 206. *Si trium angulorum vertices* A,
112. B, C *exiſtant in circumferentia circuli,*
trian-

triangulum inſcriptum circulo dicitur, & circulus circumſcriptus triangulo.

PROPOSITIO I.

207. Problema. *Triangulo circulum circumſcribere.* Euclid. lib. 4. prop. 5.

Conſtr., & Demonſtratio. Patet ex n. 131. Perinde enim eſt per tria data puncta A, B, C non ad unam rectam poſita circulum deſcribere.

PROPOSITIO II.

208. Problema. *Super datâ rectâ* AB *triangulum æquilaterum conſtruere.* Euclid. lib. 1. prop. 1. TAB. V. Fig. 113.

Conſtructio. Centro A intervallô AB deſcribatur arcus GC; & rurſum centro B eodem intervallô alius, qui priori occurret in C; ducantúrque rectæ CA, CB. Dico factum.

Demonſtratio. Latera ſingula CA & CB ſunt æqualia eidem tertio lateri AB per Definit. circuli. Ergò (n. 36.) ſunt æqualia inter ſe. Quare triangulum ACB eſt æquilaterum. Quod erat &c.

PROPOSITIO III.

209. Problema. *Super datâ rectâ* AB *triangulum iſoſceles conſtruere.* TAB. V. Fig. 114.

Conſtructio. Centris A & B, intervallô verò majore, quàm AB, ſi datam rectam eſſe velimus minus latus, vel minore, ſi eandem in latus majus eligamus, deſcribantur duo arcus, qui ſeſe invicem ſecent in C ; ducantúrque rectæ CA, CB. Dico factum.

Demonſtratio. Patet ex conſtructione. Quoniam AC, BC æquales erunt propter æquale intervallum aſſumptum, majus ſcilicet, aut minus, quàm recta AB. Quod erat &c.

PROPOSITIO IV.

210. Problema. *Super datâ rectâ* AB *triangulum ſcalenum conſtruere.*

TAB. V. Fig. 115. *Conſtructio.* Centris A & B, intervallis utrinque inæqualibus inter ſe, & cum data recta AB, deſcribantur arcus ſibi mutuò occurrentes in C ; junganturque rectæ CA, CB. Dico factum.

Demonſtratio conſequitur ex inæqualitate intervallorum, quæ aſſumpta fuerunt in conſtructione.

PROPOSITIO V.

211. Theorema. *Omnis trianguli duo quælibet latera reliquo ſunt majora.* Euclid. lib. 1. prop. 20.

Demonſtratio immediatè conſequitur ex definitione lineæ rectæ (n. 22.), & ex n. 28.

PROPOSITIO VI.

212. Problema. *Ex tribus datis rectis* BO, BL, LO, *quarum duæ quælibet reliquâ ſint majores, triangulum conſtituere.* Euclid. lib. 1. prop. 22.

TAB. V. Fig. 116. Conſtructionem, & demonſtrationem habes in prop. 1., & ſequentibus.

Scho-

Scholion.

Quæ consequuntur Theoremata, in Euclidæa demonstrandi methodo videri solent, saltem pleraque, subobscuriuscula Tironibus, ut notat etiam Clavius lib. 1. *prop.* 5. *in scholio, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum assueti sunt. Horum itaque demonstrationem ex Prop.* 1. 5. 6. *Elem.* 4. *multò planiorem dabo, minúsque intricatam linearum occursu, & angulorum copiâ.*

PROPOSITIO VII.

213. Theorema. *Omnis trianguli* A B C *tres simul anguli duobus rectis sunt æquales.*

Ac proinde conficiunt gradus 180. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 32. *pars* 2.

Demonstratio. Triangulo ABC circumscribe circulum [n. 131.]. Angulus quivis, cujus vertex est in circumferentia, habet pro mensura semissem arcûs à suis lateribus intercepti (n. 171.) Sed trianguli tres simul anguli A, B, C totam circumferentiam suis lateribus intercipiunt. Ergò tres simul anguli habent pro mensura semissem circumferentiæ, atque adeo duobus rectis æquales sunt. Quod erat &c. TAB. V. Fig. 117.

Aliter ex theoria parallelarum. Producatur latus B C in O; ducaturque C D parallela lateri A B. Alterni anguli A & ACD sunt æquales; & internus B par Fig. 118.

par eſt externo DCO ad eandem partem (n. 108. & 110.). Tres itaque anguli trianguli ABC æquales ſunt tribus angulis ACB, ACD, DCO ad unum punctum C conſtitutis, qui duos rectos conficiunt (n. 81.). Quod erat &c.

Corollarium. I.

214. Tres ſimul anguli cujuſvis trianguli æquales ſunt tribus ſimul cujuscumque alterius.

Corollarium II.

215. Si in uno triangulo duo anguli aut ſinguli, aut ſimul, æquales ſint duobus angulis aut ſingulis, aut ſimul in altero triangulo, etiam tertius tertio æqualis erit.

Corollarium III.

216. Si in triangulo unus eſt rectus, reliqui duo ſimul etiam unum rectum conficiunt; & horum quilibet erit acutus.

Corollarium IV.

217. Si in triangulo unus eſt obtuſus, reliqui duo ſimul rectô minorem conficient; & horum quilibet erit acutus.

Corollarium. V.

218. Itaque omne triangulum habere poteſt unicum angulum rectum, unicum obtuſum, tres acutos; rectum verò cum obtuſo habere non poteſt.

Corol-

Corollarium VI.

219. Omnis trianguli duo quicunque anguli duobus rectis minores sunt. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 17.

Definitio.

220. *Rectilineæ figuræ externus angulus est, qui producto latere extra figuram oritur.* Fig. 118.

Talis est angulus ACO.

PROPOSITIO VIII.

221. Theorema. *Omnis trianguli* ABC *externus quivis angulus* ACO *duobus internis oppositis* A & B *æqualis est.* Euclid. lib. 1. prop. 32. pars 1.

Demonstratio. Triangulo ABC circumscribatur circulus. Angulus externus ACO habet pro mensura $\frac{BC}{2} + \frac{AZC}{2}$ (n. 195.). Atqui angulus A habet pro mensura $\frac{BC}{2}$, & angulus B habet pro mensura $\frac{AZC}{2}$ (n. 171.) Ergò summa mensurarum utriusque anguli interni oppositi A & B metitur angulum externum ACO; & consequenter externus angulus duobus internis oppositis æqualis est. Quod erat &c. TAB. V. Fig. 119.

Aliter ex theoria paralellarum. Producatur latus BC in O; ducatúrque CD parallela lateri AB. Alterni anguli A & Fig. 118.

ACD sunt æquales ; & internus B par est externo DCO. Ergò angulus externus ACO, hoc est, ACD + DCO, æquatur summæ duorum internorum oppositorum A & B. Quod erat &c.

Corollarium.

222. Ergò angulus externus ACO major est alterutro internorum oppositorum.

Scholion.

223. *Ab hoc Theoremate immediatè, tanquam totidem corollaria, deduci possent omnia ea, quæ Elem. 4. demonstravimus, Theoremata de mensura angulorum, quorum vertex est vel inter centrum, & circumferentiam, vel etiam extra circulum. Itaque*

TAB. V. Fig. 120. *I. Angulus* BAC, *cujus vertex est inter centrum, & circumferentiam, habet pro mensura semissem arcûs* BC *à suis lateribus intercepti, & semissem arcûs* FG *intercepti à lateribus sibi oppositi anguli.*

Nam, ductâ chordâ BF, *angulus* BAC *externus respectu trianguli* ABF, *æquatur duobus internis oppositis* F & B ; & *consequenter habebit pro mensura summam mensurarum horum duorum angulorum, hoc est,* $\frac{BC}{2} + \frac{CD}{2}$. (*n.* 171.).

TAB. V. Fig. 121. *II. Angulus* BAC, *cujus vertex est extra circulum, habet pro mensura semissem arcûs concavi* BC *à suis lateribus intercepti, minùs semissi arcûs convexi* DE

ab

ab iisdem pariter lateribus comprehensi.

Nam, ductâ chordâ BE, *angulus* BEC *erit externus triangulo* ABE. *Quare angulus* A+B=BEC; *consequenter angulus* A=BEC−B. *Atqui* (*n.*171.) BEC *habet pro mensura* $\frac{BC}{2}$, *& angulus* B *pariter pro mensura habet arcum* $\frac{DE}{2}$. *Ergò angulus* A, *sive* BEC−B, *habet pro mrnsura* $\frac{BC}{2}-\frac{DE}{2}$.

PROPOSITIO IX.

224. Theorema. *In eodem triangulo* ABC *latera* AB, AC *opposita æqualibus angulis* C *&* B *sunt æqualia.* TAB. V.

Et reciprocè, anguli æqualibus lateribus oppositi sunt æquales. Euclid. lib. 1. prop. 6. Fig. 117.

Demonstratur I. pars. Quoniam angulus B=C, erit arcus AZC=AXB [n.179.]; & consequenter chorda, seu latus AC=AB (n. 135.). Quod erat primum.

Demonstratur II. pars. Nam, quia latus AB=AC, erit arcus AXB=AZC [n. 135.]; & consequenter angulus C=B (n. 179.). Quod erat alterum.

Corollarium I.

225. Æquiangulum ergò triangulum etiam æquilaterum est. Et vicissim.

Corollarium. II.

226. Trianguli iſoſcelis, ſeu æquicruri ad baſim anguli ſunt æquales. Et viciſſim, ſi anguli ad baſim ſint æquales, triangulum eſt iſoſceles. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 5.

PROPOSITIO X.

TAB. V. Fig. 112. 227. Theorema. *In eodem triangulo* ABC *latus majus* AB *opponitur angulo majori* C.

Et reciprocè, angulus major C *opponitur majori lateri.* Euclid. lib. 1. prop. 18. & 19.

Conſtructio. Triangulo ABC circumſcribatur circulus

Demonſtratur I. pars. Quoniam angulus C > B, erit arcus AXB > AZC (n. 179.); & conſequenter chorda, ſeu latus AB > AC (n. 135.). Quod erat primum.

Demonſtratur II. pars. Nam, quia latus, ſeu chorda AB > AC, erit arcus AXB > AZC [n. 135.]; & conſequenter angulus C > B (n. 179.) Quod erat alterum.

Corollarium.

228. Triangulum itaque, cujus tres anguli ſunt inæquales, habet tria latera inæqualia, adeóque ſcalenum eſt. Et reciprocè.

PROPOSITIO XI.

TAB. V. Fig. 122. 123. 229. Theorema. *Si duorum triangulorum* ABC, MOP *latus unum* AB *uni*

uni MO, *& alterum* AC *alteri* MP *ſit æquale, angulique* A *&* M *ab illis lateribus facti etiam ſint æquales, æquabuntur & baſes, & tota triangula, & reliqui ad baſim anguli.* Euclid. lib. 1. prop. 4.

Demonſtratio. Vertex A anguli BAC ſuperimponatur vertici M anguli æqualis OMP, ita ut latus AB cadat ſuper latus ipſi æquale MO. Perſpicuum eſt [n. 46.], quòd latus AC cadat ſupra latus MP, & punctum C in P; nam AC = MP. Ergo tria puncta A, B, C cadent ſupra tria puncta M, O, P; atque adeò baſis BC tota cadet ſupra totam baſim OP, totáque triangula ſibi mutuò congruent. Omnia igitur per axioma 4. n. 36. ſunt æqualia. Quod erat &c.

PROPOSITIO XII.

230 Theorema. *Si duorum triangulorum* ABC, MOP *latus* BC=OP, *angulíque illis lateribus adjacentes, nimirum,* B *&* C, *ipſis* O *&* P *fuerint æquales, omnia reliqua, & triangula ipſa æqualia erunt.*

Demonſtratio. Latus OP ſuperimponatur lateri ſibi æquali BC. Puncta O & P cadent ſupra puncta B & C; quoniam OP=BC. Sed quia angulus O=B latus MO cadet ſupra latus AB; & quia angulus P=C, latus PM cadet ſupra

A

AC [n. 46.]. Ergò tria latera trianguli MOP cadent ſupra tria latera trianguli ABC. Ergò omnia ſunt per axioma 4. n. 36. æqualia. Quod erat &c.

PROPOSITIO XIII.

231, Theorema. *Si duo triangula* B CA , BCD *duo latera* BC , CA *duobus*
TAB. BC , CD , *alterum alteri æqualia habue-*
V. *rint ; unum verò triangulum angulum*
Fig. *illis lateribus contentum* BCA *majorem*
124. *habeat alterâ* BCD , *habebit qaoque ba-*
125. *ſim* BA *majorem baſi* BD.

Et reciprocè, ſi baſim majorem habuerit, habebit angulum majorem. Euclid. lib. 1. prop. 24. & 25.

Conſtructio. Vertex C anguli BCA ſuperimponatur vertici C anguli BCD, hâc lege, ut latus BC primi cadat ſupra latus ipſi æquale BC ſecundi; tum factô centrô in C, intervallô CA deſcribatur circumferentia , quæ tranſibit per D ; nam CA = CD ; denique producatur latus BC , donec circumferentiæ occurrat in E. His poſitis

Demonſtratur I. Pars. Quoniam angulus BCA major eſt angulô BCD , etiam arcus OA, menſura anguli BCA major erit arcu OD, menſurâ anguli BCD Ergò punctum A proximius, punctum D remotius erit ab extremitate E rectæ BE tranſeuntis per centrum; atque hinc ſequitur (n. 132.) BA > BD. Quod erat primum.

Demon-

Demonſtratur II. pars. Nam, quia baſis BA major eſt baſi BD, punctum A proximius, punctum D remotius erit à termino E rectæ BE tranſeuntis per centrum (n. 132.): hoc eſt, arcus EA < arcu ED. Ergò arcus OA, menſura anguli BCA major eſt arcu OD, menſurâ anguli BCE; & conſequenter anlus BCA > angulo BCD. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XIV.

232. *Si duo triangula* ABC, MOP *habuerint omnia latera ſibi mutuò æqualia, etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppoſitos habebunt æquales.* Euclid. lib. 1. prop. 8. TAB. V. Fig. 122. 123.

Demonſtratio. Ut duo propoſita triangula ABC, MOP demonſtrentur perfectè æqualia, ſatis eſt (n. 229.), ſi oſtendatur duos angulos, puta, ABC, MOP, fore æquales; quod ex præcedenti Prop. conſequitur. Nam, ſi anguli ABC, MOP eſſent inæquales, latera AC, MP hiſce duobus angulis oppoſita, non eſſent æqualia, contra hypotheſin. Quod erat &c.

Scholion.

233. *Habes jam tres præcipuos characteres, ac ſigna certiſſima, quibus evidenter conſtare tibi poſſit, an duo triangula ſint perfectè æqualia. Quia verò hæc æqualitatis perfectæ ſigna magni ſunt*

usûs

Fig. 122. 123. *usûs in Geometria, non erit abs re horum synopsim hôc locô instituere ad juvandam Tironum memoriam.*

Duo triangula ABC, MOP *erunt perfectè æqualia.*

I. Quando habuerint omnia latera sibi mutuò æqualia (n. 232.):

II. Quando duo latera unius duobus alterius æqualia habuerint, utrumque utrique, & angulum angulo æqualem sub æqualibus lateribus contentum (n. 229.):

III. Quando latus unum uni æquale habuerint, angulósque illis lateribus adjacentes æquales, utrumque utrique (n. 230.).

Ex hoc triplici criterio, quô duorum triangulorum perfecta æqualitas decernitur, triplex aperitur via resolvendi sequens Problema.

PROPOSITIO XV.

TAB. V. Fig. 126. 127. 234. Problema. *Triangulum* MOP *construere æquale dato triangulo* ABC.

Primus resolvendi modus. Fiat MP par lateri B C trianguli ABC; tum centrô M, intervallô BA describatur arcus EOF; & centrô P, intervallô AC describatur arcus GOH, qui priorem secet in O; ducantúrque rectæ OM, OP. Dico factum.

Demonstratio. Nam omnia latera per constructionem sunt mutuò æqualia. Quod erat &c.

Secun-

Secundus resolvendi modus. Fiat angulus MOP [n. 64.] æqualis angulo BAC dati trianguli; tum cape OM=AB, & OP=AC; ducatúrque recta MP. Dico factum.

Demonstratio. Nam duo triangula habent duo latera duobus lateribus æqualia, utrumque utrique, & angulum angulo æqualem sub æqualibus lateribus contentum. Quod erat &c.

Tertius resolvendi modus. Fiat MP=BC; ducantúrque rectæ MO, PO, quæ cum recta MP angulos M & P efficiant pares duobus angulis B & C (n. 64.) dati trianguli ABC, & concurrant in O. Dico factum.

Demonstratio. Nam anguli æqualibus lateribus adjacentes sunt æquales. Quod erat &c.

PROPOSITIO XVI.

235. Theorema. *Si à terminis unius lateris* AC *intra triangulum* ABC *duæ rectæ jungantur* AD, CD, *hæ lateribus trianguli* AB, CA *minores sunt, majorem verò angulum* ADC *comprehendunt.* Euclid. lib. 1. prop. 21. TAB. I. Fig. 26.

Prima pars demonstrata est n. 88.

Demonstratur II pars. Produc AD in E. Angulus externus CDA (n. 221.) major est angulô internô DEC, qui, cùm sit sit externus respectu anguli B, eôdem pariter major est. Ergò ADC multò major est, quàm B. Quod erat &c.

ELE-

ELEMENTUM VI.

De Quadrilateris.

DEFINITIONES.

236. TRILATERAM *superficiem excipit Quadrilatera, quatuor rectis lineis, quæ latera vocantur, undique terminata, totidémque angulos continens.* Hæc pro varia laterum, & angulorum ratione sortitur diversa nomina.

TAB. VI. Fig. 128. 237. *Quadrilaterum* ABCD, *cujus bina opposita latera sunt parallela, nimirum,* AD *ipsi* BC, *&* AB *ipsi* DC, *vocatur Parallelogrammum.*

At quadrilaterum, cujus non omnia opposita latera sunt parallella, dici solet Trapezium.

Fig. 128. 129. 238. *Parallelogrammum, cujus omnes anguli sint æquales, & consequenter recti (n. 49.), vocatur Rectangulum; illud verò, cujus omnes anguli non sunt æquales, Rhomboides dicitur.*

Fig. 130. Fig. 128. 239. *Rectangulum, cujus omnia latera sunt inter se æqualia, Quadratum nuncupatur; cujus autem opposita tantùm latera æqualia sunt, Rectangulum simpliciter dicitur.*

Fig. 131. 240. *Rhomboides, cujus omnia latera sunt inter se æqulia, Rhombus nominatur.*

Corollarium.

241. Quadratum & æquilaterum, & rectangulum est.

Rhom-

Rhombus figura eſt æquilatera, ſed non rectangula.

Rhomboides neque æquilatera eſt, neque rectangula.

242. *Parallelogrammi Diameter, ſive diagonalis eſt recta AC per angulos oppoſitos ducta.* Fig. 129.

243. *Recta* AE, *ſeu* BF *ducta ab uno latere* AB *perpendiculariter in latus oppoſitum* DC, *productum, ſi opus ſit, dicitur Altitudo parallelogrammi.* TAB. VI. Fig. 132.

Scholion.

Parallelogrammum deſignari ſolet non modò quatuor litteris, ſed interdum duabus ad oppoſitos angulos conſtitutis.

PROPOSITIO I.

244. Theorema. *Omne quadrilaterum* ABCD *habens duo oppoſita latera* AB, DC *æqualia, & parallela, habet etiam duo reliqua* AD, BC *pariter æqualia & parallela*, Euclid. lib. 1. prop. 33. TAB. VI. Fig. 129.

Demonſtratio Ductâ ad oppoſitos angulos diagonali AC, cum rectæ AB, CD ſint parallelæ, anguli alterni BAC, DCA erunt æquales (n. 110.) Duo autem latera AB, CD per hypotheſin ſunt æqualia; & latus AC eſt commune utrique triangulo BAC, DCA. Ergò (n. 229.) duo triangula BAC, DCA erunt perfectè æqualia, hoc eſt, & mutuò æquiangula. Itaque erit BC = AD; & angulus ACB = CAD alterno; & conſe-

consequenter (n. 113.) rectæ BC, AD sunt parallelæ. Quod erat &c.

Corollarium. I.

245. Quadrilaterum, cujus duo opposita latera sunt æqualia, & parallela, est parallelogrammum.

Corollarium II.

TAB. VI. Fig. 133. 246. Quoniam duæ perpendiculares AD, BC eidem rectæ EH, sunt parallelæ inter se [n. 91.], si præterea eædem perpendiculares AD, BC sint pariter inter se æquales, erunt rectæ AB, EH, quæ illas intercipiunt, parallelæ.

Corollarium III.

TAB. VI. Fig. 134. 135. 247. Ergò, si plura triangula, aut parallelogramma EAF, GBH super eâdem rectâ EH, & ad eandem partem constituta habeant altitudines AD, BC æquales, rectæ AB, EH, quæ illas intercipiunt, erunt parallelæ (n. 246.).

PROPOSITIO II.

TAB. VI. Fig. 129. 248. Theorema. *Omne quadrilaterum, cujus bina opposita latera sunt parallela, & idcirco parallelogrammum dicitur, habet etiam bina opposita latera æqualia.* Euclid. lib. 1. prop. 34. pars. 1.

Demonstratio. Ducatur diameter AC. Quoniam AB, DC sunt parallelæ, erunt anguli alterni BAC, DCA æquales [n. 110.]. Rursus, quia AD, BC sunt parallelæ,

rallelæ, erunt pariter & anguli alterni BCA, DAC æquales. Itaque, cum duo anguli BAC, BCA trianguli ABC æquales sint duobus angulis DCA, DAC alterius trianguli ADC, uterque utrique, & latus AC dictis angulis adjacens commune utrique triangulo, erunt [n. 230.] duo triangula perfectè æqualia; & consequenter AB = CD, & BC = DA. Quod erat &c.

Corollarium I.

249. Ergò diameter AC dividit parallelogrammum ABCD in duo æqualia triangula BAC, DCA. *Euclid. lib. 1. prop. 34. pars 2.* Fig. 129.

Corollarium. II.

250. Et parallelogrammum ABCD est duplum trianguli DCA habentis eandem basin, & altitudinem. *Euclid. lib. 1. prop. 41.*

PROPOSITIO III.

251. Theorema. *Omne quadrilaterum* ABCD, *cujus bina opposita latera sunt æqualia, habet etiam eadem parallela, & consequenter parallelogrammum est.* Tab. VI. Fig. 129.

Demonstratio. Ductâ ad oppositos angulos rectâ AC, duo triangula ABC, ADC sunt per hypothesin inter se mutuò æquilatera; ergò & æquiangula [n. 232.]: æquales nimirum erunt anguli BAC, DCA, & anguli BCA, DAC;

 ergò

ergò cùm ſint alterni, tam rectæ AB, CD, quàm rectæ BC, AD ſunt parallelæ (n. 113.). Quod erat &c.

PROPOSITIO IV.

TAB. VI. Fig. 136. 137.

252. Theorema. *Parallelogramma* ABCD, MBCN *ſuper eadem baſi* BC, *& inter eaſdem parallelas conſtituta, ſunt æqualia.* Euclid. lib. 1. prop. 35. & 36.

Demonſtratio. In utroque caſu, quem figura exhibet, triangula ABM, DCN ſunt ſibi mutuò æquilatera. Nam AB = DC, latera nimirum oppoſita ejusdem parallelogrammi ABCD (n. 248.) Rurſus BM = CN eadem de cauſa; & pariter AD = BC, & BC = MN; ergò AD = MN; ſublatóque utrinque MD, ut in caſu primo, vel utrinque addito MD, ut in caſu ſecundo, erit AM = DN. Duo itaque triangula ABM, DCN ſunt ſibi mutuò æquilatera, & perfectè æqualia. Quare in caſu primo, ſi duobus hiſce triangulis addatur commune trapezium MBCD, fiet parallelogrammum ABCD æquale parallelogrammo MBCN. Vel in caſu ſecundo ab iiſdem æqualibus triangulis demptô communi triangulô DOM, erunt duo reſidua quadrilatera ABOD, MOCN inter ſe æqualia; & rurſus additô communi triangulô BOC erit parallelogrammum ABCD æquale parallelogrammo MBCN. Quod erat &c.

Corollarium I.

253. Duo parallelogramma ſunt æqualia, ſi habeant baſes æquales, & altitudines æquales.

Nam & conſtitui poterunt ſuper eandem baſim, & erunt inter easdem parallelas (n. 247.).

Corollarium II.

254. Duo parallelogramma ABCD, OBCP non ſunt æqualia, ſi baſim quidem habeant eandem BC, ſed intra easdem parallelas AN, BZ non ſint conſtituta. TAB. VI. Fig. 138.

Nam ABCD=MBCN [n. 252.]. Atqui MBCN> vel <OBCP. Ergò ABCD> vel <OBCP.

Corollarium III.

255. Parallelogramma æqualia ſuper baſes æquales, vel eandem, ſunt inter easdem parallelas.

Corollarium IV.

256. Et, ſi duo parallelogramma inter easdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cujus baſis major eſt, majus erit. Et contrà, ſi duo parallelogramma ſint inæqualia inter easdem parallelas, baſis majoris major erit.

Corollarium V.

257. Duo triangula BAC, BMC ſuper eadem baſi BC conſtituta, & in eiſ-

dem parallelis AN, BZ, inter ſe ſunt æqualia. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 37.

TAB. VI. Fig. 139. Ducatur C D parallela lateri B A, & CN parallela lateri B M: erit parallelogrammum ABCD=MBCN [n. 252.]. Sed horum dimidia ſunt triangula B A C, B M C (n. 249. & 250.); ergò ſunt æqualia. Triangula igitur ſuper eadem baſi &c.

Corollarium VI.

TAB. VI. Fig. 140. 258. Triangula igitur BAC, BOC nòn ſunt æqualia, ſi habeant quidem baſin eandem BC, ſed inter easdem parallelas AN, BZ non ſint conſtituta.

Nam triangulum BAC=BMC per Corol. 5. Sed BMC > aut < BOC. Ergò pariter BAC > aut < BOC.

Corollarium VII.

Fig. 140. 259. Hinc, ſi duo triangula BAC, BMC ſuper eâdem baſi BC conſtituta, ſint æqualia, erunt inter easdem parallelas. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 39. & 40.

Duo triangula ſunt pariter æqualia, ſi æquales habeant baſes, & altitudines æquales.

Corollarium VIII.

TAB. VI. Fig. 141. 260. Ergò, ſi plura ſint triangula AMB, BNC, COD, DPE &c., quorum baſes ſingulæ AB, BC, CD, DE eandem rectam AE conſtituant, & omnium altitudo ſit eadem, omnia ſimul ſump-

ſumpta æqualia erunt ſoli triangulo AME, cujus altitudo ſit eadem, & baſis & AE ſumma ſit baſium triangulorum omnium.

Nam, ſi omnia hæc triangula ſunt ejusdem altitudinis, poterunt inter easdem parallelas MP, AE conſtitui. Ducantur MC, MD, ME. Triangula AMB, BNC, COD, DPE æqualia erunt triangulis AMB, BMC, CMD, DME, ſingula ſingulis. Atqui AMB + BMC + CMD + DME = AME. Ergò AMB + BNC + COD + DPE = AME.

Corollarium IX.

261. Ex eodem Theoremate opportunè P. Boſchovich in ſuis elementis oſtendit nullam eſſe quantitatem ita tenuem, quâ minor dari non poſſit. Cum enim AN in infinitum produci poſſit, puncto N magìs recedente à puncto A, dummodò ſumatur MN = BC = AD, ſemper parallelogrammum BMNC utcunque productum æquale erit parallelogrammo ABCD; unde apparet nullum in eo producendo, vel attenuando limitem inveniri. TAB. VI. Fig 139.

Dimenſio cujuſvis Figuræ Trilateræ, & Quadrilateræ.

262. Obſervavimus Lib. 1. n. 9. Comment. Arith. univ. (Nos Lib. 1. Prælectionum Mathem. n. 30. & ſequentibus)

morem invaluisse apud Geometras, ut genesis, seu descriptio superficiei per lineam super aliâ lineâ ad rectos angulos se moventem, dicatur multiplicatio istarum linearum. Nam, quamvis linea utcunque multiplicata non possit evadere superficies, adeóque hæc superficiei è lineis generatio longè alia sit à multiplicatione: in hoc tamen conveniunt, inquit Newtonus, quòd numerus unitatum in alterutra linea, multiplicatus per numerum unitatum in altera, producat abstractum numerum unitatum in superficie lineis istis comprehensa, si modò unitas superficialis definiatur, ut solet Quadratum, cujus latera sunt unitates lineares. Est autem similis analogia solidi, quod continua trium quantitatum multiplicatione producitur. Verùm, quia hinc pendet dimensio superficierum, & solidorum, horum genesin accuratiùs hoc loco evolvam.

PROPOSITIO V.

TAB. VI. Fig. 142. 143. 263. Theorema. *Parallelogrammi cujusvis area, seu superficies* ABCD *æqualis est producto, quod ex ductu basis* DC *in suam altitudinem, perpendicularem* AE, *emergit.*

Demonstratio. Si basis DC motu sibi parallelo moveatur super latus DA, superficiem parallelogrammi generat; basis autem DC hoc motu traducta in AB, tan-

tantùm à sua pristina positione recedit, quanta est portio perpendicularis AE à duabus parallelis AB, DC intercepta. Itaque linea generatrix DC, recedendo à sua pristina positione, transit successivè per omnia puncta perpendicularis AE, & ad quodvis ejusdem perpendicularis punctum fluxu suo lineam gignit sibi æqualem. Ergò quot sunt puncta in altitudine AE, totidem lineis ipsi DC æqualibus componitur superficies inde genita. Quare area, seu superficies parallelogrammi ABCD habebitur, sumendo toties suam basim DC, quot sunt puncta in sua altitudine AE: hoc est, multiplicando basim DC in numerum punctorum, quibus componitur altitudo AE; qui numerus meliùs exprimi non potest, quàm per ipsammet altitudinem AE. Ergò parallelogrammi cujusvis area &c. Quod erat &c.

Corollarium I.

264. Si parallelogrammum ABCD sit rhomboides, à quovis puncto lateris AB in basin CD, productam, si opus sit, perpendicularis AE demissa dabit ejusdem altitudinem; adeoque DC × AE erit superficies quæsita. TAB. VI. Fig. 132.

265. Si parallelogrammum ABCD sit rectangulum, ex ductu contiguorum laterum AD × DC exprimetur superficies. TAB. VI. Fig. 128.

TAB. VI. Fig. 130. 266. Si parallelogrammum ABCD sit quadratum, ex ductu unius lateris in se ipsum, nimirum, AD × AD, vel DC × DC, vel BC × BC, exprimetur ejusdem superficies, vel breviùs, $\overline{AD}^2$, $\overline{DC}^2$, $\overline{BC}^2$.

Corollarium II.

TAB. VI. Fig. 142. 143. 267. Cum triangulum DAC sit (n. 250.) semissis parallelogrammi ABCD habentis eandem basim DC, & eandem altitudinem AE: hinc hujus producti DC × AE semissis erit area trianguli $DAC = \frac{DC \times AE}{2}$, vel $= DC \times \frac{AE}{2}$, vel $= AE \times \frac{DC}{2}$; hoc est, cujusvis trianguli area producitur ex semisse altitudinis ducta in basin; sive ex altitudine tota ducta in semissem basis.

Sit trianguli altitudo pedum 14, & basis pedum 20. Duc 14 in 20: fiunt pedes quadrati 280, cujus producti semissis 140 exhibet pedes quadratos, quibus triangulum datum æquale est. Vel, ex altitudine pedum 14 sume dimidium 7, & duc in basim 20. Vel, ex basi pedum 20 accipe semissem 10, & duc in altitudinem totam 14. In utroque casu provenient rursus 140 quadrati pedes pro area quæsita.

268. Si triangulum ADC sit rectangulum,

gulum, latera DC, AD angulo recto D adjacentia, sunt invicem perpendicularia; atque adeo alterutrum duorum laterum obire potest vicem basis, & altitudinis. Tab. VI. Fig. 144.

PROPOSITIO VI.

269. Problema. *Trapezii* ABCD, *quod duo latera* AD, CD *habeat parallela, area producitur ex dimidia summa laterum parallelorum in altitudinem, seu perpendiculum* AE. Tab. VI. Fig. 145.

Demonstratio. Area trapezii ABCD componitur ex duabus areis triangulorum ABC, ADC habentium eandem altitudinem AE, propter parallelas AD, BC. Sed area utriusque trianguli producitur ex ductu ejusdem altitudinis AE in semissem basis AD, & semissem basis BC. Ergò trapezii ABCD area producitur &c. Quod erat &c.

PROPOSITIO VII.

270. Problema. *Trapezii cujuscunque* MNOP *aream investigare.* Tab. VI. Fig. 146.

Resolutio. Ducatur NP, ad quam ex punctis M & O age perpendiculares MS, OR: multiplica dimidiam NP per utramque perpendicularem; & habebis aream trapezii.

Demonstratio pendet ex n. 267.

Corollarium I.

271. Habes jam praxin metiendarum

super.

ſuperficierum paſſim occurrentium, nempe cubiculorum, aularum, parietum &c. Cum enim hæ ſuperficies ſoleant eſſe rectangulæ, multiplicatio longitudinis per latitudinem, earum aream exhibet (n. 265.). Pariter, ſi ſcias quot lateres in longum, & in latum ad ſternendum pavimentum requirantur, aut quot tegulæ tam in longum, quàm in latum à tecto capiantur, multiplicatio numerum earum notum faciet.

Praxis. *Sit area rectangula longa pedes* 160, *lata* 70 : *quæratur, quot ea homines capiet*, 4 *pedibus quadratis in ſingulos aſſignatis.*

Duc areæ latera 160 *&* 70 *in ſe mutuò : proveniunt pedes quadrati* 11200 *pro area propoſita : quibus diviſis per* 4, *proveniunt* 1800 *pro numero hominum quæſito.*

Corollarium II.

272. Verùm, uti multiplicationis ope ſuperficiem metimur, ità diviſione incognitam longitudinem, vel latitudinem obtinemus. Nam diviſio retexit, quod multiplicatio componit. Itaque area quævis per longitudinem diviſa dat latitudinem, & vice verſâ. Hinc reſolves ſequentes Quæſtiunculas ex Walliſio cap. 22 Arithm.

Quæſtio I.

Cum Jugerum Anglicanum contineat perticas quadratas 160 = 4 × 40 : *in agro*

agro parallelogrammo, cujus latitudo est perticarum 8 *; quæritur, quanta sit oporteat longitudo, ut habeatur jugerum terræ?*

Dividendo 160 *per* 8, *habetur longitudo quæsita* 20. *Vel datâ longitudine* 20, *dividendo habetur latitudo.*

Quæstio II.

Si planities cubiculi pedes 12. *lata, longa verò* 20, *tegenda sit asserculis ligneis latis pedes* 2 *: quanta sumenda est asserculorum conjunctorum longitudo, ut operi sufficiant?*

Ductâ latitudine 12 *in longitudinem* 20, *habetur area pedum quadratorum* 240 *: quam dividendo per asserculorum latitudinem* 2, *habetur longitudo quæsita* 120.

Quæstio III.

Si tapeti serico longo pedes 24, *lato* 8, *inducendus sit à tergo pannus vilior latitudinem habens pedum* 6 *: quæritur, quanta sit oporteat longitudo, ut operi sufficiat?*

Duc 24 *in* 8 *: habebis aream totam* 192 *: quam dividendo per* 6 *latitudinem panni, habetur longitudo quæsita* 32.

Monitum.

273. *In comparatione mensurarum, quas dimetiendis quantitatibus adhibemus, P. Dechales lib.* 2. *Geom. pract. prop.*

prop. 29. errorem vulgarem detegit, quô nonnulli menſurarum ſuperficialium partes eô modô inter ſe comparant, quô menſurarum linearium; quamvis longè aliter comparari debeant; aliámque habeant rationem ad totum ſuum, quam eorum appellationes præſeferre videantur.

TAB. VI. Fig. 147. Agebatur, *inquit ipſe*, aliquando de aulæ pavimento lateribus ſternendo, cujus longitudo erat pedum 30, latitudo 20, atque adeo ſuperficies pedum quadratorum 600; lateres autem quadrati erant, eorúmque latus erat ſemipedis; atque adeò communi appellatione dicebantur continere ſemipedem quadratum. Quare', qui huic operi præerat, cum ſciret, aream aulæ eſſe 600 pedum quadratorum, mille ducentos lateres paravit, exiſtimans in pede quadrato duos tantùm eſſe ſemipedes quadratos, cùm tamen ſint quatuor. Sit enim pes quadratus ABCD, ſeu quadratum, cujus latus ſit unius pedis. Perſpicuum eſt, in eo eſſe quatuor quadrata, quorum latera ſunt æqualia ſemipedi. Hexapeda linearis ſex pedes habet, at quadrata, 36; atque ità de reliquis.

Quâ verò proportione ſuperficies creſcant, exponetur infra.

Scholion.

TAB. VI. Fig. 148. 274. *Diximus* (*n.* 265.) *parallelogrammi rectanguli cujusvis aream æqualem eſſe quan-*

quantitati, quæ ex duorum laterum contiguorum circa angulum rectum invicem ductu emergit. Ut, si latitudo AB = 3 *ducatur in longitudinem* BC = 4, *emerget area* ABCD = 12; *adeóque rectangulum latum* 3 *pedes,* & *longum* 4, *continet pedes quadratos* 12.

At quæret fortasse Tiro, cur hæc contiguorum laterum multiplicatio ad parallelogrammum rectangulum restringitur? Námque idem videtur dicendum de obliquangulo; puta, si latera contigua EF, GF *circa angulum acutum* F, *vel etiam* HE, FE *circa angulum obtusum* E, *invicem multiplicentur, quorum alterum sit* 3, *alterum* 4 *pedes longum: emerget numerus* 12; *ipsúmque parallelogrammum obliquangulum in totidem spatia dividitur æqualia, quorum latera singula contineant pedem unum, non minùs, quàm si esset parallelogrammum rectangulum.* TAB. VI. Fig. 149.

Ut huic Tironum dubitationi, quæ familiaris esse solet, occurram, dico posse quidem parallelogrammum, etiam obliquangulum, in totidem spatia æqualia, & *similia dividi, quot designat mutua multiplicatio laterum duorum, circa ipsius angulum quemvis constitutorum; eorúmque spatiorum latera esse æqualia: puta, unius pedis linearis singula, non minùs, quàm si parallelogrammum fuisset rectangulum. Sed cavendum, ne per errorem*

rorem quispiam putet spatia illa esse pedes quadratos, aut quidem totidem quadratis pedibus æqualia, quamvis quatuor lineis pedalibus terminentur singula. Rhombi enim sunt spatiola illa, non quadrata, propter obliquitatem angulorum, & idcirco quadratis minora.

Cum autem animadverterim Tirones interdum labi in æstimanda superficierum magnitudine ex eorum ambitu, præjudicata eorum opinio ante convellenda est, quàm ad alia progrediar Geometriæ Elementa.

De Figuris Isoperimetris.

DEFINITIO.

Figuræ Isoperimetræ appellantur illæ, quæ linearum ambitus habent æquales inter se.

PROPOSITIO VIII.

TAB. VI. Fig. 150.

275. *Inter figuras isoperimetras rectilineas major est illa, quæ & æquilatera est, & æquiangula.*

Esto quadratum, cujus latus quodlibet sit 6 pedum; ità ut totus ambitus contineat 24 pedes lineares: erit area [n. 266.] 36 pedum quadratorum.

Esto quoque aliquod parallelogrammum rectangulum, latum pedes lineares 10, altum pedes 2: erit hujus perimeter 24 æqualis perimetro quadrati; at area hujus parallelogrammi comprehendet

det tantummodo 20 quadrata parvula, ex illis 36, quæ quadratum in ſe continet.

Sit prætcrea aliud parallelogrammum rectangulum, cujus unumquodque duorum laterum oppoſitorum ſit 9; aliorum verò duorum ſit 3, ut & primi quadrati, & hujus parallelogrammi ambitus quoque ſint æquales. Comprehendet igitur area hujus ſolùm 27 quadrata, ex illis 36, quæ in quadrato continentur. TAB. VI. Fig. 151.

Pari ratione, ſi parallelogrammi alicujus unumquodque duorum laterum oppoſitorum ſit 8, & reliquorum ſit 4, erit quidem ipſum quadrato iſoperimetrum; ſed ejus area continebit dumtaxat 32 quadrata.

Denique, ſi duo latera alicujus parallelogrammi oppoſita, ſingula haberent 7, reliqua verò haberent 5, eſſet etiam quadrato iſoperimetrum; area autem illius includeret tantùm 35 quadrata.

Corollarium I.

276. Hinc clarè vides, quò magìs figuræ iſoperimetræ accedunt ad æquilateram, cui ſunt iſóperimetræ, eò etiam majorem comprehendunt aream, & minùs differunt in capacitate à figura æquilatera. Quare ex parallelogrammis rectangulis iſoperimetris quadratum eſt omnium maximum: ex parallelogrammis oblongis illud majus eſt, quod propiùs ad quadratum accedit: hoc eſt, cujus

laterum differentia minor eſt. Quod ſic etiam calculo litterali probari poteſt.

Sit quadrati cujusvis latus A : erit ipſius quadrati area $A \times A = A^2$; deinde fiat rectangulum oblongum, quadrato illi iſoperimetrum : quod, ut fiat, tantundem addendum eſt longitudini, quantùm latitudini aufertur ; illud autem, quantumcunque ſit, dicatur C ; fietque longitudo $A + C$, latitudo $A - C$; adeoque rectangulum quadrato iſoperimetrum, quippe utriuſque ambitus 4 A, ut laterum utrobique additione ſpecioſa patet.

$$\begin{array}{r} A \\ +A \\ +A \\ +A \\ \hline 4\,A \end{array} \qquad \begin{array}{r} A+C \\ +A-C \\ +A+C \\ +A-C \\ \hline 4\,A \end{array}$$

Erit ergo oblongi hujus rectanguli area, ductu longitudinis in latitudinem inventa, $AA - CC$, ut multiplicando patet ; adeóque minor, quàm area quadrati AA. Quod erat primo probandum.

Sed & tanto minor, quantùm eſt quadratum quantitatis C, hóc eſt, quadratum ſemidifferentiæ laterum. Nam, ſi ex $A + C$ auferatur $A - C$, reſiduum ſive differentia eſt 2 C, ut ſubducendo patet ; & propterea, quò majus eſt CC quadratum ſemidifferentiæ, eò plus ab AA deficit rectangulum oblonlongum, & proinde minus eſt. Quod erat alterum.

Corollarium II.

277. Parallelogrammum inæqualium angulorum ABCD, iſoperimetrum non eſt parallelogrammo rectangulo EDCF, inter eaſdem parallelas CD, AF, & ſuper eandem baſim CD conſtituto. TAB. VI. Fig. 152.

Nam, ſi producantur rectæ DE, CF, ut ſint æquales ipſi DA, jungaturque HG, patet parallelogrammum CDHG majus fore parallelogrammo CDEF, hoc eſt, iſoperimetro ABCD, majus, inquam, exceſſu EFGH. Conſtat igitur inter figuras iſoperimetras, eam, quæ æquiangula eſt, eſſe omnium maximam.

Corollarium III.

278. Intelliges jam, quid impediat, quo minùs menſuras exprimere liceat per rhombos, æquè ac quadrata; magnitudines nimirum definiendæ ſunt per menſuras certas, ideoque per quadrata potius, quàm per rhombos; cum enim quadratorum omnium anguli recti ſint, adeoque inter ſe æquales: dato latere quadrati, de ejuſdem magnitndine conſtabit. Rhomborum autem anguli cum poſſint plus minuſve eſſe obliqui, latus datum nondum determinat magnitudinem rhombi, quæ quidem major minorve erit, prout obliquitas minor majorque fuerit. Itaque non rhombis, ſed quadratis determinandæ ſunt figurarum magnitudines.

PROPOSITIO IX.

TAB. VI. Fig. 153. 279. Theorema. *Inter figuras iſoperimetras major eſt illa, quæ plures continet angulos, plurave latera.*

Demonſtratio. Triangulo æquilatero, vel iſoſceli ABC fiat æquale rectangulum ADCE (n. 250.) Perſpicuum eſt ambitum parallelogrammi ADCE minorem eſſe ambitu trianguli ABC. Nam duo latera AE, DC parallelogrammi ſimul ſumpta, æqualia ſunt lateri BC trianguli ABC; reliqua verò duo latera AD, CE parallelogrammi ADCE minora ſunt reliquis duobus lateribus AB, AC trianguli ABC (n. 227.). Sit igitur recta DAG=AB; perficiaturque parallelogrammum CFGD, quod triangulo ABC erit iſoperimetrum, & quantitate AEFG triangulum ABC ſuperabit. Conſtat igitur figuram quadrilateram capaciorem eſſe figura triangulari ſibi iſoperimetra; eademque ratio eſt in aliis figuris plurium laterum, iſoperimetris tamen; quò enim plures habet angulos figura, eò pluribus in locis latera ejus recedunt à centro, & medio, ac propterea capacior exiſtit. Quod erat &c.

Corollarium.

280. Hinc circulus omnium figurarum iſoperimetrarum capaciſſimus eſt, quippe qui infinitos quodammodo includat angulos, & latera, omnibuſque pun-

punctis æqualiter recedat à centro. Idem quoque dicendum de ſphæra, ſi cum aliis corporibus ſibi iſoperimetris comparetur. Hinc abunde patet, quàm lubricum ſit figurarum magnitudinem ex ſolo ambitu æſtimare.

Monitum.

281. *P. Tacquet lib. 2. Geom. pract. probl. 2. opportunè hoc loco occurrit dubitationi Tironum ſatis familiari. Parallelogrammum obliquum (idem dic de aliis figuris) nequit reſolvi in quadrata, ſic ut ea ſibi mutuò oppoſita obliquum parallelogrammum præcisè expleant, eique commenſurentur, & congruant* (*n.* 275.); *quâ ergo ratione iſtud parallelogrammum poteſt menſurari per quadrata, puta, pedalia, & certo talium quadratorum numero eſſe æquale? Eſt quidem illa hallucinatio valde craſſa, inquit ipſe, ſed tamen Tironibus familiaris. Sciant igitur illi tam ſuperficies, quàm corpora æquari inter ſe poſſe, licet ſint diſſimilia, ac proinde unum alteri nequeat congruere, ut ex tota paſſim Geometria patet. Sic triangulo exhibetur æquale parallelogrammum. Congruentia igitur ad æqualitatem non requiritur, præterquam in rectis lineis, & angulis rectilineis, in quibus hæc ab illa inſeparabilis eſt.*

ELEMENTUM VII.

De Polygonis.

DEFINITIONES.

282. POLYGONUM *eſt plana ſuperficies pluribus, quàm quatuor rectis lineis terminata.*

Hinc habita ratione laterum, quæ in infinitum multiplicari poſſunt, innumeræ oriuntur polygoni ſpecies; nam, quod quinque conſtat lateribus, pentagonum, quod ſex, hexagonum, quod ſeptem, heptagonum nominatur; atque ita de ceteris.

TAB. VI. Fig. 154. 283. *Polygonum* ABCDEF *dicitur regulare, quod omnes angulos ad circumferentiam ejusdem circuli habet æquales, & omnia pariter latera æqualia.*

284. *Polygonum irregulare dicitur, quando non habet omnia latera æqualia, vel, quando ad circumferentiam ejusdem circuli ſuos omnes angulos habere non poteſt.*

285. *Perpendicularis* KG *ducta à centro* K *circuli ad latus* AB *polygoni regularis vocatur Apotheme hujus polygoni.*

Corollarium I.

TAB. VI. Fig. 154. 286. Quare, ſi à centro K ad omnes angulos polygoni regularis ducantur rectæ, polygonum dividitur in triangula AKB, BKC, CKD &c. perfectè æqualia. Nam ſingulorum duo latera ſunt radii ejusdem circu-

circuli ; & tertium eſt latus ipſum polygoni ; adeoque triangula ſunt ſibi mutuò æquilatera.

Corollarium II.

287. Si præterea à centro K ducantur apothemæ KG, KH, KI &c. erunt triangula BKG, BKH, CKH, CKI &c. inter ſe æqualia, & apothemæ KG, KH, KI &c. inter ſe æquales.

Nam triangula AKB, BKC, CKD &c. cum ſint & mutuò æquilatera, & æquiangula, & præterea apothemæ KG, KH, KI &c., cum ſint perpendiculares à centro K ductæ ad chordas æquales, hoc eſt, latera polygoni AB, BC, CD, cadent in medio harum chordarum (n. 146.), ita ut omnes ſemichordæ BG, BH, CH &c. ſint æquales. Ergò (n. 229,) triangula rectangula GBK, HBK, HCK &c. ſunt perfectè æqualia ; & conſequenter apothemæ KG, KH, KI &c. erunt æquales.

PROPOSITIO I.

288. Theorema. *Si chorda* AB *ſit æqualis radio circuli, arcus, qui eam ſubtendit, æquatur ſextæ parti circumferentiæ.*

Demonſtratio. Ducantur radii KA, KB ad extremitates chordæ AB, quæ ponitur æqualis radio circuli. Triangulum AKB erit æquilaterum, & conſequenter æquiangulum (n. 225.). Horum autem TAB. VI. Fig. 154.

trium angulorum inter ſe æqualium ſumma habet pro menſura ſemiſſem circumferentiæ. Ergò arcus A B, qui eorum unum metitur, id eſt, angulum A K B, erit tertia pars ſemiperipheriæ, hoc eſt, ſexta pars totius circumferentiæ. Quod erat &c.

Corollarium I.

Ergò eâdem, qua circulus deſcribitur, aperturâ circini, dividitur circumferentia in 6 partes æquales, & hexagonum regulare circulo inſcribi poteſt.

Corollarium II.

Latus hexagoni circulo inſcripti eſt æquale radio. *Euclid. lib. 4. prop. 15. Corol.*

PROPOSITIO II.

TAB. VI. Fig 155. 289. Problema. *Circulum datum in partes, ſeu gradus 360 dividere.*

Reſolutio. Sit datus circulus A D B C, cujus centrum X: ſic eum in gradus 360 divides.

I. Per centrum X ducantur duæ diametri A B & D C, quæ ſe mutuò ad angulos rectos ſecent, & circumferentiam in quatuor partes dividant.

II. Servatâ eâdem circini aperturâ, quâ circulus deſcriptus eſt, pone unius cruris apicem ſuper A puncto extremo diametri A B; & alterius cruris apice notentur duo puncta E & F, quæ arcus abſcin-

abſcindent AE, AF graduum 60 (n. 288.); & complementa horum arcuum, nimirum, EC, FD; erunt ſingula graduum 30.

III. Defixô rurſum apice circini eodem intervallô in B, notentur crure altero duo puncta G & H, quæ ſimiliter dabunt arcus BG, BH graduum 60, & horum arcuum complementa GC, HD graduum 30.

IV. Simili prorſus ratione, facto centro in C & D punctis extremis alterius diametri, eodemque intervallo abſcindentur quatuor arcus CI, CM, DL, DN, ſinguli graduum 60, quorum complementa AI, BM, AL, BN, erunt ſingula graduum 30.

V. Habes ergò totam circumferentiam in 12 æquas partes diviſam, quarum ſingulæ 30 gradus continebunt.

VI. Rurſum unamquamque earum divide bifariam, ſeu in duas partes æquas; ſicque tota peripheria erit ſecta in 24 partes, quarum ſingulæ gradus 15 comprehendent.

VII. Jam verò, cum nullam planè habeamus methodum geometricam, qua horum 24 arcuum ulterior diviſio perfici poſſit in alias 15 partes æquales, quærenda erit attentando apertura circini, quæ eorum quemlibet in tres partes æquales ſubdividat; deinde quærenda nova circini apertura, quæ harum partium quamlibet rurſum dividat in alias quinque partes æquales; eritque circumferentia circuli diviſa in 360 partes æquales, quas vocant gradus.

Peracta prima diviſione circuli in quatuor æquales partes, diviſiones reliquæ hoc verſiculo comprehenduntur:

In tres, in binas, in tres, in quinque ſecato.

Corollarium I.

290. Ex iis, quæ de diviſione circumferentiæ diximus, perſpicuum eſt artificium conſtruendi geometricè polygona laterum 3, 4, 6, 12, 24, & laterum numero continuè duplo. Ratio eſt, quia cum per binas diametros ſe ſe perpendiculariter interſecantes circumferentia circuli dividatur in quatuor æquales partes, rurſúmque notum ſit artificium (n. 143.) geometricè dividendi, & ſubdividendi bifariam arcum quemvis, planè conſtat, qua methodo conſtrui geometricè poſſint polygona regularia laterum 4, 8, 16, 32, & numero laterum continuè duplo.

Corollarium II.

291. In proceſſu horum Elementorum demonſtrabimus, qua ratione geometricè dividi poſſit circumferentia circuli in 5 & 10 partes æquales. Cùm verò harum partium quælibet bifàriam dividi facilè poſſit, hinc conſtrui poterunt polygona, 5, aut 10, aut cujusvis numeri laterum compoſiti ex continuo ductu 5 in 2.

Geo-

Geometrica divisio circumferentiæ in 5 partes æquales, quarum singulæ valent 72 gradus, & geometrica pariter divisio ejusdem circumferentiæ in 6 partes æquales, quarum singulæ sunt graduum 60, obtinetur, inveniendo arcum graduum 12, qui trigesima pars est totius circumferentiæ, seu gradum 360. Quare geometricè dividi potest tota circumferentia in 30 partes æquales, & consequenter in 15, ac præterea in numerum partium æqualium continuè duplum numeri 30, hoc est, in 60, 120 &c. partes æquales.

Scholion.

292. *Quia nondum reperta est ars, qua solo circino, & regulâ circumferentia circuli dividatur in partes* 7, 9, 11, 13, 14, 17, *&c. idcirco, quoties polygonum regulare hoc laterum numero compositum construere oporteat, quærenda erit attentando modò hæc, modò illa circini apertura, qua fieri possit, ut circumferentia circuli in totidem partes æquales dividatur, quot latera polygonum quæsitum habere debet.*

PROPOSITIO III.

293. Theorema. *Superficies polygoni regularis cujusvis* ABCDEF *æquatur triangulo* AKH, *cujus basis* AH *æqualis sit perimetro hujus polygoni, & altitudo æqualis perpendiculari, seu apotheme* KG *ejusdem polygoni.* TAB. VI. Fig. 156.

Demon,

Demonstratio. Ducantur à centro K ad omnes polygoni angulos radii : resolvetur in totidem triangula æqualia, quot habet latera polygonum (n. 286.) Cum autem hæc triangula habeant pro altitudine apothemen polygoni, erunt omnia ejusdem altitudinis. Jam verò, si super eadem recta AH constituantur successivè bases AB, BC, CD &c. horum triangulorum : hoc est, si polygoni perimeter evolvatur in unicam rectam lineam AH, super qua, tanquam basi, construatur triangulum AKH, cujus altitudo sit apotheme ipsa polygoni, erit (n. 260.) triangulum AKH æquale summæ triangulorum omnium componentium polygonum ABCDEF. Ergò superficies polygoni regularis &c. Quod erat &c.

PROPOSITIO IV.

TAB. VI. Fig. 156. 294. Problema. *Invenire aream polygoni regularis.*

Resolutio sequitur ex præcedente. Nam superficies trianguli AKH æquatur facto ex ductu semisseos basis AH in altitudinem KG. Ergò superficies polygoni regularis cujuscunque ABCDEF prodibit ex ductu semisseos perimetri in apothemen KG. Quod erat &c.

LEMMA.

295. *Circulus considerari potest instar polygoni regularis infinitorum laterum.*

Nam, cum polygonum regulare eò magis ad circulum accedat quò magis ipsius fius latera numero augentur, & latitudine minuuntur: si hæc ponantur infinitè parva, ac propterea numero infinita, manifestum est, differentiam polygoni à circulo, & apothemen à radio, esse quavis data magnitudine minorem, & consequenter polygonum desinere in circulum.

PROPOSITIO V.

296. Problema. *Invenire aream circuli.*

Resolutio. Cum enim circulus considerari possit instar polygoni regularis infinitorum laterum, obtinebitur eâdem methodo dimensio circuli, si peripheriæ semissis, quam mechanicè metiri oportebit, ducatur in radium.

Scholion.

297. *Si geometricè inveniri, ac demonstrari posset recta linea æqualis circumferentiæ circuli, cujus datur radius, figuram rectilineam haberemus æqualem superficiei circuli, eámque, quam vocant, circuli quadraturam. Ab omni ævo, quo Geometria exculta fuit, in quadrando circulo desudârunt præstantissima ingenia, sed irrito conatu; nihilo tamen minùs varias excogitârunt diametri ad circumferentiam rationes, quibus saltem quamproximè, & sine errore sensibili in praxi definiri posset valor circumferentiæ. Archimedes invenit rationem diametri ad circumferentiam,*

vel

vel ſemidiametri ad ſemicircumferentiam eſſe, ut 7 ad 22. ferè. Quare circumferentia, vel ſemicircumferentia circuli proximè habebitur, multiplicando diametrum, vel radium per 3 & $\frac{1}{7}$. Similiter ſuperficies circuli æquabitur triangulo, cujus altitudo ſit radius, & baſis ſit diameter ipſa ter ſumpta cum ſeptima ejuſdem parte. Superficies autem ſectoris cujuſvis eadem regulâ invenietur, dummodo cognoſcatur ratio ſui arcus ad integram circumferentiam. Sed de his alibi plura.

PROPOSITIO VI.

TAB. VI. Fig. 157. 158. 159. 298. Problema. *Aream ſuperficiei irregularis multangulæ cujuſcunque, quæ pervia ſit, invenire.*

Reſolutio. Polygonum irregulare ABCDEF dividatur in triangula, ductis rectis à quovis puncto H ad libitum aſſumpto, vel in vertice unius anguli, vel in uno latere, vel intra aream, ut commodiùs viſum fuerit, ad omnes angulos figuræ. Metire ſingula triangula (n. 267.): horum ſumma dabit aream quæſitam.

Fig. 160. *Aliter.* Intra aream menſurandam deſignetur linea, quæ poteſt longiſſima BQ, ad quam ex omnibus angulis ducantur perpendiculares, quæ aream polygoni ſecabunt in quadrangula, quorum duo latera ſunt parallela, & in triangula rectangula. Metire ſingula [n. 267.]: ſumma ex omnibus collecta dabit aream quæſitam.

Cor-

Corollarium.

299. Si areæ incognitæ pars aliqua ſit curvilinea, inſcribe illi triangula, & quadrangula, donec reſiduum curvilineum æſtimari non debeat. Tab. VI. Fig. 161.

Habes agrorum omnium dimenſionem, quorum area pervia ſit. Quid autem facto opus ſit, ſi quando area ſit impervia, infra docebimus.

PROPOSITIO VII.

300. Theorema. *Omnes ſimul anguli interni cujuſvis polygoni æquales ſunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot polygonum habet latera, ſeu angulos.* Tab. VI. Fig. 162.

Et omnes ſimul externi anguli cujuſcunque polygoni conficiunt quatuor rectos.

Demonſtratur I. pars. Ex quovis puncto F intra figuram ducantur ad omnes polygoni angulos rectæ, quæ polygonum ſecabunt in tot triangula, quot habet latera. Quare, cum ſingula triangula [n. 213.] conficiant duos rectos, omnia ſimul conficient bis tot rectos, quot ſunt latera. At anguli eorumdem triangulorum circa punctum F intra figuram aſſumptum, nec pertinent ad angulos polygoni propoſiti, & conficiunt quatuor rectos (n. 83.). Quare, ſi hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli conſtituentes angulos polygoni, bis quoque tot rectis æquales, demptis illis quatuor circa punctum F,

quot

quot latera, vel angulos continet polygonum. Quod erat primum.

Demonſtratur II. pars. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, æquantur duobus rectis; atque adeo omnes externi unà cum omnibus internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, auguloſve polygonum continet. Sunt autem & ſoli interni bis tot rectis æquales, minùs quatuor, ut demonſtravimus. Si igitur interni auferantur, externi remanebunt quatuor tantùm rectis æquales, qui nimirum deſunt internis angulis, ut interni, & externi ſimul bis tot rectos conficiant, quot habet latera polygonum. Quod erat alterum.

Corollarium.

301. Ergò quatuor anguli quadrilateri cujuſvis conficiunt quatuor rectos. Quamobrem, ſi quatuor anguli quadrilateri ſint ſinguli inter ſe æquales horum quilibet erit rectus.

Et omnes ejuſdem ſpeciei rectilineæ figuræ æquales habent tam internorum, quàm externorum angulorum ſummas. Et trianguli alicujus tres externi anguli æquales ſunt mille externis angulis figuræ millelateræ. Quod admiratione dignum eſt.

PROPOSITIO VIII.

TAB. VI. Fig. 154. 302. Problema. *Regularium figurarum angulos, tam centri, quàm circumferentiæ invenire.*

Angu-

Angulum centri AKB voco illum, quem continent duo radii ab unius lateris extremitatibus ad centrum K ducti. Unde figura ordinata tot habet centri angulos, quot latera, quos omnes inter se constat esse æquales.

Anguli circumferentiæ sunt, que figuræ lateribus continentur.

Resolutio I. partis. Gradus 360. divide per denominatorem figuræ, puta, si figura data sit sexangula, divide per 6: provenient gradus debiti angulo centri.

Demonstratio. Omnes simul anguli centri conficiunt 4 rectos, seu gradus 360. Quare unus ex illis est graduum 360 pars ab ipsorum multitudine, seu denominatore figuræ denominata. Ergò &c. Quod erat primum.

Resolutio. II. partis. A duplo numero laterum deme 4: residuum multiplica per 90: productum divide per denominatorem figuræ: provenient gradus debiti angulo circumferentiæ.

In pentagono duplus numerus laterum est 10: ab hoc, si demas 4, remanent 6, quæ ducta in 90 producunt 540; hæc autem divisa per 5 denominatorem figuræ, exhibent 108 gradus, qui debentur angulo circumferentiæ pentagoni.

Demonstratio. Omnes simul anguli cujusvis polygoni, seu figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ, demptis quatuor. Quare, ſi duplum laterum numerum, demptis 4, ducas in 90 gradus uni recto debitos, provenient gradus debiti omnibus ſimul figuræ angulis; atque adeò unus ex illis eſt pars horum graduum ab angulorum multitudine, ſeu denominatore figuræ denominata. Ergò &c. Quod erat alterum.

Denominatores figurarum	Anguli centri	Anguli circumferentiæ
3.	120.	60.
4.	90.	90,
5.	72.	108.
6.	60.	120.
	I II	I II
7.	51.25.43.	128.34.17.
8.	45.	135.
9.	40.	140.
10.	36.	144.
	I I	I II
11.	32.43.38.	147.16.22.
12.	30.	150.

OBSERVATIO.

303. Hactenus ſuperficies dimenſi fuimus, quaſi verò eſſent plana perfectiſſima, contra quàm accidat; nam camporum plerique ſuperficiem habent valde inæqualem, modò in colles aſſurgunt, modò in valles deprimuntur; quæ res illorum ſuperficiem auget quàm maximè. Sane hemiſphærium multò

majo-

majorem habet ſuperficiem, quàm baſis plana, cui inſiſtit. Quamobrem, ſi harum inæqualitatum ratio nulla eſſet habenda in æſtimanda camporum ſuperficie, hæc multò minor prodiret, quàm reipſa ſit. Hinc quæſtio illa non contemnenda, an in venditione agrorum declivium ſit habenda ratio inclinationis, an verò ſuperficies inclinata ad horizontalem revocanda ſit.

Sed intelligant velim Tirones, qui praxi daturi ſunt operam, harum inæqualitatum interdum habendam eſſe rationem, interdum nullam, pro diverſo, quem quis intendat, fine.

Si quæratur, quot lapidibus quadratis conſternendum ſit pavimentum inclinatum, ſpectanda erit tota quanta eſt illius area, major in ea inclinatione, quàm ſi ad horizontalem revocaretur.

At ſi hæc eadem ſuperficies inclinata conſideranda eſſet vel ad uſum ædium conſtruendarum, vel ad utilitatem frugum, & arborum, quæ eò loci ſerendæ ſint, dimenſio ejuſdem areæ ex baſi horizontali æſtimanda eſſet, quæ aream multò minorem contineret, quàm convexa, vel inclinata ejuſdem ſuperficies. Ratio eſt, quia in hac conſideratione non quantitas, ſeu area ſpectanda eſt, ſed utilitas. Nam cum fruges, arbores, ædificia perpendiculariter aſſurgant, certum eſt, non plura conſiſtere poſſe in ſuperficie inclinata AB, quàm in horizontali CB,

TAB. VI. Fig. 163.

PRAXIS GEOMETRICA

Elementi VII. Lib. I.

Figurarum Planarum Reductio, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio.

Elementorum cognitio nullâ re magis aliâ juvari ſolet, quàm exercitatione, & praxi: quorum alterum facit, ut Elementa uſu trita, & familiaria reddantur, &, ſi quando opus ſit, vocata ſponte occurrant, ac Geometræ demonſtranti præſto ſint; praxis autem non evanidæ ſpeculationis opus eſſe declarat Elementorum cognitionem; immo verò fructu uberrimo, quaſi ſtimulis, Tirones excitat, ut altiùs eniti velint. Nihil ſanè in Geometria practica frequentiùs, quàm hæc planarum ſuperficierum transformatio, additio, ſubtractio, multiplicatio, ac præſertim diviſio, quam Geodæſiam vocant, & in camporum diviſione verſari ſolet.

In hac itaque Geometriæ practicæ parte tradenda delectum habuimus eorum tantùm Problematum, quæ ex præjectis Elementis pendent; reliqua verò, quæ doctrinam proportionum poſtulant, in ſecundam partem rejecimus. Ita fiet, ut ſubactum Tironum ingenium multò alacriùs ad alteram Geometriæ partem progrediatur.

Figu-

Figurarum Planarum Reductio.

DEFINITIO.

304. *Figuram rectilineam alteri æqualem voco, quando utriuſque ſuperficies eundem numerum partium æqualium continet, quin ulla habeatur ratio & angulorum, & laterum.*

Problema I.

305. *Triangulum iſoſceles, ſeu æquilaterum* ABC *in aliud ipſi æquale rectangulum transformare.* TAB. VI. Fig. 164.

Reſolutio. Demittatur perpendicularis AD, quæ baſim BC bifariam ſecabit in puncto D (230.): fiat DE=BC; jungatúrque AE. Dico factum.

Demonſtratio. Pendet ex n. 257. Nam duo triangula ABC, ADE & ſuper æqualibus baſibus, & inter eaſdem parallelas, hoc eſt, ad eumdem verticem A ſunt conſtituta. Quod erat &c.

Problema II.

306. *Triangulo æquilatero* ABC *aliud æquale conſtruere obtuſangulum ſcalenum.* TAB. VI. Fig. 165.

Reſolutio. Per verticem B ducatur indefinita BE baſi AC parallela, ac præterea recta, prout libuerit, CE, modò angulum obtuſum in C efficiat; jungatúrque AE. Dico factum.

Demonſtratio eadem n. 257.

Problema III.

307. *Triangulo æquilatero* ABC *aliud æquale conſtruere iſoſceles, & obtuſangulum.*

Reſolutio. Per verticem B ducatur
TAB. BD parallela baſi AC; & à puncto C,
VI. intervallo CA, deſcribatur arcus, qui
Fig. parallelam BD ſecet in D; jungantúr-
165. que CD, DA. Dico factum.

Demonſtratio conſequitur ex eodem n. 257.

Problema IV.

TAB. 308. *Triangulo iſoſceli* ABC *aliud*
VI. *æquale triangulum ſcalenum conſtruere.*
Fig. *Reſolutio.* Per verticem A ducatur
166. EF parallela baſi BC &c.

Problema V.

309. *Triangulo dato* ABC *aliud æquale conſtruere hâc lege, ut tria hujus latera ſingula majora ſint tribus lateribus trianguli dati.*

Reſolutio. Producatur utrinque baſis
TAB. BC in D & E, ita ut recta DE dupla
VI. ſit ejuſdem baſis; & à punctis D & E
Fig. demittantur perpendiculares DF, EG
167. æquales ſemiſſi altitudinis AH dati trianguli; ducatúrque FG: erit parallelogrammum DFGE duplum trianguli dati ABC (n. 250.); ductíſque lineis HF, HG, triangulum FHG Problemati ſatisfaciet.

Problema VI.

310. *Triangulum datum* BAC *in aliud æquale transformare ad datam altitudinem.*

Resolutio. In data altitudine accipiatur punctum D pro vertice trianguli construendi. TAB. VI. Fig. 168. 169.

Casus I. Si punctum D sumptum fuerit, aut datum vel in latere BA trianguli BAC, vel in eodem latere producto, ducatur a puncto D ad oppositum angulum C recta DC, cui à vertice A ducatur parallela AE, quæ basi BC productæ, si opus sit, occurat in E; junganturque puncta D & E rectâ DE. Dico triangulum BAC æquale esse triangulo constructo BDE, & ad datam altitudinem.

Demonstratio. Nam duo triangula DAC, DEC super eadem basi DC, & inter easdem parallelas sunt æqualia, quæ vel addantur triangulo BDC, ut in fig. 1., vel ab eodem subtrahantur, ut in fig. 2., duo, quæ inde oriuntur, triangula BAC, BDE erunt æqualia. Quod erat &c.

311. *Casus II.* Si punctum D vertex trianguli quæsiti sumptum non fuerit, aut datum in latere BA, etiam producto, trianguli dati BAC: ducatur à puncto extremo B basis BC per D recta indefinita BD, cui à vertice A occurrat in O recta AO parallela basi BC; TAB. VI. Fig. 170. 171.

tum a puncto O ad extremitatem alteram C ejusdem basis agatur recta OC. Dico triangulum BDE æquale esse dato ttiangulo BAC.

Demonstratio. Triangulum BAC æquatur triangulo BOC. Atqui per casum I., triangulum BOC æquatur triangulo BDE, cujus vertex D est in latere BO, etiam producto, si opus sit. Ergo triangulum BAC æquatur triangulo BDE. Quod erat &c.

Corollarium.

312. Si triangulum BAC transformare oporteat in aliud BDE ejusdem valoris, cujus altitudo data sit & angulus DBE pariter datus, ducatur recta indefinita BDO, quæ cum BC angulum quæsitum efficiat; tum in recta BDO accipiatur punctum D ad eam à basi BC altitudinem, quæ tribuenda sit triangulo construendo BDE; tum reliqua peragantur, ùt in Probl. præced.

Problema VII.

313. *Quadrilatero irregulari* ABCD *æquale triangulum construere, cujus vertex sit quodvis punctum* F *sumptum in latere* AB *dati quadrilateri.*

Tab. VII. Fig. 72. *Resolutio.* Ducantur FC, FD, quibus singulis parallelæ AM, BN à punctis A & B ductæ terminentur in punctis M & N lateris DC utrinque producti. Rectæ FM, F, N dabunt triangulum MFN æquale quadrilatero ABCD.

De-

Demonſtratio eadem, quæ n. 310. & 311.

Quòd ſi quadrilaterum ABCD eſſet magìs regulare, ductâ diagonali AC, eique parallelâ BN, junctáque AN, triangulum DAN ſatisfaciet Problemati. Fig. 173.

Problema VIII.

314. *Datis quadrato, parallelogrammo, rhombo, aut rhomboidi æquale triangulum conſtruere.* Fig. 174. 175. 176.

Reſolatio. Fiat BE=CB; ducaturque AE &c.

Problema IX.

315. *Trapezio dato* ABCD *æquale triangulum conſtruere.* Tab. VII.

Reſolutio. Si trapezium nullos habeat rectos angulos, producatur minus latus AB, cui occurat in F perpendicularis CF; dein à puncto A demittatur perpendicularis AK. Facilè demonſtrabitur, ut ſupra, quadrilaterum ABCD =AKCF=triangulo KFE. Fig. 177.

Si verò trapezium datum aliquos habeat angulos rectos, latus obliquum AB ſecetur bifariam in puncto K; ducatúrque GKF parallela lateri DC; & CB producatur in F. Ex notis principiis demonſtrabitur trapezium ABCD= quadrilatero GFCD=triangulo DFE. Fig, 178.

Problema X.

316. *Trapezoidem datum* ABCF *in æquale triangulum transformare.* Tab. VII.

Reſolutio, Ductâ diagonali CA, eíque pa- Fig. 179.

parallelâ BG: junctâque CG facilè demonstrabis triangulum FCG esse quæsitum.

Problema XI.

317. *Quadrilatero dato* ABCD, *quod unius anguli verticem introrsum obvertit, æquale triangulum construere.*

TAB. VII. Fig. 180. *Resolutio.* Jungatur DB, eíque parallela fiat AE, ductâque DE habebitur triangulum CED æquale quadrilatero.

Problema XII.

TAB. VII. Fig. 181. 318. *Polygono irregulari* ABCDE *æquale triangulum construere.*

Habes in figura proposita & constructionem, & demonstrationem ex iisdem principiis.

Problema XIII.

319. *Figuram quamvis rectilineam* ABCDE *in aliam ipsi æqualem* ABFE *transformare, uno latere deficientem.*

TAB. VII. Fig. 182. 183. *Resolutio.* Extremitates duorum laterum DE, DC anguli D jungantur rectâ EC, cui per ejusdem anguli D verticem ducatur parallela DF, quæ terminetur in F à latere BC, producto, si opus sit; ducatúrque recta EF. Dico polygonum ABFE & æquale esse proposito polygono ABCDE, & ab eodem deficere uno latere.

Demonstratio. Nam duo triangula EDC, EFC super eadem basi EC, & inter easdem parallelas sunt æqualia. Quare.

re, si eidem figuræ ABCE addatur quodlibet horum triangulorum, ut in fig. 1., vel ab eadem subtrahatur, ut in fig. 2., invenietur figura proposita ABCDE æqualis novæ figuræ ABFE, quæ uno latere à prima deficit. Quod erat &c.

Corollarium. I.

320. Hinc omnis figura rectilinea in triangulum transformari potest. Nam per repetitas transformationes ejusdem in novas figuras à præcedente semper deficientes uno latere, tandem revocabitur in triangulum. TAB. VII. Fig. 184. 185.

Proposita sit reductio polygoni ABCDEF in triangulum IAH, cujus vertex A sit in circumferentia polygoni, & basis sit latus CD utrinque productum.

I. Ab extremitate D lateris CD ducatur diagonalis DF, quæ ab eodem polygono separabit triangulum DEF; rectæ DF agatur parallela EG, quæ occurret in G lateri CD producto; jungatúrque FG. Hâc primâ operatione habebitur polygono proposito æquale polygonum ABCGF, uno latero deficiens [n. 319].

II. Consideretur jam hoc unicè polygonum ABCGF, quod iterum reducendum erit ad aliud ipsi æquale, & uno latere deficiens, hoc pacto. Ducatur recta AG, cui parallela FH occurret

ret in H lateri CD producto; jungatúrque AH: habebitur novum polygonum ABCH = ABCGF = ABCD EF.

III. Cum autem hoc ultimum polygonum ABCH habeat latus AH, quod assumi potest pro latere trianguli IAH construendi, nihil superest aliud, quàm reductio suæ partis ABC. Ductâ itaque rectâ AC, eique parallelâ BI, quæ basi productæ DC occurrat in I, junctâque AI, transformabitur polygonum propositum ABCDEF in triangulum quæsitum IAH.

Scholion.

Notabis eamdem prorsus esse constructionem, sive polygonum datum reducendum sit in triangulum, cujus vertex sit in uno angulorum polygoni, sive reductio instituenda sit in triangulum, cujus vertex sit in uno latere polygoni.

Corollarium. II.

321. Consequitur hinc artificium reducendi polygonum quodvis in triangulum, cujus vertex sit in dato quovis puncto aut intra, aut extra polygonum, vel in triangulum datæ altitudinis, & unius anguli ad basim pariter dati.

Nam I. reducendum polygonum in triangulum, cujus vertex sit vel in uno angulorum, vel in uno latere ejusdem polygoni.

II. Hoc triangulum in aliud transformamabitur vel datæ altitudinis, & cujus vertex ſit in dato puncto, vel dati anguli ad baſim (n. 310. 311. & 312.)

Figurarum Planarum Additio.

Problema XIV.

322. *Data ſint triangula ſimul addenda, ut ſumma ſit triangulum datis æquale.*

Reſolutio. Si triangula ſint ejuſdem altidinis, ut AMB, BNC, COD, DPE, baſes eorum AB, BC, CD, DE componantur in rectam lineam AE: ſuper baſi AE, ad eandem altitudinem conſtruatur triangulum AME: quod æquale erit datis ſimul omnibus. TAB. VI. Fig. 141.

Si verò triangula data non ſit æquè alta, reducantur prius ad eamdem altitudinem, [n. 310.].

Problema XV.

323. *Data ſint polygona quæcunque ſimul addenda, ut ſumma ſit triangulum datis polygonis æquale.*

Reſolutio. Revocentur polygona ad totidem triangula æqualis altitudinis (n. 321.), quorum ſumma ſit triangulum [n. 322.].

Problema XVI.

324. *Figuras quaſcunque rectilineas transformare in unicum triangulum dati ad baſim anguli, & datæ altitudinis, aut cujus vertex ſit in dato puncto.*

Reſo-

Resolutio, Fiat triangulum datis simul omnibus figuris æquale (n. 323.): quod in aliud transformetur, cujus vertex sit in dato puncto [n. 310.], vel quod datam habeat altitudinem, & datum angulum (n. 312.).

Problema XVII.

325. *Datæ sint figuræ rectilineæ quæcunque simul addendæ, ut summa sit parallelogrammum.*

Resolutio. Fiat triangulum datis figuris rectilineis æquale [n. 324.]: quod transformetur in parallelogrammum &c.

Multiplicatio.

Problema XVIII.

326. *Datum triangulum* AMB *per quemlibet numerum* 2, 3, 4, 5 *&c, multiplicare, ita ut duplum, triplum, quadruplum, & sic in infinitum, multiplum constitutatur.*

TAB. VII. Fig, 186. Hoc est, invenire oporteat triangulum, puta, quadruplum dati trianguli AMB.

Resolutio. Producatur basis AB ad E, ita ut AE sit quadrupla ipsius AB; ducatúrque ME. Dico factum.

Demonstratio. Nam quatuor triangula, quæ designantur in apposita figura, & æqualibus basibus insistunt, & habent eandem altitudinem. Ergo &c. Quod erat &c.

Pro-

Problema XIX.

327. *Triangulum datæ altitudinis invenire, quadruplum, aut pro libito multiplum datæ cujuſvis figuræ rectilineæ.*

Reſolutio. Figura rectilinea transformetur in triangulum datæ altitudinis (n. 321.), cujus quadruplum, aut quâvis ratione multiplum inveniatur per præced. Probl.

Subtractio.

Problema XX.

328. *Datum ſit triangulum* bad *à triangulo* BAC *ſubtrahendum, ut maneat triangulum.*

Reſolutio. Si duo triangula B A C, *b a d* ſint æquè alta, transferatur baſis *bd* in BC, & ducatur AD. Dico factum. Utì conſtat ex ſchemate. TAB. VII. Fig, 187.

Si verò triangula data non ſint æquè alta, revocentur prius ad eamdem altitudinem.

Problema XXI.

329. *Datum ſit polygonum ab alio polygono ſubtrahendum, ut differentia, ſeu exceſſus ſit triangulum.*

Reſolutio. Data polygona revocentur ad duo triangula æquè alta; tum operaberis, ut in Probl. præced.

Problema XXII.

330. *Datum triangulum à quovis polygono ſubtrahere, ductâ in eodem polygono rectâ lineâ à puncto dato* F *in uno ſuorum laterum,*

Reſo-

Resolutio. Triangulum, quod à po-
TAB. lygono ABCDE subtrahendum est,
VII. transformetur in triangulum MOP, cu-
Fig. jus altitudo supra basim MP æquetur
188. altitudini puncti F supra latus AB conti-
189. guum lateri, in quo punctum F sump-
tum fuerit. Hoc posito, accipiatur in latere AB, producto, si opus fuerit, portio AG æqualis basi MP trianguli MOP; ducatúrque FG a dato puncto F. Erit triangulum AFG æquale triangulo MOP subtrahendo.

Cum autem in hac subtractione tres præcipui casus possint contingere, hos singillatim exponam.

331. *Casus I.* Si basis MP trianguli MOP non excedat latus AB, & consequenter punctum G cadat super latus AB, Problema jam erit resolutum.

Si verò basis MP trianguli MOP
TAB. major fuerit latere AB, hoc est, si pun-
VII. ctum G sit in latere AB producto, du-
Fig. catur recta FB, eique parallela GH,
188. quæ vel ipsi lateri AC, vel eidem pro-
190. ducto occurret in H. Ex quo duo diversi
casus oriuntur.

332. *Casus II.* Si punctum H sit in latere BC continguo lateri AB, jungatur recta FH, quæ à dato polygono auferet quadrilaterum FABH æquale dato triangulo MOP.

Demonstratio. Nam ductâ rectâ GF, triangula FBG, FBH super eadem basi, & inter easdem parallelas constituta, erunt

æqualia;

æqualia; utrique addatur idem triangulum AFB: erit quadrilaterum FABH æquale triangulo FAG, & conſequenter æquale triangulo dato MOP. Quod erat &c.

333. *Caſus III.* Sin autem recta GH parallela ipſi FB occurrat in H lateri BC producto, ducatur recta FC, eíque parallela HI, quæ lateri adjacenti occurrat in I; jungatúrque FI, quæ à dato polygono abſcindet pentagonum FAB CI æquale dato triangulo MOP.

Demonſtratio. Nam ductâ rectâ FH, habebitur, ut in Caſu II., quadrilaterum FABH æquale triangulo FAG, hoc eſt, per Conſtructionem, triangulo MOP. Atqui triangula FCI, FCH ſuper eadem baſi FC, & inter eaſdem parallelas ſunt æqualia. Ergo, ſi utrique addatur commune quadrilaterum FAB C, fiet FABCI=FABH= MOP. Quod erat. &c.

TAB. VII. Fig. 191. 192.

DE GEODÆSIA.

334. Geodæſia dici ſolet ea Geometriæ Practicæ pars, quæ terrarum diviſionem docet. Omnis autem terrarum tractus, quem dividere oporteat, vel in formam trianguli conformatur, vel quadrilateri, vel polygoni. Et quamvis camporum figuræ interdum ſint curvilineæ, tamen veluti rectilineæ in praxi conſiderari poterunt, ſi ab illis parum differant, vel ad rectilineas re-

duci, dividendo latera curva, quibus terminantur, in plures partes minores, quæ pro lineis rectis assumi possint sine errore sensibili.

Hæc autem Geodæsiæ pars eorum unicè problematum resolutionem tradit, quæ ex præjactis Elementis proficiscuntur. Nam ex tradita proportionum doctrina in secunda horum Elementorum parte, multò uberior problematum, quæ ad Geodæsiam spectant, resolutio derivabitur. Cum enim omnis nostra tractatio eò spectet, ut theoriam praxi conjungamus, & quid ex quoque Elemento consequatur, quod ad praxim deduci possit, explicemus, bipartitam etiam Geodæsiam invehere coacti fuimus, & Tironum satietati occurrere, quibus illud semper in ore: cui usui? præsertim in theoria non intermissa.

Triangulorum Divisio.

Problema XXIII.

335. *Triangulum* ABC *in quotlibet partes æquales dividere per lineas rectas à dato angulo* C *ductas.*

TAB. VII. Fig. 193. *Resolutio.* Latus oppositum AB dividatur, puta, in tres partes æquales; ab angulo dato C ad singula divisionum puncta ducantur rectæ CD, CE, quæ datum triangulum divident in tres partes æquales.

Eodem modo operaberis, si major divisio requireretur. Pro-

Problema XXIV.

336. *Triangulum* ABC *in quotlibet partes æquales dividere, nimirum, tres, per lineas rectas à dato ſuper uno latere puncto* D *ductas.*

Reſolutio. Dividatur latus AB in tres partes æquales in punctis E & F; jungatúrque recta CD, cui per diviſionum puncta E & F ducantur parallelæ EG, FH, quæ lateribus AC, BC occurrent in punctis G & H. Rectæ GD, HD datum triangulum trifariam divident, TAB. VII. Fig. 194.

Demonſtratio. Jungantur rectæ CE, CF. Duo triangula GEC, GED ſuper eadem baſi GE, & inter eaſdem parallelas ſunt æqualia. Subtrahatur commune triangulum GIE: ſupererit triangulum GIC æquale triangulo DIE. Utrinque addatur trapezium AEIG: habebitur triangulum AGD æquale triangulo ACE, nimirum, tertiæ parti dati trianguli ABC per problema præcedens.

Similiter demonſtrabitur triangulum BDH, æquale triangulo BCF, hoc eſt, tertiæ parti ejuſdem dati trianguli ABC. Quod erat &c.

Problema XXV.

337. *Triangulum* ABC *in tres partes æquales dividere per lineas à tribus angulis* A, B, C *ductas.* TAB. VII. Fig. 195.

Reſolutio. Cujusvis lateris, puta, AB, ſumatur tertia pars AD; & à puncto D ducatur DE parallela lateri adjacenti AC; recta DE secetur bifariam in F, à quo ad trium angulorum vertices A, B, C ducantur rectæ FA, FB, FC. Dico factum.

Demonstratio. Jungatur CD. Triangulum AFC æquatur triangulo ADC. Atqui (n. 335.) triangulum ADC est tertia pars trianguli ABC, quippe basis AD per Constructionem est tertia pars basis AB. Ergò triangulum AFC est tertia pars dati trianguli ABC. Quare duo reliqua triangula AFB, BFC simul sumpta conficiunt duas tertias partes ejusdem trianguli ABC. Atqui dicta triangula AFB, BFC sunt inter se æqualia; nam duo triangula BFD, BFE, & pariter duo reliqua AFD, CFE sunt inter se æqualia, singula singulis, quippe quæ æqualibus basibus insistunt, & inter easdem parallelas. Ergò duo triangula AFB, BFC æquant singula tertiam partem dati trianguli ABC. Quod erat &c.

Problema XXVI.

338. *In dato latere* AC *trianguli* ABC *invenire punctum* D, *ex quo triangulum dividi possit in totidem, quot libuerit, partes æquales, puta, quatuor.*

Resolutio. Dati lateris AC accipiatur AD quarta pars ex conditione Problematis. Punctum D erit quæsitum.

Tab. VII. Fig. 196.

Demonstratio. Jungatur BD. Triangulum ABD erit quarta pars triangu-li li ABC. Reliquum itaque triangulum BDC (n. 335.) dividatur in tres partes æquales: habebitur propositum triangulum ABC in quatuor partes divisum per lineas DB, DE, DF. Quod erat &c.

Problema XXVII.

339. *In area trianguli* ABC *invenire punctum* H, *ex quo triangulum dividi possit in quot libuerit partes æquales, puta, quatuor.* TAB. VII. Fig. 197.

Resolutio. Lateris AC accipiatur, ut ante, quarta pars AD; & similiter lateris AB quarta pars AE, quandoquidem triangulum ABC quadrifariam dividere oportet; tum à punctis D & E lateribus AB, AC parallelæ ducantur DF, EG. Punctum communis intersectionis H erit quæsitum.

Demonstratio. Nam ductis HA, HB, HC, duorum triangulorum quodlibet AHB, AHC erit ex dictis quarta pars propositi trianguli ABC; & consequenter triangulum BHC erit ejusdem semissis; reliquum ergò est, ut hoc secetur bifariam rectâ HI; & sic inventum erit punctum H. Quod erat &c.

Quadrilaterum Divisio.

Problema XXVIII.

340. *Parallelogrammum* ABCD *in quotlibet partes æquales dividere per lineas uni lateri parallelas.* TAB. VII. Fig. 198.

Resolutio. Dividatur latus AB in quot-

quotlibet partes æquales; & à punctis divisionum excitentur parallelæ lateri AD; eritque resolutum Problema.

Problema XXIX.

TAB. VII. Fig. 199. 341. *Parallelogrammum* ABCD *in quatuor æquales partes dividere per duas rectas duobus lateribus* AB, AD *parallelas.*

Resolutio. Latera opposita dividantur bifariam in punctis E & F, G & H; jungantúrque EF, GH. Dico factum.

Corollarium.

TAB. VII. Fig. 200. 242. Duæ diagonales AC, BD dividunt parallelogrammum in quatuor triangula isoscelia æqualia; ut facilè demonstrari potest, ductis per centrum I rectis GH, EF, parallelis duobus lateribus AB, AD.

Constat præterea parallelogrammum ABCD divisum iri hac ratione in octo partes æquales, sive triangula, quorum vertex communis est in centro I.

Hinc sequitur parallelogrammum quodvis ab eodem centro I dividi posse in quemlibet numerum pariter parem partium æqualium.

Voco autem numerum pariter parem, qui dividi potest exactè per 4.

Problema XXX.

TAB. VII. Fig. 201. 343. *Dividere parallelogrammum* ABCD *in quemlibet partium æqualium nu-*

numerum parem per lineas rectas ab angulo dato C ductas.

Resolutio. Ducatur diagonalis CA, quæ parallelogrammum in duo æqualia triangula ACD, ACB dividet (n. 249.): Hæc per Probl. I. dividantur singula in tres partes æquales. Dico factum.

Corollarium.

Si demantur & diagonalis AC, & duæ rectæ CF, CH, perspicuum est divisum iri parallelogrammum in tres partes æquales. Fig. 201.

Problema XXXI.

344. *Ex dato super uno latere puncto* E *duas rectas ducere, quæ parallelogrammum* ABCD *dividant in tres partes æquales.*

Resolutio. Latus AB trifariam devidatur in punctis F & G, per quæ ducantur alteri lateri AD parallelæ FH, GI, quæ bifariam dividantur in punctis K & L; tum ex dato puncto E per K & L ductæ rectæ EM, EN trifariam divident parallelogrammum ABCD. Tab. VII. Fig. 202.

Demonstratio. Duo triangula EFK, MHK sunt inter se æqualia (n. 230.); quæ, si separatim addantur eidem pentagono AFKMD, fiet trapezoides AEMD æqualis parallelogrammo AFHD, hoc est, tertiæ parti ejusdem parallelogrammi ABCD. Eodem modo demonſtrabitur trapezoidem BEN C æquari parallelogrammo BCIG, ſeu tertiæ parti parallogrammi ABC D. Ex quo jam conſtat triangulum M EN æquari pariter tertiæ parti parallelogrammi ABCD. Quod erat &c.

Corollarium.

Fig. 203. Si recta EB eſſet tertia pars lateris AB, ducatur EF parallela lateri AD, & diagonalis ED.

Problema XXXII.

345, *Trapezoidem* ABCD *in quotlibet partes æquales, puta, tres, dividere.*

TAB. VII. Fig. 204. *Reſolutio.* Duo latera parallela AB, CD, dividantur ſingula in tres æquales partes in punctis E, F, G, H; junctæque rectæ EG, FH divident trapezoidem ABCD in tres trapezoides inter ſe æquales AEGD, EFHG, FBCH.

Demonſtratio. Nam ductis diagonalibus AG, EH, FC, manifeſtum eſt triangula, ex quibus trapezoides componuntur, eſſe inter ſe æqualia, ſingula ſingulis: quippe quæ ſuper æqualibus baſibus, & inter eaſdem parallelas conſtituuntur. Quod erat &c.

Problema XXXIII.

246, *Trapezoidem* ABCD *per rectam ab angulo* A *ductam bifariam dividere.*

TAB. VII. Fig. 205. *Reſolutio.* Latus angulo dato adjacens AB, parallelum oppoſito lateri CD, pro-

producatur in E, donec AE æquetur ipsi CD; jungatúrque ED, quæ producta occurrat in F alteri lateri BC pariter producto; dein recta BF secetur bifariam in G; ducatúrque AG. Hæc bifariam dividet trapezoidem ABCD.

Demonstratio. Jungantur AF, & diagonalis AC, quæ parallela erit rectæ EF (n. 244.); nam per Constructionem duæ rectæ AC, EF conjungunt duas rectas AE, DC æquales, & parallelas. Duo ergò triangula AFC, ADC sunt inter se æqualia; & ablato communi triangulo AIC, supererit triangulum AID æquale triangulo FIC. Utrique æqualium addatur trapezium ABCI, fiet trapezoides ABCD æqualis triangulo ABF, cujus semissis est triangulum ABG; nam basis BG per Constructionem est semissis basis BF. Itaque triangulum ABG est semissis propositæ trapezoidis. Quod erat &c.

Problema XXXIV.

347. *Trapezoidem* ABCD *bifariam dividere per rectam ductam à dato super ejus basi* AB *puncto* E. TAB. VII. Fig. 206.

Voco autem basim trapezoidis alterutrum duorum laterum, quæ sunt parallela, uti AB.

Resolutio. Super basi AB, productâ, si opus est, accipiatur EF æqualis rectæ EB; ducatúrque à puncto A recta AG parallela rectæ FD; dein recta GC ſecetur biſariam in puncto H, à quo ducta recta H E Problema reſolvit.

Demonſtratio. Jungantur rectæ E G, F G, E C. Duo triangula A D G, A F G ſuper eadem baſi, & inter easdem parallelas conſtituta, ſunt æqualia. Auferatur commune triangulum A I G: reliquum erit triangulum A I F æquale triangulo D I G. Utrique ſeparatim addatur idem trapezium A I G E: fiet trapezoides A D G E æqualis triangulo E G F, & conſequenter ttiangulo E C B, propter æquales baſes E B, E F per Conſtr. Jam verò, quoniam duo triangula G E H, C E H ſunt pariter inter ſe æqualia, quippe quæ baſes habent æquales G H, C H, per Conſtr.: hinc ſequitur trapezoidem A E H D æqualem fore trapezoidi B E H C. Quod erat &c.

Problema XXXV.

348. *Ab angulo dato* D *rectam ducere, quæ trapezium* A B C D *biſariam dividat.*

Reſolutio. Diagonalis A C oppoſita angulo dato D ſecetur biſariam in E; ducaturque E F parallela alteri diagonali B D. Recta D F Problema reſolvet.

TAB. VII. Fig. 207. *Demonſtratio.* Quoniam per Conſtr. rectæ E A, E C ſunt æquales, duo triangula E D A, E D C ſunt æqualia, æquè ac duo E B A, E B C. Ergò duo trapezia A D E B, C D E B ſunt pariter

inter

inter ſe æqualia. Jam verò trapezium ADEB eſt æquale triangulo ADF; & trapezium CDEB eſt æquale trapezio BCDF. Nam duo triangula DIE, BIF ſunt inter ſe æqualia: uti conſtabit, ſi triangulum DIB auferatur à duobus triangulis DEB, DFB pariter æqualibus propter parallelas BD, EF per Conſtr. Itaque triangulum ADF eſt æquale trapezio BCDF. Quod erat &c.

Corollarium.

349. Ex eadem figura conſtare etiam facilè poteſt, quâ ratione trapezium bifariam dividi poſſit per duas rectas lineas à duobus angulis oppoſitis datis D & B ductas. Nam, ſi diagonalis AC ſecetur bifariam in E, junganturque EB, ED, ſatisfiet Problemati.

Problema XXXVI.

350. *Trapezium* ABCD *ex dato ſuper uno latere* AB *puncto* E *bifariam dividere.*

Reſolutio. Jungantur rectæ DE, DB: diagonali DB ducatur à puncto C parallela CF, quæ lateri AB producto occurrat in F. Recta DF efficiet triangulum ADF æquale trapezio propoſito ABCD. Nam propter parallelas DB, CF, duo triangula DCB, DFB ſunt æqualia; ſublatóque communi triangulo BOD, erunt duo reliqua BOF, DOC æqualia; quæ, ſi ſeparatim eidem

Tab. VII. Fig. 208.

dem

dem trapezio DABOD addantur, fiet triangulum ADF æquale trapezio ABCD.

Jam verò ſecetur bifariam baſis AF in puncto G, ducatúrque DG: erit triangulum ADG ſemiſſis trianguli ADF, ſeu trapezii ABCD. Denique à puncto G ducatur recta GH parallela rectæ DE; & jungatur EH. Dico hanc dividere bifariam trapezium ABCD.

Demonſtratio, Quoniam duæ rectæ DE, GH ſunt parallelæ per Conſtr., duo triangula GHD, GHE ſunt inter ſe æqualia; ſublatóque communi triangulo GHI, erit reliquum triangulum DIH æquale reliquo GIE. Utrumque ſeparatim addatur eidem trapezio AEID: fiet trapezium AEHD æquale triangulo ADG, & conſequenter ſemiſſi trapezii ABCD. Quod erat &c.

Problema XXXVII.

351. *Trapezium* ABCD *in tres æquales partes dividere per duas rectas à datis ſuper uno latere* AB *duobus punctis* E *&* F *ductas*,

Reſolutio. Ab angulo oppoſito C ducatur diagonali BD parallela CG, quæ lateri producto AB occurrat in G, à quo ad alterum oppoſitum angulum D ductâ rectâ DG, habebitur triangulum ADG æquale trapezio ABCD per Probl. præced. Quamobrem, ſi trifari-

Tab. VII. Fig. 209.

am

am dividatur in punctis H & I basis AG, ducantúrque rectæ DH, DI, erit quodvis ex tribus triangulis ADH, HDI, IDG tertia pas trianguli ADG, seu trapezii propositi ABCD. Denique à puncto H ducatur HK parallela rectæ DE, & à puncto I recta IL parallela ipsi DF; jungantúrque rectæ EK, FL: quæ trapezium propositum ABCD divident in tres partes æquales.

Demonstratio. Quoniam duæ rectæ DE, HK sunt parallelæ per Constr., erunt duo triangula HDK, HEK inter se æqualia. Quare, si ab unoquoque auferatur commune triangulum HOK, supererit triangulum DOK æquale triangulo EOH. Addatur utrinque trapezium AEOD: fiet trapezium AEKD æquale triangulo ADH, hoc est, tertiæ parti trapezii ABCD. Eodem modo demonstrabitur trapezium AFLD æquari triangulo ADI, hoc est, duabus tertiis partibus trapezii ABCD; hinc facilè infertur trapezium quodlibet EL, FC esse tertiam partem dati trapezii ABCD. Quod erat &c.

Problema XXXVIII.

352. *Trapezoidem* ABCD *in totidem, quot libuerit, partes æquales dividere per lineas parallelas alterutri duorum laterum* AD, *vel* BC, *quæ non sint invicem parallela.*

Reso-

TAB. VII. Fig. 210. *Resolutio.* Partiri oporteat, puta, in tres partes æquales propositam trapezoidem per lineas parallelas lateri A D. Secetur bifariam aliud oppositum latus B C in puncto E, à quo ducta parallela E F trifariam dividatur in punctis G & H: per quæ, & per punctum E ductæ lateri A D tres parallelæ I K, L M, N O divident trapezoidem propositam in tres partes æquales.

Demonstratio. Quoniam duo triangula B E N, C E O & sunt æquiangula, & latus E B unius æquatur lateri E C alterius, erunt inter se æqualia. Ergò trapezoides B C M L æquatur parallelogrammo M L N O; & consequenter trapezoides tota A B C D æquatur toti parallelogrammo A N O D. Quia verò parallelogramma singula A K, I M, L O sunt tertia pars parallelogrammi totalis A O, erunt etiam tertia pars propositæ trapezoidis A B C D. Quod erat &c.

Multilaterum Divisio.

LEMMA.

TAB. VII. Fig. 211. 353. *Polygonum* A B C D E *in triangulum convertere, cujus vertex* D *sit in dato angulo.*

Resolutio. Ex dato puncto D ad A ducatur diagonalis D A, eíque parallela E F, occurrens lateri A B producto in F; jungatúrque D F, quæ quadrilaterum B C D F efficiet æquale pentagono dato A

BCDE. Nam duo triangula AKF, DKE ſunt inter ſe æqualia; quod facilè oſtenditur, ſi commune triangulum AKD utrimque auferatur à duobus triangulis AED, AFD inter ſe æqualibus propter parallelas AD, EF.

Reliquum jam eſt, ut quadrilaterum BCDF in triangulum transformetur; quod facilè præſtabitur, ductâ ſimiliter diagonali DB, eíque parallelâ CG, junctáque DG. Nam propter æqualitatem triangulorum CLD, BLG, erit triangulum FDG æquale quadrilatero BCDF, & conſequenter polygono ABCDE. Quod erat &c.

Hâc methodo intelligis, opinor, reduci poſſe in triangulum figuram quamlibet multilateram, ſi nempe transformetur in figuram uno latere minorem, atque ita deinceps, donec ad triangulum ventum ſit, uti in hoc Lemmate, & alibi n. 320. & 321. fieri vidimus.

Problema XXXIX.

350. *Datum polygonum* ABCDE *in tres partes æquales partiri per lineas rectas à dato angulo* D *ductas.*

Reſolutio. Fiat per Lemma, ut in fig. præced., reductio polygoni in triangulum FDG, cujus vertex D; deinde trianguli baſis FG in tres partes æquales dividatur in punctis H & I. Dico à rectis DH, DI diviſum iri pentagonum datum in tres partes æquales.

Demon-

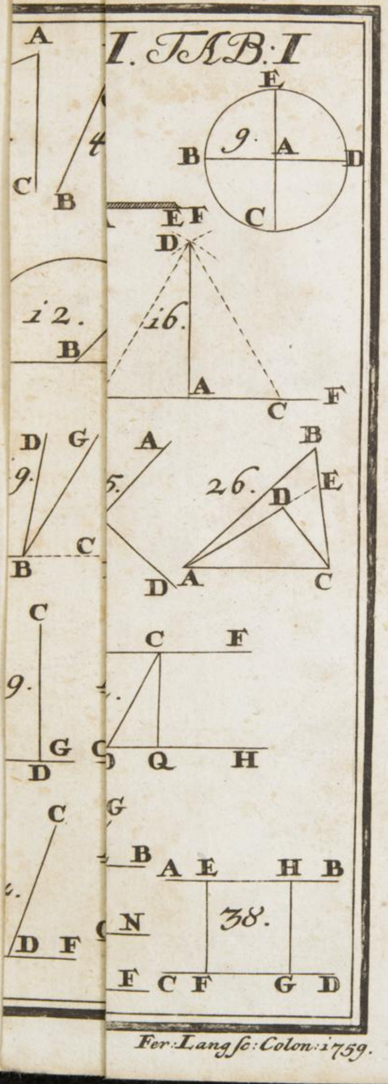
Demonstratio. Triangula singula F D H, HDI, ID G sunt tertia pars trianguli F D G per Constr., & consequenter dati pentagoni ABCDE. Nam triangulum F D H æquatur trapezio AEDH, & triangulum IDG trapezio BCDI, ut ex dictis in Lem. constare potest. Itaque &c.

Problema XL.

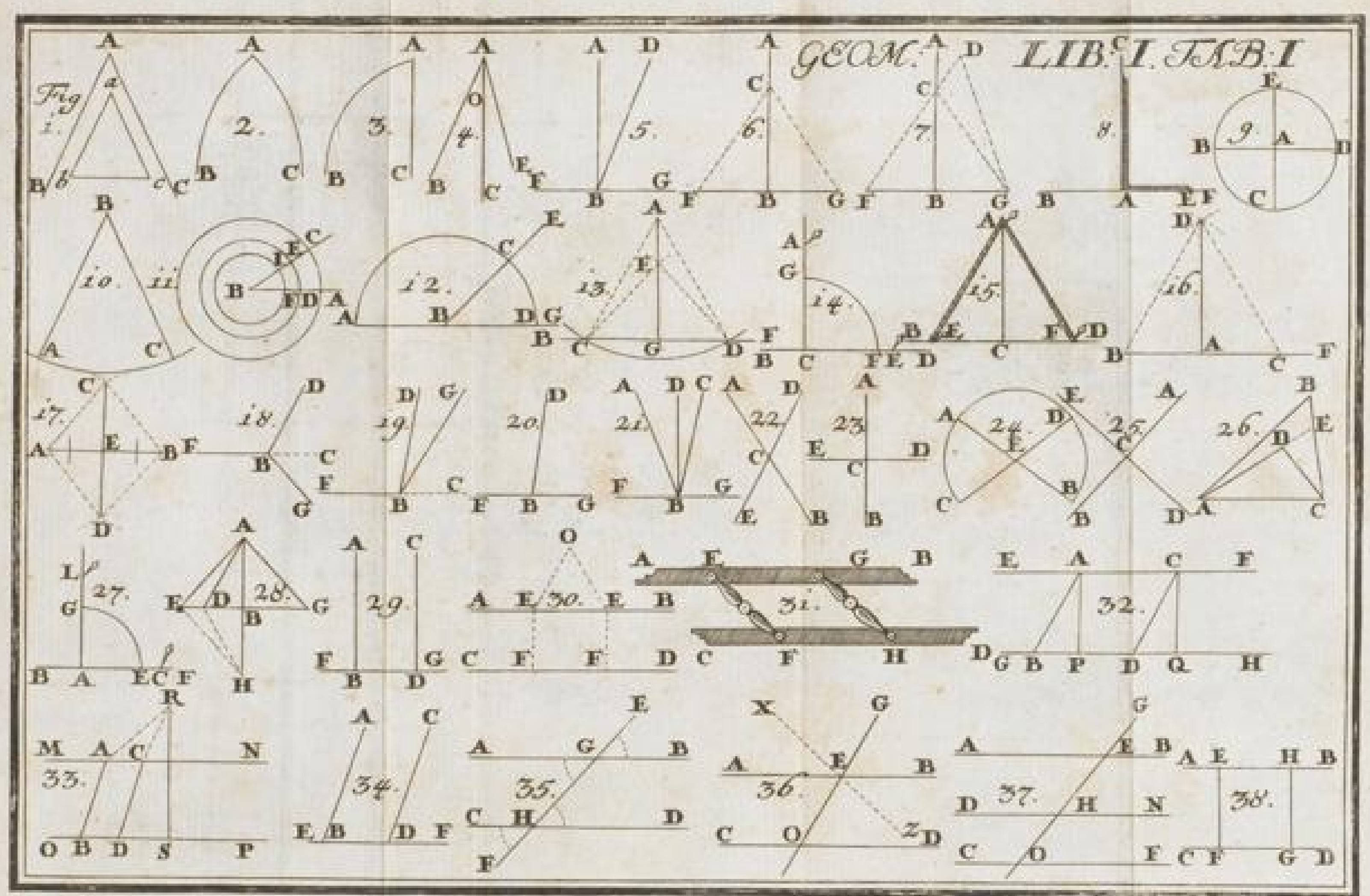
Tab. VII. Fig. 212. 355. *Datum polygonum* ABCDE *in quotlibet partes æquales partiri per lineas rectas ab angulo dato* D *ductas.*

Resolutio. Polygonum transformetur in triangulum F D G per Lemma: basis F G dividatur, puta, in quatuor partes æquales in punctis H, I, K; junctísque DH, DI, DK, quatuor triangula F D H, HDI, IDK, KDG erunt singula quarta pars trianguli FDG, & consequenter pentagoni ABCDE. Quia verò punctum H cadit extra latus AB, reducendum erit triangulum HDI ad trapezium ALDI; quod facilè præstabitur, ductâ HL parallelâ rectæ AD &c.

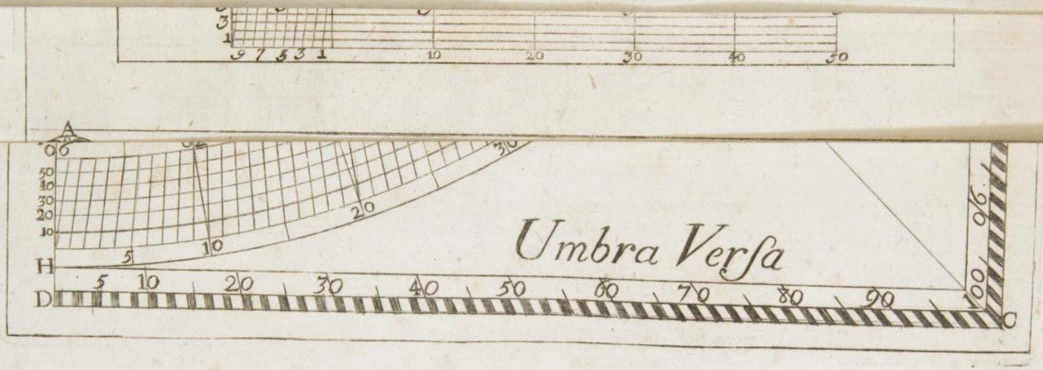
Verùm hæc Geodæsiæ pars uberiùs promovebitur post traditam proportionum doctrinam.

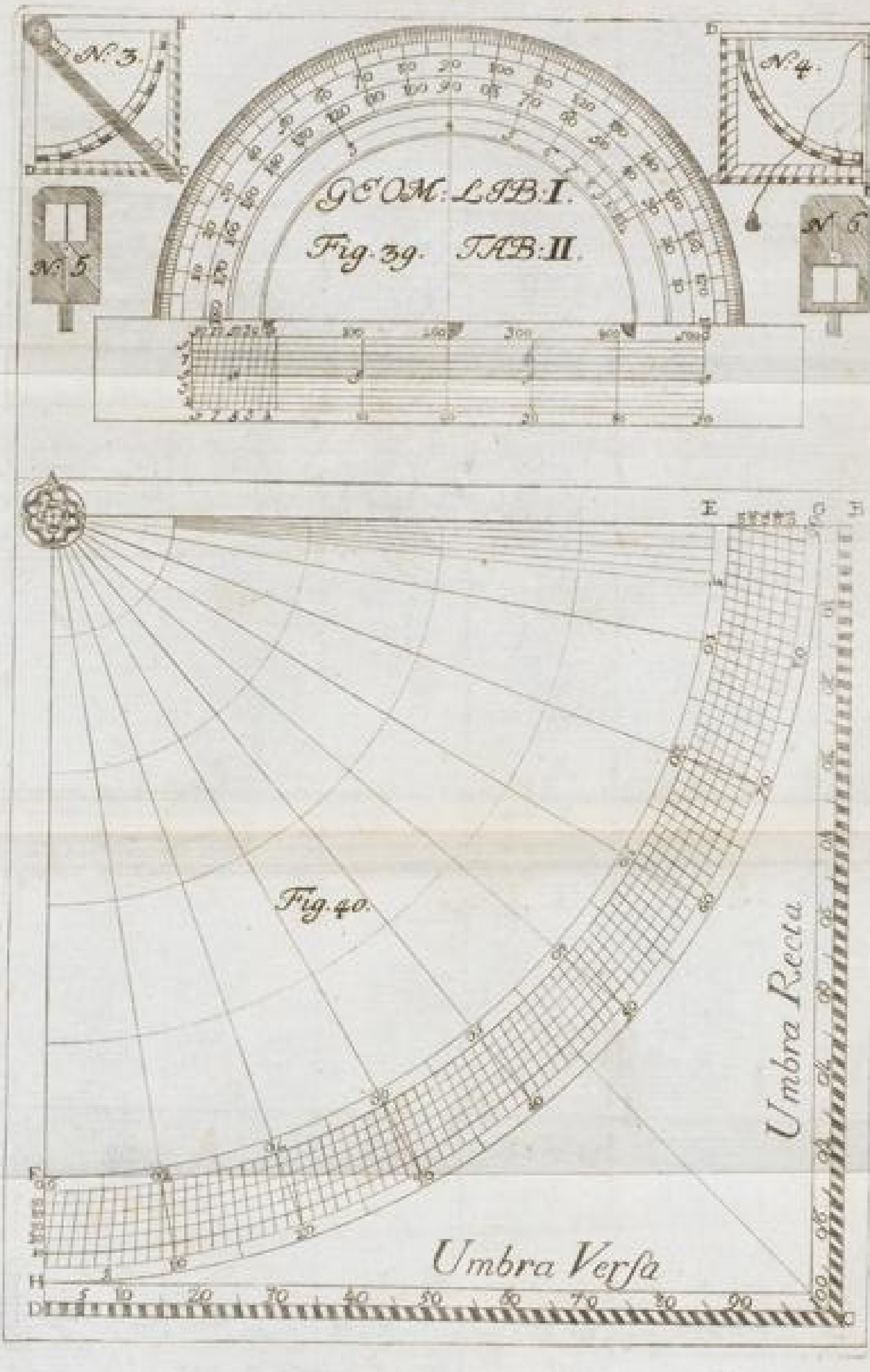


Fer: Lang sc: Colon: 1759.

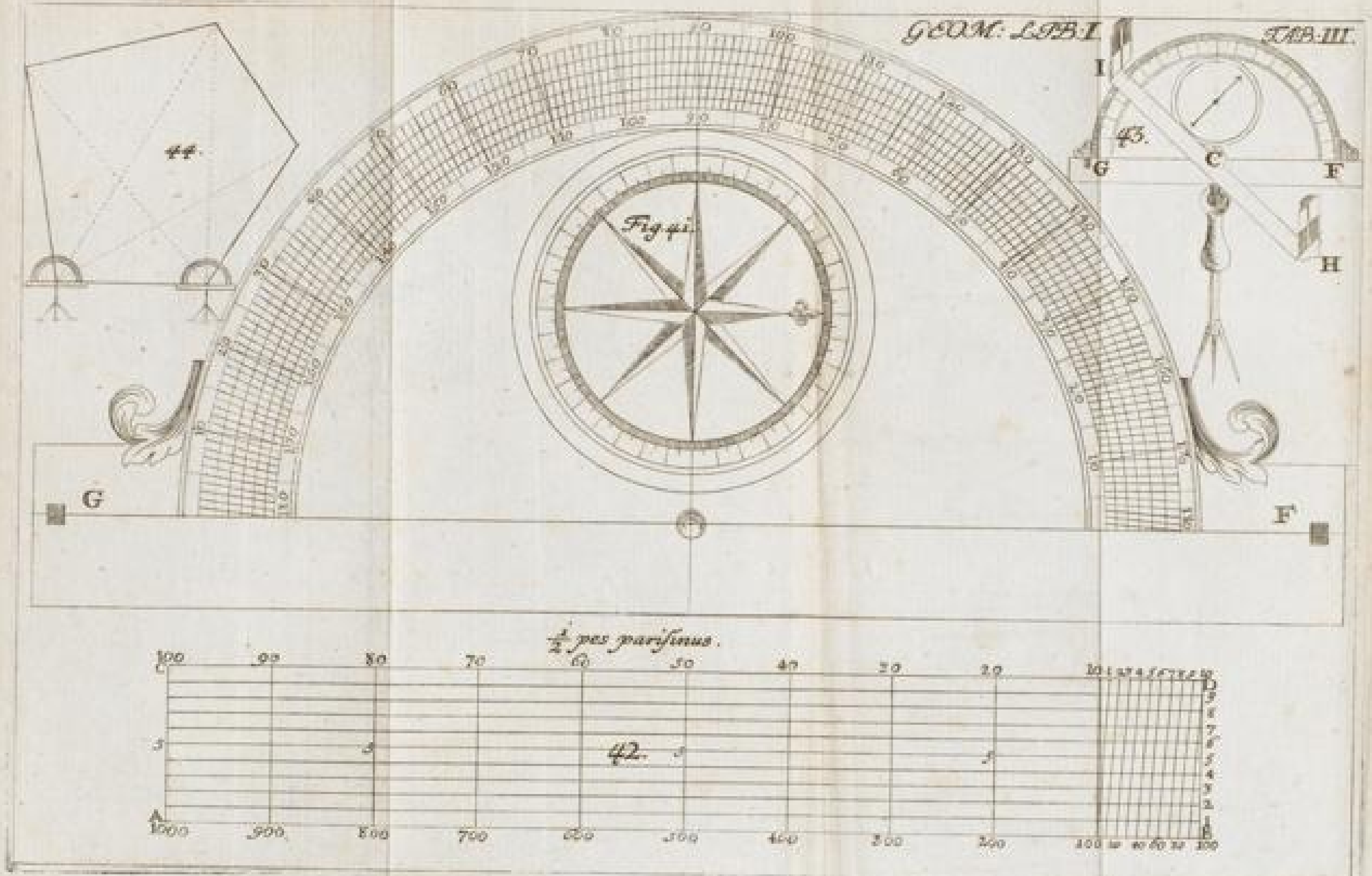


Fer. Lang fc. Colon. 1759.

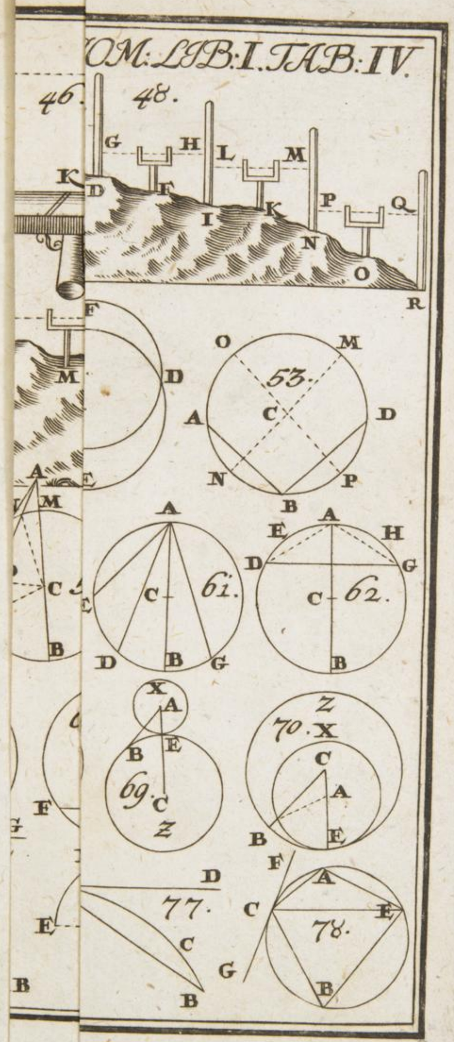

Umbra Versa
A
H
D
C

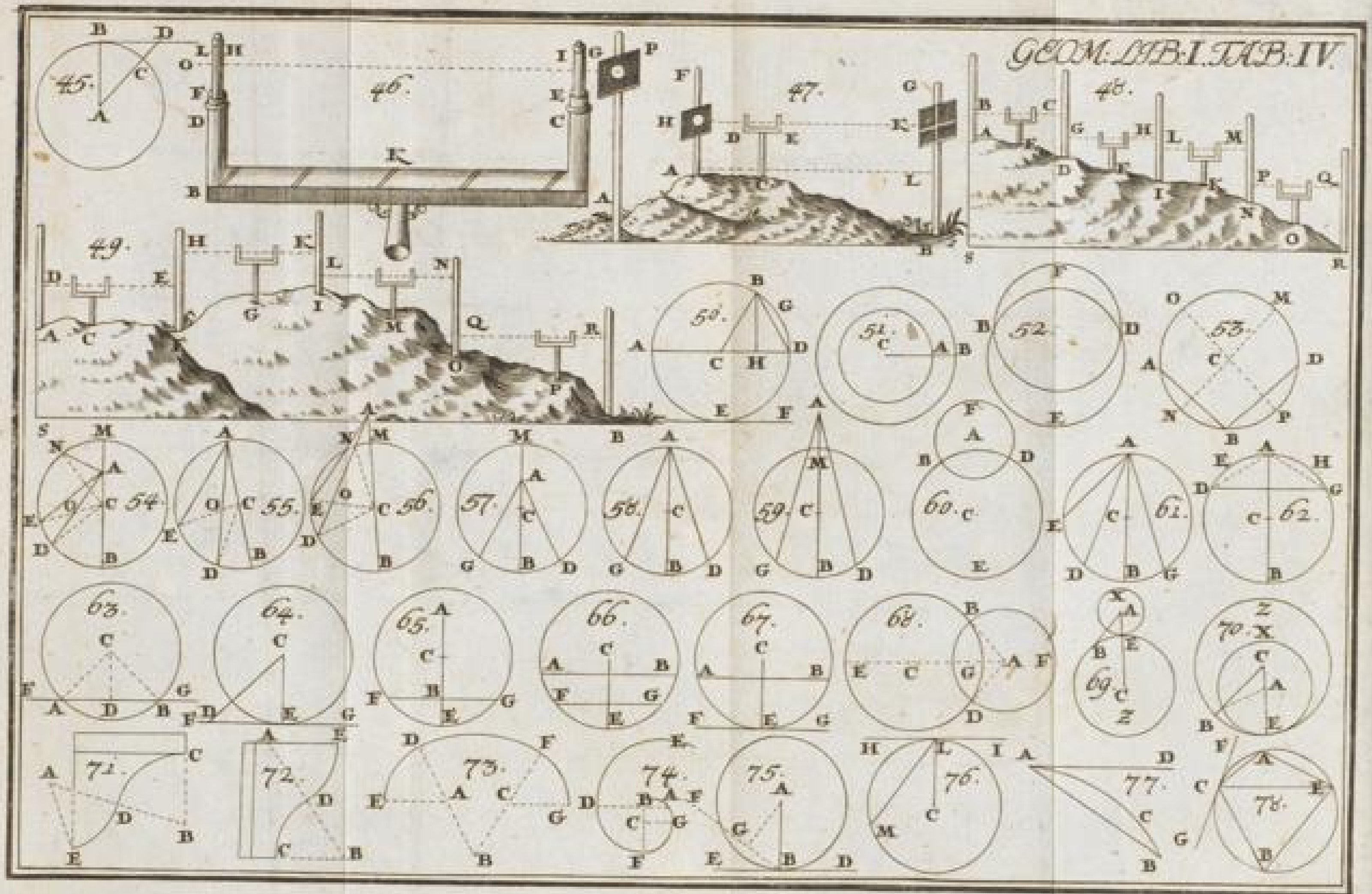

GEOM: LIB. I.
Fig. 39. TAB: II.
N. 3
N. 4
N. 5
N. 6
Fig. 40.
Umbra Recta
Umbra Versa

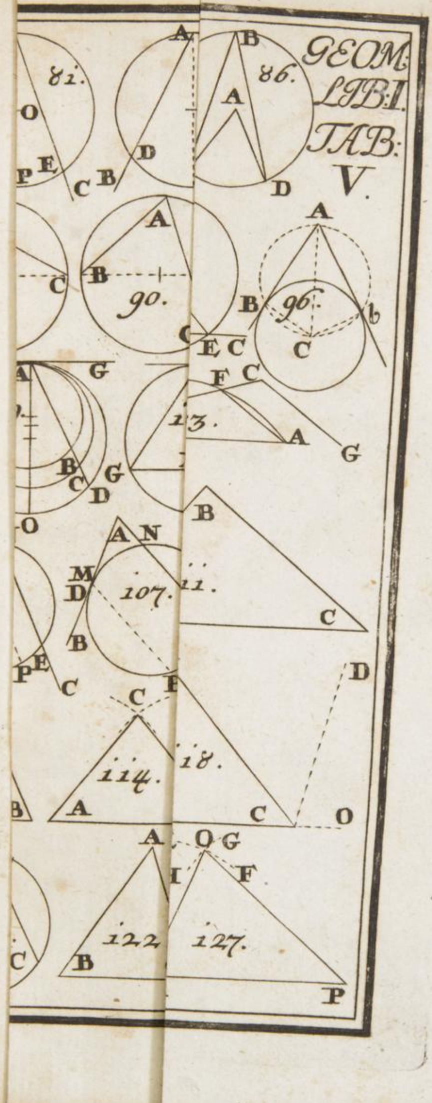

TAB: III.
43.
C
G
F
H
F
60
120
150
150
160
170
180
70
700
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
D
9
8
7
6
5
4
3
2
1
B
20 40 60 80 100

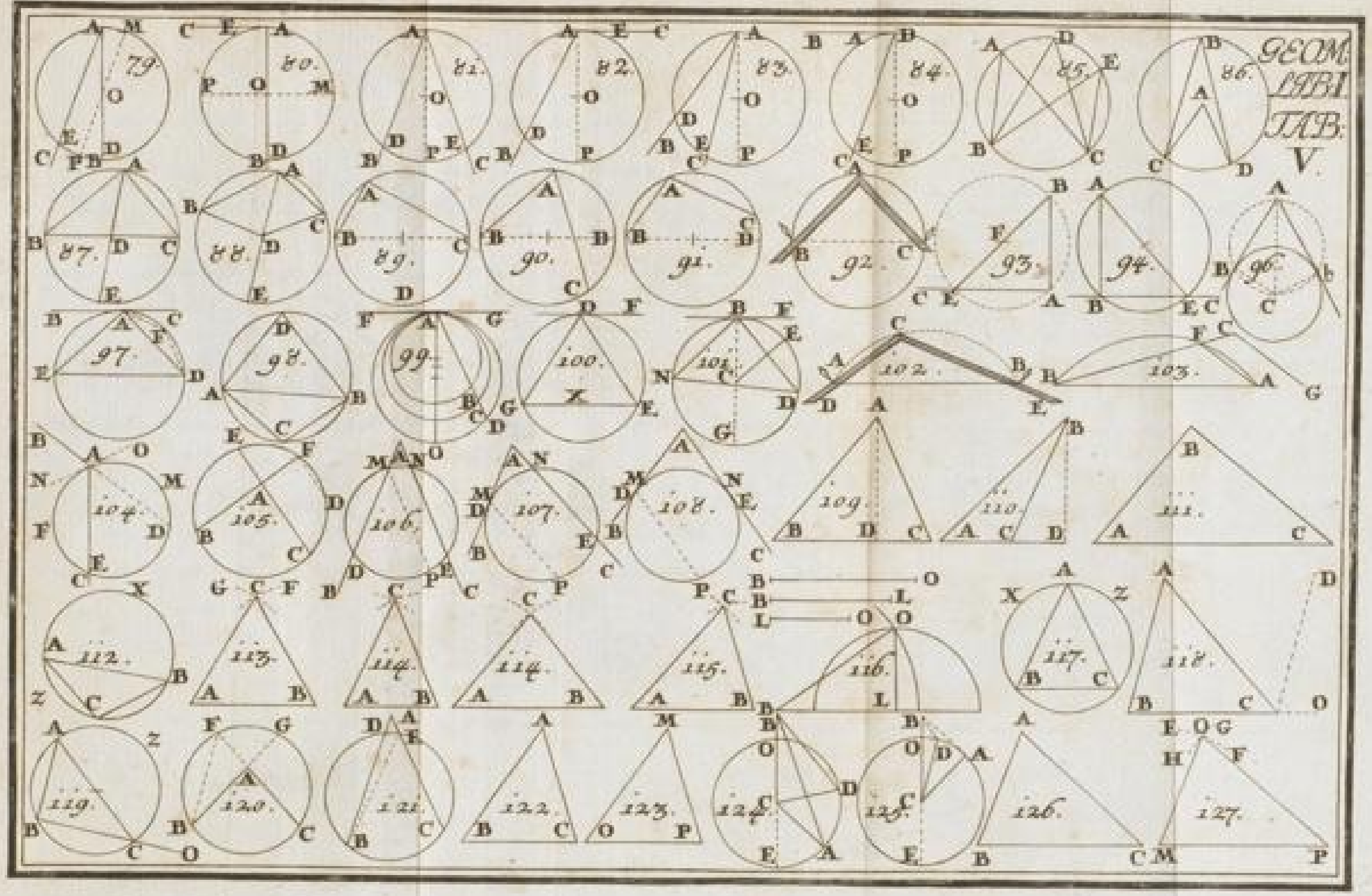


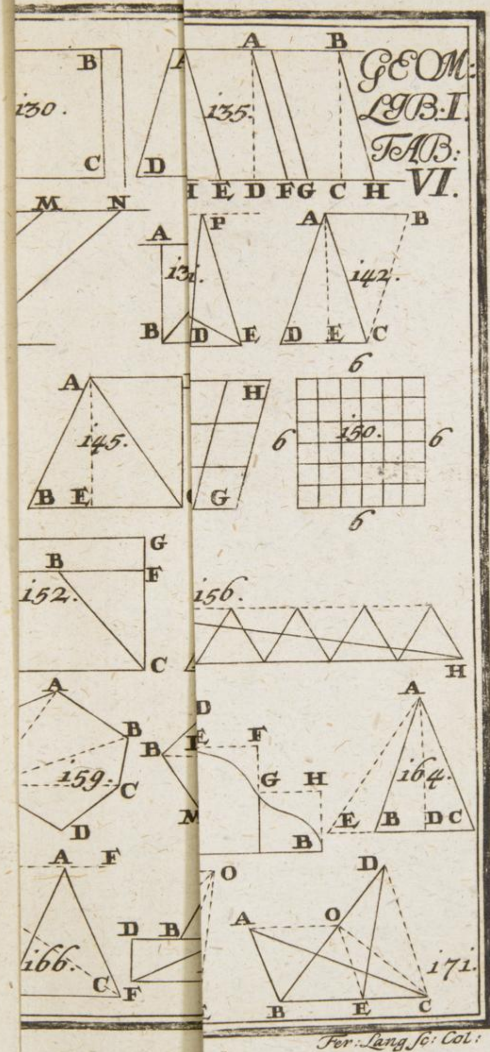
44.
Fig. 41.
43.
I
G
C
F
H
G
F
¼ pes parisinus.
42.
A
B
C
D


OM: LIB: I. TAB: IV.
46.
48.
53.
61.
62.
69.
70.
77.
78.

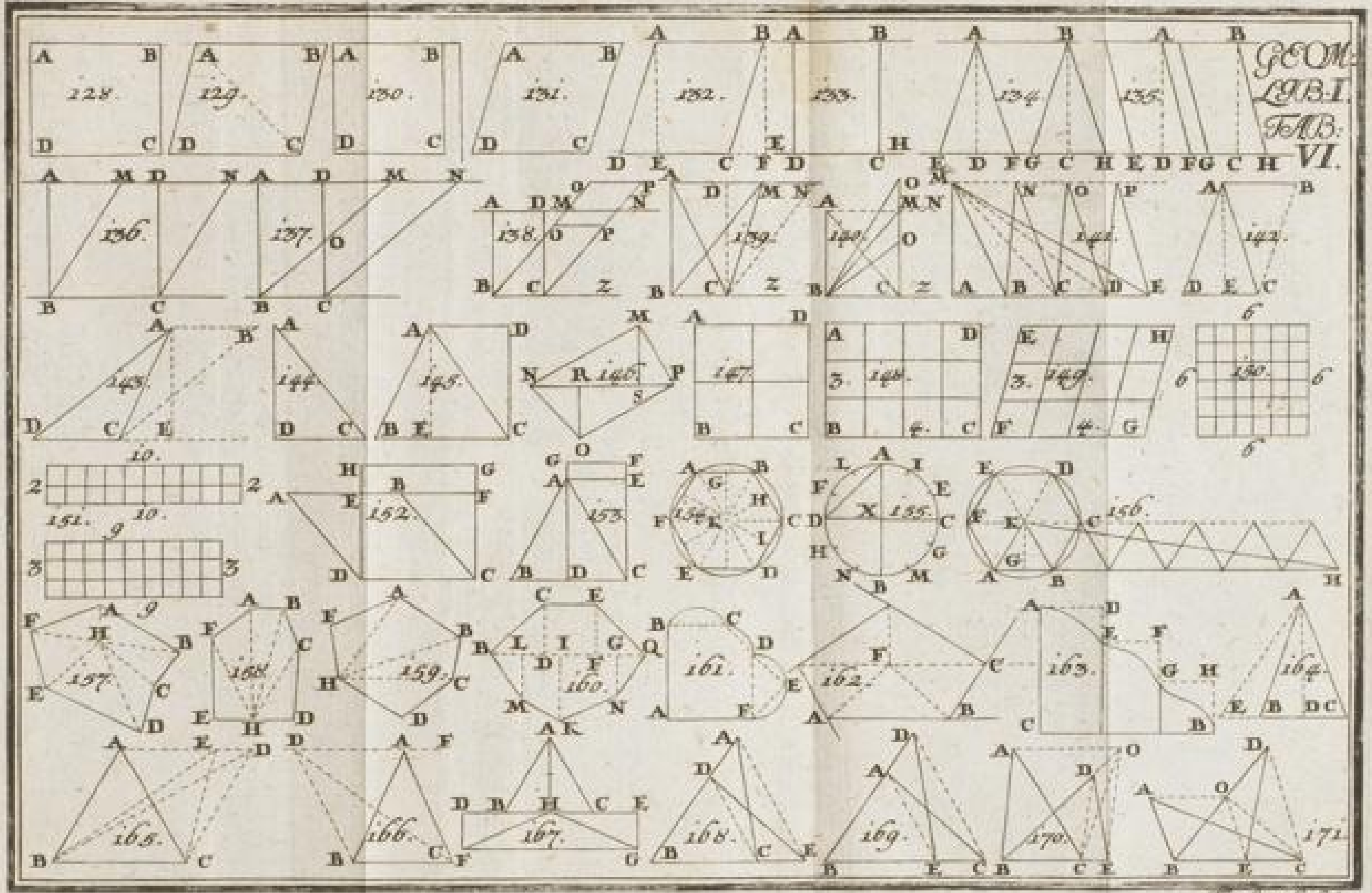

GEOM: LIB: I. TAB: IV.


GEOM:
LIB: I.
TAB:
V.

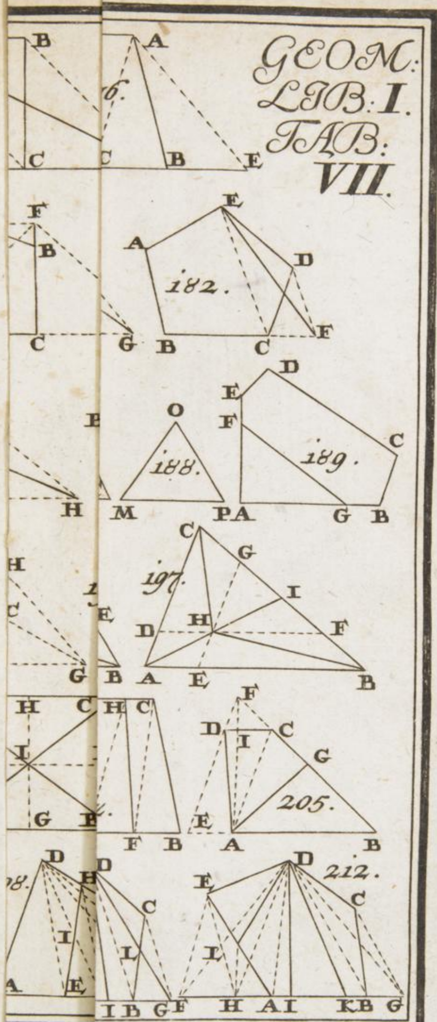

GEOM. LIB I. TAB. V.



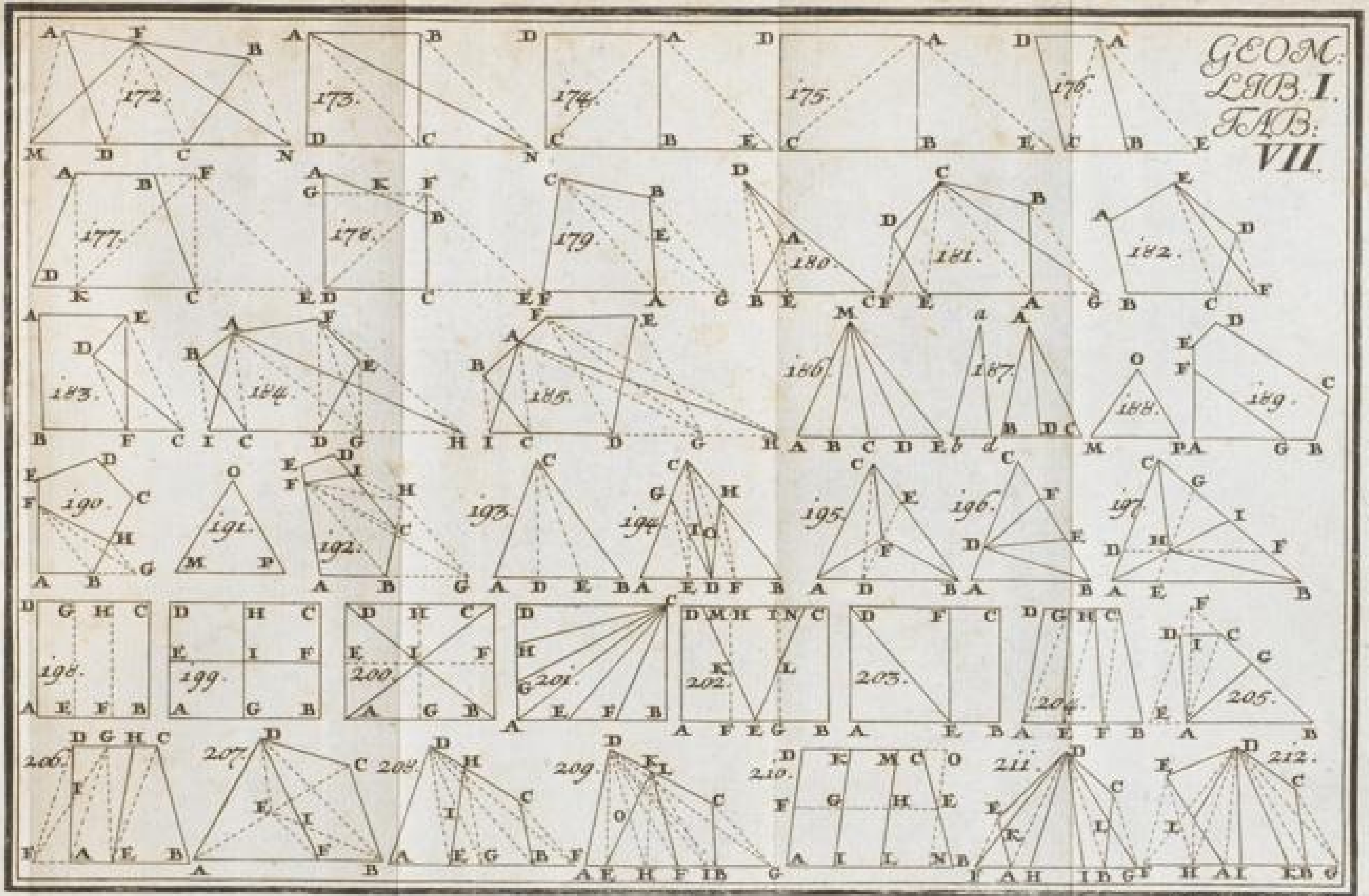
Fer: Lang Sc: Col:



Per. Lang. sc. Cal.



Fer: Lang sc: Col:



Fer: Lang sc: Col:

G

HE

LIN

E

356.

titate

Ratio

357.

ma qu

tie, qua

dictione

terminum

358.

quantas

tima a

uum

divine

dit

quom

ratio

Rat

habetitu