Ergo AHIKL : ABCDE :: AHG : ABF. Cum autem per Conſtr. ABCDE=ABF, erit etiam AHIKL=AHG=X. Quod erat &c.

Corollarium.

575. Cùm omnes figuræ rectilineæ transformari poſſint in triangula, & triangulum quodvis in polygonum ſimile dato polygono: hinc patet figuram quamvis rectilineam converti poſſe in polygonum dato ſimile.

ELEMENTUM II.

De Lineis ſectis extremâ, & mediâ ratione, ac de Pentagonis, & Decagonis regularibus.

DEFINITIO.

576. *Si linea recta quævis* AB *ita dividatur in* C *inæqualiter, ut ſit, quemadmodum tota* AB *ad majus ſegmentum* AC, *ita* AC *majus ſegmentum ad* CB *minus ſegmentum, dicetur diviſa ſecundùm extremam, & mediam rationem.*

TAB. XIII. Fig. 335.

Habet autem, inquit Clavius in Scholio prop. 30. lib. 6., admiranda hæc ſectio lineæ extremâ & mediâ ratione inſignes utilitates, proprietateſque, ut in Libris Stereometriæ manifeſtum erit, ut non ſine cauſâ à pleriſque Geometris linea ita diviſa divinam quodammòdo dicatur habere proportionem.

PRO-

PROPOSITIO I.

577. Problema. *Propositam rectam lineam* AB *extrema, ac media ratione secare.* Euclid. lib. 6. prop. 30., & lib. 2. prop. 11. TAB. XIII. Fig. 335.

Resolutio. Ab extremitate B rectæ AB excitetur perpendicularis BD æqualis semissi datæ rectæ AB; ducaturque DA; tum centro D, intervallo DB describatur circulus, qui rectam DA secabit in E. Fiat denique AC = AE: Dico rectam AB sectam esse extrema, & media ratione in C: hoc est, AB : AC :: AC : CB.

Demonstratio. Producatur AD, donec occurrat circulo in F, erit (n. 561. $AF \times AE = \overline{AB}^2$; atque hinc per regulas proportionum

$$AF : AB :: AB : AE.$$

Cum autem per Constr. sit AE = AC, fiet

$$AF : AB :: AB : AC.$$

In omni autem proportione geometrica ex dictis antecedens est ad suum consequens, uti differentia antecedentium est ad differentiam consequentium. Quare AB : AC :: AF — AB : AB — AC. Atqui AB — AC = CB; & AB = EF; adeoque AF — AB = AF — EF = AE = AC; substitutis itaque hisce valoribus in ultima analogia, fiet AB : AC :: AC : CB. Quod erat &c.

PROPOSITIO II.

578. Theorema. *Si duorum angulorum quilibet* B *&* D *ad basim trianguli isoscelis duplus sit anguli* A *ad verticem, seceturque bifariam angulus* D *ad basim per rectam* DC, *hæc secabit extremâ, & mediâ ratione latus oppositum* AB; *nimirum, fiet*

AB : AC : : AC : CB.

TAB. XIII. Fig. 336. *Demonstratio.* Duo triangula BAD, BCD sunt similia, quippe quæ habent angulum communem B, per Constr. angulus BDC = A. Quia verò latera AB, AD trianguli isoscelis BAD sunt æqualia, erunt quoque æqualia latera DB, DC alterius trianguli similis BDC. Rursum, quia in eodem trianguli ACD anguli A & CDA per Constr. sunt æquales, etiam latera DC, AC iis opposita æqualia erunt. Itaque DB = DC = AC.

Jam verò propter similitudinem triangulorum BAD, BDC, erit

AB : DB : : DB : CB;

Substitutáque AC loco ipsius BD, erit denique AB : AC : : AC : CB. Quod erat &c.

Scholion.

TAB. XIII. Fig. 336. *In hujus autem Theorematis demonstratione animadvertere juvat basim* BD *trianguli isoscelis* BAD, *cujus anguli ad basim dupli sunt anguli ad verticem, æquari majori segmento* AC *lateris* AB *secti media,*

media, & extrema ratione per rectam D C, quæ bifariam dividit angulum ad basim.

PROPOSITIO III.

579. Problema. *Isosceles triangulum* ABD *construere, quod habeat utrumque eorum, qui ad basim sunt, angulorum, duplum reliqui ad verticem.* Euclid. lib. 4. prop. 10.

Resolutio. Dividatur recta A B extremâ, & mediâ ratione in C; tum super minori segmento B C, tanquam basi, construatur triangulum isosceles ope duarum sectionum circulorum æqualium sub eodem intervallo segmenti majoris A C; jungaturque A D. Dico factum. Fig. 336.

Demonstratio. Nam externus angulus BCD duplus est interni A; & per Constr. BCD = CBD. Rursum, quia per hyp. AB : AC : : AC : CB, hoc est, per Constructionem AB : BD : : BD : CB, duo triangula BAD, BCD circa angulum communem B habebunt latera proportionalia, & consequenter similia erunt, & æquiangula. Ergò angulus B D A æqualis erit angulo BCD = B. Triangulum itaque B A D & isosceles est &c. Quod erat &c.

Corollarium.

580. Si à puncto A, intervallo, AB, vel AD ejusdem trianguli isoscelis describatur circulus, basis BD erit latus deca- Tab. XIII. Fig. 337.

decagoni circulo inſcripti. Nam propter naturam hujuſmodi trianguli iſoſcelis BAD, utervis angulorum B & D ad baſim valet duas quintas duorum rectorum, hoc eſt, gradus 72; & conſequenter angulus A erit una quinta duorum rectorum, hoc eſt, graduum 36. Quare angulus A erit angulus ad centrum decagoni regularis circulo inſcripti. Nam, ſi 360 dividatur per 10 rodibit 36.

PROPOSITIO IV.

Fig. 581. Problema. *Decagonum regulare*
337. *circulo inſcribere.*

Reſolutio. Radius AB ſecetur extrema, & media ratione in C. Segmentum majus AC erit latus decagoni circulo inſcripti.

Demonſtratio conſtat ex Corollario præced.

PROPOSITIO V.

582. Theorema. *Si recta linea componatur ex latere hexagoni, & latere decagoni inſcripti in eodem circulo, tota compoſita dividetur extrema, & media ratione in eo puncto, in quo duæ rectæ ſe mutuò jungunt.*

TAB. Eſto CB latus decagoni inſcripti cir-
XIII. culo A, jungatúrque in directum linea
Fig. CD æqualis radio AC, hoc eſt, lateri
338. haxagoni. Dico totam compoſitam BD ſectam fore extrema, & media ratione in puncto C.

Demon-

Demonstratio. Jungatur DA. Triangula BDA, BAC sunt inter se similia; habent quippe angulum communem in B, & præterea angulum BDA æqualem angulo CAB; nam & propter triangulum isosceles CDA, angulus externus BCA est duplus interni BDA, & per n. 580. idem angulus BCA est duplus anguli CAB; ergò BDA = CAD. Quare DB:BA :: BA:BC; & substituendo CD loco ipsius AB, fiet DB : CD :: CD : DC. Quod erat &c.

PROPOSITIO VI.

583. Theorema. *Quadratum ex latere pentagoni inscripti circulo æquatur summæ quadratorum ex latere hexagoni, & ex latere decagoni inscripti eidem circulo.*

Esto AB latus pentagoni inscripti circulo; seceturque bifariam in puncto C arcus AB. Chorda AC, sive CB erit latus decagoni, & radius DB latus hexagoni. Dico $\overline{AB}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{AC}^2$.

Demonstratio. Arcus AC secetur bifariam in F per radium DF; ducatúrque EC. Triangulum AEC, cum sit isosceles, simile erit triangulo ACB; nam angulus CAB ad basim utrique communis est. Ergò AB:AC :: AC: AE; ac proinde $\overline{AC}^2 = AB \times AE$. TAB. XIII. Fig. 339.

Jam

Jam verò angulus ad centrum ADB pentagoni eſt 72 graduum; ergò angulorum quilibet ABD & BAD erit graduum 54; qui gradus ſunt tres quartæ partes anguli ad centrum.

Cum autem angulus FDB habeat pro menſura arcum FB, continebit quoque tres quartas partes ejusdem anguli ad centrum ADB; ergò duo triangula ADB, DEB ſunt ſimilia; hinc AB : BD :: BD : BE; adeoque $\overline{DB}^2 = AB \times BE$.

Atqui $AB \times AE + AB \times BE = \overline{AB}^2$.

Ergò $\overline{AB}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{AC}^2$. Quod erat &c.

PROPOSITIO VII.

584. Problema. *In triangulo rectangulo* ACF *exhibere tria latera* AC, CF, AF *hexagoni, decagoni, & pentagoni regularis, quæ eidem circulo inſcribi poſſint.*

Reſolutio. Radius AC ſit perpendicularis diametro BD; ſeceturque radius CD bifariam in E, à quo, tanquam centro, intervallo EA deſcribatur arcus AF; ducatúrque chorda AF. Dico factum.

Tab. XIII. Fig. 340.

Demonſtratio. I. Oſtenſum jam eſt radium AC eſſe latus hexagoni regularis eidem circulo inſcripti. Quod erat primum.

II. Quoniam $CE = \frac{CD}{2} = \frac{AC}{2}$, ſi fiat $EG = CE$, erit hypothenuſæ reſiduum

duum AG (n. 577.) æquale majori ſegmento AH radii AC ſecti extrema, & media ratione in H. Ergò latus decagoni regularis, quod inſcribi poſſit circulo ABID æquatur ipſi AG; cum autem $CE = EG$; ſi fiat $EF = AE$, erit $CF = AG$; & conſequenter CF erit latus decagoni eidem circulo inſcripti. Quod erat alterum.

III. In triangulo rectangulo ACF quadratum hypotenuſæ AF æquatur ſummæ quadratorum ex latere AC hexagoni, & ex latere FC decagoni. Ergo per præcedens hypotenuſa AF eſt latus pentagoni regularis eidem circulo inſcripti. Quod erat reliquum.

APPENDIX.

De mirabili natura lineæ cujusdam inflexæ, quam quadratricem Dinoſtratis vocant, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium inſcribitur, & circulus quadratur, & alia ſcitu jucundiſſima perficiuntur.

585. Docuimus alibi nondum repertam fuiſſe artem, quâ ſolo circino, & regulâ inſcribantur circulo figuræ ordinatæ laterum 7, 9, 11, 13, 17 &c.; cùm illa inſcriptio figurarum dependeat à diviſione circumferentiæ in partes datas, quæ etiamnum deſideratur. Licebit tamen ope lineæ cujusdam inflexæ,

quam quadratricem Dinoſtratis vocant, angulos, & circumferentias circulorum dividere in quotlibet partes æquales.

PROPOSITIO VIII.

586. Problema. *Quadratricem deſcribere.*

Reſolutio. Deſcribatur quadrans circuli ABT; arcus AT, & diameter AB dividantur in totidem partes æquales; quod facilè obtinebitur, ſi & arcus AT & diameter AB ſecetur primùm bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit. Quò autem plures extiterint diviſiones, eò accuratiùs quadratrix linea deſcribetur. Nos ad confuſionem vitandam ſecuimus tam arcum AT, quàm radium AB in 16 partes æquales.

Tab. XIII. Fig. 341.

Deinde ex centro B ad ſingula diviſionum puncta quadrantis AT ducantur radii BC, BD, BE, BF &c., & per puncta G, H, I, K totidem parallelæ ſemidiametro BT, quæ occurrent radiis in punctis L, M, N, O &c., per quæ quadratrix linea AS ducenda eſt, quæ exactior evadet, ſi quadrans circuli, & ſemidiameter dividantur in multò majorem numerum partium æqualium. Hâc enim ratione fiet, ut puncta L, M, N, O &c. ita proximè ad ſe invicem accedant, ut ſine errore ſenſibili per eadem puncta linea æquabiliter ſinuoſa progrediatur.

Corolla-

Corollarium.

587. Ex genesi hujus curvæ patet, quòd, si ducantur parallelæ HM & KO, occurrentes curvæ in punctis M & O, per quæ ducantur radii BD & BF, patet, inquam, quòd arcus AD ad arcum DF habebit eandem rationem, quam habet linea AH ad lineam HK.

PROPOSITIO IX.

588. Problema. *Angulum rectilineum OPQ trifariam dividere.* TAB. XIII. Fig. 342. 343.

Resolutio. Esto quadratrix AD, & circuli quadrans AC. Fiat angulus ABE æqualis dato; & à puncto F, ubi radius BE secat curvam AD, demittatur perpendicularis FG ad semidiametrum AB, cujus segmentum AG dividatur in tres partes æquales in punctis K & H, à quibus ducantur KL, HI parallelæ ipsi FG; quæ secent curvam in punctis L & I, per quæ à centro B transeant radii BLM, BIN, qui divident arcum AE, & angulum ABE in tres partes æquales.

Demonstratio. Nam per constructionem curvæ AK : AG :: AM : AE; est autem AK tertia pars ipsius AG; erit itaque arcus AM tertia pars arcûs AE. Quod erat &c.

Eâdem methodo angulus datus dividi poterit in quotvis partes æquales.

Sin autem trifariam dividendus pro-

ponatur angulus obtuſus RST, ſecetur
TAB. primò bifariam, ut habeatur acutus R
XII. SV, quem ſupponere liceat æqualem
Fig. angulo ABE; tum, ùt ante, dividatur
343. acutus trifariam in M & N; ſuma-
344. túrque arcus AN, qui, cùm ſit duplus ſextæ partis arcus RT, erit conſequenter tertia pars ejusdem arcûs RT.

PROPOSITIO X.

589. Problema. *Circulo nonagonum, hoc eſt, figuram novem laterum regularem inſcribere.*

Reſolutio. Radius circuli ſexies circumducatur peripheriæ, ut habeantur puncta B, C, D, E, F, G, quæ eandem divident in ſex partes æquales. Jam verò à primo puncto ad tertium, á tertio ad quintum, à quinto ad primum ducantur rectæ, quæ triangulum æquilaterum dabunt BDF, quod totam circumferentiam dividet in tres partes æquales; denique per Probl. præced. arcus quilibet trifariam ſecetur, & habebitur nona pars circumferentiæ, cujus chorda erit latus nonagoni.

PROPOSITIO XI.

590. *Circulo heptagonum inſcribere.*

Reſolutio. Quadrans circumferentiæ circuli dividatur in ſeptem partes æquales; harum partium quælibet erit vigeſima octava pars totius circumferentiæ. Acci-

Accipiatur jam arcus æqualis quatuor ſeptimis quadrantis circuli; is erit æqualis ſeptimæ parti circumferentiæ circuli; & conſequenter chorda hujus arcûs erit latus heptagoni.

PROPOSITIO XII.

591. Problema. *Circulo undecagonum inſcribere.*

Reſolutio. Quadrans circuli dividatur in undecim partes æquales. Chorda arcûs, qui quatuor undecimas quadrantis circuli contineat, erit latus quæſitum undecagoni.

Scholion.

592. Curva AFD dicitur quadratrix propter inſignem ipſius proprietatem, qua mechanica circuli quadratura obtinetur. Nam Pappus, Clavius, aliíque complures Geometræ demonſtrârunt ſemidiametrum BC eſſe mediam proportionalem inter baſim BD quadratricis, & circumferentiam AEC quadrantis circuli; ita ut BD : BC :: BC : AEC. Porrò deſcriptio lineæ quadratricis, inquit Clavius lib. 6. elem., geometrica jure appellari poteſt, quemadmodum & conicarum ſectionum deſcriptiones, quæ per puncta fiunt, ùt ab Apollonio traditur, geometricæ dicuntur; cùm tamen magis errori ſint ob-

obnoxiæ , quàm deſcriptio quadratricis , propter inventionem tot linearum mediarum proportionalium , quæ ad earum deſcriptiones ſunt neceſſariæ , quibus in quadratricis deſcriptione opus non eſt.

LIBER IV.

iptio quadratri-
m tot linearum
ium, quæ ad
nt necessariæ,
scriptione opus