ELEMENTUM VII.

De Polygonis.

DEFINITIONES.

282. Polygonum *est plana superficies pluribus, quàm quatuor rectis lineis terminata.*

Hinc habita ratione laterum, quæ in infinitum multiplicari possunt, innumeræ oriuntur polygoni species; nam, quod quinque constat lateribus, pentagonum, quod sex, hexagonum, quod septem, heptagonum nominatur; atque ita de ceteris.

Tab. VI. Fig. 154. 283. *Polygonum* ABCDEF *dicitur regulare, quod omnes angulos ad circumferentiam ejusdem circuli habet æquales, & omnia pariter latera æqualia.*

284. *Polygonum irregulare dicitur, quando non habet omnia latera æqualia, vel, quando ad circumferentiam ejusdem circuli suos omnes angulos habere non potest.*

285. *Perpendicularis* KG *ducta à centro* K *circuli ad latus* AB *polygoni regularis vocatur Apotheme hujus polygoni.*

Corollarium I.

Tab. VI. Fig. 154. 286. Quare, si à centro K ad omnes angulos polygoni regularis ducantur rectæ, polygonum dividitur in triangula AKB, BKC, CKD &c. perfectè æqualia. Nam singulorum duo latera sunt radii ejusdem circu-

circuli ; & tertium eſt latus ipſum polygoni ; adeoque triangula ſunt ſibi mutuò æquilatera.

Corollarium II.

287. Si præterea à centro K ducantur apothemæ KG, KH, KI &c. erunt triangula BKG, BKH, CKH, CKI &c. inter ſe æqualia, & apothemæ KG, KH, KI &c. inter ſe æquales.

Nam triangula AKB, BKC, CKD &c. cum ſint & mutuò æquilatera, & æquiangula, & præterea apothemæ KG, KH, KI &c., cum ſint perpendiculares à centro K ductæ ad chordas æquales, hoc eſt, latera polygoni AB, BC, CD, cadent in medio harum chordarum (n. 146.), ita ut omnes ſemichordæ BG, BH, CH &c. ſint æquales. Ergò (n. 229,) triangula rectangula GBK, HBK, HCK &c. ſunt perfectè æqualia ; & conſequenter apothemæ KG, KH, KI &c. erunt æquales.

PROPOSITIO I.

288. Theorema. *Si chorda* AB *ſit æqualis radio circuli, arcus, qui eam ſubtendit, æquatur ſextæ parti circumferentiæ.*

Demonſtratio. Ducantur radii KA, KB ad extremitates chordæ AB, quæ ponitur æqualis radio circuli. Triangulum AKB erit æquilaterum, & conſequenter æquiangulum (n. 225.). Horum autem TAB. VI. Fig. 154.

trium angulorum inter ſe æqualium ſumma habet pro menſura ſemiſſem circumferentiæ. Ergò arcus A B, qui eorum unum metitur, id eſt, angulum A K B, erit tertia pars ſemiperipheriæ, hoc eſt, ſexta pars totius circumferentiæ. Quod erat &c.

Corollarium I.

Ergò eâdem, qua circulus deſcribitur, aperturâ circini, dividitur circumferentia in 6 partes æquales, & hexagonum regulare circulo inſcribi poteſt.

Corollarium II.

Latus hexagoni circulo inſcripti eſt æquale radio. *Euclid. lib. 4. prop. 15. Corol.*

PROPOSITIO II.

TAB. VI. Fig 155. 289. Problema. *Circulum datum in partes, ſeu gradus 360 dividere.*

Reſolutio. Sit datus circulus A D B C, cujus centrum X: ſic eum in gradus 360 divides.

I. Per centrum X ducantur duæ diametri A B & D C, quæ ſe mutuò ad angulos rectos ſecent, & circumferentiam in quatuor partes dividant.

II. Servatâ eâdem circini aperturâ, quâ circulus deſcriptus eſt, pone unius cruris apicem ſuper A puncto extremo diametri A B; & alterius cruris apice notentur duo puncta E & F, quæ arcus abſcin-

abſcindent AE, AF graduum 60 (n. 288.); & complementa horum arcuum, nimirum, EC, FD; erunt ſingula graduum 30.

III. Defixô rurſum apice circini eodem intervallô in B, notentur crure altero duo puncta G & H, quæ ſimiliter dabunt arcus BG, BH graduum 60, & horum arcuum complementa GC, HD graduum 30.

IV. Simili prorſus ratione, facto centro in C & D punctis extremis alterius diametri, eodemque intervallo abſcindentur quatuor arcus CI, CM, DL, DN, ſinguli graduum 60, quorum complementa AI, BM, AL, BN, erunt ſingula graduum 30.

V. Habes ergò totam circumferentiam in 12 æquas partes diviſam, quarum ſingulæ 30 gradus continebunt.

VI. Rurſum unamquamque earum divide bifariam, ſeu in duas partes æquas; ſicque tota peripheria erit ſecta in 24 partes, quarum ſingulæ gradus 15 comprehendent.

VII. Jam verò, cum nullam planè habeamus methodum geometricam, qua horum 24 arcuum ulterior diviſio perfici poſſit in alias 15 partes æquales, quærenda erit attentando apertura circini, quæ eorum quemlibet in tres partes æquales ſubdividat; deinde quærenda nova circini apertura, quæ harum partium quamlibet rurſum dividat in alias quinque partes æquales; eritque circumferentia circuli diviſa in 360 partes æquales, quas vocant gradus.

Peracta prima diviſione circuli in quatuor æquales partes, diviſiones reliquæ hoc verſiculo comprehenduntur:

In tres, in binas, in tres, in quinque ſecato.

Corollarium I.

290. Ex iis, quæ de diviſione circumferentiæ diximus, perſpicuum eſt artificium conſtruendi geometricè polygona laterum 3, 4, 6, 12, 24, & laterum numero continuè duplo. Ratio eſt, quia cum per binas diametros ſe ſe perpendiculariter interſecantes circumferentia circuli dividatur in quatuor æquales partes, rurſúmque notum ſit artificium (n. 143.) geometricè dividendi, & ſubdividendi bifariam arcum quemvis, planè conſtat, qua methodo conſtrui geometricè poſſint polygona regularia laterum 4, 8, 16, 32, & numero laterum continuè duplo.

Corollarium II.

291. In proceſſu horum Elementorum demonſtrabimus, qua ratione geometricè dividi poſſit circumferentia circuli in 5 & 10 partes æquales. Cùm verò harum partium quælibet bifariam dividi facilè poſſit, hinc conſtrui poterunt polygona, 5, aut 10, aut cujusvis numeri laterum compoſiti ex continuo ductu 5 in 2.

Geo-

Geometrica divisio circumferentiæ in 5 partes æquales, quarum singulæ valent 72 gradus, & geometrica pariter divisio ejusdem circumferentiæ in 6 partes æquales, quarum singulæ sunt graduum 60, obtinetur, inveniendo arcum graduum 12, qui trigesima pars est totius circumferentiæ, seu gradum 360. Quare geometricè dividi potest tota circumferentia in 30 partes æquales, & consequenter in 15, ac præterea in numerum partium æqualium continuè duplum numeri 30, hoc est, in 60, 120 &c. partes æquales.

Scholion.

292. *Quia nondum reperta est ars, qua solo circino, & regulâ circumferentia circuli dividatur in partes* 7, 9, 11, 13, 14, 17, *&c. idcirco, quoties polygonum regulare hoc laterum numero compositum construere oporteat, quærenda erit attentando modò hæc, modò illa circini apertura, qua fieri possit, ut circumferentia circuli in totidem partes æquales dividatur, quot latera polygonum quæsitum habere debet.*

PROPOSITIO III.

293. Theorema. *Superficies polygoni regularis cujusvis* ABCDEF *æquatur triangulo* AKH, *cujus basis* AH *æqualis sit perimetro hujus polygoni, & altitudo æqualis perpendiculari, seu apotheme* KG *ejusdem polygoni.* TAB. VI. Fig. 156.

Demon,

Demonſtratio. Ducantur à centro K ad omnes polygoni angulos radii : reſolvetur in totidem triangula æqualia, quot habet latera polygonum (n. 286.) Cum autem hæc triangula habeant pro altitudine apothemen polygoni, erunt omnia ejusdem altitudinis. Jam verò, ſi ſuper eadem recta AH conſtituantur ſucceſſivè baſes AB, BC, CD &c. horum triangulorum : hoc eſt, ſi polygoni perimeter evolvatur in unicam rectam lineam AH, ſuper qua, tanquam baſi, conſtruatur triangulum AKH, cujus altitudo ſit apotheme ipſa polygoni, erit (n. 260.) triangulum AKH æquale ſummæ triangulorum omnium componentium polygonum ABCDEF. Ergò ſuperficies polygoni regularis &c. Quod erat &c.

PROPOSITIO IV.

TAB. 294. Problema. *Invenire aream poly-*
VI. *goni regularis.*
Fig. Reſolutio ſequitur ex præcedente. Nam
156. ſuperficies trianguli AKH æquatur facto ex ductu ſemiſſeos baſis AH in altitudinem KG. Ergò ſuperficies polygoni regularis cujuſcunque ABCDEF prodibit ex ductu ſemiſſeos perimetri in apothemen KG. Quod erat &c.

LEMMA.

295. *Circulus conſiderari poteſt inſtar polygoni regularis infinitorum laterum.*

Nam, cum polygonum regulare eò magis ad circulum accedat quò magis ipſius

ſius latera numero augentur, & latitudine minuuntur: ſi hæc ponantur infinitè parva, ac propterea numero infinita, manifeſtum eſt, differentiam polygoni à circulo, & apothemen à radio, eſſe quavis data magnitudine minorem, & conſequenter polygonum deſinere in circulum.

PROPOSITIO V.

296. Problema. *Invenire aream circuli.*
Reſolutio. Cum enim circulus conſiderari poſſit inſtar polygoni regularis infinitorum laterum, obtinebitur eâdem methodo dimenſio circuli, ſi peripheriæ ſemiſſis, quam mechanicè metiri oportebit, ducatur in radium.

Scholion.

297. *Si geometricè inveniri, ac demonſtrari poſſet recta linea æqualis circumferentiæ circuli, cujus datur radius, figuram rectilineam haberemus æqualem ſuperficiei circuli, eámque, quam vocant, circuli quadraturam. Ab omni ævo, quo Geometria exculta fuit, in quadrando circulo deſudârunt præſtantiſſima ingenia, ſed irrito conatu; nihilo tamen minùs varias excogitârunt diametri ad circumferentiam rationes, quibus ſaltem quamproximè, & ſine errore ſenſibili in praxi definiri poſſet valor circumferentiæ. Archimedes invenit rationem diametri ad circumferentiam,*

vel

vel semidiametri ad semicircumferentiam esse, ut 7 ad 22. ferè. Quare circumferentia, vel semicircumferentia circuli proximè habebitur, multiplicando diametrum, vel radium per 3 & $\frac{1}{7}$. Similiter superficies circuli æquabitur triangulo, cujus altitudo sit radius, & basis sit diameter ipsa ter sumpta cum septima ejusdem parte. Superficies autem sectoris cujusvis eadem regulâ invenietur, dummodo cognoscatur ratio sui arcus ad integram circumferentiam. Sed de his alibi plura.

PROPOSITIO VI.

TAB. VI. Fig. 157. 158. 159.

298. Problema. *Aream superficiei irregularis multangulæ cujuscunque, quæ pervia sit, invenire.*

Resolutio. Polygonum irregulare ABCDEF dividatur in triangula, ductis rectis à quovis puncto H ad libitum assumpto, vel in vertice unius anguli, vel in uno latere, vel intra aream, ut commodiùs visum fuerit, ad omnes angulos figuræ. Metire singula triangula (n. 267.): horum summa dabit aream quæsitam.

Fig. 160.

Aliter. Intra aream mensurandam designetur linea, quæ potest longissima BQ, ad quam ex omnibus angulis ducantur perpendiculares, quæ aream polygoni secabunt in quadrangula, quorum duo latera sunt parallela, & in triangula rectangula. Metire singula [n. 267.]: summa ex omnibus collecta dabit aream quæsitam.

Cor-

Corollarium.

299. Si areæ incognitæ pars aliqua ſit curvilinea, inſcribe illi triangula, & quadrangula, donec reſiduum curvilineum æſtimari non debeat. Tab. VI. Fig. 161.

Habes agrorum omnium dimenſionem, quorum area pervia ſit. Quid autem facto opus ſit, ſi quando area ſit impervia, infra docebimus.

PROPOSITIO VII.

300. Theorema. *Omnes ſimul anguli interni cujuſvis polygoni æquales ſunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot polygonum habet latera, ſeu angulos.* Tab. VI. Fig. 162.

Et omnes ſimul externi anguli cujuſcunque polygoni conficiunt quatuor rectos.

Demonſtratur I. pars. Ex quovis puncto F intra figuram ducantur ad omnes polygoni angulos rectæ, quæ polygonum ſecabunt in tot triangula, quot habet latera. Quare, cum ſingula triangula [n. 213.] conficiant duos rectos, omnia ſimul conficient bis tot rectos, quot ſunt latera. At anguli eorumdem triangulorum circa punctum F intra figuram aſſumptum, nec pertinent ad angulos polygoni propoſiti, & conficiunt quatuor rectos (n. 83.). Quare, ſi hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli conſtituentes angulos polygoni, bis quoque tot rectis æquales, demptis illis quatuor circa punctum F,

quot

quot latera, vel angulos continet polygonum. Quod erat primum.

Demonstratur II. pars. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, æquantur duobus rectis; atque adeo omnes externi unà cum omnibus internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, auguloſve polygonum continet. Sunt autem & ſoli interni bis tot rectis æquales, minùs quatuor, ut demonſtravimus. Si igitur interni auferantur, externi remanebunt quatuor tantùm rectis æquales, qui nimirum deſunt internis angulis, ut interni, & externi ſimul bis tot rectos conficiant, quot habet latera polygonum. Quod erat alterum.

Corollarium.

301. Ergò quatuor anguli quadrilateri cujuſvis conficiunt quatuor rectos. Quamobrem, ſi quatuor anguli quadrilateri ſint ſinguli inter ſe æquales horum quilibet erit rectus.

Et omnes ejuſdem ſpeciei rectilineæ figuræ æquales habent tam internorum, quàm externorum angulorum ſummas. Et trianguli alicujus tres externi anguli æquales ſunt mille externis angulis figuræ millelateræ. Quod admiratione dignum eſt.

PROPOSITIO VIII.

TAB. VI. Fig. 154. 302. Problema. *Regularium figurarum angulos, tam centri, quàm circumferentiæ invenire.*

Angu-

Angulum centri AKB voco illum, quem continent duo radii ab unius lateris extremitatibus ad centrum K ducti. Unde figura ordinata tot habet centri angulos, quot latera, quos omnes inter se conſtat eſſe æquales.

Anguli circumferentiæ ſunt, que figuræ lateribus continentur.

Reſolutio I. partis. Gradus 360. divide per denominatorem figuræ, puta, ſi figura data ſit ſexangula, divide per 6: provenient gradus debiti angulo centri.

Demonſtratio. Omnes ſimul anguli centri conficiunt 4 rectos, ſeu gradus 360. Quare unus ex illis eſt graduum 360 pars ab ipſorum multitudine, ſeu denominatore figuræ denominata. Ergò &c. Quod erat primum.

Reſolutio. II. partis. A duplo numero laterum deme 4: reſiduum multiplica per 90: productum divide per denominatorem figuræ: provenient gradus debiti angulo circumferentiæ.

In pentagono duplus numerus laterum eſt 10: ab hoc, ſi demas 4, remanent 6, quæ ducta in 90 producunt 540; hæc autem diviſa per 5 denominatorem figuræ, exhibent 108 gradus, qui debentur angulo circumferentiæ pentagoni.

Demonſtratio. Omnes ſimul anguli cujuſvis polygoni, ſeu figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ, demptis quatuor. Quare, ſi duplum laterum numerum, demptis 4, ducas in 90 gradus uni recto debitos, provenient gradus debiti omnibus ſimul figuræ angulis; atque adeò unus ex illis eſt pars horum graduum ab angulorum multitudine, ſeu denominatore figuræ denominata. Ergò &c. Quod erat alterum.

Denominatores figurarum	Anguli centri	Anguli circumferentiæ
3.	120.	60.
4.	90.	90,
5.	72.	108.
6.	60.	120.
7.	$51.\overset{\mathrm{I}}{25}.\overset{\mathrm{II}}{43}.$	$128.\overset{\mathrm{I}}{34}.\overset{\mathrm{II}}{17}.$
8.	45.	135.
9.	40.	140.
10.	36.	144.
11.	$32.\overset{\mathrm{I}}{43}.\overset{\mathrm{I}}{38}.$	$147.\overset{\mathrm{I}}{16}.\overset{\mathrm{II}}{22}.$
12.	30.	150.

OBSERVATIO.

303. Hactenus ſuperficies dimenſi fuimus, quaſi verò eſſent plana perfectiſſima, contra quàm accidat; nam camporum plerique ſuperficiem habent valde inæqualem, modò in colles aſſurgunt, modò in valles deprimuntur; quæ res illorum ſuperficiem auget quàm maximè. Sanè hemiſphærium multò

majorem habet ſuperficiem, quàm baſis plana, cui inſiſtit. Quamobrem, ſi harum inæqualitatum ratio nulla eſſet habenda in æſtimanda camporum ſuperficie, hæc multò minor prodiret, quàm reipſa ſit. Hinc quæſtio illa non contemnenda, an in venditione agrorum declivium ſit habenda ratio inclinationis, an verò ſuperficies inclinata ad horizontalem revocanda ſit.

Sed intelligant velim Tirones, qui praxi daturi ſunt operam, harum inæqualitatum interdum habendam eſſe rationem, interdum nullam, pro diverſo, quem quis intendat, fine.

Si quæratur, quot lapidibus quadratis conſternendum ſit pavimentum inclinatum, ſpectanda erit tota quanta eſt illius area, major in ea inclinatione, quàm ſi ad horizontalem revocaretur.

At ſi hæc eadem ſuperficies inclinata conſideranda eſſet vel ad uſum ædium conſtruendarum, vel ad utilitatem frugum, & arborum, quæ eò loci ferendæ ſint, dimenſio ejuſdem areæ ex baſi horizontali æſtimanda eſſet, quæ aream multò minorem contineret, quàm convexa, vel inclinata ejuſdem ſuperficies. Ratio eſt, quia in hac conſideratione non quantitas, ſeu area ſpectanda eſt, ſed utilitas. Nam cum fruges, arbores, ædificia perpendiculariter aſſurgant, certum eſt, non plura conſiſtere poſſe in ſuperficie inclinata AB, quàm in horizontali CB.

TAB. VI. Fig. 163.

PRAXIS GEOMETRICA

Elementi VII. Lib. I.

Figurarum Planarum Reductio, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio.

Elementorum cognitio nullâ re magis aliâ juvari ſolet, quàm exercitatione, & praxi: quorum alterum facit, ut Elementa uſu trita, & familiaria reddantur, &, ſi quando opus ſit, vocata ſponte occurrant, ac Geometræ demonſtranti præſto ſint; praxis autem non evanidæ ſpeculationis opus eſſe declarat Elementorum cognitionem; immo verò fructu uberrimo, quaſi ſtimulis, Tirones excitat, ut altiùs eniti velint. Nihil ſanè in Geometria practica frequentiùs, quàm hæc planarum ſuperficierum transformatio, additio, ſubtractio, multiplicatio, ac præſertim diviſio, quam Geodæſiam vocant, & in camporum diviſione verſari ſolet.

In hac itaque Geometriæ practicæ parte tradenda delectum habuimus eorum tantùm Problematum, quæ ex præjectis Elementis pendent; reliqua verò, quæ doctrinam proportionum poſtulant, in ſecundam partem rejecimus. Ita fiet, ut ſubactum Tironum ingenium multò alacriùs ad alteram Geometriæ partem progrediatur.

Figurarum Planarum Reductio.

DEFINITIO.

304. *Figuram rectilineam alteri æqualem voco, quando utriusque superficies eundem numerum partium æqualium continet, quin ulla habeatur ratio & angulorum, & laterum.*

Problema I.

305. *Triangulum isosceles, seu æquilaterum* ABC *in aliud ipsi æquale rectangulum transformare.* TAB. VI. Fig. 164.

Resolutio. Demittatur perpendicularis AD, quæ basim BC bifariam secabit in puncto D (230.): fiat DE=BC; jungatúrque AE. Dico factum.

Demonstratio. Pendet ex n. 257. Nam duo triangula ABC, ADE & super æqualibus basibus, & inter easdem parallelas, hoc est, ad eumdem verticem A sunt constituta. Quod erat &c.

Problema II.

306. *Triangulo æquilatero* ABC *aliud æquale construere obtusangulum scalenum.* TAB. VI. Fig. 165.

Resolutio. Per verticem B ducatur indefinita BE basi AC parallela, ac præterea recta, prout libuerit, CE, modò angulum obtusum in C efficiat; jungatúrque AE. Dico factum.

Demonstratio eadem n. 257.

Problema III.

307. *Triangulo æquilatero* ABC *aliud æquale conſtruere iſoſceles, & obtuſangulum.*

Reſolutio. Per verticem B ducatur
Tab. BD parallela baſi AC; & à puncto C,
VI. intervallo CA, deſcribatur arcus, qui
Fig. parallelam BD ſecet in D; jungantúr-
165. que CD, DA. Dico factum.

Demonſtratio conſequitur ex eodem n. 257.

Problema IV.

Tab. 308. *Triangulo iſoſceli* ABC *aliud*
VI. *æquale triangulum ſcalenum conſtruere.*
Fig. *Reſolutio.* Per verticem A ducatur
166. EF parallela baſi BC &c.

Problema V.

309. *Triangulo dato* ABC *aliud æquale conſtruere hâc lege, ut tria hujus latera ſingula majora ſint tribus lateribus trianguli dati.*

Reſolutio. Producatur utrinque baſis
Tab. BC in D & E, ita ut recta DE dupla
VI. ſit ejuſdem baſis; & à punctis D & E
Fig. demittantur perpendiculares DF, EG
167. æquales ſemiſſi altitudinis AH dati trianguli; ducatúrque FG: erit parallelogrammum DFGE duplum trianguli dati ABC (n. 250.); ductíſque lineis HF, HG, triangulum FHG Problemati ſatisfaciet.

Problema VI.

310. *Triangulum datum* BAC *in aliud æquale transformare ad datam altitudinem.*

Resolutio. In data altitudine accipiatur punctum D pro vertice trianguli construendi. TAB. VI. Fig. 168. 169.

Casus I. Si punctum D sumptum fuerit, aut datum vel in latere BA trianguli BAC, vel in eodem latere producto, ducatur a puncto D ad oppositum angulum C recta DC, cui à vertice A ducatur parallela AE, quæ basi BC productæ, si opus sit, occurrat in E; junganturque puncta D & E rectâ DE. Dico triangulum BAC æquale esse triangulo constructo BDE, & ad datam altitudinem.

Demonstratio. Nam duo triangula DAC, DEC super eadem basi DC, & inter easdem parallelas sunt æqualia, quæ vel addantur triangulo BDC, ut in fig. 1., vel ab eodem subtrahantur, ut in fig. 2., duo, quæ inde oriuntur, triangula BAC, BDE erunt æqualia. Quod erat &c.

311. *Casus II.* Si punctum D vertex trianguli quæsiti sumptum non fuerit, aut datum in latere BA, etiam producto, trianguli dati BAC: ducatur à puncto extremo B basis BC per D recta indefinita BD, cui à vertice A occurrat in O recta AO parallela basi BC; TAB. VI. Fig. 170. 171.

tum a puncto O ad extremitatem alteram C ejusdem basis agatur recta O C. Dico triangulum B D E æquale esse dato ttiangulo B A C.

Demonstratio. Triangulum BAC æquatur triangulo B O C. Atqui per casum I., triangulum B O C æquatur triangulo B D E, cujus vertex D est in latere B O, etiam producto, si opus sit. Ergo triangulum B A C æquatur triangulo B D E. Quod erat &c.

Corollarium.

312. Si triangulum B A C transformare oporteat in aliud B D E ejusdem valoris, cujus altitudo data sit & angulus D B E pariter datus, ducatur recta indefinita B D O, quæ cum B C angulum quæsitum efficiat; tum in recta B D O accipiatur punctum D ad eam à basi B C altitudinem, quæ tribuenda sit triangulo construendo B D E; tum reliqua peragantur, ùt in Probl. præced.

Problema VII.

313. *Quadrilatero irregulari* A B C D *æquale triangulum construere, cujus vertex sit quodvis punctum* F *sumptum in latere* A B *dati quadrilateri.*

TAB. VII. Fig. 72. *Resolutio.* Ducantur F C, F D, quibus singulis parallelæ A M, B N à punctis A & B ductæ terminentur in punctis M & N lateris D C utrinque producti. Rectæ F M, F, N dabunt triangulum M F N æquale quadrilatero A B C D.

De-

Demonſtratio eadem, quæ n. 310. & 311.

Quòd ſi quadrilaterum ABCD eſſet magìs regulare, ductâ diagonali AC, eique parallelâ BN, junctâque AN, triangulum DAN ſatisfaciet Problemati. Fig. 173.

Problema VIII.

314. *Datis quadrato, parallelogrammo, rhombo, aut rhomboidi æquale triangulum conſtruere.* Fig. 174. 175. 176.

Reſolutio. Fiat BE=CB; ducaturque AE &c.

Problema IX.

315. *Trapezio dato* ABCD *æquale triangulum conſtruere.* Tab. VII.

Reſolutio. Si trapezium nullos habeat rectos angulos, producatur minus latus AB, cui occurat in F perpendicularis CF; dein à puncto A demittatur perpendicularis AK. Facilè demonſtrabitur, ut ſupra, quadrilaterum ABCD =AKCF=triangulo KFE. Fig. 177.

Si verò trapezium datum aliquos habeat angulos rectos, latus obliquum AB ſecetur bifariam in puncto K; ducatúrque GKF parallela lateri DC; & CB producatur in F. Ex notis principiis demonſtrabitur trapezium ABCD= quadrilatero GFCD=triangulo DFE. Fig. 178.

Problema X.

316. *Trapezoidem datum* ABCF *in æquale triangulum transformare.* Tab. VII.

Reſolutio. Ductâ diagonali CA, eíque Fig. 179.

parallelâ BG : junctâque CG facilè demonstrabis triangulum FCG esse quæsitum.

Problema XI.

317. *Quadrilatero dato* ABCD,
Tab. *quod unius anguli verticem introrsum ob-*
VII. *vertit, æquale triangulum construere.*
Fig. *Resolutio.* Jungatur DB, eíque pa-
180. rallela fiat AE, ductâque DE habebitur
triangulum CED æquale quadrilatero.

Problema XII.

Tab. 318. *Polygono irregulari* ABCDE *æ-*
VII. *quale triangulum construere.*
Fig. Habes in figura proposita & constru-
181. ctionem, & demonstrationem ex iisdem
principiis.

Problema XIII.

319. *Figuram quamvis rectilineam* ABCDE *in aliam ipsi æqualem* ABFE *transformare, uno latere deficientem.*

Tab. *Resolutio.* Extremitates duorum late-
VII. rum DE, DC anguli D jungantur re-
Fig. ctâ EC, cui per ejusdem anguli D ver-
182. ticem ducatur parallela DF, quæ ter-
183. minetur in F à latere BC, producto, si
opus sit; ducatúrque recta EF. Dico polygonum ABFE & æquale esse proposito polygono ABCDE, & ab eodem deficere uno latere.

Demonstratio. Nam duo triangula EDC, EFC super eadem basi EC, & inter easdem parallelas sunt æqualia. Quare.

re, si eidem figuræ ABCE addatur quodlibet horum triangulorum, ut in fig. 1., vel ab eadem subtrahatur, ut in fig. 2., invenietur figura proposita ABCDE æqualis novæ figuræ ABFE, quæ uno latere à prima deficit. Quod erat &c.

Corollarium. I.

320. Hinc omnis figura rectilinea in triangulum transformari potest. Nam per repetitas transformationes ejusdem in novas figuras à præcedente semper deficientes uno latere, tandem revocabitur in triangulum. Tab. VII.

Proposita sit reductio polygoni ABCDEF in triangulum IAH, cujus vertex A sit in circumferentia polygoni, & basis sit latus CD utrinque productum. Fig. 184. 185.

I. Ab extremitate D lateris CD ducatur diagonalis DF, quæ ab eodem polygono separabit triangulum DEF; rectæ DF agatur parallela EG, quæ occurret in G lateri CD producto; jungatúrque FG. Hâc primâ operatione habebitur polygono proposito æquale polygonum ABCGF, uno latero deficiens [n. 319].

II. Consideretur jam hoc unicè polygonum ABCGF, quod iterum reducendum erit ad aliud ipsi æquale, & uno latere deficiens, hoc pacto. Ducatur recta AG, cui parallela FH occurret

ret in H lateri CD producto; jungatúrque AH: habebitur novum polygonum ABCH = ABCGF = ABCD EF.

III. Cum autem hoc ultimum polygonum ABCH habeat latus AH, quod assumi potest pro latere trianguli IAH construendi, nihil superest aliud, quàm reductio suæ partis ABC. Ductâ itaque rectâ AC, eique parallelâ BI, quæ basi productæ DC occurrat in I, junctáque AI, transformabitur polygonum propositum ABCDEF in triangulum quæsitum IAH.

Scholion.

Notabis eamdem prorsus esse constructionem, sive polygonum datum reducendum sit in triangulum, cujus vertex sit in uno angulorum polygoni, sive reductio instituenda sit in triangulum, cujus vertex sit in uno latere polygoni.

Corollarium. II.

321. Consequitur hinc artificium reducendi polygonum quodvis in triangulum, cujus vertex sit in dato quovis puncto aut intra, aut extra polygonum, vel in triangulum datæ altitudinis, & unius anguli ad basim pariter dati.

Nam I. reducendum polygonum in triangulum, cujus vertex sit vel in uno angulorum, vel in uno latere ejusdem polygoni.

II. Hoc triangulum in aliud transformamabitur vel datæ altitudinis, & cujus vertex ſit in dato puncto, vel dati anguli ad baſim (n. 310. 311. & 312.)

Figurarum Planarum Additio.

Problema XIV.

322. *Data ſint triangula ſimul addenda, ut ſumma ſit triangulum datis æquale.*

Reſolutio. Si triangula ſint ejuſdem altidinis, ut AMB, BNC, COD, DPE, baſes eorum AB, BC, CD, DE componantur in rectam lineam AE: ſuper baſi AE, ad eandem altitudinem conſtruatur triangulum AME: quod æquale erit datis ſimul omnibus. TAB. VI. Fig. 141.

Si verò triangula data non ſit æquè alta, reducantur prius ad eamdem altitudinem, [n. 310.].

Problema XV.

323. *Data ſint polygona quæcunque ſimul addenda, ut ſumma ſit triangulum datis polygonis æquale.*

Reſolutio. Revocentur polygona ad totidem triangula æqualis altitudinis (n. 321.), quorum ſumma ſit triangulum [n. 322.].

Problema XVI.

324. *Figuras quaſcunque rectilineas transformare in unicum triangulum dati ad baſim anguli, & datæ altitudinis, aut cujus vertex ſit in dato puncto.*

Reſo-

Resolutio, Fiat triangulum datis simul omnibus figuris æquale (n. 323.): quod in aliud transformetur, cujus vertex sit in dato puncto [n. 310.], vel quod datam habeat altitudinem, & datum angulum (n. 312.).

Problema XVII.

325. *Datæ sint figuræ rectilineæ quæcunque simul addendæ, ut summa sit parallelogrammum.*

Resolutio. Fiat triangulum datis figuris rectilineis æquale [n. 324.]: quod transformetur in parallelogrammum &c.

Multiplicatio.

Problema XVIII.

326. *Datum triangulum* AMB *per quemlibet numerum* 2, 3, 4, 5 *&c, multiplicare, ita ut duplum, triplum, quadruplum, & sic in infinitum, multiplum constitutatur.*

TAB. Hoc est, invenire oporteat triangu-
VII. lum, puta, quadruplum dati trianguli
Fig, AMB.
186. *Resolutio.* Producatur basis AB ad E, ita ut AE sit quadrupla ipsius AB; ducatúrque ME. Dico factum.

Demonstratio. Nam quatuor triangula, quæ designantur in apposita figura, & æqualibus basibus insistunt, & habent eandem altitudinem. Ergo &c. Quod erat &c.

Pro-

Problema XIX.

327. *Triangulum datæ altitudinis invenire, quadruplum, aut pro libito multiplum datæ cujusvis figuræ rectilineæ.*

Resolutio. Figura rectilinea transformetur in triangulum datæ altitudinis (n. 321.), cujus quadruplum, aut quâvis ratione multiplum inveniatur per præced. Probl.

Subtractio.

Problema XX.

328. *Datum sit triangulum* bad *à triangulo* BAC *subtrahendum, ut maneat triangulum.*

Resolutio. Si duo triangula B A C, *b a d* sint æquè alta, transferatur basis *bd* in BC, & ducatur A D. Dico factum. Utì constat ex schemate. TAB. VII. Fig, 187.

Si verò triangula data non sint æquè alta, revocentur prius ad eamdem altitudinem.

Problema XXI.

329. *Datum sit polygonum ab alio polygono subtrahendum, ut differentia, seu excessus sit triangulum.*

Resolutio. Data polygona revocentur ad duo triangula æquè alta; tum operaberis, ut in Probl. præced.

Problema XXII.

330. *Datum triangulum à quovis polygono subtrahere, ductâ in eodem polygono rectâ lineâ à puncto dato* F *in uno suorum laterum,*

Resolutio. Triangulum, quod à po-
Tab. lygono ABCDE subtrahendum est,
VII. transformetur in triangulum MOP, cu-
Fig. jus altitudo supra basim MP æquetur
188. altitudini puncti F supra latus AB conti-
189. guum lateri, in quo punctum F sump-
tum fuerit. Hoc posito, accipiatur in latere AB, producto, si opus fuerit, portio AG æqualis basi MP trianguli MOP; ducatúrque FG a dato puncto F. Erit triangulum AFG æquale triangulo MOP subtrahendo.

Cum autem in hac subtractione tres præcipui casus possint contingere, hos singillatim exponam.

331. *Casus I.* Si basis MP trianguli MOP non excedat latus AB, & consequenter punctum G cadat super latus AB, Problema jam erit resolutum.

Si verò basis MP trianguli MOP
Tab. major fuerit latere AB, hoc est, si pun-
VII. ctum G sit in latere AB producto, du-
Fig. catur recta FB, eique parallela GH,
188. quæ vel ipsi lateri AC, vel eidem pro-
190. ducto occurret in H. Ex quo duo diversi
casus oriuntur.

332. *Casus II.* Si punctum H sit in latere BC continguo lateri AB, jungatur recta FH, quæ à dato polygono auferet quadrilaterum FABH æquale dato triangulo MOP.

Demonstratio. Nam ductâ rectâ GF, triangula FBG, FBH super eadem basi, & inter easdem parallelas constituta, erunt

æqualia;

æqualia; utrique addatur idem triangulum AFB: erit quadrilaterum FABH æquale triangulo FAG, & conſequenter æquale triangulo dato MOP. Quod erat &c.

333. *Caſus III.* Sin autem recta GH parallela ipſi FB occurrat in H lateri BC producto, ducatur recta FC, eíque parallela HI, quæ lateri adjacenti occurrat in I; jungatúrque FI, quæ à dato polygono abſcindet pentagonum FABCI æquale dato triangulo MOP.

Demonſtratio. Nam ductâ rectâ FH, habebitur, ut in Caſu II., quadrilaterum FABH æquale triangulo FAG, hoc eſt, per Conſtructionem, triangulo MOP. Atqui triangula FCI, FCH ſuper eadem baſi FC, & inter eaſdem parallelas ſunt æqualia. Ergo, ſi utrique addatur commune quadrilaterum FABC, fiet FABCI=FABH= MOP. Quod erat. &c. TAB. VII. Fig. 191. 192.

DE GEODÆSIA.

334. Geodæſia dici ſolet ea Geometriæ Practicæ pars, quæ terrarum diviſionem docet. Omnis autem terrarum tractus, quem dividere oporteat, vel in formam trianguli conformatur, vel quadrilateri, vel polygoni. Et quamvis camporum figuræ interdum ſint curvilineæ, tamen veluti rectilineæ in praxi conſiderari poterunt, ſi ab illis parum differant, vel ad rectilineas re-

duci, dividendo latera curva, quibus terminantur, in plures partes minores, quæ pro lineis rectis assumi possint sine errore sensibili.

Hæc autem Geodæsiæ pars eorum unicè problematum resolutionem tradit, quæ ex præjactis Elementis proficiscuntur. Nam ex tradita proportionum doctrina in secunda horum Elementorum parte, multò uberior problematum, quæ ad Geodæsiam spectant, resolutio derivabitur. Cum enim omnis nostra tractatio eò spectet, ut theoriam praxi conjungamus, & quid ex quoque Elemento consequatur, quod ad praxim deduci possit, explicemus, bipartitam etiam Geodæsiam invehere coacti fuimus, & Tironum satietati occurrere, quibus illud semper in ore: cui usui? præsertim in theoria non intermissa.

Triangulorum Divisio.

Problema XXIII.

335. *Triangulum* ABC *in quotlibet partes æquales dividere per lineas rectas à dato angulo* C *ductas.*

TAB. VII. Fig. 193. *Resolutio.* Latus oppositum AB dividatur, puta, in tres partes æquales; ab angulo dato C ad singula divisionum puncta ducantur rectæ CD, CE, quæ datum triangulum divident in tres partes æquales.

Eodem modo operaberis, si major divisio requireretur. Pro-

Problema XXIV.

336. *Triangulum* ABC *in quotlibet partes æquales dividere, nimirum, tres, per lineas rectas à dato ſuper uno latere puncto* D *ductas.*

Reſolutio. Dividatur latus AB in tres partes æquales in punctis E & F; jungatúrque recta CD, cui per diviſionum puncta E & F ducantur parallelæ EG, FH, quæ lateribus AC, BC occurrent in punctis G & H. Rectæ GD, HD datum triangulum trifariam divident, TAB. VII. Fig. 194.

Demonſtratio. Jungantur rectæ CE, CF. Duo triangula GEC, GED ſuper eadem baſi GE, & inter eaſdem parallelas ſunt æqualia. Subtrahatur commune triangulum GIE: ſupererit triangulum GIC æquale triangulo DIE. Utrinque addatur trapezium AEIG: habebitur triangulum AGD æquale triangulo ACE, nimirum, tertiæ parti dati trianguli ABC per problema præcedens.

Similiter demonſtrabitur triangulum BDH, æquale triangulo BCF, hoc eſt, tertiæ parti ejuſdem dati trianguli ABC. Quod erat &c.

Problema XXV.

TAB. VII. Fig. 195.

337. *Triangulum* ABC *in tres partes æquales dividere per lineas à tribus angulis* A, B, C *ductas.*

Reſolutio. Cujusvis lateris, puta, AB, ſumatur tertia pars AD; & à puncto D ducatur DE parallela lateri adjacenti AC; recta DE secetur bifariam in F, à quo ad trium angulorum vertices A, B, C ducantur rectæ FA, FB, FC. Dico factum.

Demonstratio. Jungatur CD. Triangulum AFC æquatur triangulo ADC. Atqui (n. 335.) triangulum ADC est tertia pars trianguli ABC, quippe basis AD per Constructionem est tertia pars basis AB. Ergò triangulum AFC est tertia pars dati trianguli ABC. Quare duo reliqua triangula AFB, BFC simul sumpta conficiunt duas tertias partes ejusdem trianguli ABC. Atqui dicta triangula AFB, BFC sunt inter se æqualia; nam duo triangula BFD, BFE, & pariter duo reliqua AFD, CFE sunt inter se æqualia, singula singulis, quippe quæ æqualibus basibus insistunt, & inter easdem parallelas. Ergò duo triangula AFB, BFC æquant singula tertiam partem dati trianguli ABC. Quod erat &c.

Problema XXVI.

338. *In dato latere* AC *trianguli* ABC *invenire punctum* D, *ex quo triangulum dividi possit in totidem, quot libuerit, partes æquales, puta, quatuor.*

Resolutio. Dati lateris AC accipiatur AD quarta pars ex conditione Problematis. Punctum D erit quæsitum.

TAB. VII. Fig. 196.

Demonstratio. Jungatur BD. Triangulum ABD erit quarta pars trianguli li ABC. Reliquum itaque triangulum B DC (n. 335.) dividatur in tres partes æquales: habebitur propoſitum triangulum ABC in quatuor partes diviſum per lineas DB, DE, DF. Quod erat &c.

Problema XXVII.

339. *In area trianguli* ABC *invenire punctum* H, *ex quo triangulum dividi poſſit in quot libuerit partes æquales, puta, quatuor.* Tab.

Reſolutio. Lateris AC accipiatur, ut VII. ante, quarta pars AD; & ſimiliter la- Fig. teris AB quarta pars AE, quandoqui- 197. dem triangulum ABC quadrifariam dividere oportet; tum à punctis D & E lateribus AB, AC parallelæ ducantur DF, EG. Punctum communis interſectionis H erit quæſitum.

Demonſtratio. Nam ductis HA, HB, HC, duorum triangulorum quodlibet AHB, AHC erit ex dictis quarta pars propoſiti trianguli ABC; & conſequenter triangulum BHC erit ejuſdem ſemiſſis; reliquum ergò eſt, ut hoc ſecetur bifariam rectâ HI; & ſic inventum erit punctum H. Quod erat &c.

Quadrilaterum Diviſio.

Problema XXVIII.

340. *Parallelogrammum* ABCD *in quotlibet partes æquales dividere per line-* Tab. *as uni lateri parallelas.* VII.

Reſolutio. Dividatur latus AB in Fig.

 quot- 198.

quotlibet partes æquales; & à punctis diviſionum excitentur parallelæ lateri AD; eritque reſolutum Problema.

Problema XXIX.

Tab. VII. Fig. 199. 341. *Parallelogrammum* ABCD *in quatuor æquales partes dividere per duas rectas duobus lateribus* AB, AD *parallelas.*

Reſolutio. Latera oppoſita dividantur biſariam in punctis E & F, G & H; junganturque EF, GH. Dico factum.

Corollarium.

Tab. VII. Fig. 200. 242. Duæ diagonales AC, BD dividunt parallelogrammum in quatuor triangula iſoſcelia æqualia; ut facilè demonſtrari poteſt, ductis per centrum I rectis GH, EF, parallelis duobus lateribus AB, AD.

Conſtat præterea parallelogrammum ABCD diviſum iri hac ratione in octo partes æquales, ſive triangula, quorum vertex communis eſt in centro I.

Hinc ſequitur parallelogrammum quodvis ab eodem centro I dividi poſſe in quemlibet numerum pariter parem partium æqualium.

Voco autem numerum pariter parem, qui dividi poteſt exactè per 4.

Problema XXX.

Tab. VII. Fig. 201. 343. *Dividere parallelogrammum* ABCD *in quemlibet partium æqualium nu-*

numerum parem per lineas rectas ab angulo dato C ductas.

Resolutio. Ducatur diagonalis CA, quæ parallelogrammum in duo æqualia triangula ACD, ACB dividet (n. 249.): Hæc per Probl. I. dividantur singula in tres partes æquales. Dico factum.

Corollarium.

Si demantur & diagonalis AC, & duæ rectæ CF, CH, perspicuum est divisum iri parallelogrammum in tres partes æquales. Fig. 201.

Problema XXXI.

344. *Ex dato super uno latere puncto* E *duas rectas ducere, quæ parallelogrammum* ABCD *dividant in tres partes æquales.*

Resolutio. Latus AB trifariam dividatur in punctis F & G, per quæ ducantur alteri lateri AD parallelæ FH, GI, quæ bifariam dividantur in punctis K & L; tum ex dato puncto E per K & L ductæ rectæ EM, EN trifariam divident parallelogrammum ABCD. TAB. VII. Fig. 202.

Demonstratio. Duo triangula EFK, MHK sunt inter se æqualia (n. 230.); quæ, si separatim addantur eidem pentagono AFKMD, fiet trapezoides AEMD æqualis parallelogrammo AFHD, hoc est, tertiæ parti ejusdem parallelogrammi ABCD. Eodem modo demonſtrabitur trapezoidem BEN C æquari parallelogrammo BCIG, ſeu tertiæ parti parallogrammi ABC D. Ex quo jam conſtat triangulum M EN æquari pariter tertiæ parti parallelogrammi ABCD. Quod erat &c.

Corollarium.

Fig. 203. Si recta EB eſſet tertia pars lateris AB, ducatur EF parallela lateri AD, & diagonalis ED.

Problema XXXII.

345, *Trapezoidem* ABCD *in quotlibet partes æquales, puta, tres, dividere.*

TAB. VII. Fig. 204. *Reſolutio.* Duo latera parallela AB, CD, dividantur ſingula in tres æquales partes in punctis E, F, G, H; junctæque rectæ EG, FH divident trapezoidem ABCD in tres trapezoides inter ſe æquales AEGD, EFHG, FBCH.

Demonſtratio. Nam ductis diagonalibus AG, EH, FC, manifeſtum eſt triangula, ex quibus trapezoides componuntur, eſſe inter ſe æqualia, ſingula ſingulis: quippe quæ ſuper æqualibus baſibus, & inter eaſdem parallelas conſtituuntur. Quod erat &c.

Problema XXXIII.

246, *Trapezoidem* ABCD *per rectam ab angulo* A *ductam bifariam dividere.*

TAB. VII. Fig. 205. *Reſolutio.* Latus angulo dato adjacens AB, parallelum oppoſito lateri CD, pro-

producatur in E, donec AE æquetur ipsi CD; jungatúrque ED, quæ producta occurrat in F alteri lateri BC pariter producto; dein recta BF secetur bifariam in G; ducatúrque AG. Hæc bifariam dividet trapezoidem ABCD.

Demonstratio. Jungantur AF, & diagonalis AC, quæ parallela erit rectæ EF (n. 244.); nam per Constructionem duæ rectæ AC, EF conjungunt duas rectas AE, DC æquales, & parallelas. Duo ergò triangula AFC, ADC sunt inter se æqualia; & ablato communi triangulo AIC, supererit triangulum AID æquale triangulo FIC. Utrique æqualium addatur trapezium ABCI, fiet trapezoides ABCD æqualis triangulo ABF, cujus semissis est triangulum ABG; nam basis BG per Constructionem est semissis basis BF. Itaque triangulum ABG est semissis propositæ trapezoidis. Quod erat &c.

Problema XXXIV.

347. *Trapezoidem* ABCD *bifariam dividere per rectam ductam à dato super ejus basi* AB *puncto* E. Tab. VII. Fig. 206.

Voco autem basim trapezoidis alterutrum duorum laterum, quæ sunt parallela, uti AB.

Resolutio. Super basi AB, productâ, si opus est, accipiatur EF æqualis rectæ EB; ducatúrque à puncto A recta AG parallela rectæ FD; dein recta GC ſecetur bifariam in puncto H, à quo ducta recta H E Problema reſolvit.

Demonſtratio. Jungantur rectæ E G, F G, E C. Duo triangula A D G, A F G ſuper eadem baſi, & inter easdem parallelas conſtituta, ſunt æqualia. Auferatur commune triangulum A I G: reliquum erit triangulum A I F æquale triangulo D I G. Utrique ſeparatim addatur idem trapezium A I G E: fiet trapezoides A D G E æqualis triangulo E G F, & conſequenter ttiangulo E C B, propter æquales baſes E B, E F per Conſtr. Jam verò, quoniam duo triangula G E H, C E H ſunt pariter inter ſe æqualia, quippe quæ baſes habent æquales G H, C H, per Conſtr.: hinc ſequitur trapezoidem A E H D æqualem fore trapezoidi B E H C. Quod erat &c.

Problema XXXV.

348. *Ab angulo dato* D *rectam ducere, quæ trapezium* A B C D *bifariam dividat.*

Reſolutio. Diagonalis A C oppoſita angulo dato D ſecetur bifariam in E; ducaturque E F parallela alteri diagonali B D. Recta D F Problema reſolvet.

TAB. VII. Fig. 207. *Demonſtratio.* Quoniam per Conſtr. rectæ E A, E C ſunt æquales, duo triangula E D A, E D C ſunt æqualia, æquè ac duo E B A, E B C. Ergò duo trapezia A D E B, C D E B ſunt pariter

inter

inter ſe æqualia. Jam verò trapezium ADEB eſt æquale triangulo ADF; & trapezium CDEB eſt æquale trapezio BCDF. Nam duo triangula DIE, BIF ſunt inter ſe æqualia: uti conſtabit, ſi triangulum DIB auferatur à duobus triangulis DEB, DFB pariter æqualibus propter parallelas BD, EF per Conſtr. Itaque triangulum ADF eſt æquale trapezio BCDF. Quod erat &c.

Corollarium.

349. Ex eadem figura conſtare etiam facilè poteſt, quâ ratione trapezium bifariam dividi poſſit per duas rectas lineas à duobus angulis oppoſitis datis D & B ductas. Nam, ſi diagonalis AC ſecetur bifariam in E, junganturque EB, ED, ſatisfiet Problemati.

Problema XXXVI.

350. *Trapezium* ABCD *ex dato ſuper uno latere* AB *puncto* E *bifariam dividere.*

Reſolutio. Jungantur rectæ DE, DB: diagonali DB ducatur à puncto C parallela CF, quæ lateri AB producto occurrat in F. Recta DF efficiet triangulum ADF æquale trapezio propoſito ABCD. Nam propter parallelas DB, CF, duo triangula DCB, DFB ſunt æqualia; ſublatóque communi triangulo BOD, erunt duo reliqua BOF, DOC æqualia; quæ, ſi ſeparatim eidem Tab. VII. Fig. 208.

dem

dem trapezio DABOD addantur, fiet triangulum ADF æquale trapezio ABCD.

Jam verò ſecetur bifariam baſis AF in puncto G, ducatúrque DG: erit triangulum ADG ſemiſſis trianguli ADF, ſeu trapezii ABCD. Denique à puncto G ducatur recta GH parallela rectæ DE; & jungatur EH. Dico hanc dividere bifariam trapezium ABCD.

Demonſtratio. Quoniam duæ rectæ DE, GH ſunt parallelæ per Conſtr., duo triangula GHD, GHE ſunt inter ſe æqualia; ſublatóque communi triangulo GHI, erit reliquum triangulum DIH æquale reliquo GIE. Utrumque ſeparatim addatur eidem trapezio AEID: fiet trapezium AEHD æquale triangulo ADG, & conſequenter ſemiſſi trapezii ABCD. Quod erat &c.

Problema XXXVII.

351. *Trapezium* ABCD *in tres æquales partes dividere per duas rectas à datis ſuper uno latere* AB *duobus punctis* E *&* F *ductas,*

Reſolutio. Ab angulo oppoſito C ducatur diagonali BD parallela CG, quæ lateri producto AB occurrat in G, à quo ad alterum oppoſitum angulum D ductâ rectâ DG, habebitur triangulum ADG æquale trapezio ABCD per Probl. præced. Quamobrem, ſi trifari-

TAB. VII. Fig. 209.

am

am dividatur in punctis H & I basis A G, ducantúrque rectæ D H, D I, erit quodvis ex tribus triangulis A D H, H D I, I D G tertia pas trianguli A D G, seu trapezii propositi A B C D. Denique à puncto H ducatur H K parallela rectæ D E, & à puncto I recta I L parallela ipsi D F; jungantúrque rectæ E K, F L: quæ trapezium propositum A B C D divident in tres partes æquales.

Demonstratio. Quoniam duæ rectæ D E, H K sunt parallelæ per Constr., erunt duo triangula H D K, H E K inter se æqualia. Quare, si ab unoquoque auferatur commune triangulum H O K, supererit triangulum D O K æquale triangulo E O H. Addatur utrinque trapezium A E O D: fiet trapezium A E K D æquale triangulo A D H, hoc est, tertiæ parti trapezii A B C D. Eodem modo demonstrabitur trapezium A F L D æquari triangulo A D I, hoc est, duabus tertiis partibus trapezii A B C D; hinc facilè infertur trapezium quodlibet E L, F C esse tertiam partem dati trapezii ABCD. Quod erat &c.

Problema XXXVIII.

352. *Trapezoidem* A B C D *in totidem, quot libuerit, partes æquales dividere per lineas parallelas alterutri duorum laterum* A D, *vel* B C, *quæ non sint invicem parallela.*

Reso-

TAB. VII. Fig. 210. *Resolutio.* Partiri oporteat, puta, in tres partes æquales propositam trapezoidem per lineas parallelas lateri AD. Secetur bifariam aliud oppositum latus BC in puncto E, à quo ducta parallela EF trifariam dividatur in punctis G & H: per quæ, & per punctum E ductæ lateri AD tres parallelæ IK, LM, NO divident trapezoidem propositam in tres partes æquales.

Demonstratio. Quoniam duo triangula BEN, CEO & sunt æquiangula, & latus EB unius æquatur lateri EC alterius, erunt inter se æqualia. Ergò trapezoides BCML æquatur parallelogrammo MLNO; & consequenter trapezoides tota ABCD æquatur toti parallelogrammo ANOD. Quia verò parallelogramma singula AK, IM, LO sunt tertia pars parallelogrammi totalis AO, erunt etiam tertia pars propositæ trapezoidis ABCD. Quod erat &c.

Multilaterum Divisio.

LEMMA.

TAB. VII. Fig. 211. 353. *Polygonum* ABCDE *in triangulum convertere, cujus vertex* D *sit in dato angulo.*

Resolutio. Ex dato puncto D ad A ducatur diagonalis DA, eíque parallela EF, occurrens lateri AB producto in F; jungatúrque DF, quæ quadrilaterum BCDF efficiet æquale pentagono dato A

BC

BCDE. Nam duo triangula AKF, DKE ſunt inter ſe æqualia; quod facilè oſtenditur, ſi commune triangulum AKD utrimque auferatur à duobus triangulis AED, AFD inter ſe æqualibus propter parallelas AD, EF.

Reliquum jam eſt, ut quadrilaterum BCDF in triangulum transformetur; quod facilè præſtabitur, ductâ ſimiliter diagonali DB, eíque parallelâ CG, junctáque DG. Nam propter æqualitatem triangulorum CLD, BLG, erit triangulum FDG æquale quadrilatero BCDF, & conſequenter polygono ABCDE. Quod erat &c.

Hâc methodo intelligis, opinor, reduci poſſe in triangulum figuram quamlibet multilateram, ſi nempe transformetur in figuram uno latere minorem, atque ita deinceps, donec ad triangulum ventum ſit, uti in hoc Lemmate, & alibi n. 320. & 321. fieri vidimus.

Problema XXXIX.

350. *Datum polygonum* ABCDE *in tres partes æquales partiri per lineas rectas à dato angulo* D *ductas.*

Reſolutio. Fiat per Lemma, ut in fig. præced., reductio polygoni in triangulum FDG, cujus vertex D; deinde trianguli baſis FG in tres partes æquales dividatur in punctis H & I. Dico à rectis DH, DI diviſum iri pentagonum datum in tres partes æquales.

Demon-

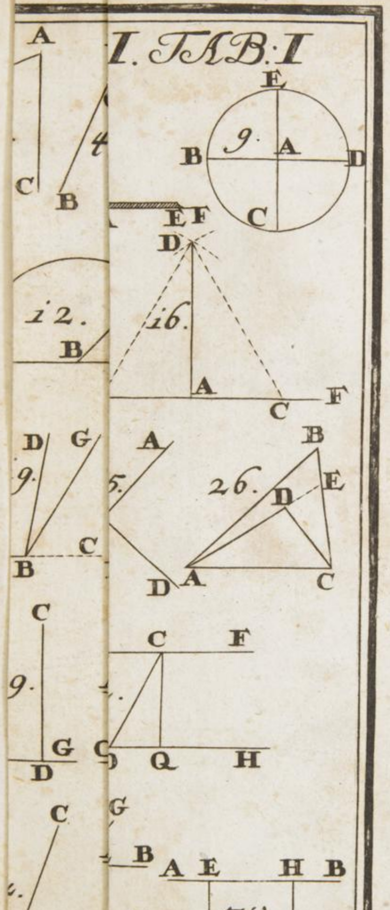
Demonstratio. Triangula singula F D H, HDI, ID G sunt tertia pars trianguli F D G per Constr., & consequenter dati pentagoni ABCDE. Nam triangulum F D H æquatur trapezio AEDH, & triangulum IDG trapezio BCDI, ut ex dictis in Lem. constare potest. Itaque &c.

Problema XL.

TAB. VII. Fig. 212. 355. *Datum polygonum* ABCDE *in quotlibet partes æquales partiri per lineas rectas ab angulo dato* D *ductas.*

Resolutio. Polygonum transformetur in triangulum F D G per Lemma: basis F G dividatur, puta, in quatuor partes æquales in punctis H, I, K; junctísque DH, DI, DK, quatuor triangula F D H, HDI, IDK, KDG erunt singula quarta pars trianguli F D G, & consequenter pentagoni ABCDE. Quia verò punctum H cadit extra latus AB, reducendum erit triangulum HDI ad trapezium ALDI; quod facilè præstabitur, ductâ HL parallelâ rectæ AD &c.

Verùm hæc Geodæsiæ pars uberiùs promovebitur post traditam proportionum doctrinam.



Fer: Lang sc: Colon: 1759.