GEOMETRIÆ THEORICO - PRACTICÆ LIBER TERTIUS

De Ratione SUPERFICIERUM.

ELEMENTUM I.

De Ratione Superficierum in Parallelogrammis, Triangulis, & Figuris similibus generatim.

DEFINITIONES.

486. S*I antecedentes plurium rationum termini, sicuti etiam ipsarum, consequentes, nimirum,* $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{b}$, $\frac{D}{d}$ *inter se mutuò respectivè multiplicentur, producta* $\frac{ABD}{abd}$ *dicuntur habere inter se rationem compositam ex illis omnibus datis rationibus.*

Corollarium I.

487. Datis ergò quotcunque rationibus, solâ multiplicatione antecedentium, & consequentium inter se mutuò respectivè, determinabitur ratio ex illis omnibus composita.

Coro-

Corollarium II.

488. Cùm valor rationis ſit quotus antecedentis per conſequentem diviſi (n. 360.), hinc ſequitur exponentem rationis compoſitæ pariter componi ex ſimplicium rationem exponentibus inter ſe multiplicatis. Sic $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ exprimit rationum $ac : bd$ ex ſimplicibus compoſitam, cujus exponens componitur ab exponentibus ſimplicium inter ſe multiplicatis. Sic ex ſimplici ratione dupla 4 : 2, & 9 : 3 tripla, componitur ratio 36 : 6 ſextupla, cujus exponens 6 eſt factum exponentium 2 × 3 rationum ſimplicium. Similiter ex ratione 4 : 2, & 9 : 3, & 20 : 5, oritur ratio 720 : 30, cujus exponens 24. eſt factum 2 × 3 × 4.

489. *Ratio geometrica cujusvis termini* A *ad alium quemvis* F *componitur ex rationibus omnibus intermediis continuè ſumptis, quæ oriuntur ex quovis numero terminorum interjacentium.* Sic ratio A : F æquatur rationi compoſitæ A : B, B : C, C : D, D : E, E : F, initio facto in A, & deſinendo in F, ſumptis terminis intermediis, quot libuerit. Similiter in numeris ratio 36:2 eſt compoſita ex 36 : 18, 18 : 6, 6 : 12, 12 : 4, 4 : 2. Ratio eſt, quia intermedii termini in antecedentibus, & conſequentibus occurrunt; unde ratio compoſita ex A : B, B : C, C : D,

C:D, D:E, E:F, eadem eſt, ac ratio ABCDE : BCDEF, in qua ſublatis terminis communibus, remanet ratio A:F compoſita ex omnibus intermediis.

Corollarium.

490. Hinc duplex ſequitur geometrica argumentandi ratio, *ex æquo*, ut ajunt *ordinatè*, & *ex æquo perturbatè*, vel, ut alii loquuntur, *ex æqualitate ordinata*, & *ex æqualitate perturbata*; Nam, ſi fuerint quotcunque quantitates A, B, C &c., aliæque ipſis numero æquales a, b, c &c. in duplici ſerie conſtitutæ, quæ binatim ſumptæ, ſint in eadem ratione, puta, A:B :: a:b, & B : C :: b:c, erit ex æqualitate ordinata, ut prima A ad tertiam C in prima ſerie, ita prima a ad tertiam c in ſecunda; hoc eſt, ratio duarum extremarum ex una parte æqualis erit rationi duarum extremarum ex alia. Ratio pendet ex numero præcedente. Nam ultimæ rationes ex intermediis æqualibus componuntur.

491. Sin autem fuerint quotcunque quantitates A, B, C, aliæque ipſis numero æquales a, b, c in duplici ſerie conſtitutæ, quæ binatim ſumptæ, ſint in eadem ratione: ſit autem perturbata earum proportio, nempe A : B :: b:c, & B:C :: a:b : erit ex æquo perturbatè, ut A prima ad tertiam C in prima ſerie, ita prima a ad tertiam c in ſecunda ſerie; hoc

hoc eſt, ratio duarum extremarum ex una parte æqualis erit rationi duarum extremarum ex alia. Ratio eadem, quæ numeri præced.

492. Si in ea per multiplicationem compoſitione rationum, quam definivimus n. 486., contingat, ut rationes componendæ ſint invicem ſimiles, ſeu æquales, ratio compoſita dici ſolet unius ſimplicis duplicata, triplicata &c., pro numero ſimilium rationum componentium. Quare *Ratio duplicata dicitur illa, quæ ex duabus: triplicata, quæ ex tribus: quadruplicata, quæ ex quatuor rationibus æqualibus inter ſe multiplicatis conſurgit*; atque ita deinceps.

Corollarium I.

493. Ratio geometrica, quam habet quadratum unius quantitatis ad quadratum alterius, eſt duplicata rationis illius, quam habent ipſæ quantitates ſimplices ad invicem: ratio cuborum triplicata; & ſic de reliquis poteſtatibus, quæ ex æqualium rationum multiplicatione componuntur. Et contra, ratio geometrica, quam habent inter ſe radices quadratæ, cubicæ &c., dicitur ſubduplicata, ſubtriplicata &c. rationis poteſtatum correſpondentium.

Corollarium II.

494. Hinc in omni geometrica progreſſione rationum æqualium, primus terminus ad tertium habere dicitur ratio-

nem

nem duplicatam primi termini ad ſecundum : primus ad quartum habere dicitur rationem triplicatam ; & ſic deinceps. Ratio eſt, quia rationes illæ componuntur (n. 492.) ex omnibus intermediis, quæ æquales ſunt inter ſe.

Corollarium III.

495. Hinc patet, quâ de causâ Euclides rationem compoſitam definiens ex duabus $a : b$, & $c : d$, jubet, ut fiat conſequens primæ rationis b ad novam quantitatem e, uti antecedens ſecundæ rationis c eſt ad ſuum conſequens d; deinde rationem $a : e$ compoſitam vocans ex duabus prædictis ; quam definitionem ex noſtra, quam attulimus n. 486., ſtatim intelliges. Nam ratio $a : e$ componitur ex rationibus $a : b$, & $b : e$. Atqui ratio $b : e = c : d$ ex hypotheſi, Ergò ratio $a : e$ compoſita eſt ex rationibus $a : b$, & $c : d$.

Itaque cum Euclides demonſtrat. lib. 6. prop. 23. æquiangula parallelogramma habere proportionem compoſitam ex duabus rationibus, quas duo latera circa unum angulum unius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, jubet prius, ut duæ illæ rationes laterum continuentur in tribus quantitatibus ; tum demonſtrat eam proportionem parallelogramma inter ſe habere, quam prima quantitas habet ad tertiam.

S PRO-

PROPOSITIO I.

496. Theorema *Duo quævis parallelogramma* ABCD, MNOP *ſive ſimilia ſint, ſive non ſimilia, ſunt inter ſe, uti facta baſis in altitudinem reſpectivè, nimirum ſunt in ratione compoſita baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem* (*n.* 486.)

TAB. XII. Fig. 295. 296. *Demonſtratio.* Nam (n. 263.) parallelogramma ABCD, MNOP æquantur productis BC × AE, & NO × MQ, nimirum, eorum baſis in reſpectivam altitudinem. Ergò ſunt inter ſe, uti hæc producta, ſive in ratione compoſita BC ad NO, & AE ad MQ. Quod erat &c.

Corollarium.

Ergò duo triangula quæcunque BAC, NMO ſunt pariter inter ſe, uti producta BC × AE, NO × MQ, nimirum, eorum baſis in reſpectivam altitudinem. Sunt enim ſemiſſes horum productorum.

PROPOSITIO II.

497 Theorema. *Parallelogramma* ABCD, MNOP, *quæ unum angulum uni habent æqualem, & conſequenter æquiangula ſunt, habent rationem*
Fig. 295. 296. *compoſitam ex rationibus laterum æqualem angulum continentium; nimirum, ſi angulus* B=N, *erit* ABCD : MNOP ::

OP : : AB × BC : MN × NO. Euclid. lib. 6. prop. 23.

Demonstratio. Ab æqualibus angulis A & M demittantur perpendiculares AE, MQ super latera BC, NO æqualibus angulis B & N adjacentia. Triangula AEB, MQN erunt & æquiangula, & similia.

Ergò AE : MQ : : AB : MN.
Atqui BC : NO : : BC : NO.

Ergò multiplicatis respectivè terminis, habebitur AE × BC : MQ × NO : : AB × BC : MN × NO. Jam verò parallelogrammum ABCD = AE × BC, & parallelogrammum MNOP = MQ × NO. Ergò ABCD : MNOP : : AB × BC : MN × NO. Quod erat &c.

Corollarium.

Neque aliter ratiocinaberis de triangulis, quæ sunt semisses parallelogrammorum.

PROPOSITIO III.

498. Theorema. *Parallelogramma similia* ABCD, MNOP *sunt inter se, uti quadrata laterum homologorum,* TAB.
idest, ABCD : MNOP : : $\overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$. XII.
Euclid. lib 6. prop. 19. Fig.

Demonstratio. Ab æqualibus angulis 295.
A & M demittantur perpendiculares A 296.
E, MQ in latera homologa BC, NO.

Triangula AEB, MQN æquiangula, erunt similia ; atque hinc.

$AE : MQ :: AB : MN.$

Atqui per hyp. parallelogramma AB CD, MNOP sunt pariter similia. Ergò

$BC : NO :: AB : MN.$

Multiplicatis itaque inter se antecedentibus, & consequentibus hujus duplicis analogiæ, erit

$AE \times BC : MQ \times NO :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2.$ (n 395.). Est autem $AE \times BC = ABCD$, & $MQ \times NO = MN$ OP [n. 263.

Ergò $ABCD : MNOP :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2.$ Quod erat &c.

Corollarium.

499. Duo triangula sunt pariter inter se, uti quadrata $\overline{AB}^2$, $\overline{MN}^2$, laterum homologorum, seu in ratione duplicata eorundem (n. 493.).

PROPOSITIO IV.

500. Theorema. *Similium polygonorum superficies* ABCDE, MNOP

TAB. XII. Fig. 297. 298.

Q *sunt inter se, uti quadrata* $\overline{AB}^2$, $\overline{MN}^2$ *suorum laterum homologorum.* Euclid. lib. 6. prop. 20.

Demonstratio. A duobus punctis F & R similiter positis respectu duorum late-

laterum homologorum AB, MN, in duobus polygonis ducantur rectæ ad omnes angulos. Quoniam hæc puncta F & R ſunt etiam ſimiliter poſita reſpectu omnium laterum homologorum [n. 460.], triangula AFB, BFC &c. erunt ſimilia triangulis MRN, NRO &c., ſingula ſingulis (n. 451.). Ergò per præced. Corol. erunt inter ſe, ut quadrata laterum homologorum; hoc eſt, quia AB : MN :: BC : NO :: CD : OP &c., triangula invicem comparata, ſingula ſingulis, erunt, ut $\overline{AB}^2$, $\overline{MN}^2$. Ergo, ut omnium antecedentium triangulorum ſumma ad ſummam omnium conſequentium, hoc eſt, polygonum ad polygonum, ita $\overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$. Quod erat &c.

Corollarium I.

501. Ergò duo ſimilia polygona ABCDE, MNOPQ ſunt inter ſe, uti quadrata $\overline{FG}^2$, $\overline{RS}^2$, duarum rectarum, quæ terminata ſint à punctis ſimiliter poſitis reſpectu horum polygonorum.

Nam (n. 455.) AB : MN :: FG : RS.

Corollarium II. TAB. X.

502. Hinc duo polygona ſimilia AB Fig.
CDEF, MNOPQR, quorum tres 275.
anguli eodem modo reſpondent circum- 276.

 ferentiæ

ferentiæ circuli, ſunt inter ſe, uti quadrata radiorum.

Nam ductis radiis GC, SO ad reſpectivos angulos C & O, centra G & S ſunt puncta ſimiliter poſita in duobus polygonis (n. 462.), & vertices angulorum C & O ſunt pariter puncta ſimiliter poſita (n. 454.). Ergò AB: MN :: GC: SO (n. 455.). Atqui per Theor. polygonum ad polygonum eſt, ut $\overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$ Ergò &c. Quod erat &c.

TAB. X. Fig. 277. 278.

Corollarium III.

503. Ergò duo polygona ſimilia ABCDEF, MNOPQR circulis inſcripta, ſunt, ut quadrata radiorum. Habent enim ad minimùm tres angulos reſpondentes circumferentiæ ſuorum circulorum.

Corollarium IV.

504. Similiter duo polygona ſimilia ABCDEFGHI, *abcdefghi*, quæ tribus lateribus homologis duos circulos tangant, erunt proportionalia quadratis radiorum.

TAB. X. Fig. 280. 281.

Nam Ductis radiis KN, *kn* perpendicularibus ad puncta contactuum N, *n*, erunt (n. 453.) puncta N, *n* ſimiliter poſita reſpectu eorundem laterum. Quamobrem (n. 455) AB: *ab*: KN: *kn*. Atqui per Theor. polygona ſimilia

ſunt

ſunt inter ſe uti $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$. Ergò etiam, uti, $\overline{KN}^2 : \overline{kn}^2$. Quod erat &c.

Corollarium V.

505. Ergò duo ſimilia polygona circulis circumſcripta, radiorum quadratis ſunt proportionalia.

Corollarium VI.

506. Circuli ſunt inter ſe, uti quadrata radiorum.

Nam conſiderari poſſunt circuli tanquam polygona regularia ſimilia infinitorum laterum, inſcripta, vel circumſcripta iiſdem circulis, in quos deſinunt.

ELEMENTUM II.

De Quadratis, & Figuris ſimilibus in Triangulo rectangulo invicem comparatis.

DEFINITIONES.

507. Quemadmodum, ſi numerus in ſeipſum ducatur, productum dicitur quadratum, ſeu poteſtas ſecunda, cum numerus ipſe poteſtas prima, ſeu radix dicatur; & ſi quadratum iterum ducatur in ſuum numerum, factum dicitur cubus, ſeu poteſtas tertia: ita, ſi valor rectæ lineæ conſideretur in certo quodam partium determinatarum numero, in quas intelligatur diviſa, quaſque vocamus menſuras, puta pedes, hexapedas &c., hæc recta linea appel-