ELEMENTUM VI.

De Quadrilateris.

DEFINITIONES.

236. TRILATERAM *superficiem excipit Quadrilatera, quatuor rectis lineis, quæ latera vocantur, undique terminata, totidémque angulos continens.* Hæc pro varia laterum, & angulorum ratione sortitur diversa nomina.

TAB. VI. Fig. 128. 237. *Quadrilaterum* ABCD, *cujus bina opposita latera sunt parallela, nimirum,* AD *ipsi* BC, *&* AB *ipsi* DC, *vocatur Parallelogrammum.*

At quadrilaterum, cujus non omnia opposita latera sunt parallella, dici solet Trapezium.

Fig. 128. 129. 238. *Parallelogrammum, cujus omnes anguli sint æquales, & consequenter recti (n. 49.), vocatur Rectangulum; illud verò, cujus omnes anguli non sunt æquales, Rhomboides dicitur.*

Fig. 130. Fig. 128. 239. *Rectangulum, cujus omnia latera sunt inter se æqualia, Quadratum nuncupatur; cujus autem opposita tantùm latera æqualia sunt, Rectangulum simpliciter dicitur.*

Fig. 131. 240. *Rhomboides, cujus omnia latera sunt inter se æqulia, Rhombus nominatur.*

Corollarium.

241. Quadratum & æquilaterum, & rectangulum est.

Rhom-

Rhombus figura eſt æquilatera, ſed non rectangula.

Rhomboides neque æquilatera eſt, neque rectangula.

242. *Parallelogrammi Diameter, ſive diagonalis eſt recta* AC *per angulos oppoſitos ducta.* Fig. 129.

243. *Recta* AE, *ſeu* BF *ducta ab uno latere* AB *perpendiculariter in latus oppoſitum* DC, *productum, ſi opus ſit, dicitur Altitudo parallelogrammi.* TAB. VI. Fig. 132.

Scholion.

Parallelogrammum deſignari ſolet non modò quatuor litteris, ſed interdum duabus ad oppoſitos angulos conſtitutis.

PROPOSITIO I.

244. Theorema. *Omne quadrilaterum* ABCD *habens duo oppoſita latera* AB, DC *æqualia, & parallela, habet etiam duo reliqua* AD, BC *pariter æqualia & parallela*, Euclid. lib. 1. prop. 33. TAB. VI. Fig. 129.

Demonſtratio Ductâ ad oppoſitos angulos diagonali AC, cum rectæ AB, CD ſint parallelæ, anguli alterni BAC, DCA erunt æquales (n. 110.) Duo autem latera AB, CD per hypotheſin ſunt æqualia; & latus AC eſt commune utrique triangulo BAC, DCA. Ergò (n. 229.) duo triangula BAC, DCA erunt perfectè æqualia, hoc eſt, & mutuò æquiangula. Itaque erit BC = AD; & angulus ACB = CAD alterno; &

consequenter (n. 113.) rectæ BC, AD sunt parallelæ. Quod erat &c.

Corollarium. I.

245. Quadrilaterum, cujus duo opposita latera sunt æqualia, & parallela, est parallelogrammum.

Corollarium II.

TAB. VI. Fig. 133. 246. Quoniam duæ perpendiculares AD, BC eidem rectæ EH, sunt parallelæ inter se [n. 91.], si præterea eædem perpendiculares AD, BC sint pariter inter se æquales, erunt rectæ AB, EH, quæ illas intercipiunt, parallelæ.

Corollarium III.

TAB. VI. Fig. 134. 135. 247. Ergò, si plura triangula, aut parallelogramma EAF, GBH super eâdem rectâ EH, & ad eandem partem constituta habeant altitudines AD, BC æquales, rectæ AB, EH, quæ illas intercipiunt, erunt parallelæ (n. 246.).

PROPOSITIO II.

TAB. VI. Fig. 129. 248. Theorema. *Omne quadrilaterum, cujus bina opposita latera sunt parallela, & idcirco parallelogrammum dicitur, habet etiam bina opposita latera æqualia.* Euclid. lib. 1. prop. 34. pars. 1.

Demonstratio. Ducatur diameter AC. Quoniam AB, DC sunt parallelæ, erunt anguli alterni BAC, DCA æquales [n. 110.]. Rursus, quia AD, BC sunt parallelæ,

rallelæ, erunt pariter & anguli alterni BCA, DAC æquales. Itaque, cum duo anguli BAC, BCA trianguli ABC æquales sint duobus angulis DCA, DAC alterius trianguli ADC, uterque utrique, & latus AC dictis angulis adjacens commune utrique triangulo, erunt [n. 230.] duo triangula perfectè æqualia; & consequenter AB = CD, & BC = DA. Quod erat &c.

Corollarium I.

249. Ergò diameter AC dividit parallelogrammum ABCD in duo æqualia triangula BAC, DCA. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 34. *pars* 2. Fig. 129.

Corollarium. II.

250. Et parallelogrammum ABCD est duplum trianguli DCA habentis eandem basin, & altitudinem. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 41.

PROPOSITIO III.

251. Theorema. *Omne quadrilaterum* ABCD, *cujus bina opposita latera sunt æqualia, habet etiam eadem parallela, & consequenter parallelogrammum est.* TAB. VI. Fig. 129.

Demonstratio. Ductâ ad oppositos angulos rectâ AC, duo triangula ABC, ADC sunt per hypothesin inter se mutuò æquilatera; ergò & æquiangula [n. 232.]: æquales nimirum erunt anguli BAC, DCA, & anguli BCA, DAC;

 ergò

ergò cùm ſint alterni, tam rectæ AB, CD, quàm rectæ BC, AD ſunt parallelæ (n. 113.). Quod erat &c.

PROPOSITIO IV.

TAB. 252. Theorema. *Parallelogramma* A
VI. BCD, MBCN *ſuper eadem baſi* BC,
Fig. *& inter eaſdem parallelas conſtituta, ſunt*
136. *æqualia.* Euclid. lib. 1. prop. 35. & 36.
137. *Demonſtratio.* In utroque caſu, quem figura exhibet, triangula ABM, DCN ſunt ſibi mutuò æquilatera. Nam AB = DC, latera nimirum oppoſita ejusdem parallelogrammi ABCD (n. 248.) Rurſus BM = CN eadem de cauſa; & pariter AD = BC, & BC = MN; ergò AD = MN; ſublatóque utrinque MD, ut in caſu primo, vel utrinque addito MD, ut in caſu ſecundo, erit AM = DN. Duo itaque triangula ABM, DCN ſunt ſibi mutuò æquilatera, & perfectè æqualia. Quare in caſu primo, ſi duobus hiſce triangulis addatur commune trapezium MBCD, fiet parallelogrammum ABCD æquale parallelogrammo MBCN. Vel in caſu ſecundo ab iisdem æqualibus triangulis demptô communi triangulô DOM, erunt duo reſidua quadrilatera ABOD, MOCN inter ſe æqualia; & rurſus additô communi triangulô BOC erit parallelogrammum ABCD æquale parallelogrammo MBCN. Quod erat &c.

Corol-

Corollarium I.

253. Duo parallelogramma ſunt æqualia, ſi habeant baſes æquales, & altitudines æquales.

Nam & conſtitui poterunt ſuper eandem baſim, & erunt inter easdem parallelas (n. 247.).

Corollarium II.

254. Duo parallelogramma ABCD, OBCP non ſunt æqualia, ſi baſim quidem habeant eandem BC, ſed intra easdem parallelas AN, BZ non ſint conſtituta. TAB. VI. Fig. 138.

Nam ABCD=MBCN [n. 252.]. Atqui MBCN> vel <OBCP. Ergò ABCD> vel <OBCP.

Corollarium III.

255. Parallelogramma æqualia ſuper baſes æquales, vel eandem, ſunt inter easdem parallelas.

Corollarium IV.

256. Et, ſi duo parallelogramma inter easdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cujus baſis major eſt, majus erit. Et contrà, ſi duo parallelogramma ſint inæqualia inter easdem parallelas, baſis majoris major erit.

Corollarium V.

257. Duo triangula BAC, BMC ſuper eadem baſi BC conſtituta, & in eiſ-

dem parallelis AN, BZ, inter ſe ſunt æqualia. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 37.

Tab. Ducatur C D parallela lateri B A, &
VI. CN parallela lateri B M: erit parallelo-
Fig. grammum $ABCD = MBCN$ [n. 252.].
139. Sed horum dimidia ſunt triangula B A C, B M C (n. 249. & 250.); ergò ſunt æqualia. Triangula igitur ſuper eadem baſi &c.

Corollarium VI.

Tab. 258. Triangula igitur BAC, BOC
VI. nôn ſunt æqualia, ſi habeant quidem ba-
Fig. ſin eandem BC, ſed inter easdem paral-
140. lelas AN, BZ non ſint conſtituta.

Nam triangulum $BAC = BMC$ per Corol. 5. Sed $BMC >$ aut $< BOC$. Ergò pariter $BAC >$ aut $< BOC$.

Corollarium VII.

Fig. 259. Hinc, ſi duo triangula BAC,
140. BMC ſuper eâdem baſi BC conſtituta, ſint æqualia, erunt inter easdem parallelas. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 39. & 40.

Duo triangula ſunt pariter æqualia, ſi æquales habeant baſes, & altitudines æquales.

Corollarium VIII.

Tab. 260. Ergò, ſi plura ſint triangula A
VI. MB, BNC, COD, DPE &c., quo-
Fig. rum baſes ſingulæ AB, BC, CD, DE
141. eandem rectam AE conſtituant, & omnium altitudo ſit eadem, omnia ſimul ſump-

fumpta æqualia erunt soli triangulo AM E, cujus altitudo sit eadem, & basis & AE summa sit basium triangulorum omnium.

Nam, si omnia hæc triangula sunt ejusdem altitudinis, poterunt inter easdem parallelas MP, AE constitui. Ducantur MC, MD, ME. Triangula AMB, BNC, COD, DPE æqualia erunt triangulis AMB, BMC, CMD, DME, singula singulis. Atqui AMB + BMC + CMD + DME = AME. Ergò AMB + BNC + COD + DPE = AME.

Corollarium IX.

261. Ex eodem Theoremate opportunè P. Boschovich in suis elementis ostendit nullam esse quantitatem ita tenuem, quâ minor dari non possit. Cum enim AN in infinitum produci possit, puncto N magìs recedente à puncto A, dummodò sumatur MN = BC = AD, semper parallelogrammum BMNC utcunque productum æquale erit parallelogrammo ABCD; unde apparet nullum in eo producendo, vel attenuando limitem inveniri. TAB. VI. Fig 139.

Dimensio cujusvis Figuræ Trilateræ, & Quadrilateræ.

262. Observavimus Lib. 1. n. 9. Comment. Arith. univ. (Nos Lib. 1. Prælectionum Mathem. n. 30. & sequentibus)

morem invaluiſſe apud Geometras, ut geneſis, ſeu deſcriptio ſuperficiei per lineam ſuper aliâ lineâ ad rectos angulos ſe moventem, dicatur multiplicatio iſtarum linearum. Nam, quamvis linea utcunque multiplicata non poſſit evadere ſuperficies, adeóque hæc ſuperficiei è lineis generatio longè alia ſit à multiplicatione: in hoc tamen conveniunt, inquit Newtonus, quòd numerus unitatum in alterutra linea, multiplicatus per numerum unitatum in altera, producat abſtractum numerum unitatum in ſuperficie lineis iſtis comprehenſa, ſi modò unitas ſuperficialis definiatur, ut ſolet Quadratum, cujus latera ſunt unitates lineares. Eſt autem ſimilis analogia ſolidi, quod continua trium quantitatum multiplicatione producitur. Verùm, quia hinc pendet dimenſio ſuperficierum, & ſolidorum, horum geneſin accuratiùs hoc loco evolvam.

PROPOSITIO V.

TAB. VI. Fig. 142. 143. 263. Theorema. *Parallelogrammi cujusvis area, ſeu ſuperficies* ABCD *æqualis eſt producto, quod ex ductu baſis* DC *in ſuam altitudinem, perpendicularem* AE, *emergit.*

Demonſtratio. Si baſis DC motu ſibi parallelo moveatur ſuper latus DA, ſuperſiciem parallelogrammi generat; baſis autem DC hoc motu traducta in AB,

tan-

tantùm à ſua priſtina poſitione recedit, quanta eſt portio perpendicularis AE à duabus parallelis AB, DC intercepta. Itaque linea generatrix DC, recedendo à ſua priſtina poſitione, tranſit ſucceſſivè per omnia puncta perpendicularis AE, & ad quodvis ejuſdem perpendicularis punctum fluxu ſuo lineam gignit ſibi æqualem. Ergò quot ſunt puncta in altitudine AE, totidem lineis ipſi DC æqualibus componitur ſuperficies inde genita. Quare area, ſeu ſuperficies parallelogrammi ABCD habebitur, ſumendo toties ſuam baſim DC, quot ſunt puncta in ſua altitudine AE: hoc eſt, multiplicando baſim DC in numerum punctorum, quibus componitur altitudo AE; qui numerus meliùs exprimi non poteſt, quàm per ipſammet altitudinem AE. Ergò parallelogrammi cujusvis area &c. Quod erat &c.

Corollarium I.

264. Si parallelogrammum ABCD ſit rhomboides, à quovis puncto lateris AB in baſin CD, productam, ſi opus ſit, perpendicularis AE demiſſa dabit ejuſdem altitudinem; adeoque DC × AE erit ſuperficies quæſita. TAB. VI. Fig. 132.

265. Si parallelogrammum ABCD ſit rectangulum, ex ductu contiguorum laterum AD × DC exprimetur ſuperficies. TAB. VI. Fig. 128.

TAB. VI. Fig. 130. 266. Si parallelogrammum ABCD sit quadratum, ex ductu unius lateris in se ipsum, nimirum, $AD \times AD$, vel $DC \times DC$, vel $BC \times BC$, exprimetur ejusdem superficies, vel breviùs, $\overline{AD}^2$, $\overline{DC}^2$, $\overline{BC}^2$.

Corollarium II.

TAB. VI. Fig. 142. 143. 267. Cum triangulum DAC sit (n. 250.) semissis parallelogrammi ABCD habentis eandem basim DC, & eandem altitudinem AE: hinc hujus producti $DC \times AE$ semissis erit area trianguli $DAC = \frac{DC \times AE}{2}$, vel $= DC \times \frac{AE}{2}$, vel $= AE \times \frac{DC}{2}$; hoc est, cujusvis trianguli area producitur ex semisse altitudinis ducta in basin; sive ex altitudine tota ducta in semissem basis.

Sit trianguli altitudo pedum 14, & basis pedum 20. Duc 14 in 20: fiunt pedes quadrati 280, cujus producti semissis 140 exhibet pedes quadratos, quibus triangulum datum æquale est. Vel, ex altitudine pedum 14 sume dimidium 7, & duc in basim 20. Vel, ex basi pedum 20 accipe semissem 10, & duc in altitudinem totam 14. In utroque casu provenient rursus 140 quadrati pedes pro area quæsita.

268. Si triangulum ADC sit rectan-

gulum,

gulum, latera DC, AD angulo recto D Tab.
adjacentia, ſunt invicem perpendicula- VI.
ria; atque adeo alterutrum duorum la- Fig.
terum obire poteſt vicem baſis, & altitu- 144.
dinis.

PROPOSITIO VI.

269. Problema. *Trapezii* ABCD, *quod duo latera* AD, CD *habeat parallela, area producitur ex dimidia ſumma laterum parallelorum in altitudinem, ſeu perpendiculum* AE. Tab. VI. Fig. 145.

Demonſtratio. Area trapezii ABCD componitur ex duabus areis triangulorum ABC, ADC habentium eandem altitudinem AE, propter parallelas AD, BC. Sed area utriuſque trianguli producitur ex ductu ejusdem altitudinis AE in ſemiſſem baſis AD, & ſemiſſem baſis BC. Ergò trapezii ABCD area producitur &c. Quod erat &c.

PROPOSITIO VII.

270. Problema. *Trapezii cujuscunque* MNOP *aream inveſtigare.* Tab. VI. Fig. 146.

Reſolutio. Ducatur NP, ad quam ex punctis M & O age perpendiculares MS, OR: multiplica dimidiam NP per utramque perpendicularem; & habebis aream trapezii.

Demonſtratio pendet ex n. 267.

Corollarium I.

271. Habes jam praxin metiendarum ſuper.

superficierum passim occurrentium, nempe cubiculorum, aularum, parietum &c. Cum enim hæ superficies soleant esse rectangulæ, multiplicatio longitudinis per latitudinem, earum aream exhibet (n. 265.). Pariter, si scias quot lateres in longum, & in latum ad sternendum pavimentum requirantur, aut quot tegulæ tam in longum, quàm in latum à tecto capiantur, multiplicatio numerum earum notum faciet.

Praxis. *Sit area rectangula longa pedes* 160, *lata* 70 : *quæratur, quot ea homines capiet*, 4 *pedibus quadratis in singulos assignatis.*

Duc areæ latera 160 *&* 70 *in se mutuò* : *proveniunt pedes quadrati* 11200 *pro area proposita* : *quibus divisis per* 4, *proveniunt* 1800 *pro numero hominum quæsito.*

Corollarium II.

272. Verùm, uti multiplicationis ope superficiem metimur, ità divisione incognitam longitudinem, vel latitudinem obtinemus. Nam divisio retexit, quod multiplicatio componit. Itaque area quævis per longitudinem divisa dat latitudinem, & vice versâ. Hinc resolves sequentes Quæstiunculas ex Wallisio cap. 22 Arithm.

Quæstio I.

Cum Jugerum Anglicanum contineat perticas quadratas 160 = 4 × 40 : *in agro*

agro parallelogrammo, cujus latitudo eſt perticarum 8; *quæritur, quanta ſit oporteat longitudo, ut habeatur jugerum terræ?*

Dividendo 160 *per* 8, *habetur longitudo quæſita* 20. *Vel datâ longitudine* 20, *dividendo habetur latitudo.*

Quæſtio II.

Si planities cubiculi pedes 12. *lata, longa verò* 20, *tegenda ſit aſſerculis ligneis latis pedes* 2: *quanta ſumenda eſt aſſerculorum conjunctorum longitudo, ut operi ſufficiant?*

Ductâ latitudine 12 *in longitudinem* 20, *habetur area pedum quadratorum* 240: *quam dividendo per aſſerculorum latitudinem* 2, *habetur longitudo quæſita* 120.

Quæſtio III.

Si tapeti ſerico longo pedes 24, *lato* 8, *inducendus ſit à tergo pannus vilior latitudinem habens pedum* 6: *quæritur, quanta ſit oporteat longitudo, ut operi ſufficiat?*

Duc 24 *in* 8: *habebis aream totam* 192: *quam dividendo per* 6 *latitudinem panni, habetur longitudo quæſita* 32.

Monitum.

273. *In comparatione menſurarum, quas dimetiendis quantitatibus adhibemus, P. Dechales lib.* 2. *Geom. pract. prop.*

prop. 29. errorem vulgarem detegit, quô nonnulli menſurarum ſuperficialium partes eô modô inter ſe comparant, quô menſurarum linearium; quamvis longè aliter comparari debeant; aliámque habeant rationem ad totum ſuum, quam eorum appellationes præſeferre videantur.

Tab. VI. Fig. 147. Agebatur, *inquit ipſe*, aliquando de aulæ pavimento lateribus ſternendo, cujus longitudo erat pedum 30, latitudo 20, atque adeo ſuperficies pedum quadratorum 600; lateres autem quadrati erant, eorúmque latus erat ſemipedis; atque adeò communi appellatione dicebantur continere ſemipedem quadratum. Quare, qui huic operi præerat, cum ſciret, aream aulæ eſſe 600 pedum quadratorum, mille ducentos lateres paravit, exiſtimans in pede quadrato duos tantùm eſſe ſemipedes quadratos, cùm tamen ſint quatuor. Sit enim pes quadratus ABCD, ſeu quadratum, cujus latus ſit unius pedis. Perſpicuum eſt, in eo eſſe quatuor quadrata, quorum latera ſunt æqualia ſemipedi. Hexapeda linearis ſex pedes habet, at quadrata, 36; atque ità de reliquis.

Quâ verò proportione ſuperficies creſcant, exponetur infra.

Scholion.

Tab. VI. Fig. 148. 274. *Diximus* (*n.* 265.) *parallelogrammi rectanguli cujusvis aream æqualem eſſe quan-*

quantitati, quæ ex duorum laterum contiguorum circa angulum rectum invicem ductu emergit. Ut, si latitudo AB = 3 *ducatur in longitudinem* BC = 4, *emerget area* ABCD = 12; *adeóque rectangulum latum* 3 *pedes, & longum* 4, *continet pedes quadratos* 12.

At quæret fortasse Tiro, cur hæc contiguorum laterum multiplicatio ad parallelogrammum rectangulum restringitur? Námque idem videtur dicendum de obliquangulo; puta, si latera contigua EF, GF *circa angulum acutum* F, *vel etiam* HE, FE *circa angulum obtusum* E, *invicem multiplicentur, quorum alterum sit* 3, *alterum* 4 *pedes longum: emerget numerus* 12; *ipsúmque parallelogrammum obliquangulum in totidem spatia dividitur æqualia, quorum latera singula contineant pedem unum, non minùs, quàm si esset parallelogrammum rectangulum.* TAB. VI. Fig. 149.

Ut huic Tironum dubitationi, quæ familiaris esse solet, occurram, dico posse quidem parallelogrammum, etiam obliquangulum, in totidem spatia æqualia, & similia dividi, quot designat mutua multiplicatio laterum duorum, circa ipsius angulum quemvis constitutorum; eorúmque spatiorum latera esse æqualia: puta, unius pedis linearis singula, non minùs, quàm si parallelogrammum fuisset rectangulum. Sed cavendum, ne per errorem

rorem quiſpiam putet ſpatia illa eſſe pedes quadratos, aut quidem totidem quadratis pedibus æqualia, quamvis quatuor lineis pedalibus terminentur ſingula. Rhombi enim ſunt ſpatiola illa, non quadrata, propter obliquitatem angulorum, & idcirco quadratis minora.

Cum autem animadverterim Tirones interdum labi in æſtimanda ſuperficierum magnitudine ex eorum ambitu, præjudicata eorum opinio ante convellenda eſt, quàm ad alia progrediar Geometriæ Elementa.

De Figuris Iſoperimetris.

DEFINITIO.

Figuræ Iſoperimetræ appellantur illæ, quæ linearum ambitus habent æquales inter ſe.

PROPOSITIO VIII.

TAB. VI. Fig. 150. 275. *Inter figuras iſoperimetras rectilineas major eſt illa, quæ & æquilatera eſt, & æquiangula.*

Eſto quadratum, cujus latus quodlibet ſit 6 pedum; ità ut totus ambitus contineat 24 pedes lineares: erit area [n. 266.] 36 pedum quadratorum.

Eſto quoque aliquod parallelogrammum rectangulum, latum pedes lineares 10, altum pedes 2: erit hujus perimeter 24 æqualis perimetro quadrati; at area hujus parallelogrammi comprehendet

det tantummodo 20 quadrata parvula, ex illis 36, quæ quadratum in ſe continet.

Sit prætcrea aliud parallelogrammum rectangulum, cujus unumquodque duorum laterum oppoſitorum ſit 9; aliorum verò duorum ſit 3, ut & primi quadrati, & hujus parallelogrammi ambitus quoque ſint æquales. Comprehendet igitur area hujus ſolùm 27 quadrata, ex illis 36, quæ in quadrato continentur. TAB. VI. Fig. 151.

Pari ratione, ſi parallelogrammi alicujus unumquodque duorum laterum oppoſitorum ſit 8, & reliquorum ſit 4, erit quidem ipſum quadrato iſoperimetrum; ſed ejus area continebit dumtaxat 32 quadrata.

Denique, ſi duo latera alicujus parallelogrammi oppoſita, ſingula haberent 7, reliqua verò haberent 5, eſſet etiam quadrato iſoperimetrum; area autem illius includeret tantùm 35 quadrata.

Corollarium I.

276. Hinc clarè vides, quò magìs figuræ iſoperimetræ accedunt ad æquilateram, cui ſunt iſóperimetræ, eò etiam majorem comprehendunt aream, & minùs differunt in capacitate à figura æquilatera. Quare ex parallelogrammis rectangulis iſoperimetris quadratum eſt omnium maximum: ex parallelogrammis oblongis illud majus eſt, quod propiùs ad quadratum accedit: hoc eſt, cujus

laterum differentia minor eſt. Quod ſic etiam calculo litterali probari poteſt.

Sit quadrati cujusvis latus A : erit ipſius quadrati area $A \times A = A^2$; deinde fiat rectangulum oblongum, quadrato illi iſoperimetrum : quod, ut fiat, tantundem addendum eſt longitudini, quantùm latitudini aufertur ; illud autem, quantumcunque ſit, dicatur C ; fietque longitudo $A + C$, latitudo $A - C$; adeoque rectangulum quadrato iſoperimetrum, quippe utriuſque ambitus 4 A, ut laterum utrobique additione ſpecioſa patet.

$$\begin{array}{r} A \\ +A \\ +A \\ +A \\ \hline 4A \end{array} \qquad \begin{array}{r} A+C \\ +A-C \\ +A+C \\ +A-C \\ \hline 4A \end{array}$$

Erit ergo oblongi hujus rectanguli area, ductu longitudinis in latitudinem inventa, $AA - CC$, ut multiplicando patet ; adeóque minor, quàm area quadrati AA. Quod erat primo probandum.

Sed & tanto minor, quantùm eſt quadratum quantitatis C, hóc eſt, quadratum ſemidifferentiæ laterum. Nam, ſi ex $A + C$ auferatur $A - C$, reſiduum ſive differentia eſt 2 C, ut ſubducendo patet ; & propterea, quò majus eſt CC quadratum ſemidifferentiæ, eò plus ab AA deficit rectangulum oblonlongum, & proinde minus eſt. Quod erat alterum.

Corollarium II.

277. Parallelogrammum inæqualium angulorum ABCD, iſoperimetrum non eſt parallelogrammo rectangulo EDCF, inter eaſdem parallelas CD, AF, & ſuper eandem baſim CD conſtituto. Tab. VI. Fig. 152.

Nam, ſi producantur rectæ DE, CF, ut ſint æquales ipſi DA, jungaturque HG, patet parallelogrammum CDHG majus fore parallelogrammo CDEF, hoc eſt, iſoperimetro ABCD, majus, inquam, exceſſu EFGH. Conſtat igitur inter figuras iſoperimetras, eam, quæ æquiangula eſt, eſſe omnium maximam.

Corollarium III.

278. Intelliges jam, quid impediat, quo minùs menſuras exprimere liceat per rhombos, æquè ac quadrata; magnitudines nimirum definiendæ ſunt per menſuras certas, ideoque per quadrata potius, quàm per rhombos; cum enim quadratorum omnium anguli recti ſint, adeoque inter ſe æquales: dato latere quadrati, de ejuſdem magnitndine conſtabit. Rhomborum autem anguli cum poſſint plus minuſve eſſe obliqui, latus datum nondum determinat magnitudinem rhombi, quæ quidem major minorve erit, prout obliquitas minor majorque fuerit. Itaque non rhombis, ſed quadratis determinandæ ſunt figurarum magnitudines.

PROPOSITIO IX.

TAB. VI. Fig. 153. 279. Theorema. *Inter figuras iſoperimetras major eſt illa, quæ plures continet angulos, plurave latera.*

Demonſtratio. Triangulo æquilatero, vel iſoſceli ABC fiat æquale rectangulum ADCE (n. 250.) Perſpicuum eſt ambitum parallelogrammi ADCE minorem eſſe ambitu trianguli ABC. Nam duo latera AE, DC parallelogrammi ſimul ſumpta, æqualia ſunt lateri BC trianguli ABC; reliqua verò duo latera AD, CE parallelogrammi ADCE minora ſunt reliquis duobus lateribus AB, AC trianguli ABC (n. 227.). Sit igitur recta DAG=AB; perficiaturque parallelogrammum CFGD, quod triangulo ABC erit iſoperimetrum, & quantitate AEFG triangulum ABC ſuperabit. Conſtat igitur figuram quadrilateram capaciorem eſſe figura triangulari ſibi iſoperimetra; eademque ratio eſt in aliis figuris plurium laterum, iſoperimetris tamen; quò enim plures habet angulos figura, eò pluribus in locis latera ejus recedunt à centro, & medio, ac propterea capacior exiſtit. Quod erat &c.

Corollarium.

280. Hinc circulus omnium figurarum iſoperimetrarum capaciſſimus eſt, quippe qui infinitos quodammodo includat angulos, & latera, omnibuſque pun-

punctis æqualiter recedat à centro. Idem quoque dicendum de ſphæra, ſi cum aliis corporibus ſibi iſoperimetris comparetur. Hinc abunde patet, quàm lubricum ſit figurarum magnitudinem ex ſolo ambitu æſtimare.

Monitum.

281. *P. Tacquet lib. 2. Geom. pract. probl. 2. opportunè hoc loco occurrit dubitationi Tironum ſatis familiari. Parallelogrammum obliquum (idem dic de aliis figuris) nequit reſolvi in quadrata, ſic ut ea ſibi mutuò oppoſita obliquum parallelogrammum præcisè expleant, eique commenſurentur, & congruant* (*n.* 275.); *quâ ergo ratione iſtud parallelogrammum poteſt menſurari per quadrata, puta, pedalia, & certo talium quadratorum numero eſſe æquale? Eſt quidem illa hallucinatio valde craſſa, inquit ipſe, ſed tamen Tironibus familiaris. Sciant igitur illi tam ſuperficies, quàm corpora æquari inter ſe poſſe, licet ſint diſſimilia, ac proinde unum alteri nequeat congruere, ut ex tota paſſim Geometria patet. Sic triangulo exhibetur æquale parallelogrammum. Congruentia igitur ad æqualitatem non requiritur, præterquam in rectis lineis, & angulis rectilineis, in quibus hæc ab illa inſeparabilis eſt.*