ſunt inter ſe uti $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$. Ergò etiam, uti, $\overline{KN}^2 : \overline{kn}^2$. Quod erat &c.

Corollarium V.

505. Ergò duo ſimilia polygona circulis circumſcripta, radiorum quadratis ſunt proportionalia.

Corollarium VI.

506. Circuli ſunt inter ſe, uti quadrata radiorum.

Nam conſiderari poſſunt circuli tanquam polygona regularia ſimilia infinitorum laterum, inſcripta, vel circumſcripta iiſdem circulis, in quos deſinunt.

ELEMENTUM II.

De Quadratis, & Figuris ſimilibus in Triangulo rectangulo invicem comparatis.

DEFINITIONES.

507. Quemadmodum, ſi numerus in ſeipſum ducatur, productum dicitur quadratum, ſeu poteſtas ſecunda, cum numerus ipſe poteſtas prima, ſeu radix dicatur; & ſi quadratum iterum ducatur in ſuum numerum, factum dicitur cubus, ſeu poteſtas tertia: ita, ſi valor rectæ lineæ conſideretur in certo quodam partium determinatarum numero, in quas intelligatur diviſa, quaſque vocamus menſuras, puta pedes, hexapedas &c., hæc recta linea appellabi-

labitur poteſtas prima; ſin autem idem menſurarum numerus in ſeipſum multiplicetur, productum erit poteſtas ſecunda, ſeu ejuſdem rectæ quadratum; cujus ſuperficies totidem menſuras quadratas, puta, pedes quadratos, continet, quot unitates habet idem productum. Atque ita de cubo, ſeu poteſtate tertia dicendum. Ultra poteſtatem tertiam, ſeu cubum extenſio geometrica non procedit; quippe natura loci, ſpatiique plures non patitur dimenſiones. Quadratum autem rectæ AC deſignari ſolet per $\overline{AC}^2$, & ejuſdem cubus per $\overline{AC}^3$.

Itaque quadrata invicem comparata habent inter ſe eam proportionem, quam obtinent numeri menſurarum æqualium, quas continent eorum ſuperficies. Quare, ſi quærenda ſit duorum quadratorum proportio, & latus primi ſit 2 menſurarum, ſecundi ſit 3: ducantur in ſe ipſos dati numeri; horum producta numerica dabunt rationem quadratorum inter ſe.

LEMMA I.

508. *Si recta* AC *ſecta ſit utcunque*
TAB. XII. Fig. 299. *in* B, *quadratum totius* AC *componitur ex quadratis partium* AB, BC, *& duplo rectangulo, cujus contigua latera ſint duæ partes* AB, BC, *hoc eſt*,

AC

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times BC$. Euclid. lib. 2. prop. 4.

Demonstratio. Super recta AC construatur quadratum ACDE; & lateris AE accipiatur portio AF = AB, vel FE = BC; ducantúrque rectæ FH, BI parallelæ lateribus AC, AE. Per Constructionem evidens est quadratum, totius ACDE componi ex quadratis partium AB, BC, & duplo rectangulo sub iisdem partibus contento. Quod erat &c.

LEMMA. II.

509. *Si recta* AC *fuerit utcunque secta in* B, *quadratum unius segmenti* AB *æquatur quadratis totius* AC, *& segmenti alterius* BC, *minùs duobus rectangulis contentis sub tota* AC, *& eodem segmento* BC; *hoc est*, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AC \times BC$. Euclid. lib. 2. prop. 7.

Demonstratio. Per Constructionem præced. constat AG, GD esse quadrata duarum partium AB, BC ejusdem rectæ AC; ac præterea duo rectangula BD, FD contineri sub tota AC, ejusque parte BC, & consequenter utrumque rectè exprimi per AC × BC. Fig. 299.

His positis, perspicuum est excessum quadrati ACDE supra quadratum AG componi ex duobus rectangulis BD, FI. Si eidem quadrato ACDE

 adda-

addatur etiam quadratum GD, exceſſus ſummæ horum quadratorum ſupra quadratum AG erit compoſitus ex duobus rectangulis BD, FI, & quadrato GC, hoc eſt, per Conſtructionem, ex duobus rectangulis æqualibus BD, FD, ſeu ex duplo rectangulo BD. Ergò, ſi a duobus quadratis totius AC, & partis BC ſubducatur quantitas $2\,AC \times BC = 2\,BD$, reſiduum erit quadratum AG ſuper AB conſtructum; hoc eſt, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AC \times BC$. Quod erat &c.

Corollarium I.

510. Quoniam $AB = AC - BC$, perſpicuum eſt quadratum unius ſegmenti AB æquari quadrato differentiæ totius rectæ AC, & ſegmenti alterius BC.

Corollarium II.

511. Itaque tres termini $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times BC$ component quadratum ſummæ rectarum $AB + BC$. Tres alii termini $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AB \times BC$ component quadratum differentiæ rectarum $AB - BC$.

LEMMA III.

512. *Differentia duorum quadratorum, quæ ſuper duabus rectis* AC, BC *conſtrui intelligantur, æquatur pro-*

ducto

ducto summæ duarum rectarum in earundem differentiam.

Hoc est, $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AC + BC} \times \overline{AC - BC}$

Demonstratio. Recta BC constituatur super rectà AC; construantúrque super iisdem duo quadrata ACDE, BCGF, quorum angulus C communis sit; productóque latere EA primi quadrati, donec AH=BC, ducatur à puncto H ipsi AC parallela HI, cui latus FB secundi quadrati protractum occurrat in I, & similiter latus idem BF ex altera parte protractum terminetur in K. TAB. XII. Fig. 300.

Itaque, quia per Constructionem AC=CD, & BC=CG, subducendo secundam æqualitatem à prima fiet AB=GD. Cum autem rursum per Constr. AH=BC=FG, erunt duo rectangula HB, FD æqualia; adjectóque utrisque eodem rectangulo AK, erit HB+AK, seu HK=FD+AK.

Jam verò FD+AK est differentia duorum quadratorum ACDE, BCGF, quæ constructa concipiantur super AC & BC. Ergò rectangulum HK erit pariter differentia eorundem quadratorum, nimirum, ACDE − BCGF = $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$ = HK = EH × AB.

Atqui

Atqui per Conftr. $EH = AC + BC$, & $AB = AC - BC$.

Ergò $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AC + BC} \times \overline{AC - BC}$.

Corollarium.

513. Si recta AD fecetur æqualiter
Tab. XII. Fig. 300. in C, & inæqualiter in B, quadratum dimidiæ AC, minùs quadrato partis intermediæ BC, æquabitur rectangulo fub inæqualibus partibus AB, BD; hoc eft, $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BD$. *Euclid. lib.* 2. *prop.* 5. Nam per Conftr. $AB = AC + BC$.

$BD = CD - BC = AC - BC$.

Ergò formula præced. Theor., $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AC + BC} \times \overline{AC - BC}$, in hanc transformabitur, $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BD$. Quod erat &c.

PROPOSITIO I.

514. Theorema. *In omni triangulo* ABC *rectangulo, quadratum lateris* AC, *quod recto angulo opponitur, & hypotenufa dicitur, æquale eft duobus fimul reliquorum laterum* AB, CB *quadratis.* Euclid. lib. 1. prop. 47.

Tab. XII. Fig. 301. *Demonftratio.* Ducantur IC, BF, & præterea BE parallela lateri AF. Si angulis IAB, FAC rectis, ac proinde æqualibus, addatur communis angulus

gulus BAC, erunt toti IAC, FAB æquales anguli. Atqui per Conſtr. in triangulis IAC, FAB etiam latera, quæ æquales illos angulos continent, inter ſe ſunt æqualia, nimirum, IA, CA ipſis BA, FA, unum uni, alterum alteri. Ergò triangula IAC, FAB æquantur (n. 229.); quæ, quia cum parallelogrammis ABLI & ZAFE conſiſtunt in iiſdem baſibus IA, FA, & in iiſdem parallelis IA, LBC, & AF, EZB, ſunt eorum dimidia (n. 250.). Ergò parallelogramma ABLI, ZAFE, utpote æqualium dupla, erunt æqualia inter ſe.

Eodem diſcurſu ductis rectis AX, BR, demonſtratur parallelogramma EC, BX æqualia eſſe. Totum igitur quadratum AR utriſque IB, & BX æquale erit. Quod erat &c.

Aliter.

Ab anguli recti vertice A demittatur in hypotenuſam perpendicularis AD, quæ producta occurrat in F lateri EG quadrati ejuſdem hypotenuſæ; cujus duo latera EB, GC, & ipſis parallela AF producantur, donec duorum quadratorum HK, ON lateribus productis occurrant in punctis I, M, L. Invenies itaque TAB. XII. Fig. 302.

I. Duo triangula BAC, BHI eſſe perfectè æqualia. Nam BA = BH; &

an-

anguli BAC, BHI ſunt æquales, utpote recti; tum etiam æquales anguli ABC, HBI, quippe complementa ejuſdem anguli ABI. Ergò (n. 230.) duo triangula BAC, BHI ſunt æqualia; & conſequenter BC = BI = BE.

II. Duo parallelogramma BF, ABIL ſuper æqualibus baſibus BE, BI, & inter eaſdem parallelas EI, FL conſtituta, ſunt æqualia. Atqui propter eandem rationem parallelogrammum ABIL æquatur quadrato AH. Ergò parallelogrammum BF æquatur quadrato AH.

Eodem diſcurſu oſtenditur parallelogrammum DG æquari quadrato AO. Ergò quadratum hypotenuſæ BC &c. Quod erat &c.

Scholion.

515. Inventio porrò admirabilis, atque pulcherrimi hujus Theorematis ad Pythagoram refertur, qui, ut ſcribit Vitruvius lib. 9., hoſtias Muſis immolavit, quòd ſe in tam præclaro invento adjuverint. Idem Theorema paulo infra ad omnes figuras ſimiles, ſimilitérque deſcriptas extendi poſſe demonſtrabimus longè univerſaliùs, quàm hoc Pythagoræ inventum, quod ſola quadrata includit.

TAB. XII. Fig. 302. Quamvis autem ad demonſtrationem ſecundam Theorematis parum interſit ſcire

ſcire, in quo punćto recta D A pro- TAB.
ducta occurrat rectæ HK pariter pro- XII.
ductæ: tamen facilè demonſtrari poteſt Fig.
rectam D A productam neceſſariò tran- 302.
ſire per punctum L, in quo occurrunt latera HK, O N producta, duorum quadratorum adjacentium angulo recto B A C.

Nam duo triangula AKL, BHI, perfectè æqualia eſſe conſtabit, & conſequenter KL = HI = A C = A N &c.

Corollarium I.

516. Si ab angulo recto in hypotenuſam demittatur perpendicularis A D, erunt quadrata hypotenuſæ, & duorum laterum proportionalia toti hypotenuſæ, ejuſque partibus B D, D C.

Nam quadratum B G, & duo rectan- Fig.
gula B F, D G inter easdem parallelas, 302.
eam inter ſe proportionem habent, quam eorum baſes; hoc eſt,

BG : BF : CF :: BC : BD : DC.

Itaque, ſi duobus rectangulis BF, CF ſubſtituantur quadrata eisdem reſpectivè æqualia AH, AO, erit

BG : AH : AO :: BC : BD : DC.

Corollarium II.

517. In circulo B A E F C, ſi ab extremitate B diametri ducantur quotlibet
chordæ B A, B E, B F, & à punctis A, TAB.
E, F, demittantur in diametrum B C XII.
perpendiculares A D, E G, F H, erit Fig.
$\overline{BC}^2$: 303.

$\overline{BC}^2 : \overline{BA}^2 : \overline{BE}^2 : \overline{BF}^2 :: BC : BD : BG : BH.$

Nam ductis rectis A C, E C, F C, triangula ſingula in eodem ſemicirculo erunt rectangula; conſtructóque quadrato B N, productíſque perpendicularibus, erit per Theor. $\overline{BC}^2 = BN$; $\overline{BA}^2 = BK$; $\overline{BE}^2 = BL$; $\overline{BF}^2 = BM$.

Atqui $BN : BK : BL : BM :: BC : BD : BG : BH$.

Ergò $\overline{BC}^2 : \overline{BA}^2 : \overline{BE}^2 : \overline{BF}^2 :: BC : BD$ $BG : BH$.

Nimirum, quadrata diametri, & omnium chordarum, quæ ab extremitate B ducuntur, proportionalia ſunt diametro, ejuſque partibus interceptis à puncto B, & ſingulis perpendicularibus demiſſis ab extremitate chordarum.

Corollarium III.

518. Si quadratum ſuper uno trianguli latere AB deſcriptum, æquale ſit duobus reliquorum laterum AC, BC quadratis, angulus B C A, quem reliqua latera continent, rectus erit. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 48.

TAB. Nam, ſi ex puncto C erigatur ſuper
XII. CB perpendicularis CD, quæ fiat æqua-
Fig. lis lateri C A, ducatúrque B D, erit
304. (n. 514.) $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2$, hoc eſt, per Conſtr. $= \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$. Atqui per hy-

hyp. $\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$. Igitur $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$; adeoque $BD = AB$; ac propterea triangula ACB, BCD ſunt ſibi mutuò æquilatera, & (n. 232.) angulus ACB æqualis angulo BCD, qui rectus eſt per Conſtr.

PROPOSITIO II.

519. Theorema. *Si tres figuræ ſimiles* X, Y, Z *ſuis homologis lateribus* BC, BA AC *triangulum rectangulum* BAC *efficiant, demittaturque ab angulo recto perpendicularis* AD *ſuper hypotenuſam* BC: *Dico* I. $X:Y:Z :: BC:BD:DC$.
II. $X = Y + Z$.

Demonſtratur I. pars. Quoniam tres figuræ X, Y, Z ſunt ſimiles, & rectæ B C, B A, A C ſunt latera homologa terminata à punctis ſimiliter poſitis reſpectu earundem, erit (n. 500.) Tab. XII. Fig. 305.

$$X:Y:Z :: \overline{BC}^2 : \overline{BA}^2 : \overline{AC}^2.$$

Atqui (n. 516.) $\overline{BC}^2 : \overline{BA}^2 : \overline{AC}^2 :: BC : BD : DC$.

Ergo $X:Y:Z :: BC:BD:DC$.

Quod erat primum.

Hinc conſequitur II. pars. Nam $X : Y + Z :: BC : BD + DC$. Atqui $BC = BD + DC$. Ergo $X = Y + Z$. Quod erat alterum.

Corollarium I.

520. Si à lateribus trianguli rectan-

guli ſimilia polygona quæcunque deſcribantur, illud, quod opponitur angulo recto, duobus ſimul reliquis æquale erit. Euclid. lib. 6. prop. 31.

Corollarium II.

521. Si trium circulorum radii, vel diametri triangulum rectangulum efficiant, ille, qui opponitur angulo recto, duobus ſimul reliquis æquatur. Nam conſiderari poſſunt tanquam tria polygona ſimilia infinitorum laterum.

Corollarium III.

522. Quamvis adhuc lateat artificium geometricè inveniendi dimenſionem circumferentiæ circuli, ejúſque aream: tamen à præced. Corollario conſequitur dimenſio areæ quorundam ſpatiorum, quæ à portionibus circumferentiæ circulorum terminantur, vocamuſque lunulas Hippocratis, cui hæc inventio adſcribitur.

Tab. XII. Fig. 306. Conſtruatur triangulum rectangulum iſoſceles ABG; tum ſuper tribus lateribus, tanquam diametris, deſcribantur ſemicirculi AGBDC, AFB, BEC. Spatium comprehenſum à quadrante circuli AGB, & ſemicircumferentia AFB vocatur lunula, uti etiam ſpatium BDCEB. Dico autem duas lunulas ſimul ſumptas æquari triangulo ABC.

Nam (n. 521.) area ſemicirculi AGBDC æqualis eſt duabus areis ſimul ſump-

ſumptis ſemicirculorum AFB, BEC. Ergo ab area majoris ſemicirculi ſubducendo utrimque ſegmenta BGAH, & BDCI, reſiduum circuli majoris erit triangulum ABC. Duorum autem ſemicirculorum minorum reſidua erunt duæ lunulæ AFBG, BECD, quarum ſumma æquabitur triangulo ABC; & alterutra triangulo ABK.

De Quantitatibus incommenſurabilibus.

DEFINITIONES.

523. *Quantitates commenſurabiles dicuntur illæ, quas aliqua communis menſura metitur: incommenſurabiles, quæ nullam habent menſuram communem.*

Ejusmodi quantitates exiſtere mox demonſtrabitur.

Ratio, ſeu proportio, quæ exiſtit inter magnitudines commenſurabiles, & numeris exprimi poteſt, dicitur rationalis, & ratio numeri ad numerum.

Ratio, quæ exiſtit inter magnitudines incommenſurabiles, & nullis numeris explicari poteſt, non eſt ratio numeri ad numerum; eáque dici ſolet irrationalis, aut ſurda.

524. *Quemadmodum exponens rationis eſt quotus unius termini per alium diviſi: ita exponentes rationis ſunt minimi numeri, qui eandem inter ſe rationem habent, quam antecedens ad conſequens.*

Inveniuntur autem exponentes rationis eâ planè ratione, quâ fractio reducitur ad minimos terminos, non mutato ejusdem valore. Nam, uterque terminus, puta, 8 ad 16, vel 32 ad 64 &c. dividatur per maximam communem mensuram 8, vel 32, quotientes 1 & 2 erunt exponentes rationis 8 ad 16, vel 32 ad 64.

LEMMA.

525. *Ratio duplicata rationis numeri ad numerum necessariò habet pro suis exponentibus quadratos numeros.*

Nam, si rationis numeri ad numerum, puta, 3 ad 6, duplicatam habere vesim, huic necessariò adjicienda est ratio altera, quæ sit primæ æqualis, nimirum, 3 : 6 : : 4 : 8; tum multiplicatis inter se duobus antecedentibus, & duobus consequentibus, horum facta 12, 48, dabunt rationem duplicatam alterius simplicis 3 : 6, vel 4 : 8; uti constat ex n. 487.

Jam verò hæc ratio 12 ad 48 revocetur ad minimos terminos 1, 4, qui erunt & exponentes rationis duplicatæ, & numeri quadrati. Quod universaliter verum esse sic ostenditur.

Duæ rationes æquales ita disponantur, ut unam proportionem efficiant,

3 : 6 : : 4 : 8.

Revocentur ad minimos terminos,

1 : 2 : : 1 : 2.

In hac reductione duarum rationum æqua-

æqualium, non mutato earum valore, evidens eſt duo antecedentia eundem prorſus numerum conficere, uti & duo conſequentia; quæ, ſi inter ſe reſpectivè multiplicentur, dabunt neceſſariò pro exponentibus duos numeros quadratos.

Nam horum quilibet erit factum ejusdem numeri in ſeipſum ducti.

Corollarium.

526. Si detur ratio duplicata, cujus exponentes non ſint numeri quadrati, ratio ſimplex, cujus illa eſt duplicata, non erit ratio numeri ad numerum.

PROPOSITIO III.

527. Theorema. *In quadrato* ABCD *diagonalis* AD *lateri* AC *incommenſurabilis eſt longitudine; hoc eſt, ratio diametri ad latus, non eſt ratio numeri ad numerum.* Euclid. lib. 10. prop. 117. TAB.

Demonſtratio. Ratio quadrati rectæ XII.
AD ad quadratum rectæ AC eſt dupli- Fig.
cata (n. 498.) rationis ſimplicis, lineæ 307.
AD ad lineam AC. Ergò, ſi duo quadrata rectarum AD & AC non habeant pro ſuis exponentibus numeros quadratos, ratio ſimplex rectæ AD ad rectam AC non erit ratio numeri ad numerum ex præced. Corol. Atqui horum duorum quadratorum exponentes ſunt 2 & 1, adeoque numeri non quadrati; nam triangulum ACD rectangulum eſt, & latus AC æquale lateri CD.

Quadratum ergo hypotenuſæ AD duplum eſt quadrati lateris AC. Quare ratio ſimplex, cujus eſt duplicata ratio 2 ad 1, non eſt ratio numeri ad numerum; id eſt, ratio diametri AD ad latus AC irrationalis eſt; & conſequenter quadrati diameter eſt incommenſurabilis lateri, quamvis harum rectarum quadrata ſint commenſurabilia, quorum ratio 2 ad 1 numeris exprimi poteſt. Quod erat &c.

Scholion.

Geometræ, ut idipſum exprimant, dicunt, diametrum, & latus eſſe quantitates incommenſurabiles longitudine, ſed commenſurabiles potentiâ.

PROPOSITIO IV.

528. Problema. *Invenire rectas lineas incommenſurabiles non ſolùm longitudine, verùm etiam potentiâ, hoc eſt, quarum quadrata non habeant rationem, quæ numeris exprimi poſſit.*

Reſolutio. Inveniatur media proportionalis inter diagonalem, & latus quadrati, uti docebimus Lib. 4. Dico hanc eſſe incommenſurabilem tum longitudine, tum potentiâ reſpectu lateris, & diagonalis.

TAB. XII. Fig. 307. 308. *Demonſtratur I. pars.* Sit recta EF media proportionalis inventa inter latus AC, & diametrum AD. Ratio rectæ AC ad rectam AD eſt duplicata rationis rectæ AC ad rectam EF (n. 494.).

Qua-

Quare brevitatis causâ sit AC = X.
EF = Y.
AD = Z.

Per suppositionem erit $x:y::y:z$. Multiplicentur inter se duo antecedentia x & y, & duo consequentia y & z hujus continuæ proportionis, habebitur (n. 487.) ratio ex duabus rationibus composita $xy:zy$.

Hæc autem ratio non differt à ratione x ad z; quippe quæ per eandem quantitatem y multiplicatur. Ergò ratio x ad z componitur ex ratione x ad y, & ex ratione y ad z, nimirum ex duabus rationibus æqualibus; hoc est, (n. 492.) ratio x ad z est duplicata rationis x ad y, nempe ratio rectæ AC ad rectam AD est duplicata rationis rectæ AC ad rectam EF.

His positis, [n 526.] erit recta AC longitudine incommensurabilis rectæ EF. Nam earum ratio duplicata, quæ est ratio rectæ AC ad rectam AD, pro exponentibus non habet quadratos numeros.

Demonstratur II. pars. Nam quadratum rectæ AC est ad quadratum rectæ EF in ratione duplicata rectæ AC ad EF: hoc est, in ea ipsa ratione, quam habet recta AC ad rectam AD. Atqui (n. 527.) recta AC est incommensurabilis rectæ AD. Ergò quadratum rectæ AC est incommensurabile quadrato rectæ EF. Quod erat &c.

Co-

Corollarium I.

TAB. XII. Fig. 308. 529. Hinc lineæ incommensurabiles in infinitum haberi possunt, si totidem mediæ proportionales semper quærantur, puta, inter rectam AC, & rectam EF; atque ita porro in infinitum.

Corollarium II.

530. Atque hoc vel unico argumento, tametsi cætera omnia deessent, evidenter demonstratur, quantitates ex definito punctorum numero componi non posse; alioqui nullæ essent incommensurabiles; omnium quippe mensura communis esset punctum.

Corollarium III.

531. Inventis lineis rectis longitudine incommensurabilibus, invenientur etiam aliæ quamplurimæ magnitudines, planæ scilicet, atque solidæ incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ AC & AD longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit EF. Quoniam (n. 498. & 500.) AC prima est ad AD tertiam, uti figura rectilinea quævis super AC constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterque positam super EF: sunt autem AC & AD longitudine incommensurabiles: erunt ergo pariter rectilineæ illæ figuræ super AC & EF incommensurabiles.

Rursum, si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata ejusdem altitudititudinis, quorum bases sint figuræ rectilineæ similes, similiterque descriptæ super AC & EF: habebunt pyramides, & prismata, uti alibi demonstrabitur, eandem proportionem, quam bases: hoc est, quam habent rectilineæ figuræ incommensurabiles.

Corollarium IV.

532. Hæc rectarum incommensurabilitas impedimento est, quo minùs in plerisque operationibus usus scalæ geometricæ universalis esse possit, puta, in additione figurarum similium.

Propositum sit construere quadratum alterius dati duplum. Dividatur latus dati quadrati in maximum partium numerum id est, 100 partes. Duc 100 in 100: factum 10000 erit valor quadrati dati; ejusque duplum 20000 valor quadrati quæsiti. Ab hoc tamen invento valore deduci methodus non potest, qua propositum quadratum construatur, Oportet enim ipsius latus invenire expressum tali numero, qui in se ipsum ductus exhibeat 20000. At hic numerus frustra in scala geometrica quæreretur, cujus partes essent centesimæ lateris quadrati primi. Nam numerus 141 in seipsum ductus dabit 19881; & 142 dabit 20164: uterque autem â quæsito numero vel deficeret, vel excederet. Idemque dicendum, si latus quadrati dari divideretur in plus quàm 100 partes Verùm id genus problemata facilè expedientur in praxi geometrica, quam subjicio, per Prop. 1., ejusque Corol.

PRAXIS GEOMETRICA.

ELEMENTI II. LIB. III.

Similium Figurarum Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Divisio.

Problema I.

§ 133. *Datis quotcunque figuris similibus, invenire unam æqualem omnium summæ, & ipsis similem.*

TAB. XII. Fig. 309. *Resolutio.* Figurarum similium, quæ addi debent, determinentur latera homologa, quorum duo AB, AC constituantur ad angulum rectum BAC. Hypotenusa BC erit latus homologum figuræ similis, & æqualis summæ duarum.

Quibus si tertiam figuram similem addi oporteat, ab extremitate hypotenusæ BC excitetur perpendicularis CD æqualis lateri homologo tertiæ figuræ; ducatúrque hypotenusa BD. Hæc erit latus homologum figuræ similis, & æqualis summæ trium similium figurarum, quarum latera homologa sunt AB, AC, CD. Atque ita porrò, si plures aliæ similes figuræ essent addendæ.

Si circulus quæreretur æqualis summæ plurium circulorum: horum radii, vel dia-

diametri disponantur, ut jubet Problema; circulus, cujus radius, vel diameter sit hypotenusa, æquatur summæ reliquorum.

Omnia constant ex n. 520. & 521.

Problema II.

534. *Figuram similem ab altera simili subtrahere, ita ut residuum sit figura similis duabus primis.* TAB. XII. Fig. 305.

Resolutio. Quoniam (n. 520.) $X = Z + Y$, perspicuum est $X - Z = Y$; vel $X - Y = Z$.

Itaque duarum similium figurarum, quarum minor à majore subtrahenda est, determinentur latera homologa; fiat deinde triangulum rectangulum BAC, cujus hypotenusa BC sit latus figuræ majoris, & alterutrum ex duobus lateribus anguli recti, puta, BA, sit homologum latus minoris figuræ subtrahendæ. Tertium latus AC trianguli rectanguli erit homologum latus figuræ similis, quæ duarum datarum sit differentia.

Triangulum verò rectangulum, ut jubet Problema, sic construitur. Super recta BC, quæ sit æqualis uni lateri majoris figuræ, describatur semicirculus BAC; tum ab extremitate B ejusdem diametri ducatur chorda BA æqualis lateri homologo figuræ similis, & æqualis quæsitæ differentiæ duarum reliquarum. Nam angulus in semicirculo rectus est.

Si

Si circuli eſſent invicem ſubtrahendi, aſſumantur eorum radii, vel diametri pro lineis homologis.

Problema III.

535. *Figuram conſtruere multiplam, & ſimilem figuræ datæ* X.

TAB. XII. Fig. 310. *Reſolutio.* Si figura propoſita multiplicanda ſit per numerum, puta, 3, multiplicatio revocatur ad additionem, ut in Probl. 1.; ſin autem multiplicanda ſit in quavis alia ratione, quæ numeris etiam exprimi non poſſit:

Ducatur recta indefinita BZ, in qua à quovis puncto D excitetur perpendicularis DA; ſumatúrque pro libitu portio BD, quæ reſpondeat datæ figuræ. Fiat deinde BC æquè multiplex ipſius BD, ac quæſita figura multiplex eſſe debeat propoſitæ figuræ X; tum ſuper recta BC, tanquam diametro, deſcribatur ſemicirculus, qui perpendiculari indefinitæ DA occurrat in puncto A; à quo ad extremitates diametri ducantur chordæ AB, AC, quæ rectum angulum efficient in A. Denique ſuper chorda AB, quæ vergit versùs BD reſpondentem datæ figuræ ſumatur AE æqualis rectæ MN ejuſdem datæ figuræ X; ducatúrque EF parallela diametro BC. Dico rectam EF à duabus chordis interceptam, fore latus figuræ quæſitæ, homologum lateri MN propoſitæ figuræ X.

De-

Demonstratio. Nam figura similis datæ X constructa super recta EF homologa ipsi MN, toties continebit figuram X, cujus latus homologum est AE, seu MN, quoties EF continet EG (n. 519.). Atqui EF : EG :: BC : BD; & per Constr. BC tot vicibus continet BD, quot vicibus figura quæsita continere debet propositam figuram X. Ergò &c. Quod erat &c.

Scholion.

536. *Assuescant Tirones radices quadratas cujusvis summæ quadratorum invenire, easque geometricè, & per literas designare.* TAB. XII. Fig. 309.

Itaque I. latus quadrati est ejusdem radix, nimirum, $AB = \sqrt{\overline{AB}^2}$.

II. In triangulo rectangulo BAC, *quia* $\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$, *hypotenusa* BC *est radix summæ quadratorum* $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$, *nimirum,* $BC = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2}$.

III. In triangulo rectangulo BCD, *hypotenusa* BD *est radix trium quadratorum, & ita exprimitur* ; $BD = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2}$ *&c.*

Monitum.

Caveant itaque Tirones, ne radicem quadratam summæ plurium quadratorum; $\sqrt{}$

$\overline{BA}^2$

$\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$ *putent esse summam radicum* BA + AC + CD *eorundem; nam ex dictis sola hypotenusa* BD *est illorum radix.*

Similiter in triangulo rectangulo BAC *radix differentiæ quadratorum* $\overline{BC}^2 - \overline{BA}^2$ *non est* BC — BA, *sed* $AC = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BA}^2}$.

Problema IV.

537. *Invenire lineas rectas proportio-*
TAB. *nales totidem figuris* X, Y, Z, *&c.,*
XII. *quarum nota sint latera homologa* bc, ba,
Fig. be, *&c,*
311. *Resolutio.* Super recta BC æquali rec-
312. tæ *bc* majoris figuræ X, describatur
313. semicirculus BEAC; ductisque chor-
314. dis BA, BE &c, quæ sint æquales lineis *ba*, *be* homologis ipsi *bc*, ab earum chordarum extremitatibus demittantur perpendiculares AD, EF &c. ad diametrum BC. Dico X : Y : Z &c. : : BC : BD : BF &c.

Demonstratio, Quoniam figuræ X, Y, Z &c. sunt similes, ac præterea rectæ *bc* : *ba*, *be* &c. sunt earum lineæ homologæ, habebitur (n. 500.) X : Y : Z &c. : : $\overline{bc}^2 : \overline{ba}^2 : \overline{be}^2$ &c. Atqui [n. 517.) $\overline{bc}^2 : \overline{ba}^2 : \overline{be}^2$: &c., sive per Const. $\overline{BC}^2 : \overline{BA}^2 : \overline{BE}^2$ &c. : : BC : BD : BF &c.

Er-

Ergò X : Y : Z &c. : : BC : BD : BF &c. Quod erat &c.

Corollarium.

538. Inventis lineis, quæ proportionales ſint totidem figuris ſimilibus, quemadmodum facilè invenitur, quoties una linea alteram contineat, ita peræquè decerni poterit, quot vicibus major duarum figurarum ſimilium contineat minorem.

Scholion.

Docuimus alibi, quo artificio figura quævis data dividi poſſit in plures partes quæ ſint in data ratione. Cùm verò partes ab hac diviſione provenientes non ſint ſimiles figuræ diviſæ, reliquum eſt, ut hoc etiam ſcitu digniſſimum Problema geometricum reſolvatur.

Problema V.

339. *Propoſitam figuram* X *dividere in partes, quæ ſint ipſi ſimiles, ac præterea proportionales datis numeris, ſeu lineis* bd, de, ef, fc. TAB. XII. Fig. 315. 316.

Reſolutio. In data figura X eligatur recta *bc* in hanc rem commodior, cui æqualis fiat recta BC, quæ dividatur in partes BD, DE, EF, FC proportionales datis numeris, ſeu lineis *bd*, *de*, *ef*, *fc*, quæ ſint in ea ipſa ratione, in qua eſſe debent partes quæſitæ figuræ X; tum ſuper recta BC, tanquam diametro deſcribatur ſemicirculus BAC; & ab extremitatibus D&F partium BD, FC, excitentur perpendiculares DA, FG, occurrentes ſemicircumferentiæ in A&G; dein ducantur chordæ BA, CG; ac ſuper his, tanquam lineis homologis ipſi *bc*, conſtruantur duæ figuræ ſimiles figuræ X.

Dico I. has duas figuras fore duas partes propoſitæ figuræ X reſpondentes duabus proportionalibus *bd*, *fc*.

Ut autem inveniantur reliquæ partes figuræ X reſpondentes reliquis proportionalibus *de*, *ef*, transferantur diametri partes intermediæ DE, EF in BQ, BP, hæc lege, ut earum origo communis ſit punctum extremum B diametri; tum excitatis diametro perpendicularibus QN, PM, ducantur chordæ NB, MB; ac rurſum ſuper his, tanquam lineis homologis ipſi *bc*, conſtruantur duæ figuræ ſimiles figuræ X.

Dico II. haſce novas figuras fore reliquas partes figuræ X reſpondentes duabus reliquis proportionalibus *de*, *ef*.

Demonſtratio. Ut hæc conſtructio reſolvendo Problemati idonea demonſtretur, duo præſtanda mihi ſunt.

Oſtendam I. ſummam harum figurarum ſimilium figuræ X, eidem æquari.

Oſtendam II. eaſdem figuras proportionales eſſe datis rectis *bd*, *de*, *ef*, *fc*; quod utrumque conditio Problematis poſtulat.

Ita-

Itaque I. figura X, quæ conſtructa intelligitur ſuper diametro $BC = bc$, omneſque reliquæ figuræ ſimiles ipſi X, pariter conſtructæ ſuper chordis AB, NB, MB, GC, tanquam lineis homologis rectæ BC, ſeu bc, erunt per Probl. IV. proportionales rectis BC, BD, BQ, BP, FC, ſive rectis BC, BD, DB, EF, FC, quippe $BQ = DE$, & $BP = EF$; & conſequenter (n. 394.) figura conſtructa ſuper $BC = bc$ erit ad ſummam aliarum ſimilium ſuper chordis AB, NB, MB, GC conſtructarum, uti BC eſt ad ſummam $BD + DE + EF + FC$. Atqui $BD + DE + EF + FC = BC$. Ergò &c. Quod erat primum.

II. Ex prima parte conſtat figuras ſimiles conſtructas ſuper chordis AB, NB, MB, GC proportionales eſſe rectis BD, DE, EF, FC. Atqui per Conſtr. rectæ BD, DE, EF, FC proportionales ſunt lineis datis bd, de, ef, fc, ſeu datis numeris. Ergò &c. Quod erat alterum.

De Circino proportionis.

Problema I.

540. *Lineam planorum circino proportionis inſcribere.* TAB. XII. Fig. 317.

Reſolutio. Voco lineam planorum, illam, in qua exhibentur latera homologa figurarum planarum ſimilium. In utraque regula inſcribuntur duæ lineæ, quæ in centrum commune circini cöeunt. Incipiendo à centro ambæ ita dividuntur, ut primæ diviſioni apponatur unitas, & eſt latus quadrati omnium minimi, & primi; ſecunda diviſio habet 2, deſignatque latus quadrati dupli; atque ita porrò juxta ſeriem naturalem numerorum deſignantur latera quadratorum, quæ primum, ſeu minimum contineant bis, ter, quater &c. Hujuſmodi autem diviſiones, & latera quadratorum multiplicium inveniuntur ope trianguli, & n. 533., uti conſtare poteſt ex adjecta figura.

Problema II.

541. *Figuram planam minuere, aut augere ſecundùm datam rationem.*

Reſolutio. Si figura propoſita ſit regularis, nimirum, quadratum, pentagonum, circulus, triangulum æquilaterum, ſufficiet invenire latus figuræ quæſitæ. Proponatur ergò quadratum quodcunque augendum ſecundùm rationem 4 ad 9. Latus dati quadrati transfero ad intervallum 4 & 4 notatum in linea planorum. Intervallum 9 & 9 exhibebit latus quadrati, quod ſe habeat ad propoſitum quadratum, ut 9 ad 4.

Demonſtratio. Lineæ transverſales eandem inter ſe rationem habent, ac latera. Sed lineæ 4 & 9 ſunt latera quadratorum

torum eandem rationem habentium, ac 4 ad 9. Ergò & lineæ transverſales erunt latera quadratorum eandem rationem habentium. Quod erat &c.

Idem dicendum de omnibus figuris ſimilibus.

Quod ſi figura propoſita irregularis fuerit, ita ut requirantur plura latera ad deſcriptionem figuræ ſimilis, pro ſingulis lateribus eodem modo operandum eſſet.

Problema III.

542. *Invenire, quam rationem habeant inter ſe figuræ planæ ſimiles.*

Reſolutio. Ut nota fiat ratio, quam habet figura plana quæcunque ad aliam ſimilem, comparari debent duo tantùm latera homologa; Si enim latus utriusque figuræ applicetur lineæ planorum, incipiendo à centro, numeri, quos attingent, indicabunt, quam rationem habeant prædictæ figuræ.

Vel, ita aperiatur circinus proportionis, ut latus unius figuræ propoſitæ interjiciatur inter numeros eoſdem transverſaliter, puta, inter 5 & 5: intervallum 9 & 9, cui congruet latus alterum figuræ homologum, indicabit numerum 9, ad quem numerus 5 eandem rationem habebit, ac prima figura ad ſecundam.

Problema IV.

543. *Circinum proportionis ita aperire, ut duæ lineæ planorum angulum rectum efficiant.*

Resolutio. Super linea planorum, incipiendo à centro, accipe circino communi intervallum cujuslibet numeri planorum, puta, 8; hoc idem intervallum applicetur utrimque transversim numero, qui sit semissis præcedentis, nimirum, 4 & 4 ejusdem lineæ planorum; quo facto, duæ lineæ planorum efficient in centro angulum rectum.

Demonstratio pendet ex n. 518.

Problema V.

544. *Datis quotcunque figuris planis similibus construere figuram similem omnibus simul sumptis æqualem.*

Resolutio. Circinus proportionis ita aperiatur, ut duæ lineæ planorum angulum rectum comprehendant; tum latera duarum figurarum transfer hinc, atque inde in lineas planorum: linea iis subtensa, seu intervallum inter duos numeros inventum, dabit latus homologum figuræ similis, & æqualis primis duabus.

Pariter latus inventum transferatur in unam lineam planorum, & latus tertiæ figuræ in oppositam: linea utrique subtensa, erit latus figuræ similis, & æqualis tribus primis.

Hac

Hac praxi uti poſſumus, etiamſi latera transferri non poſſint in lineam planorum, modò ſubſtituantur pro pedibus, aut hexapedis totidem partes æquales ex ſcala geometrica.

Problema VI.

545. *Invenire latus figuræ ſimilis, æqualis differentiæ duarum figurarum ſimilium.*

Reſolutio. Proponantur duæ figuræ planæ ſimiles, veluti, duo quadrata, duo circuli &c. Quæratur autem latus quadrati, aut circuli, qui ſit æqualis earum figurarum differentiæ.

Aperiatur circinus proportionis, ita ut lineæ planorum angulum rectum comprehendant; tum latus minoris figuræ transfer à centro in alterutram lineam planorum, puta, à centro in punctum 9; dein in circino communi accipe latus alterum homologum figuræ majoris, ac pedem circini ita in extremo 9 primi lateris colloca, ut alius pes aliam lineam planorum in aliquo puncto diviſionis attingat, puta, in 4. Diſtantia à centro ad punctum 4 inventa in altera linea planorum, indicabit latus homologum alterius figuræ ſimilis, quæ differentiam propoſitam adæquet duarum ſimilium figurarum, quarum ratio ponitur eſſe, ut 9 ad 13.

Demonſtratio pendet ex n. 534.