GEOMETRIÆ THEORICO-PRACTICÆ LIBER SECUNDUS

De Proportione Linearum Rectarum.

ELEMENTUM I.

De Rationibus, & Proportionibus.

DEFINITIONES.

356. Duarum *ejusdem generis magnitudinum mutua quædam secundùm quantitatem comparatio dici solet à Geometris Ratio.*

357. Hæc comparatio duplex est. In prima quæritur duarum quantitatum differentia, quæ dicitur Ratio Arithmetica, & subductione investigatur. Sic ratio septenarii ad ternarium est excessus, seu differentia 4.

358. In secunda quæritur, quoties una quantitas major minórve sit alterâ, seu, quoties una alteram contineat, vel in eadem contineatur: quæ dicitur Ratio Geometrica, & divisione deprehenditur. Nam quotus ostendit rationem dividui ad divisorem, nempe, quoties una quantitas alteram contineat. Sic ratio 6 ad 2 deprehenditur dividendo 6 per 2.

Scholion.

Ratio, de qua unicè in hoc tractatu sermo habebitur, est ratio geometrica.

359. *Antecedens rationis dicitur illa quantitas, quæ ad aliam refertur: Consequens verò illa, ad quam refertur.*

360 *Quotus antecedentis per consequentem divisi, dici solet Exponens, seu Denominator rationis. Est enim Quotus quantitas integra, vel fracta, modum definiens, quo antecedens rationis terminus consequentem contineat, vel in illo contineatur.* Hinc quotus dicitur etiam denominator rationis, quia denominat quamlibet proportionum speciem: puta, si quotus antecedentis per consequentem divisi sit 2, dicitur ratio dupla, si 3, tripla, si $\frac{1}{2}$, subdupla, si $\frac{1}{3}$, subtripla; & universaliter ratio ipsius a ad b est, quæ denominatur ab $\frac{a}{b}$, hoc est, à quotiente quantitatis a per b divisæ.

361. Sicuti duæ magnitudines inter se mutuò comparantur; ita duæ rationes peræquè conferri possunt.

Proportio itaque est duarum rationum æqualitas. Unde quatuor quantitates dicuntur proportionales, cum ratio inter primam, & secundam æqualis est rationi inter tertiam, & quartam.

362. *Æqualitas duarum rationum arithmeticarum est æqualitas excessuum, vel defectuum, & vocatur Proportio Arithmetica. Æqualitas duarum rationum geometricarum est æqualitas quotorum, & Proportio Geometrica appellatur.*

363. Prima expressio proportionis geometricæ est hujusmodi: 8 : 2 :: 12 : 3. Altera usita-

tatior expreſſio eſt $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$. Nam ratio geometrica ex quoto æſtimanda eſt (n. 360.), & æqualitas rationum ex æqualitate quotorum (n. 362.); ubi enim quoti invicem æquantur, ibi & quantitates ſunt in eadem ratione conſtitutæ; cum autem diviſionum quotientes indicari ſoleant interjectâ lineolâ dividuum inter, & diviſorem: hinc rationes ſingulæ exprimuntur inſtar fractionum, quarum numerator, & denominator perinde ſunt, atque rationis antecedens, & conſequens. Omnis autem proportio ſic pronuntiari ſolet: 8 eſt ad 2, uti 12 ad 3.

Corollarium.

364. Hinc duæ rationes 8 ad 2, & 12 ad 3 dicuntur ſimiles, æquales, eædem, quando antecedentes termini per ſuos conſequentes diviſi, dant quotientes æquales. Et viciſſim ſi quotientes ſint æquales, magnitudines erunt proportionales, id eſt, ratio rationi erit eadem, æqualis, ſimilis. Quare, ſi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, erunt quantitates illæ proportionales: hoc eſt, $a : b = c : d$; quo ſigno æqualitatis = exprimitur æqualitas ipſa exponentium, ſeu quotorum.

365. *Rationes inæquales, ſeu diſſimiles ſunt, quarum antecedentes termini per ſuos conſequentes diviſi, dant exponentes inæquales; & illa ratio major eſt, cujus denominator, ſeu quotus major.*

Inæqualitas rationum iisdem planè ſignis notatur, quibus inæqualitas magnitudinum. Sic $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, ſive $a:b > c:d$ ſignificat rationem *a* ad *b* majorem ratione *c* ad *d*: hoc eſt, exponentem primæ rationis majorem exponente ſecundæ rationis.

366. *In omni proportione geometrica, quæ exhibeatur per* a : b : : c : d, *vel* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *primus terminus* a *primæ rationis appellatur Primum Antecedens, ſecundus terminus* b *Primum Conſequens. Primus terminus* c *ſecundæ rationis vocatur Secundum Antecedens; & ſecundus terminus* d *Secundum Conſequens.*

367. *Primus terminus* a, *& ultimus* d *ejuſdem proportionis vocantur Extrema. Secundus terminus* b, *& tertius* c *appellantur Media.*

368. *Rationes æquales in eadem ſerie progredientes, vocantur rationes ordinatæ*; & ſcribi ſolent inſtar fractionum æqualium, $\frac{12}{3} = \frac{8}{2} = \frac{20}{5} = \frac{28}{7}$ &c.; vel, 12 : 3 : : 8 : 2 : : 20 : 5 : : 28 : 7. Vel etiam, quod interdum commodiùs erit, ſcribi poterunt omnia ſucceſſivè antecedentia, duobus interjectis punctis inter ſingula, & ſimiliter omnia ſucceſſivè conſequentia, interjectis rurſum duobus punctis, ſeriémque omnium antecedentium à ſerie conſequentium ſeparando quatuor punctorum notatione, hâc ſemper obſervatâ lege, ut antecedens,

tecedens, & consequens cujuslibet rationis eundem locum obtineant in utraque serie. Itaque earundem rationum æqualium series ita exprimi poterit : 12 : 8 : 20 : 28 :: 3 : 2 : 5 : 7; quod significat generatim terminos componentes primam seriem proportionales esse terminis respectivis componentibus secundam seriem, singulos singulis.

Hæc scribendi, notandíque methodus in serie plurium rationum æqualium commodissima videri solet, præsertim cum partes ejusdem figuræ, antecedentium vicem obeunt, & partes alterius figuræ, consequentium locum sustinent. Nam juxta hanc methodum omnes partes primæ figuræ scribi possunt successivè, respondentes partibus in secunda figura uniformiter successivis; quâ factâ separatione, facilè secernuntur partes illæ, quæ ad primam figuram pertinent, ab iis, quæ ad alteram figuram; ita ut statim in oculos incurrant partes, quæ invicem comparantur in utraque figura, & ex quibus rationes, & proportiones gignuntur, nimirum,

Si duæ figuræ ABCDE, MNOPQ habeant latera invicem proportionalia, hoc est, si TAB. VIII.

AB: MN :: BC: NO Fig.

BC: NO :: CD: OP 213.

CD: OP :: DE: PQ &c., 214.

consultiùs erit in una serie scribere successivè latera AB, BC, CD, DE &c. primæ figuræ, quæ sunt antecedentia rationum æqualium; & in altera serie similiter successivè latera MN, NO, OP, PQ &c. secundæ figuræ, quæ earundem rationum æqualium consequentia sunt: observatâ utrobique lege, quòd respectiva latera eundem locum obtineant in utraque serie; & ita habebitur

AB : BC : CD : DE &c. :: MN : NO : OP : PQ &c.

Tab. VIII. Fig. 215. 216. 369. *Si duæ figuræ X & Z sint ejusmodi, ut latus AB primæ sit ad latus MN secundæ, sicuti latus BC primæ est ad latus NO secundæ, dicentur habere latera directè, seu simpliciter proportionalia.*

Quòd si omnia latera primæ X eandem habeant rationem cum omnibus lateribus secundæ Z, duæ figuræ X & Z dicentur habere omnia latera mutuò proportionalia.

In utroque casu proportionis directæ latera primæ X sunt antecedentia in serie rationum æqualium ordinatarum, & latera secundæ Z sunt consequentia.

Tab. VIII. Fig. 217. 218. 370. *Si duæ figuræ X & Z sint ejusmodi, ut latus AB primæ sit ad latus MN secundæ, uti latus NO secundæ ad latus BC primæ, dicentur habere latera reciprocè proportionalia, seu reciproca.*

Quare,

Quare, si duæ figuræ X & Z habeant duo latera reciproca, hoc est, si AB : MN : : NO : BC, latera AB, BC primæ figuræ vocantur Extrema proportionis, latera MN, NO secundæ vocantur Media ejusdem proportionis.

371. *Si tres magnitudines invicem comparatæ, quemadmodum 2, 10, 50, sint ejusmodi, ut prima sit ad secundam, ati secunda ad tertiam, proportio dicitur continua*; & ita exprimitur : 2 : 10 : : 10 : 50, vel ∺ 2 : 10 : 50.

Corollarium.

372. Hinc si eadem quantitas duabus quantitatibus comparetur, vel duæ quantitates æquales eidem tertiæ, sive aliis inter se æqualibus comparentur, duæ rationes semper erunt æquales (n. 364.).

Et reciprocè duæ quantitates erunt æquales, si ad eandem, vel æquales quantitates comparatæ habeant eandem rationem; puta, duæ quantitates A & B erunt æquales, si A : C : : B : C.

AXIOMA.

373. *Si duas quantitates* A & B *multiplicet, aut dividat eadem quantitas: hinc facta, inde quoti erunt quantitatibus multiplicatis, aut divisis in eadem proportione.*

In primo casu $A : B :: 2A : 2B :: 3A : 3B :: 4A :: 4B$ &c.; hoc est, (n. 362.) $\frac{A}{B} = \frac{2A}{2B} = \frac{3A}{3B}$ &c.

In secundo casu $A : B :: \frac{1}{2} A : \frac{1}{2} B :: \frac{1}{3} A : \frac{1}{3} B$ &c.

PROPOSITIO I.

374. Theorema. *Si duo parallelogramma* AC, DE, *inter easdem existant parallelas, eam inter se proportionem habent, quam bases* BC, CE, *sive* AC : DE :: BC : CE. Euclid. lib. 6. prop. 1.

TAB. VIII. Fig. 219. *Demonstratio.* Quoniam parallelogramma AC, DE inter easdem parallelas existunt, habebunt quoque eandem altitudinem, quæ per duarum parallelarum distantiam AM exprimitur. Quare (n. 263.) parallelogrammum $AC = BC \times AM$; & parallelogrammum $DE = CE \times AM$. Atqui $BC \times AM : CE \times AM :: BC : CE$ (n. 373.). Ergò AC : DE :: BC : CE. Quod erat &c.

Scholion.

Ab hoc Theoremate dependet quidquid uspiam de figuris sive planis, sive solidis per proportiones demonstratur. Euclidea de-

demonstrandi ratio operosior est, quàm ferre possint Tirones in primo aditu scientiæ proportionum. Quam attuli demonstrationem, omnium expeditissima est.

Corollarium.

375. Ergò triangula BAC, CAE, quorum bases BC, CE in eadem recta linea existunt, & vertex communis A, hoc est, altitudo eadem est, eam inter se proportionem habent, quam bases BC, CE. TAB. VIII. Fig. 220.

Nam parallelogramma ABCD, DCEF, quorum eadem altitudo est, dupla sunt triangulorum BAC, CAE. Ergò, uti illa, ita hæc erunt inter se, ut bases BC, CE.

PROPOSITIO II.

376. Theorema. *Parallelogramma, aut triangula æqualia* X, Z, *quæ unum angulum* ABE *uni* DBC *habent æqualem, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca : hoc est*, AB: BC : : DB: BE.

Et vicissim, si latera sic habent reciproca, parallelogramma, aut triangula sunt æqualia. Euclid. lib. 6. prop. 14 & 15. TAB. VIII. Fig. 221. 222.

Demonstratur I. pars. Quoniam anguli ABE, DBC sunt æquales, ita opponi ad verticem possunt, ut latera

AB, DB, efficiant singula unam rectam lineam cum lateribus singulis BC, BE. Hoc posito, erit (n. 374. & 375.)

AB : BC :: X : Y.

X : Y :: Z : Y (n. 372.)

Z : Y :: DB : BE (n. 374. & 375.).

Ergò AB : BC :: DB : BE. Quod erat primum.

Demonstratur II. pars. Quoniam per hyp. latera circa æquales angulos sunt in proportione reciproca, erit AB : BC :: DB : BE. Atqui AB : BC :: X : Y (n. 374.); & DB : BE :: Z : Y. Ergò X : Y :: Z : Y; & consequenter X = Z. Quod erat alterum.

Corollarium I.

TAB. VIII. Fig. 221. 222. 377. Ex prima parte hujus Theorematis constat criterium proportionalitatis quatuor terminorum AB, BC, DB, BE illud esse, si AB × BE productum, seu rectangulum extremorum æquale sit ipsi BC × DB producto mediorum.

Corollarium II.

TAB. VIII. Fig. 223. 378. Si quatuor termini AB, BC, DB, BE, sint ejusmodi, ut parallelogrammum AE, cujus duo latera contigua sunt extrema, majus sit parallelogrammo æquiangulo DC, cujus latera contigua sint media; sive, si ex quatuor terminis AB, BC, DB, BE, productum extremorum AB × BE majus sit

pro-

producto mediorum $BC \times DB$, erit ratio $AB:BC > DB:BE$, Sin autem productum extremorum minus ſit producto mediorum, erit ratio $AB:BC < DB:BE$.

Demonſtratio repetenda à n. 376.

PROPOSITIO III.

379. Theorema. *In omni proportione geometrica* $AB:BC :: DB:BE$, *rectangulum, ſeu productum* $AB \times BE$ *extremorum, æquatur rectangulo, ſeu producto* $BC \times DB$ *mediorum.* Euclid. lib. 6. prop. 16. Tab. VIII. Fig. 221.

Demonſtratio. Fiat rectangulum X, cujus duo latera contigua ſint hæc eadem extrema AB, BE dictæ proportionis; & aliud rectangulum Z, cujus ſimiliter duo latera contigua ſint ipſa media BC, DB. Duo hæc rectangula habebunt latera circa æquales angulos, nimirum rectos, reciproca; & conſequenter erit $X = Z$ (n. 376.). Atqui (n. 263.) rectangulum $X = AB \times BE$ producto extremorum & rectangulum $Z = DB \times BC$ producto mediorum. Ergò in omni proportione geometrica &c. Quod erat &c,

Corollarium.

380. Quoniam proportio $AB:BC :: DB:BE$ dat $AB \times BE = BC \times DB$:

I. Dividendo utrumque membrum æqua-

æquationis per AB, erit $BE = \frac{BC \times DB}{AB}$: hinc Regula generalis. *Cognitis tribus primis terminis* AB, BC, DB, *proportionis geometricæ, habetur quartus incognitus* BE, *multiplicando inter se duo media* BC, DB, *productúmque dividendo per primum extremum* AB.

II. Eandem æquationem $AB \times BE = BC \times DB$ dividendo utrimque per BE, fiet $AB = \frac{BC \times DB}{BE}$; hinc Regula. *Cognitis tribus ultimis terminis proportionis geometricæ obtinetur primus* AB, *multiplicando inter se duo media* BC, DB, *& productum dividendo per ultimum extremum* BE.

III. Eandem æquationis formulam dividendo utrinque per BC, fiet $DB = \frac{AB \times BE}{BC}$; hinc Regula. *Cognitis duobus extremis, & primo mediorum proportionis geometricæ, obtinetur secundum medium, multiplicando inter se duo extrema, productúmque dividendo per primum medium.*

IV. Vel eandem dividendo utrinque per DB, erit $BC = \frac{AB \times BE}{DB}$; hinc Regula inveniendi primum medium, datis extremis, & secundo medio.

PRO-

PROPOSITIO IV.

381. Theorema. *Si ratio* $AB : BC > DB : BE$ *parallelogrammum* AE, *cujus latera contingua sunt ipsa extrema, majus erit parallelogrammo æquiangulo* DC, *cujus contingua latera sunt media; & consequenter rectangulum* AE, *æquale producto* $AB \times BE$ *extremorum, majus erit rectangulo* DC, *hoc est, producto* $BC \times DB$ *mediorum.*

Tab. VIII. Fig. 223.

Demonstratio. Nam, si à primo termino AB subducatur portio AI, quantùm satis est, ut residuum IB sit reliquis tribus terminis proportionale, hoc est, $IB : BC :: DB : BE$, ducatúrque IF parallela rectæ DBE: habebitur (n. 376.) parallelogrammum $IE = DC$. Atqui per hypothesim $AB > IB$. Ergò parallelogrammum $AE > IE$; & consequenter $AE > DC$. Quod erat &c.

Corollarium.

382. Contra verò, si $AB : BC < DB : BE$, demonstrabitur similiter parallelogrammum $AE < DC$. Nam, si recta AB minor est, quàm ut sit tribus reliquis proportionalis, producatur BA in L, donec $LB : BC :: DB : LE$; ducatúrque LM parallela rectæ BE: erit (n. 376.) $LE = DC$. Sed $AE < LE$. Ergò $AE < DC$.

Tab. VIII. Fig. 224.

PRO-

PROPOSITIO V.

383. Theorema. *In omni proportione geometrica* A : B : : C : D, *quocunque modo diſponantur termini, ſemper habebitur proportio, dummodo duo media maneant media, aut ambo evadant extrema, vel duo extrema perſeverent extrema, aut ambo evadant media.* Euclid. lib. 6. prop. 16.

Demonſtratio. Nam factum extremorum ſemper æquabitur facto mediorum: hinc per n. 376. & 377. magnitudines illæ erunt geometricè proportionales.

Quod, ut evidentiùs conſtet, animadvertendum eſt quatuor illos terminos juxta conditionem à Theoremate præſcriptam nonniſi octo permutationes ferre poſſe, & in harum qualibet, productum extremorum ſemper æquari producto mediorum.

$a : b :: c : d$	$a\,d = b\,c$
$d : b :: c : a$	$d\,a = b\,c$
$a : c :: b : d$	$a\,d = c\,b$
$d : c :: b : a$	$d\,a = c\,b$
$b : a :: d : c$	$b\,c = a\,d$
$b : d :: a : c$	$b\,c = d\,a$
$c : a :: d : b$	$c\,b = a\,d$
$c : d :: a : b$	$c\,b = d\,a$

Ex hiſce octo terminorum proportionalium permutationibus proficiſcuntur varii argumentandi modi, ac Regulæ proportionum, quas partim Euclides lib. 5. exponit, & demonſtrat, ac nomine quamque ſuo notat, & definit, partim à Geometris inter demonſtrandum adhibitæ ſunt, & ſuis nominibus carent.

Juvabit autem ad exercitationem, ut Tirones rem in numeris explorent, quos litteris in prima anologia ſubſtituant, & in reliquis omnibus permutationibus.

Regula I.

384. *Si* 8 : 4 : : 6 : 3, *erit alternando*, 8 : 6 :: 4 : 3. Euclid. lib. 5. prop. 16.
Nam $8 \times 3 = 6 \times 4$.

Corollarium.

385. *Si* 12 : 4 > 6 : 3, *erit alternando*, 12 : 6 > 4 : 3. Euclid. 5. prop. 27.
Nam $12 \times 3 > 6 \times 4$ (n. 378.).
Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minore.

Regula II.

386. *Si* 8 : 4 :: 6 : 3, *erit invertendo*, 4 : 8 :: 3 : 6. Euclid. lib. 5. prop. 4. corol.
Nam $4 \times 6 = 8 \times 3$.

Corollarium.

387. *Si* 12 : 4 > 6 : 3, *erit invertendo*, 4 : 12 < 3 : 6. Euclid. lib. 5. prop. 26.
Nam $4 \times 6 < 12 \times 3$ (n. 378.).

Ac

Ac præterea Propositio per se patet; quò enim major est ratio quævis, eò minor est ipsius conversa.

Regula III.

388. *Si* $8:4::6:3$, *erit componendo*, $8+4:4::6+3:3$. Euclid. lib. 5. prop. 18.

Nam $8+4 \times 3 = 6+3 \times 4$.

Præterea perspicuum est, in hac hypothesi utrumque antecedens 8 & 6 suo consequente auctum, proportionaliter augeri.

Corollarium.

389. *Si* $12:4 > 6:3$, *erit quoque componendo*, $12+4:4 > 6+3:3$. Euclid. lib. 5. prop. 28.

Nam productum extremorum majus est producto mediorum [n. 378].

Regula IV.

390. *Si* $8:4::6:3$, *erit etiam dividendo*, $8-4:4::6-3:3$. Euclid. lib. 5. prop. 17.

Nam utrumque antecedens suo consequente proportionaliter mulctatur.

Corollarium.

391. *Si* $12:4 > 6:3$, *erit dividendo*, $12-4:4 > 6-3:3$. Euclid. lib. 5. prop. 29.

Nam $3 \times 12-4 > 4 \times 6-3$.

Regu-

Regula V.

392. *Si antecedens unum* $a + b$ *fuerit ad consequens* b, *ut antecedens alterum* $c + d$ *ad consequens alterum* d, *etiam antecedens primum* $a + b$ *erit ad* a *excessum suum supra consequens, ut antecedens alterum* $c + d$ *est ad* c *excessum suum supra consequens alterum; nimirum, si* $a + b : b :: c + d : d$, *erit per conversionem rationis*, $a + b : a :: c + d : c$. Euclid. lib. 5. prop. 18. corol. 1.

Nam, si $a + b : b :: c + d : d$, erit dividendo per Regulam IV., $a : b :: c : d$; & invertendo per Regulam II., $b : a :: d : c$; & per Reg. III. componendo, $a + b : a :: c + d : d$; quæ est conversio rationis.

Corollarium.

393. *Si prima quatuor magnitudinum ad secundam habeat majorem rationem, quàm tertia ad quartam, per conversionem rationis prima ad excessum primæ supra secundam habebit minorem rationem, quàm tertia ad excessum tertiæ supra quartam.*

Nam, si $a + b : b > c + d : d$, erit (n. 391.) dividendo, $a : b > c : d$; & (n. 387.) invertendo, $b : a < d : c$; & componendo [n. 389.], $a + b : a < c + d : c$.

Regula VI.

394. *Omnis proportio geometrica* AC: DE :: BC: BE *poteſt in hanc transformari* AC: DE :: AC — BC: DE — BE. *hoc eſt, ut antecedens ad ſuum conſequens, ita differentia antecedentium ad differentiam conſequentium.*

Nam, quia AC: DE :: BC: BE, erit alternando, AC: BC :: DE: BE; & per converſionem rationis, AC: AC — BC :: DE: DE — BE; & rurſum alternando, AC: DE :: AC — BC: DE — BE.

Similiter, ſi fuerint magnitudines quotcunque proportionales, quemadmodum ſe habuerit una antecedentium ad unam conſequentium, ita ſe habebit ſumma antecedentium ad ſummam conſequentium; hoc eſt, ſi A: a :: B: b :: C: c *&c., erit* C: c :: A + B + C: a + b + c. Euclid. lib. 5. prop. 12.

Nam, quia A: *a* :: B: *b*, erit alternando, & componendo, & rurſum alternando, A + B: *a* + *b* :: B: *b* :: C: *c* ex hypotheſi. Ergò rurſum alternando, A + B: C :: *a* + *b*: *c*; & componendo, & iterum alternando erit A + B + C: *a* + *b* + *c* :: C: *c*.

Regula VII.

395. *Si quatuor quantitates proportionales per alias quatuor proportionales mul-*

multiplicentur, vel dividantur: etiam factæ, vel quotæ quantitates proportionales erunt.

$$\text{Sint } A : 3A :: a : 3a,$$
$$B : 2B :: b : 2b,$$

$$\text{Ergo I. } A \times B : 3A \times 2B :: a \times b : 3a \times 2b,$$

$$\text{II. } \frac{A}{B} : \frac{3A}{2B} :: \frac{a}{b} : \frac{3a}{2b}.$$

Nam in utroque casu, si fiat productum extremarum, & mediarum, reperientur producta constare iisdem quantitatibus inter se multiplicatis, ac proinde esse æqualia; quod esse criterium proportionalitatis quatuor terminorum demonstravimus n. 376. & 377.

Scholion.

Reliquas, quæ usui erunt, proportionum regulas, prout occasio tulerit, exponam.

ELEMENTUM II.

De *Lineis proportionaliter sectis*, *de Triangulis Similibus*, *ac Lineis ad idem punctum concurrentibus.*

DEFINITIONES.

396. *Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos, singulos singulis, æqua-*