GEOMETRIÆ THEORICO - PRACTICÆ LIBER QUARTUS.

De Sectionibus Rectarum Geometricis.

ELEMENTUM I.

De Lineis sectis in ratione reciproca, ac de Mediis Proportionalibus.

DEFINITIONES.

555. *Duæ rectæ*, AB, DE *dicuntur sectæ in ratione reciproca, quando pars una* AC *primæ est ad unam partem* DF *secundæ, uti pars altera* FE *secundæ est ad partem alteram* CB *primæ.*

Tab. XIII. Fig. 322.

Vel, quando pars una AC *primæ est ad unam partem* DF *secundæ, uti integra secunda linea* DE *est ad primam* AB.

In primo casu, *ubi* AC: DF :: FE: CB, *dicuntur duæ rectæ* AB, DE *sectæ in partes reciprocas, sive reciprocè proportionales; ac proinde* $AC \times CB = DF \times FE$.

In secundo casu, *ubi* AC: DF :: DE: AB, *duæ rectæ* AB, DE *reciprocæ, seu recipro-*

reciprocè proportionales uni ſuarum partium; *ac proinde* AC × AB = DF × DE.

PROPOSITIO I.

556. Theorema. *Si in eodem circulo duæ chordæ* BCDE *ſe ſe mutuò ſecuerint in quovis puncto* A, *erunt earum ſegmenta reciprocè proportionalia*, *nimirum* AB : AE :: AD : AC; *ac proinde rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis unius*, *æquale eſt ei*, *quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur*, *rectangulo*. Euclid. lib. 3. prop. 35. TAB. XIII. Fig. 323.

Demonſtratio. Ducantur chordæ BD, CE per extremitates earum, quæ ſe interſecant. Perſpicuum eſt ex dictis triangula BAD, EAC eſſe æquiangula, & ſimilia. Ergò AB : AE :: AD : AC; & conſequenter AB × AC = AE × AD. Quod erat &c.

Corollarium I.

557. Si duarum chordarum una DE ſit ſecta bifariam, ita ut AD = AE, analogia modò inventa AB : AE :: AD : AC transformari per ſubſtitutionem poterit in hanc, AB : AD :: AD : AC; & conſequenter tres lineæ AB : AD, AC erunt continuè proportionales; & ſemiſſis AD chordæ DE ſectæ in duas æquas partes, erit media proportionalis inter duo ſegmenta AB AC alterius chordæ.

Corol.

Corollarium II.

558. Si chorda BC per centrum circuli tranſeat, ſecetque aliam DE perpendiculariter, hanc quoque ſecabit bifariam; & conſequenter recta AD, quam jam nominavimus ordinatam circulo reſpectu diametri BC, cui eſt perpendicularis, erit media proportionalis, inter duas ejuſdem diametri partes AB, AC; atque adeo AD × AD, ſive $\overline{AD}^2$ = AB × AC.

Corollarium III.

559. Perſpicuum hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo à quovis puncto diametri, ipſi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam uſque, mediam eſſe proportionalem inter duo diametri ſegmenta, quæ à perpendiculari facta ſunt.

PROPOSITIO II.

560. *Si extra circulorum ſumatur punctum aliquod, ab eoque ducantur duæ ſecantes* AB, AE, *quæ à cava circuli peripheria terminentur in duobus punctis* B & E, *erunt.*

I. Secantes integræ AB, AE *reciprocè proportionales ſuis partibus* AC, AD *circulo externis, nimirum*, AB : AE : AD : AC.

Tab. XII. Fig. 324.

II. Rectangula comprehenſa ſub integris ſecantibus AB, AE, & *ſuis partibus*

bus exterioribus AC, AD, *erunt inter se æqualia; hoc est*, AB × AC = AE × AD. Euclid. lib. 3. prop. 36. corol. 1.

Demonstratio. Ducantur chordæ BD, CE, Triangula ADB, ACE erunt æquiangula, & consequenter similia propter angulum A utrique communem, & angulos E & B ad circumferentiam insistentes eidem arcui DC æquales. Ergò

I. AB : AE : : AD : AC.

II. AB × AC = AE × AD. Quod erat &c.

PROPOSITIO III.

561. Theorema. *Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò tangat: quod sub tota secante* AB, *& ejus parte exteriori* AC *comprehenditur, rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.* Euclid. lib. 3. prop. 36. Tab. XIII. Fig. 325.

Demonstratio. Nam, si recta AE, quæ in præced. figura secans erat, evaderet tangens, duo puncta E & D commiscerentur in unicum, quod erit punctum contactus, & fiet AE = AD. Quare præcedens proportio AB : AE : : AD : AC in hanc transformabitur, AB : AD : : AD : AC; ac proinde $\overline{AD}^2$ = AB × AC. Quod erat &c.

Corollarium I.

562. Hinc manifeſtum eſt, ſi à puncto quovis extra circulum aſſumpto plurimæ lineæ rectæ circulum ſecantes ducantur, rectangula comprehenſa ſub totis lineis, & partibus exterioribus eſſe omnia inter ſe æqualia.

Demonſtratio ſequitur ex Prop. 2., atque etiam ex prop. 3. Nam ducta tangente circulum, erunt quadrato tangentis æqualia ſingula illa rectangula; quare & inter ſe omnia æqualia erunt.

Corollarium II.

563. Conſtat etiam duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter ſe eſſe æquales. Nam ducta ſecante, erunt per præced. quadrata tangentium æqualia eidem rectangulo, ac proinde æqualia inter ſe, & propterea tangentes æquales.

Corollarium III.

564. Ex eodem Theoremate facilè demonſtrabis, ab eodem puncto extra circulum aſſumpto duci tantùm poſſe duas lineas, quæ circulum tangant. Similiter, ſi duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in convexam peripheriam incidant, & earum una circulum tangat, alteram quoque circulum tangere demonſtrabis.

Scholion.

Quoniam ex Propoſitione I. facillimè conſe-

conſequitur demonſtratio Theorematis in Trigonometria maximè neceſſarii, quodque operoſiùs ex aliis principiis demonſtrari ſolet, placet hoc loco illud ſubdere.

PROPOSITIO IV.

565. Theorema. *In omni triangulo rectilineo* A C B, *ſi à vertice* C *cujusvis anguli demittatur perpendicularis* C D *in baſim, ſeu latus oppoſitum* A B, *productum, ſi opus fuerit, hæc proportio obtinebitur.*

Uti baſis AB *eſt ad ſummam* AC + CB *duorum laterum, ita horum differentia* AC — CB *eſt ad differentiam* AD — DB (*fig.* 326.), *vel ad ſummam* AD + DB (*fig.* 327.) *duorum ſegmentorum baſeos.* Tab. XII. Fig. 326. 327.

Demonſtratio. Centro C, radio CB deſcribatur circulus; producaturque A C, donec occurrat circumferentiæ. Ex n. 560. patet fore

$$AB : AE :: AG : AF.$$

Cum autem CE = CB, & DF = DB, erit

I. AE = AC + CB,
II. AG = AC — CB,
III. AF = AD — BD, ut in fig. 326.
vel AF = AD + BD, ut in fig. 327.

Subſtitutis itaque hiſce valoribus in ſuperiori analogia, erit A B : A C + CB :: AC — CB : AD — BD,
vel AB : AC + CB :: AC — CB : A D + BD. Quod erat &c.

Quanti ſit usûs hoc Theorema, conſtabit in Trigonometria.

PROPOSITIO V.

566. Problema. *Duabus datis rectis lineis* ab, ac, *mediam proportionalem invenire.* Euclid. lib. 6. prop. 13.

Media proportionalis quæſita eſſe poteſt vel ordinata, vel chorda, vel tangens circuli.

Tab. *I. Reſolvendi modus.* Datæ rectæ *ab*,
XIII. *ac*, quibus media invenienda eſt propor-
Fig. tionalis, diſponantur in directum ſecun-
328. dùm lineam unicam rectam BC, ſuper qua, tanquam diametro, deſcribatur ſemicirculus; deinde ex puncto A, in quo junguntur, perpendicularis educatur AD ad circumferentiam. Dico hanc eſſe mediam proportionalem inter AB & AC, hoc eſt, inter datas lineas *ab*, *ac*.

Demonſtratio patet ex Conſtruct. & n. 559.

Tab. *II. Reſolvendi modus.* Super recta A
XIII. B = *ab* deſcribatur ſemicirculus; tum ab-
Fig. ſcindatur AC = *ac*; & à puncto C ex-
329. citetur perpendicularis CD, quæ circumferentiæ occurrat in D. Chorda DA eſt media proportionalis quæſita inter AB & AC, hoc eſt, inter *ab* & *ac*.

Demonſtratio. Ducatur chorda DB. Triangula rectangula ADB, ACD ſunt æquiangula, & ſimilia. Ergo AB : AD :: AD : AC. Quod erat &c.

III. Re-

III. Resolvendi modus. Super eadem recta linea, initio facto à puncto A, accipiantur duæ partes AB, AC æquales datis lineis *ab*, *ac*; tum super earum differentia BC describatur circulus; ad quem, si à puncto A ducatur tangens AD, hæc erit media proportionalis inter AB & AC. TAB. XIII. Fig. 330.

Demonstratio pendet ex n. 561.

Corollarium.

567. Hinc in omni triangulo rectangulo ADB, si ab angulo recto in basim AB demittatur perpendicularis DC, erit TAB. XIII. Fig. 329.

I. Perpendicularis DC media proportionalis inter baseos segmenta AC, CB.

II. Latus minus AD medium proportionale inter basim AB, & segmentum adjacens AC.

III. Latus majus DB medium proportionale inter basim AB, & segmentum adjacens BC.

PROPOSITIO VI.

568. Problema. *Datis tribus primis rectis* AC, AD, AB *progressionis geometricæ linearum, invenire reliquas in infinitum.* TAB. XIII. Fig. 331.

Resolutio. Tres datæ lineæ continuè proportionales ita disponantur, ut prima sit AC, secunda efficiens angulum quemvis in A sit AD, tertia primæ superimposita sit AB. Producantur AD, AB indefinitè in X & Z; tum diametro AB describaſcribatur ſemicirculus; & à puncto C educatur perpendicularis CD occurrens circulo in D, à quo rurſum excitetur perpendicularis DB, quæ occurret rectæ A Z in B, & hinc perpendicularis altera BE occurrens rectæ AX in E; atque ita porro per alternas vices. Dico fore

∺ A C. AD. AB. AE. AF. AG. AH &c.

Demonſtratio. Per Conſtr. triangula ADB, ABE, AEF &c. ſunt rectangula, & habent angulum communem in A, & conſequenter æquiangula ſunt, & ſimilia, & eorum latera homologa proportionalia. Ergò.

AC : AD : : AD : AB
AD : AB : : AB : AE
AB : AE : : AE : AF &c.

Quod erat demonſtrandum.

PRAXIS GEOMETRICA

ELEMENTI I. LIB. IV.

Problema I.

569. PARALLELOGRAMMO *æquale quadratum conſtruere.*

Reſolutio. Inveniatur media proportionalis inter baſim, & altitudinem parallelogrammi; hæc erit latus quæſiti.

Problema II.

570. *Triangulo æquale quadratum conſtruere.*

Reſolutio. Inveniatur media proportionationalis inter basim, & semissem altitudinis, vel inter semissem baseos, & altitudinem; hæc erit latus quadrati quæsiti.

Problema III.

571. *Cuicunque figuræ rectilineæ æquale quadratum construere.*

Resolutio. Cùm omnis figura rectilinea reduci possit in triangulum, quod per Probl. præcedens transformatur in quadratum; hinc patet resolutio Problematis.

Problema IV.

572. *Triangulum* ABC *in aliud transformare, quod sit simile dato triangulo* MNO. Tab. XIII. Fig. 332. 333.

Resolutio. Ex basi MO trianguli MNO assumatur pars ME æqualis basi AC trianguli ABC, quod transformandum proponitur; tum in latere MN trianguli MNO seligatur punctum D, cujus altitudo supra latus alterum MO æquetur altitudini BK alterius trianguli ABC; ducatúrque DE. Constat ex dictis triangulum MDE æquale esse triangulo ABC; nam utriusque bases, & altitudines per constr. æquantur.

Jam verò, si recta DE sit parallela rectæ NO, triangulum MDE erit & æquale triangulo ABC, & simile triangulo MNO, & consequenter satisfaciet problemati.

Sin autem DE non ſit parallela rectæ NO, à puncto D ducatur DF parallela eidem lateri NO; tum fiat MG media proportionalis inter MF & ME; ac demum ducatur GI parallela lateri NO. Dico triangulum MIG & eſſe ſimile triangulo MNO, & æquale triangulo MDE, ſeu ABC.

Demonſtratio. Quoniam rectæ DF, IG ſunt parallelæ eidem NO, erunt inter ſe parallelæ; ac proinde triangula MDF; MIG ſunt ſimilia. Ergo (n. 499) MDF : MIG :: $\overline{MF}^2 : \overline{MG}^2$. Rurſum, quia per Conſtr. MF : MG :: MG : ME, erit $\overline{MF}^2 : \overline{MG}^2$ :: MF : ME. Atqui (n. 375) MF : ME :: MDF : MDE. Ergò MDF : MIG :: MDF : MDE; & conſequenter duo triangula MIG, MDE ſunt æqualia. Quare, cùm triangulum MIG ſit ſimile triangulo MNO, & præterea æquale triangulo MDE = ABC, perſpicuum eſt triangulum MIG ſatisfacere problemati.

Corollarium.

573. Cùm in ſuperioribus Elementis demonſtratum jam ſit, figuram quamlibet rectilineam reduci poſſe in triangulum, & per præced. Probl. triangulum quodvis transformetur in aliud ſimile triangulo dato: hinc patet figuram quam-

quamvis rectilineam transformari posse in triangulum simile dato triangulo.

Problema V.

574. *Datum triangulum* X *transformare in polygonum simile dato polygono* ABCDE. Tab. XIII. Fig. 334.

Resolutio. Juxta methodum explicatam n. 320. polygonum ABCDE transformetur in triangulum ABF, quod & latus AB, & angulum BAF communem habeat cum eodem, quod quæritur, polygono; dein per præced. probl. triangulum datum X transformetur in aliud triangulum AHG, simile triangulo ABF. Ductis insuper in polygono ABCDE diagonalibus AC, AD, à puncto H ducatur HI parallela lateri BC, & à puncto I parallela IK lateri CD, denique à puncto K parallela KL lateri DE. Patet (n. 447.) polygonum AHIKL simile esse polygono proposito ABCDE; Dico præterea æquari triangulo AHC=X.

Demonstratio. Cùm enim duo polygona ABCDE, AHIKL sint similia, erit (n. 498.)

$$AHKIL : ABCDE :: \overline{AH}^2 : \overline{AB}^2.$$

Atqui triangula AHG, ABF, cum sint pariter similia, dabunt (n. 499.) $\overline{AH}^2 : \overline{AB}^2 :: AHG : ABF.$

Ergo AHIKL : ABCDE :: AHG : ABF. Cum autem per Conſtr. ABCDE = ABF, erit etiam AHIKL = AHG = X. Quod erat &c.

Corollarium.

575. Cùm omnes figuræ rectilineæ transformari poſſint in triangula, & triangulum quodvis in polygonum ſimile dato polygono : hinc patet figuram quamvis rectilineam converti poſſe in polygonum dato ſimile.

ELEMENTUM II.

De Lineis ſectis extremâ, & mediâ ratione, ac de Pentagonis, & Decagonis regularibus.

DEFINITIO.

576. *Si linea recta quævis* AB *ita dividatur in* C *inæqualiter, ut ſit, quemadmodum tota* AB *ad majus ſegmentum* AC, *ita* AC *majus ſegmentum ad* CB *minus ſegmentum, dicetur diviſa ſecundùm extremam, & mediam rationem.*

TAB. XIII. Fig. 335.

Habet autem, inquit Clavius in Scholio prop. 30. lib. 6., admiranda hæc ſectio lineæ extremâ & mediâ ratione inſignes utilitates, proprietateſque, ut in Libris Stereometriæ manifeſtum erit, ut non ſine cauſâ à pleriſque Geometris linea ita diviſa divinam quodammòdo dicatur habere proportionem.

PRO-