multiplicentur, vel dividantur: etiam factæ, vel quotæ quantitates proportionales erunt.

Sint $A : 3A :: a : 3a,$
$B : 2B :: b : 2b,$

Ergo I. $A \times B : 3A \times 2B :: a \times b : 3a \times 2b,$

II. $\frac{A}{B} : \frac{3A}{2B} :: \frac{a}{b} : \frac{3a}{2b}.$

Nam in utroque casu, si fiat productum extremarum, & mediarum, reperientur producta constare iisdem quantitatibus inter se multiplicatis, ac proinde esse æqualia; quod esse criterium proportionalitatis quatuor terminorum demonstravimus n. 376. & 377.

Scholion.

Reliquas, quæ usui erunt, proportionum regulas, prout occasio tulerit, exponam.

ELEMENTUM II.

De Lineis proportionaliter sectis, de Triangulis Similibus, ac Lineis ad idem punctum concurrentibus.

DEFINITIONES.

396. *Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos, singulos singulis, æqua-*

les habent, atque etiam latera, quæ circùm æquales angulos exiſtunt, proportionalia,

TAB. VIII. Fig. 225. 226. Sic triangula ABC, PQR ſimilia dicuntur, ſi fuerint, æquiangula, ita ut angulus A angulo P, & B ipſi Q, & C ipſi R æqualis ſit; & pariter latera circa æquales angulos proportionalia habuerint: nimirum, AB : BC :: PQ : QR, & AB : AC :: PQ : PR, & AC : CB :: PR : RQ.

Quòd ſi anguli unius figuræ æquales fuerint angulis alterius, ſinguli ſingulis; at latera circa æquales angulos proportionalia non fuerint, aut contra: non dicentur tales figuræ ſimiles: cujuſmodi ſunt quadratum, & rectangulum oblongum. Nam hæ figuræ habent quidem angulos æquales, utpote rectos; at latera unius, lateribus alterius proportionalia non ſunt.

TAB. VIII. Fig. 213. 214. Hæc eadem definitio convenit quadratis, pentagonis, aliiſque id genus figuris ſimilibus ABCDE, MNOPQ invicem comparatis.

Figurarum ſimilium latera æqualibus angulis adjacentia, vocantur latera homologa, uti AB, MN.

TAB. VIII. Fig. 227.

PROPOSITIO I.

397. Theorema. *Si ad unum trianguli* BAC *latus* BC *ducta fuerit parallela* MN, *hæc proportionaliter ſecabit ipſius*

ipsius trianguli latera AB, AC, *nimirum, erit* AB : AM : : AC : AN. Euclid. lib. 6. prop. 2.

Demonstratio. Ductis enim rectis MC, NB, erunt triangula BMN, CMN super eandem basim MN, & inter easdem parallelas constituta, inter se æqualia; utrique adjiciatur idem triangulum MAN: fiet triangulum BNA = CMA. Atqui hæc duo triangula æqualia habent angulum æqualem, seu communem in A. Ergò [n. 376.] circa æquales angulos habent latera in proportione reciproca, nimirum, AB : AM : : AC : AN. Quod erat &c.

Corollarium I.

398. In eadem hypothesi erit etiam AM : MB : : AN : NC.

Nam ex Th. AB : AM : : AC : AN
& per conv. rat., AB : AB—AM : : AC : AC—AN
hoc est, AB : MB : : AC : NC
& divid., AB—MB : MB : : AC—NC : NC
hoc est, AM : MB : : AN : NC.

Corollarium II.

399. Stante eâdem Theorematis hypothesi habebitur etiam AB : AM : MB : : AC : AN : NC.

Nam per Theor. AB : AM : : AC : AN; & per Corol. I. AM : MB : : AN : NC; tum alternando primam, &

ſecundam analogiam, habebitur AB: AC :: AM: AN,

AM : AN :: MB : NC.

Rationum itaque æqualium (n. 368.) antecedentibus in una ſerie, & conſequentibus in altera ritè diſpoſitis, erit AB : AM : MB :: AC : AN : NC.

Corollarium III.

TAB. VIII. Fig. 228. 400. Si ad unum trianguli BAC latus BC ductæ fuerint plures parallelæ MN, PQ, erunt reliquorum laterum ſegmenta proportionalia, hoc eſt, AB : AM : MB : AP ; PB : PM :: AC : AN : NC : AQ : QC : QN. *Euclid. prop. 2. lib. 6. Corol.*

Quoniam MN ponitur parallela lateri BC, erit per Corol. præced. AB : AM : MB :: AC : AN : NC ; hoc eſt,

AB: AC :: AM : AN :: MB : NC.

Rurſum, quia PQ ponitur parallela lateri BC, erit per idem Corol. AB : AP : PB :: AC : AQ : QC ; hoc eſt,

AB: AC :: AP : AQ :: PB: QC.

Cum autem rationes omnes hactenus inventæ æquales ſint eidem rationi AB: AC, hinc erit

AM : AN :: AP : AQ.

Atqui (n. 394.) AM: AN :: AM —AP : AN—AQ ; hoc eſt, AM : AN :: PM : QN.

Quare, cum ratio AM : AN ſit jam in ſerie rationum æqualium ipſi AB : A

C,

C, etiam ratio PM : QN poterit in eadem ſerie collocari. Erit itaque AB : AC :: AM : AN :: MB : NC :: AP : AQ :: PB : QC :: PM ; QN, ſive AB : AM : MB : AP : PB : PM :: AC : AN : NC : AQ : QC : QN.

PROPOSITIO II.

401. Theorema. *Si recta* AD *angulum* BAC *bifariam ſecans, etiam ſecet baſim* BC, *habebunt baſis ſegmenta* BD, DC, *eandem proportionem, quam reliqua latera* AB, AC : *ſive* BD : DC :: AB : AC. Euclid, lib. 6. prop. 3. TAB. VIII. Fig. 229.

Demonſtratio. Latus AC producatur quantitate AE = AB ; jungatúrque EB. Trianguli æquicruris anguli E & ABE ſunt æquales. Quia igitur angulus externus BAC duobus internis E & ABE æqualis eſt [n. 221.] angulus DAC, qui per hypotheſim dimidius eſt totius anguli BAC, æquabitur angulo E. Ergò [n. 114.] DA, BE ſunt parallelæ, atque hinc (n. 397.) BD : DC :: AE : AC ; & quia AE = AB, erit BD : DC :: AB : AC. Quod erat &c.

PROPOSITIO III.

402. Problema. *Datam rectam* AC *ſimiliter ſecare, ut altera data* AB *fuerit ſecta in* P & M. Euclid. lib. 6. prop. 10. TAB. VIII. Fig. 228.

Reſolutio. In vertice communi A efficiant duæ rectæ angulum quemvis ; & extre-

extremitates ſectæ & inſectæ jungat recta BC: huic ex punctis P & M duc parallelas PQ, MN ad rectam ſecandam AC occurrentes in Q & N. Dico factum.

Demonſtratio. Patet ex n. 400. Nam AB : AM : MB : AP : PB : PM :: AC : AN : NC : AQ : QC : QN; & conſequenter AP : PM : MB :: AQ : QN : PC. Quod erat &c.

PROPOSITIO IV.

TAB. VIII. Fig. 228. 403. Problema. *Datam rectam* AC *in quotvis æquales partes ſecare.* Euclid. lib. 6. prop. 10. Schol.

Reſolutio. Cum recta ſecanda AC faciat quemvis angulum in vertice A recta altera indefinita AB; ex qua circino cape tot æquales partes AP, PM, MB, in quot ſecare placuerit datam rectam AC: duc rectam BC, eique parallelas PQ, MN. Dico factum.

Demonſtratio. Patet ex n. 400. Nam AP : PM : MB :: AQ : QN : NC. Quod erat &c.

PROPOSITIO V.

TAB. VIII. Fig. 230. 404. Problema. *Datis tribus rectis* ab, am, ac *quartam proportionalem invenire.* Euclid. lib. 6. prop. 12.

Reſolutio. Fiat angulus quivis XAZ; tum ſuper latus AX à vertice A ſumantur

tur duæ partes AB, AM æquales duabus primis proportionalibus *ab*, *am*; & rurſum ſuper ſecundum latus AZ accipiatur pars AC æqualis tertiæ proportionali *ac* junganturque extremitates B & C primæ, ac tertiæ proportionalis per rectam BC, cui à puncto M ducatur parallela MN. Dico rectam AN eſſe quartam proportionalem quæſitam.

Demonſtratio, Nam AB : AM :: AC : AN (n. 397.) Quod erat &c.

Corollarium I.

405. Si tribus datis rectis *am*, *mb*, *an* quærenda ſit quarta proportionalis : diſponantur tres datæ rectæ ſuper lateribus anguli XAZ, ut in fig. præced., jungatúrque MN, cui parallela fiat BC, occurrens in C lateri AZ indefinitè producto. Dico NC eſſe quartam proportionalem quæſitam. Fig. 230.

Nam [n. 398.] AM : MB :: AN : NC.

Corollarium II.

406. Eadem conſtructio adhibenda, ſi duabus AB, AM datis rectis tertia proportionalis ſit invenienda; perinde enim eſt quartam proportionalem tribus datis AB, AM, AM quærere.

PROSITIO VI.

407. Theorema. *Si latera* AB, AC *trianguli* BAC *secta fuerint proportio-*
TAB. *naliter, ita ut* AB : AM :: AC : AN,
VIII. *secans* MN *erit parallela basi* BC. Eu-
Fig. clid. lib. 6. prop. 2.
227. *Demonstratio*, Ducantur rectæ NB, MC. Triangula BNA, CMA sunt æqualia (n. 376.); nam & habent angulum communem in A, & latera circa eundem sunt reciproca, nimirum, AB : AM :: AC : AN. Subducatur utrinque triangulum MAN : fiet triangulum BMN = CMN, & utrumque super eadem basi MN. Ergò (n. 259.) rectæ MN, BC sunt parallelæ. Quod erat. &c.

Corollarium I.

408. Quoniam recta MN est parallela basi BC, si AB : AM :: AC : AN : erit quoque eadem secans MN parallela basi BC,

I. Si AM : AB :: AN : AC,
II. Si MB : AM :: NC : AN,
III. Si AB : MB :: AC : NC.

Nam ex prima analogia omnes hujusmodi proportionalium terminorum permutationes inferuntur per regulas proportionum.

TAB.
VIII. *Corollarium II.*
Fig.
231.
232.

409. Quadrilateri ABDC si latera secentur in punctis M, N, P, hac lege, ut AB : AC : DB : DC :: AM : AN : DP

DP : DQ, quatuor rectæ, quæ in quatuor punctis junguntur, parallelogrammum efficient MPQN.

Nam ductis diagonalibus AD, BC,

I. In triangulo BAC, quia AB : AN : : : AC : AN, erit MN parallela ipsi BC [n. 407.]. Et similiter in triangulo BDC, quia DB : DP : : DC : DQ, erit PQ parallela ipsi BC. Ergò MN, PQ sunt invicem parallelæ.

II. In triangulo ABD, quia AB : AM : : DB : DP, erit MP parallela ipsi AD [n. 407.]. Et in triangulo ACD, quia AC : AN : : DC : DQ, erit NQ parallela eidem AD. Ergò MP, NQ sunt invicem parallelæ. Ergò quadrilaterum MPQN parallelogrammum est.

PROPOSITIO VII.

410. Theorema. *Triangula* BAC, CMN *sibi mutuò æquiangula, sunt similia: hoc est, etiam latera æqualibus angulis opposita, habent proportionalia.* Euclid. lib. 6. prop. 4. Tab. VIII. Fig. 233.

Demonstratio. Disponantur triangula in ea positione, ut latera homologa BC, NC unam rectam lineam efficiant, producantúrque latera BA, NM, donec concurrant in puncto O. Quoniam igitur angulus ACB = MNC per hyp., erunt rectæ AC, ON parallelæ, & similiter, quia per hyp. angulus ABC = MCN, rectæ OB, MC erunt parallelæ.

lelæ. Ergò OC parallelogrammum eſt, cujus latera oppoſita ſunt æqualia. Cum autem AC parallela ſit ipſi ON, erit BA : AO :: BC : CN.

Et rurſum, quia MC parallela eſt ipſi OB, erit

BC:CN :: OM: MN.

Quare in hiſce duabus analogiis ſubſtituendo CM ipſi AO, & AC ipſi OM, fiet

BA: CM:: BC: CN:: AC: MN: hoc eſt, BA: BC: AC:: CM: CN: MN. Ergò triangula ſibi mutuò æquiangula, ſunt ſimilia. Quod erat &c.

Corollarium I.

411. Duo triangula iſoſcelia ſunt ſimilia, ſi angulorum ad baſim unum uni æqualem habeant, vel, ſi angulum à lateribus æqualibus comprehenſum habeant æqualem.

Nam ex Elem. Lib. I. triangula in utroque caſu erunt æquiangula.

Corollarium II.

TAB. VIII. Fig. 225. 226.

412. Duo triangula ABC, PQR ſunt ſimilia, ſi latera ſingula ſingulis fuerint parallela; quippe quæ æquiangula eſſe demonſtratur ex theoria parallelarum.

Corollarium III.

TAB. VIII. Fig. 234.

413. Duo triangula ABC, PQR ſunt ſimilia, ſi latera unius perpendicularia ſint lateribus alterius, ſingula ſingulis.

Nam-

Nam, si per quadrantem integræ revolutionis convertatur triangulum PQR, hujus latera evadent parallela lateribus trianguli ABC; & consequenter triangula erunt æquiangula, & similia.

PROPOSITIO VIII.

414. Theorema. *Si triangula* ABC, AMN *habeant angulum inter duo latera proportionalia æqualem, vel communem* A, *triangula erunt similia.* Euclid. lib. 6. prop. 6. TAB. VIII. Fig. 228.

Demonstratio. Quia AB : AM :: AC : AN, erit recta MN parallela basi BC (n. 407.); & consequenter tres anguli unius æquales erunt tribus alterius, singuli singulis; hinc (n. 410.) duo triangula BAC, MAN sunt similia. Quod erat &c.

PROPOSITIO IX.

415. Theorema. *Triangula* ABC, PQR *sunt similia, si omnia latera habeant sibi mutuò proportionalia : hoc est, si* AB : AC : BC :: PQ : PR : QR, *sive si* AB : PQ :: AC : PR :: BC : QR. Euclid. lib, 6. prop. 5. TAB. VIII. Fig. 235.

Demonstratio. Minoris trianguli duo latera PQ, PR producantur, donec lateribus homologis AB, AC fiant æqualia, nimirum, PM = AB, & PN = AC; ducatúrqne MN. Itaque

I. Quia per hyp. AB : PQ :: AC : PR, erit PM : PQ :: PN ; PR; duo er-

ergò triangula PQR, PMN erunt similia (n. 414.).

II. Atqui triangulum ABC = triangulo PMN; nam per hyp. BC: QR:: AB: PQ:: PM: PQ; & propter similitudinem triangulorum PMN, PQR, PM: PQ:: MN: QR. Ergò BC: QR :: MN: QR; & consequenter BC = MN. Est etiam per Constructionem AB = PM, AC = PN. Quare triangulum PMN = ABC. Ergò duo triangula ABC, PQR sunt pariter similia. Quod erat, &c,

PROPOSITIO X.

416. Theorema. *Si ab extremitatibus* B
TAB. *&* E, *& ab aliis diversis punctis* C *&* D
VIII. *ejusdem rectæ* BE *ducantur ad idem*
Fig. *punctum* A *rectæ indefinitæ* AB, AC,
236. AD, AE: *quævis recta* MP *parallela*
237. *ipsi* BE, *hisce lineis intercepta dividetur in partes proportionales partibus rectæ* BE: *hoc est*,

BC: CD: DE :: MN: NO: OP

Demonstratio. Triangula BAC, MAN; CAD, NAO; DAE, OAP, quæ sunt similia binatim dabunt.

BC: MN :: AC: AN

AC: AN :: CD: NO :: AD: AO

AD: AO :: DE: OP

Ergò BC: MN :: CD: NO :: DE: OP

hoc est, BC: CD: DE :: MN: NO: OP.

Quod erat &c.

Co-

Corollarium.

417. Ex hoc Theoremate habes methodum expeditam secandi unam, aut plures lineas in partes datis proportionales: uti per te ipsum intelliges ex apposito schemate. TAB. VIII. Fig. 238.

PROPOSITIO XI.

418. Theorema. *Si à duobus punctis* P *&* Q *ejusdem rectæ* PQ *discedant duæ parallelæ* PO, QR *inæquales, & similiter duæ aliæ parallelæ* PM, QN *proportionales duabus primis, hoc est,* PM : QN :: PO : QR : *duæ rectæ* OR, MN *ductæ per extremitates harum linearum, quæ binatim sunt invicem parallelæ, productæ, si opus fuerit, necessariò concurrent in idem punctum* S *cum recta* PQ, *pariter, si opus sit, producta.* TAB. VIII. Fig. 239. 240.

Demonstratio. Pone rectam OR occurrere rectæ PQ in S, & rectam MN occurrere in T. Dico duo puncta S&T in unicum coire. Nam, quia triangula MPT, NQT sunt similia, erit

$$PT : QT :: PM : QN.$$

Est autem per hyp. PM : QN :: PO : QR. & propter similitudinem triangulorum OPS, RQS,

$$PO : QR :: PS : QS$$

Ergò $\quad PT : QT :: PS : QS$

& div. $PT - QT : QT :: PS - QS : QS$

hoc

hoc eſt, PQ : QT :: PQ : QS
Ergò QT = QS; & conſequenter punctum T coincidit cum S.

Vel in alia figurarum ſequentium ſe-
rie, eandem proportionem PT : QT ::
Fig. PS : QS : transformabis componendo,
241. PT + QT : QT :: PS + QS : QS,
242. ideſt, PQ : QT :: PQ : QS.
243. Ergò QT = QS; adeoque punctum
244. T coincidit cum puncto S.

Quamobrem in omni caſu puncta T & S coibunt. Quod erat &c.

Hinc reſolutio ſequentis Problematis.

PROPOSITIO XII.

419. Problema. *A puncto dato* P *rectam ducere* PQ, *quæ tranſeat per punctum concurſus duarum aliarum rectarum, quando punctum concurſus magis diſtat, quàm facilè determinari poſſit.*

TAB. *Reſolutio.* Per datum punctum P du-
VIII. catur utcumque recta POM, quæ datis
Fig. rectis AB, CD occurrat in O & M;
245. huic à quovis puncto parallela ducatur
246. QRN, occurrens iiſdem datis rectis in
247. punctis R & N; tum ſuper recta MO
248. à duabus rectis AB, CD intercepta,
conſtruatur triangulum æquilaterum MSO. Dein alterius parallelæ QRN portio NR à datis rectis intercepta transferatur in S*n*, & S*r* ſuper lateribus SM, SO trianguli æquilateri, producțis, ſi opus fuerit; ducatúrque *n r*. Tri-

angu-

angulum nSr erit æquilaterum (n. 414.) & conſequenter $nr = Sn = NR$ ex Conſtr. Denique à vertice S trianguli æquilateri per datum punctum P ducatur SP, quæ producta, ſi opus fuerit, ſecabit in q rectam nr, pariter productam, ſi opus fuerit; tum portio qr transferatur in QR, ſuper recta QRN; & à puncto Q ſic determinato, per datum punctum P ducta recta PQ neceſſariò dirigetur verſus punctum concurſus duarum rectarum AB, CD.

Demonſtratio. Nam per Conſtructionem erit PM : PO :: $qn : qr$ (n. 416.) Atqui rurſum per Conſtr. QR $= qr$. Itaque, ſi duæ iſtæ partes æquales ſubducantur ab æqualibus NR, nr, reſiduum QN $= qn$. Quamobrem ſubſtitutis QN, QR loco partium qn, qr in priori analogia, habebitur PM : PO :: QN : QR. Ergo tres rectæ AB, CD, PQ concurrent ad idem punctum (n. 418.) Quod erat &c.

PRAXIS GEOMETRICA

ELEMENTI II. LIB. II.

Ab hiſce Theorematis, numero quidem paucis, ſed uſu ampliſſimis, complurium inſtrumentorum inventio profecta eſt, quorum aliqua hoc loco, præſertim celebriora attingam, & eorum deſcriptionem, uſumque tradam.

Itaque I. agam de Circino, út vocant, proportionis, quo utimur ad cognoſcendam proportionem lineæ ad lineam, plani ad planūm, ſolidi ad ſolidum; quemque jure dixeris totius Geometriæ compendium.

II. De Scala geometrica, quâ perpetuò utuntur Geometræ, præſertim ubi Ichnographiæ vel ampliandæ, vel contrahendæ dant operam.

Problema I.

420. *Circinum proportionis conſtruere, eíque lineam partium æqualium, quam vocant arithmeticam, inſcribere.*

Conſtruantur ex cupro, ligno, aliáve materiâ ſolidà duæ regulæ AB, AC, ut in tabula ſequenti, quæ circa commune centrum ita circumvolvi poſſint, ut quemcunque angulum comprehendant. Regulæ utriuſque longitudo terminata non eſt, uti & latitudo, quæ tanta eſſe debet, quanta opus eſt, ut plures lineæ à centro protenſæ inſcribi poſſint, & earum diviſiones facilè diſtingui. Harum linearum primam conſidero, quæ in utraque ſuperficie regularum inſcripta eſt ſecundùm earum longitudinem, vocatúrque linea partium æqualium, ſeu arithmetica. Hæc pro minoribus circinis in 100 partes æquales, pro majoribus in 200 dividitur.

TAB. IX. Fig. 249.

Debet & haberi circinus communis, cujus

cujus cuſpides ſint acutiſſimæ, quibus exactè diſtantiæ omnium punctorum inſtrumenti transferantur, & inter ſe comparentur.

Problema II.

421. *Fundamentum circini proportionum exponere.*

Artificium omne pendet ex Prop. 7. hujus Elem. n. 410, hoc eſt, ex ſimilitudine triangulorum, quæ huic inſtrumento inſcribi intelliguntur. TAB. XI. Fig. 250.

Sint ergò duæ lineæ AB, AC quemcunque angulum comprehendentes, & æqualiter diviſæ, ita ut diviſiones unius ſint omninò æquales diviſionibus alterius. Per diviſionum puncta, quæ mutuò reſpondent, aut ducantur, aut duci intelligantur lineæ tranſverſales DE, FG, HI.

Conſtat I. triangula ADE, AFG, AHI eſſe iſoſcelia ex ſuppoſitione, nimirum, AE = AD, AG = AF &c., & conſequenter angulos ad baſes eſſe inter ſe æquales.

II. Cum angulus A ſit communis, erunt anguli ADE, AFG &c. æquales, & conſequenter lineæ DE, FG &c. parallelæ.

III. Cum autem omnes lineæ tranſverſales ſint ſimiliter parallelæ, æquiangula erunt triangula; & conſequenter [n. 410.] AE : AG : : DE : FG. Ergò, ut linea AE quota pars eſt lineæ AG, ita linea transverſalis DE erit ſimilis pars lineæ FG. Et ſic de reliquis.

Corollarium.

422. Si lineæ AB, AC diviſæ ſint ſecundùm aliquam proportionem, etiam rectæ transverſales eandem proportionem obſervabunt, quemcunque tandem angulum lineæ AB, AC comprehendant. Cum igitur regulæ, ex quibus componitur inſtrumentum, ita compingantur, ut diduci, aut coarctari, hoc eſt, omnem angulum formare poſſint: hinc infinitas habes in eodem inſtrumento ſeries linearum tranſverſalium æquivalenter inſcriptas, quæ eandem inter ſe proportionem obſervabunt, ac lineæ re ipsâ regulis inſcriptæ. Sicuti ergò latera circini diviſa ſunt in partes æquales, ita etiam habes innumeras tranſverſales diviſas in partes æquales ab aliis tranſverſalibus; eádemque ratiocinatio accom̃odabitur aliis linearum ſpeciebus, quas inſcriptas vides in eodem inſtrumento, quarum uſum ſuo loco exponemus.

Problema III.

423. *Datam rectam in quotlibet partes æquales dividere, puta, ſeptem.*

Reſolutio. I. Aſſumatur pro libito numerus, qui exactè per 7. dividi poſſit, quemadmodum 35, 70, 140.

II. Tum circino communi cape intervallum datæ lineæ; atque ita aperiatur circinus proportionis, ut hæc diſtantia accommodari utrique brachio poſſit ad aſſumptum numerum, puta, 140 & 140. TAB. IX. Fig. 249.

III. Stante hâc inſtrumenti poſitione, accipiatur diſtantia transverſalis inter 20 & 20. Hæc erit ſeptima pars propoſitæ lineæ.

Vel, ſi longitudo datæ rectæ accommodata fuiſſet inter 70 & 70, diſtantia inter 10 & 10 eſſet ſeptima pars quæſita.

Demonſtratio conſequitur ex ſimilitudine triangulorum.

Corollarium.

424. Quamvis linea, cujus ſeptima pars quæritur, ducta eſſet in ſolo, atque adeò in inſtrumentum transferri non poſſet, ejus tamen ſeptima pars ſic poſſet definiri. Ut, ſi linea 140 pedum proponeretur, aſſume circino communi 140. partes in linea arithmetica partium æqualium: hoc intervallum transfer hinc inde in notas numeri, qui per 7 dividi poſſit, puta, à 70 in 70: intervallum à 10 in 10 circino acceptum, & translatum in lineam partium æqualium, exhibebit 20 numerum pedum, quem continet ſeptima pars lineæ propoſitæ.

Problema IV.

425. *Tribus datis rectis* AB, BC, AD *quartam proportionalem* DE *invenire.*

TAB. IX. Fig. 251. *Resolutio.* Linea AB transferatur à centro A circini in lineam partium æqualium; tum ita aperiatur instrumentum, ut intervallum secundæ lineæ constituatur in BC transversim; deinde in eandem lineam partium æqualium statue mensuram tertiæ AD. Dico intervallum DE æquale esse quartæ proportionali quæsitæ.

Demonstratio. Nam AB : BC :: AD : DE. Quod erat &c.

Problema V.

426. *Duabus datis rectis* AB, BC *tertiam proportionalem invenire.*

TAB. IX. Fig. 252. *Resolutio.* In eadem figura ponantur æquales BC & AD, erit transversalis DE tertia proportionalis duabus AB, BC.

Problema VI.

427. *Circino proportionis lineam chordarum inscribere,*

TAB. IX. Fig. 253. 254. *Resolutio.* A centro circini ad extremitatem regularum inscribantur hinc atque inde duæ lineæ AE, AF, quæ bifariam dividantur in K & L; deinde in charta, aut tabellâ separatâ, semidiametro AK, aut AL semicirculus descriſcribatur, & in gradus 180 dividatur; tum ab eodem puncto A aut ducantur, aut ductæ intelligantur ſubtenſæ AI, AO, AS, nempe unius, duorum, trium, quatuor graduum &c., quæ tranſferantur ſucceſſivè in regulas AE, AF, initio ſemper facto à puncto A centro circini, ita ut ſubtenſa graduum 60, utpote æqualis ſemediametro, ad puncta K & L, 60 & 60 perveniat. Hâc methodo habebis lineam chordarum inſtrumento inſcriptam.

Vel deſcribatur ſemicirculus diviſus in 180 gradus, cujus diameter ſit longitudo aſſumpta lineæ chordarum, tum facto centro in extremitate diametri, & lineæ chordarum unâ eàdemque operà transferantur chordæ, ac diviſiones peragantur, utì factum vides in appoſito ſchemate. Tab. IX. Fig. 255.

Problema VII.

428. *In dato puncto A rectæ AB angulum efficere graduum 30.*

Reſolutio. I. Facto centro in dato puncto A, intervallo quovis deſcribatur arcus EF; dein ita aperiatur inſtrumentum, ut intervallum aſſumptum AE aptetur inter 60 & 60. Stante hâc inſtrumenti poſitione accipiatur circino communi diſtantia inter 30 & 30, quæ transferatur in arcum EF, à puncto E ad G; ducatúrque AG. Dico Tab. IX. Fig. 256. 253.

chordam EG, & arcum EOG, & angulum EAG esse graduum 30, uti propositum fuerat.

Demonstratio. Duo triangula ABC, AKL sunt similia. Ergò AB : AK :: BC : KL; & consequenter, si AK sit radius circuli, seu chorda 60 graduum, AB est chorda 30 graduum; ac præterea, si KL sit radius, BC est chorda graduum 30. Quod erat &c.

Problema VIII.

429. *Circinum proportionis ita aperire, ut lineæ chordarum angulum determinatum, puta, 30 graduum comprehendant.*

Resolutio. Circino communi assumatur in instrumento chorda 30 graduum, quæ transferatur à 60 in 60. Dico lineas chordarum comprehendere angulum graduum 30.

Demonstratio. Nam per n. 427. chorda graduum 60 æqualis est semidiametro circuli, cui omnes chordæ conveniunt. Ponatur radio quovis hic circulus descriptus, in eúmque transferri chordam 30 graduum; perspicuum est duas illius circuli diametros per extremitatem chordæ 30 graduum ductas comprehendere angulum 30 graduum. Applicatur autem chorda huic circulo, dum transfertur à 60 in 60. Ergò translatâ chordâ 30 graduum à 60 in 60, lineæ chor-

chordarum angulum 30 graduum comprehendunt. Quod erat &c.

Corollarium.

430. Eadem methodus adhibenda eſt, dum proponitur ita aperiendus circinus proportionis, ut lineæ arithmeticæ, ſeu partium æqualium angulum efficiant transferendo chordam 30 graduum à puncto 100 unius lateris in punctum 100 alterius lateris.

Eodem modo operaberis circa lineam planorum, & ſolidorum, de quibus alibi dicendum erit.

Problema IX.

431. *Aperto circino proportionis invenire angulum, quem linea chordarum, aut arithmetica comprehendat.*

Sit primò inveniendus angulus, quem lineæ chordarum inſtrumento notatæ comprehendunt. Extende pedes circini communis à puncto 60 unius brachii in punctum 60 alterius, eamque diſtantiam transfer in lineam chordarum, incipiendo à centro: nota numeri, ad quem alter pes circini proveniet, indicabit numerum graduum illius anguli.

Eâdem praxi determinabis angulum, quem lineæ partium æqualium comprehendunt, ſi nempe diſtantiam puncti medii unius lineæ, à puncto medio alterius lineæ transferas in lineam partium æqualium, incipiendo à centro; nam alter pes circini cadet in notam numeri indicantem quot gradus contineat ille angulus.

Eodem modo operaberis circa lineas planorum, & solidorum, de quibus alibi.

Problema X.

432. *Determinare, quot graduum sit datus angulus* BAG.

TAB. IX. Fig. 256. 253. I. Si angulus sit notatus in charta, quolibet intervallo AE fiat arcus EOG, eádemque distantia transferatur à 60 in 60; tum circinus communis ad intervallum EG extensus, applicetur circino proportionali, ita ut cuspis utraque conveniat duabus numerorum notis similibus, puta, 30 & 30, experiendo scilicet cui divisioni aptetur. Perspicuum est angulum BAC fore graduum 30, si chorda EG æqualis sit rectæ BC, hoc est intervallo inter 30 & 30.

II. Si angulus propositus comprehendatur à duabus lineis cogitatione tantùm intellectis, ut in solo, vel in aëre, necesse est primò, ut singulis regulis instrumenti duæ infigantur dioptræ, per quas collineare liceat, atque hâc ratione instrumentum idoneum fiat metiendæ horum angulorum quantitati; dein collocato circini centro in linearum concursu, si per ejus dioptras respicias duo signa in lineis angulum propositum formantimantibus posita, in hac positione apertus erit circinus secundùm talem angulum. Quare, si intervallum à 60 in 60 circino communi acceptum transferas in lineam chordarum, incipiendo à centro, habebis quantitatem illius anguli.

Corollarium.

Hinc cognita etiam quantitate graduum, puta, 50, alicujus arcus circuli A B, invenietur ejusdem radius A C. TAB. IX. Fig. 257.

Nempe circinus proportionis ita aperiatur, ut chorda A B dati arcus accommodari possit transversim inter 50 & 50: distantia inter 60 & 60 dabit radium quæsitum.

Problema XI.

433. *Circino proportionis lineam polygonorum inscribere,*

Polygonorum linea eo fine potissimùm inscribitur circino proportionis, ut datus circulus in quotlibet partes æquales dividatur, eídemque polygona regularia inscribantur, à triangulo ad duodecagonum, quæ majoris sunt usûs.

Itaque ad invenienda latera omnia polygonorum usui est linea chordarum. Hæc autem inventio facilis est, si habemus angulum centri cujuslibet polygoni. Hunc autem reperiemus, dividendo

360 per numerum laterum illius polygoni; puta ſi dividas 360 per 5, habebis gradus 72 pro angulo centri; ideóque ſubtenſa, ſeu chorda graduum 72, eſt latus pentagoni circulo inſcripti, cujus ſemediameter æqualis eſt chordæ graduum 60. Quare vides in ipſa linea chordarum haberi latera omnium polygonorum, non ſolùm à triangulo æquilatero ad duodecagonum, ſed etiam reliquorum.

Triangulum ſubtendit chordam graduum 120, quadratum 90, pentagonum 72, hexagonum 60, heptagonum $51 \frac{3}{7}$, octogonum 45, nonagonum 40, decagonum 36, undecagonum $32 \frac{8}{11}$, duodecagonum 30.

Hæc linea continens certum numerum laterum polygonorum regularium in eodem circulo, ſeparatim inſcribitur circino proportionis, ſumpto initio à centro ejuſdem. Quia verò latera polygonorum regularium eidem circulo inſcriptorum eò magis diminuuntur, quò plura ſunt polygoni latera, hinc latus trianguli eſt omnium maximum, æquatúrque longitudini totius lineæ polygonorum; huic proximum eſt latus quadrati, dein latus pentagoni &c.

Problema XII.

434. *Dato circulo* H, *invenire latus cujuſcunque polygoni regularis in eo inſcribendi.* *Reſo-*

Resolutio. Oporteat dato circulo octogonum inscribere. Semediametrum HI dati circuli circino communi acceptum transfer in lineam polygonorum à B in C, nimirum, à 6 in 6: distantia transversalis inter 8 & 8, hoc est, inter F & G, erit latus octogoni dato circulo H inscribendi. Atque ita de reliquis. TAB. IV. Fig. 258. 259.

Demonstratio eadem semper est. Nam duo triangula ABC, AFG sunt æquiangula, & similia. Quare AB: AF :: BC: FG. Sicuti ergò AF latus exhibet octogoni circulo inscripti, cujus radius est AB per constructionem lineæ polygonorum: ita FG latus est alterius octogoni circulo inscripti, cujus radius sit BC. Nam lineæ transversales, seu bases eandem rationem habent ac latera.

Scholion.

Si proposita semidiameter major esset, quàm ut in circinum proportionis transferri posset inter 6 & 6, accipienda erit ejusdem semissis, vel tertia pars, vel quarta &c.; quo facto, duplum, triplum, quadruplum lineæ inventæ erit latus polygoni quæsiti.

Problema XIII.

435. *Super data recta* KL, *polygonum regulare, puta, octogonum describere.*

Reso-

Reſolutio, Datam rectam KL circino
Tab. communi acceptam transfer in circinum
IX. proportionis inter 8 & 8; dein ſump-
Fig. to intervallo BC, hoc eſt, ex 6 in 6,
258. ab extremitatibus K & L agantur duo
259. arcus ſe ſecantes in H; tum centro H radio HL deſcribatur circulus, Hic circumſcribat octogonum regulare dati lateris KL.

Problema XIV.

Tab. 436. *Scalam geometricam ſimplicem*
VIII. *conſtruere.*

Fig. Scalam vocant Geometræ lineam re-
260. ctam in partes ſectam progreſſionis decuplæ. Uſum habet inſignem non ſolùm in Geometria practica, ſed in Architectura civili, & militari, & in omni Matheſi mixta.

Eſto linea definita ABD ex qua à puncto B abſcindantur 10 æquales particulæ B 1; 1, 2; 2, 3 &c. uſque ad A; quæ, quò majores, vel minores erunt, eò tota ſcala erit major, minórve,

Deinde totum intervallum AB particularum 10 circino acceptum tranſcribatur, quoties libuerit, in rectam indefinitam AF, nimirum, ex B in C, ex C in D &c. Hæc erit ſcala, quæ petebatur.

In qua, ſi velis particulam B 1 repræſentare pedem unum, B 2 pedes duos,

duos, B 3 tres &c., repræſentabit BA pedes 10, CA pedes 20, DA pedes 30. Si autem velis B 1 accipere pro decempeda, hoc eſt, pro 10 pedibus, B 2 pro 20 pedibus &c., tunc BA referet pedes 100, CA pedes 200, & ſic deinceps.

Itaque, ſi cupiam unicâ circini aperturâ ſumere intervallum partium, puta, 27: ex D in B ſunt pedes 20; ex B in 7 ſunt pedes 7. Circini igitur crure uno fixo in D, & altero extenſo uſque ad 7: habes lineam D 7 partium 27.

Eodem modo operandum erit, ſi cupias intervallum pedum 280. Tunc enim DB referet partes 200, & B 8, partes 80, ac proinde D 8 partes 280.

Scholion.

Sed quoniam ſcala hujuſmodi ſolùm poteſt exhibere partium decades, & unitates, aut centenas, & decades, aut millia, & centenas, hoc eſt, duos tantùm gradus progreſſionis decuplæ: aliam practici Geometræ excogitârunt, quæ tres gradus progreſſionis decuplæ contineat nimirum, millenas, centenas, decades; vel centenas, decades, unitates; vel decades, unitates, & unitatis decimas.

Problema XV.

437. *Scalam geometricam exactiorem conſtruere.*

COR-

Conſtruatur, ut ſupra, ſcala ſimplex AF; & in A excitetur perpendicularis AC arbitrariæ longitudinis, in qua ſignentur 10 æquales particulæ ex A in C, ſive eæ æquales ſint particulis B 1, B 2, ſive non.

TAB. VIII. Fig. 261.

Tum ex termino 9 particulæ A 9 ducatur 9 C, ut conſtituatur triangulum AC 9, cujus ope invenientur partes decimæ ipſius A 9.

Deinde per ſingula diviſionum puncta rectæ AC, ducantur parallelæ ad AB, quarum poſtrema eſt CDL; & à ſingulis diviſionum punctis ipſius rectæ AF, nimirum, à punctis B, E, F excitentur totidem perpendiculares BD, FL &c.

Denique puncta 10 & 9, 9 & 8, 8 & 7 &c. lineis tranſverſis connectantur, quæ invicem erunt parallelæ. Quibus peractis, abſoluta eſt ſcala exhibens tres gradus progreſſionis decuplæ.

Nam lineolæ interceptæ in triangulo AC 9 ſunt partes decimæ ipſarum A 9, 9 & 8 &c; quæ rurſum decimæ ſunt ipſarum AB, BE &c. Quod facilè demonſtratur ex triangulorum ſimilium indole in hunc modum.

Quoniam recta linea 6 & 6 per Conſtructionem eſt parallela ipſi A 9, erit (n. 397.), ut A 9 ad 6 & 6, ita AC ad 6 C. Atqui rurſum per Conſtr., quarum partium A C eſt 10, earum 6

C eſt

C est 4. Ergò etiam, quarum partium A 9 est 10, earum recta 6 & 6 est 4: hoc est, quatuor decimæ ipsius A 9.

Eodem modo ostendam rectam 7 & 7 esse tres decimas, rectam 8 & 8 duas decimas, ac tandem 9 & 9 esse unam decimam rectæ A 9; atque ita porro de aliis interceptis lineis.

Itaque in hac scala, si in triangulo A C 9 intercepta prima 9 & 9 supponatur pro unitate quamlibet mensuram repræsentate, uti pedem unum: tunc intercepta secunda erit 2, tertia erit 3; & sic deinceps usque ad A 9, quæ erit 10; A 8 erit 20, AB 100, AE 200 &c.

Quòd si in eodem triangulo AC 9 intercepta prima 9 & 9 ponatur pro 1 decimâ unitatis quamlibet mensuram repræsentantis, tunc intercepta secunda erit 2 decimæ, tertia 3 decimæ, & sic deinceps; A 9 verò erit 1, A 8, 2, A B, 10, & sic deinceps.

Idem dicendum de triangulo BDI in partem contrariam posito, ut instrumenti usus commodior sit.

Scholion.

Quemadmodum hic linea exigua A 9 *vel* D I *in* 10 *partes æquales dividitur; ita eadem in quotcumque alias eodem artificio dividi potest, Neque opus est, ut angulus* A *sit rectus, sed idem obliquus esse potest.*

Usum hujus instrumenti ostendent Praxes sequentes.

Praxis I.

438. *Tres gradus proportionis decuplæ, 145 ex scala desumere unâ circini aperturâ, hoc est, unam centenam, 4 decades, 5 unitates.*

In triangulo DBI ex interceptis lineolis à vertice B quære quintam lineam MN, quæ dabit 5 unitates; tum in MN continuata versùs K numera 4 decades, seu 40 ex M usque in K; rursum ex N usque in I accipe unam centenam; denique circini pede uno fixo in I, alterum extende usque ad K. Recta, seu intervallum IK continet partes scalæ 145.

Eodem modo fuisset operandum, si quæsitæ forent partes 14 & 5 decimæ.

Praxis II.

439. *Quot partes scalæ recta quævis X in charta descripta contineat, invenire.*

TAB. VIII. Fig. 261. Accipiatur circino quantitas datæ rectæ X, quæ, si major sit, quàm IN, vel ON, eligatur ex parallelis EI, FL &c. recta illa, cujus distantia à BD sit minor proximè, quàm data X; ea sit FL. Deinde in recta FL eligatur intersectio talis, puta, O, ut uno circini crure posito in O, alterum etiam incidat in aliquam parallelæ O 5 intersectionem, puta, in K; quo præstito, nota erit recta X.

Nam

Nam O N = 200, MK = 40, MN = 5; ac proinde tota O K, hoc eſt, X continet partes ſcalæ 245.

Quòd ſi data recta X minor fuiſſet, quàm A B, aut B E, tunc ejus quantitate, ut prius, circino accepta, eligenda eſt in recta B D interſectio talis, puta, N, ut uno circini crure poſito in N, alterum etiam incidat in aliquam parallelæ N 5 interſectionem, puta, in K; quo obtento, nota erit rurſum data recta X partium 45.

Praxis III.

440. *Diſtantiam locorum* A *&* B, *à flumine, vel ab alia quavis cauſa variè impeditam, & intercluſam, ope ſcalæ geometricæ metiri.* TAB. X. Fig. 262.

Eligatur ſtatio quælibet C, cujus diſtantiam à puncto B metiri liceat. Ope quadrantis, & linearum viſualium B A, C A notentur anguli B & C; deinde in charta probè complanata fiat recta *b c* tot partium ſcalæ, quot pedes in dato intervallo B C continentur; fiántque anguli *b* & *c* æquales angulis B & C. Itaque lateribus *b a*, *c a* coëuntibus in aliquo puncto *a*, exploretur, quotnam in ſcala particulas contineat latus *a b*: totidem pedes, vel hexapedas, vel decempedas intervallum A B continebit.

Nam triangula B A C, *b a c* ſunt æquiangula, ac proinde ſimilia; hinc latera habent proportionalia.

Praxis IV.

441. *Aream trianguli imperviam invenire.*

Ex dictis Lib. 1. patet ad dimensionem trianguli opus esse, ut notum sit latus unum unà cum perpendiculari in illud cadente ex opposito angulo. At quando trianguli area est impervia, non potest in eo perpendicularis designari, & mechanicè mensurari. Hujus autem inventio repetenda est, non solùm ex aliis Geometriæ principiis, de quibus infra, sed ex triangulorum similitudine, usuque scalæ geometricæ, hoc pacto.

Fig. 262. Sit A B C area, ut in fig. præced., cujus mensura in quadratis pedibus inquiritur. Fiat, ut prius, in charta triangulum simile *b a c*; demittatúrque in basim *b c* perpendicularis *a d*; & inveniantur particulæ, quas perpendiculum *a d* in scala continet; tot enim pedes continebit perpendiculum A D, ob similitudinem triangulorum A D B, *a d b*; ejusque dimidium in basim ductum dabit aream A B C in pedibus quadratis.

Praxis V.

442. *Altitudinem montis, seu turris* AD, *datâ distantiâ* BD *metiri.*

Quando distantia montis, turrísve sive æstimatione communi, sive aliunde est nota, expeditissima erit altitudinis dimensio.

Trian-

Triangulo rectangulo ADB fiat simile in charta, *adb*, ita ut *bd* tot partium scalæ sit, quot passuum datur distantia BD: inquire, quot partes scalæ contineat *ad*; totidem enim passus continebit altitudo quæsita AD. TAB. X. Fig. 263.

Praxis VI.

443. *Altitudinem* AD *montis, seu turris inaccessam metiri.*

Eligantur in subjecta planitie duæ stationes B & C, quarum distantiam metiri liceat. Angulo B in prima statione invento describatur in charta æqualis *abd*; & quot pedum fuit intervallum stationum, totidem partes ex scala acceptas transcribe in latus *bd* ex *b* in *c*. Fiat deinde noto jam angulo ACD stationis secundæ æqualis *acd*; & latus *ca* occurrat lateri *ba* in *a*; tum ex *a* demitte perpendicularem *ad* occurrentem lateri *bc* in *d*. Constat triangula *bad*, *cad* triangulis opticis utriusque stationis æquiangula esse, adeóque similia, ac proinde *bc* referre intervallum stationum; *bd*, vel *cd* utramque distantiam, & *ad* altitudinem. Inquire igitur, quot partes scalæ contineant *cd*, vel *ad*; totidem quippe pedes distantia ipsa, & altitudo continebunt.

Corollarium.

Hâc methodo inveniuntur latera, & area trianguli, cujus unum detur latus cum duobus angulis.

Praxis VII.

444. *In triangulo quovis datis tribus lateribus, angulos invenire.*

TAB. X. Fig. 264. Sumptis ex ſcala tribus rectis bm, bc, cn totidem partium, quot in datis lateribus pedes continentur, centris b & c, intervallis bm, cn deſcribantur arcus circulorum ſe mutuò interſecantium in a; ductíſque ab, ac, erit triangulum bac dato triangulo æquiangulum ob latera proportionalia, unde & altitudo, & area innoteſcet. Sed de his planiùs in Trigonometria conſtabit.

ELEMENTUM III.

De Polygonis ſimilibus generatim, & de Punctis ſimiliter poſitis.

445. FIGURÆ rectilineæ, ut ſimiles denominentur, utrumque poſtulant, quòd & angulos ſingulos ſingulis æquales habeant, atque etiam latera, quæ circum æquales angulos exiſtunt, proportionalia.

Demonſtravimus quidem n. 410. & 415., triangula, quorum anguli ſunt æquales, habere etiam latera homologa proportionalia, & reciprocè; atque hinc, ut duo triangula ſimilia dici poſſint, ſatis ſupérque eſſe, ſi vel eorum anguli ſint æquales, vel latera proportionalia.

At non eadem eſt ratio de polygonis, quæ plura habent, quàm tria latera, ùt notavimus n. 396. Nam & angulos habere