ELEMENTUM V.

De Triangulis Rectilineis.

Axioma Euclideum eſt, duas rectas lineas ſpatium non comprehendere. Si enim duæ rectæ lineæ ex una parte coëant ad efficiendum angulum, neceſſariò ex altera parte ſemper magìs ac magìs disjungentur, ſi producantur. Perſpicuum eſt ergò, ut ſuperficies plana, ſpatiúmve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertiam adjungi oportere; ità enim conficietur ſpatium triangulare, ſeu figurarum rectilinearum prima, ex qua Quintum hocce Elementum ordimur.

DEFINITIONES.

200. *Figura rectilinea eſt plana ſuperficies rectis lineis, quæ latera vocantur, terminata. Hæc figura Triangulum nominatur, ſi tribus dumtaxat rectis circumſcribatur: Quadrilaterum, ſi quatuor: Polygonum, ſi plus, quàm quatuor rectis lineis terminetur.*

201. Habitâ ratione laterum, dividitur triangulum planum rectilineum, de quo dumtaxat agimus in hoc Elemento, in æquilaterum, iſosceles, & ſcalenum; habitâ verò ratione angulorum, dividitur in rectangulum, amblygonium, ſeu obtuſangulum, & oxygonium, ſeu acutangulum.

TAB. V. Fig. 113. 114. 115. 202. *Triangulum Æquilaterum est illud, cujus tria latera sunt inter se æqualia: Isosceles, cujus duo tantùm latera sunt æqualia: Scalenum, cujus omnia latera sunt inæqualia.*

Fig. 111. 110. 113. 203. *Triangulum Rectangulum dicitur illud, quod unum trium angulorum habet rectum: Amblygonium, seu Obtusangulum, cujus unus angulorum est obtusus: Oxygonium verò, seu Acutangulum, cujus tres anguli sunt acuti.*

204. *Latus, super quo construi triangulum intelligitur, vocari solet Basis trianguli. Huic oppositus angulus appellatur ejusdem summitas, seu Vertex; & perpendicularis à summitate in basim demissa, dicitur Altitudo trianguli*; quippe quæ est omnium linearum minima, quæ distantiam summitatis à basi metiatur.

Fig. 109. Quamobrem, si in triangulo ABC sumatur latus BC pro basi ejusdem, angulus A erit summitas, & perpendicularis AD erit altitudo.

Fig. 110. Quòd si triangulum sit inclinatum, perpendicularis BD in basim AC productam cadit; & similiter trianguli altitudinem metitur.

Fig. 111. 205. *In omni triangulo rectangulo* ABC *latus* AC *oppositum angulo recto* B, *vocatur Hypotenusa.*

Fig. 112. 206. *Si trium angulorum vertices* A, B, C *existant in circumferentia circuli, trian-*

triangulum inſcriptum circulo dicitur, & circulus circumſcriptus triangulo.

PROPOSITIO I.

207. Problema. *Triangulo circulum circumſcribere.* Euclid. lib. 4. prop. 5.

Conſtr., *& Demonſtratio.* Patet ex n. 131. Perinde enim eſt per tria data puncta A, B, C non ad unam rectam poſita circulum deſcribere.

PROPOSITIO II.

208. Problema. *Super datâ rectâ* AB *triangulum æquilaterum conſtruere.* Euclid. lib. 1. prop. 1. TAB. V. Fig. 113.

Conſtructio. Centro A intervallô AB deſcribatur arcus GC; & rurſum centro B eodem intervallô alius, qui priori occurret in C; ducantúrque rectæ CA, CB. Dico factum.

Demonſtratio. Latera ſingula CA & CB ſunt æqualia eidem tertio lateri AB per Definit. circuli. Ergò (n. 36.) ſunt æqualia inter ſe. Quare triangulum ACB eſt æquilaterum. Quod erat &c.

PROPOSITIO III.

209. Problema. *Super datâ rectâ* AB *triangulum iſoſceles conſtruere.* TAB. V. Fig. 114.

Conſtructio. Centris A & B, intervallô verò majore, quàm AB, ſi datam rectam eſſe velimus minus latus, vel minore, ſi eandem in latus majus eligamus, deſcribantur duo arcus, qui ſeſe invicem ſecent in C ; ducantúrque rectæ CA, CB. Dico factum.

Demonſtratio. Patet ex conſtructione. Quoniam AC, BC æquales erunt propter æquale intervallum aſſumptum, majus ſcilicet, aut minus, quàm recta AB. Quod erat &c.

PROPOSITIO IV.

210. Problema. *Super datâ rectâ* AB *triangulum ſcalenum conſtruere.*

TAB. V. Fig. 115. *Conſtructio.* Centris A & B, intervallis utrinque inæqualibus inter ſe, & cum data recta AB, deſcribantur arcus ſibi mutuò occurrentes in C ; jungantúrque rectæ CA, CB. Dico factum.

Demonſtratio conſequitur ex inæqualitate intervallorum, quæ aſſumpta fuerunt in conſtructione.

PROPOSITIO V.

211. Theorema. *Omnis trianguli duo quælibet latera reliquo ſunt majora.* Euclid. lib. 1. prop. 20.

Demonſtratio immediatè conſequitur ex definitione lineæ rectæ (n. 22.), & ex n. 28.

PROPOSITIO VI.

212. Problema. *Ex tribus datis rectis*

TAB. V. Fig. 116. BO, BL, LO, *quarum duæ quælibet reliquâ ſint majores, triangulum conſtituere.* Euclid. lib. 1. prop. 22.

Conſtructionem, & demonſtrationem habes in prop. 1., & ſequentibus.

Scho-

Scholion.

Quæ conſequuntur Theoremata, in Euclidæa demonſtrandi methodo videri ſolent, ſaltem pleraque, ſubobſcuriuſcula Tironibus, ut notat etiam Clavius lib. 1. prop. 5. in ſcholio, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum aſſueti ſunt. Horum itaque demonſtrationem ex Prop. 1. 5. 6. Elem. 4. multò planiorem dabo, minúſque intricatam linearum occurſu, & angulorum copiâ.

PROPOSITIO VII.

213. Theorema. *Omnis trianguli A B C tres ſimul anguli duobus rectis ſunt æquales.*

Ac proinde conficiunt gradus 180. *Euclid. lib. 1. prop. 32. pars 2.*

Demonſtratio. Triangulo ABC circumſcribe circulum [n. 131.]. Angulus quivis, cujus vertex eſt in circumferentia, habet pro menſura ſemiſſem arcûs à ſuis lateribus intercepti (n. 171.) Sed trianguli tres ſimul anguli A, B, C totam circumferentiam ſuis lateribus intercipiunt. Ergò tres ſimul anguli habent pro menſura ſemiſſem circumferentiæ, atque adeo duobus rectis æquales ſunt. Quod erat &c. TAB. V. Fig. 117.

Aliter ex theoria parallelarum. Producatur latus B C in O; ducaturque C D parallela lateri A B. Alterni anguli A & ACD ſunt æquales; & internus B Fig. 118.

par eſt externo DCO ad eandem partem (n. 108. & 110.). Tres itaque anguli trianguli ABC æquales ſunt tribus angulis ACB, ACD, DCO ad unum punctum C conſtitutis, qui duos rectos conficiunt (n. 81.). Quod erat &c.

Corollarium. I.

214. Tres ſimul anguli cujuſvis trianguli æquales ſunt tribus ſimul cujuscumque alterius.

Corollarium II.

215. Si in uno triangulo duo anguli aut ſinguli, aut ſimul, æquales ſint duobus angulis aut ſingulis, aut ſimul in altero triangulo, etiam tertius tertio æqualis erit.

Corollarium III.

216. Si in triangulo unus eſt rectus, reliqui duo ſimul etiam unum rectum conficiunt; & horum quilibet erit acutus.

Corollarium IV.

217. Si in triangulo unus eſt obtuſus, reliqui duo ſimul rectô minorem conficient; & horum quilibet erit acutus.

Corollarium. V.

218. Itaque omne triangulum habere poteſt unicum angulum rectum, unicum obtuſum, tres acutos; rectum verò cum obtuſo habere non poteſt.

Corol-

Corollarium VI.

219. Omnis trianguli duo quicunque anguli duobus rectis minores sunt. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 17.

Definitio.

220. *Rectilineæ figuræ externus angulus est, qui producto latere extra figuram oritur.* Fig. 118.

Talis est angulus ACO.

PROPOSITIO VIII.

221. Theorema. *Omnis trianguli* ABC *externus quivis angulus* ACO *duobus internis oppositis* A & B *æqualis est.* Euclid. lib. 1. prop. 32. pars 1.

Demonstratio. Triangulo ABC circumscribatur circulus. Angulus externus ACO habet pro mensura $\frac{BC}{2} + \frac{AZC}{2}$ (n. 195.). Atqui angulus A habet pro mensura $\frac{BC}{2}$, & angulus B habet pro mensura $\frac{AZC}{2}$ (n. 171.) Ergò summa mensurarum utriusque anguli interni oppositi A & B metitur angulum externum ACO; & consequenter externus angulus duobus internis oppositis æqualis est. Quod erat &c. TAB. V. Fig. 119.

Aliter ex theoria paralellarum. Producatur latus BC in O; ducatúrque CD parallela lateri AB. Alterni anguli A & Fig. 118.

ACD sunt æquales ; & internus B par est externo DCO. Ergò angulus externus AC O , hoc est , ACD + DCO , æquatur summæ duorum internorum oppositorum A & B. Quod erat &c.

Corollarium.

222. Ergò angulus externus ACO major est alterutro internorum oppositorum.

Scholion.

223. *Ab hoc Theoremate immediatè, tanquam totidem corollaria, deduci possent omnia ea, quæ Elem. 4. demonstravimus, Theoremata de mensura angulorum, quorum vertex est vel inter centrum, & circumferentiam, vel etiam extra circulum. Itaque*

TAB. V. Fig. 120. *I. Angulus* BAC , *cujus vertex est inter centrum, & circumferentiam, habet pro mensura semissem arcûs* BC *à suis lateribus intercepti, & semissem arcûs* FG *intercepti à lateribus sibi oppositi anguli.*

Nam, ductâ chordâ BF, *angulus* BAC *externus respectu trianguli* ABF, *æquatur duobus internis oppositis* F & B ; & *consequenter habebit pro mensura summam mensurarum horum duorum angulorum, hoc est,* $\frac{BC}{2} + \frac{CD}{2}$. (*n.* 171.).

TAB. V. Fig. 121. *II. Angulus* BAC , *cujus vertex est extra circulum, habet pro mensura semissem arcûs concavi* BC *à suis lateribus intercepti, minùs semissi arcûs convexi* DE

ab

ab iisdem pariter lateribus comprehensi.

Nam, ductâ chordâ BE, *angulus* BEC *erit externus triangulo* ABE. *Quare angulus* $A+B=BEC$; *consequenter angulus* $A=BEC-B$. *Atqui (n.171.)* BEC *habet pro mensura* $\frac{BC}{2}$, *& angulus* B *pariter pro mensura habet arcum* $\frac{DE}{2}$. *Ergò angulus* A, *sive* $BEC-B$, *habet pro mrnsura* $\frac{BC}{2}-\frac{DE}{2}$

PROPOSITIO IX.

224. Theorema. *In eodem triangulo* ABC *latera* AB, AC *opposita æqualibus angulis* C *&* B *sunt æqualia.* TAB. V.

Et reciprocè, anguli æqualibus lateribus oppositi sunt æquales. Euclid. lib. 1. prop. 6. Fig. 117.

Demonstratur I. pars. Quoniam angulus $B=C$, erit arcus $AZC=AXB$ [n.179.]; & consequenter chorda, seu latus $AC=AB$ (n. 135.). Quod erat primum.

Demonstratur II. pars. Nam, quia latus $AB=AC$, erit arcus $AXB=AZC$ [n. 135.]; & consequenter angulus $C=B$ (n. 179.). Quod erat alterum.

Corollarium I.

225. Æquiangulum ergò triangulum etiam æquilaterum est. Et vicissim.

Corollarium. II.

226. Trianguli iſoſcelis, ſeu æquicruri ad baſim anguli ſunt æquales. Et viciſſim, ſi anguli ad baſim ſint æquales, triangulum eſt iſoſceles. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 5.

PROPOSITIO X.

TAB. V. Fig. 112. 227. Theorema. *In eodem triangulo* ABC *latus majus* AB *opponitur angulo majori* C.

Et reciprocè, angulus major C *opponitur majori lateri.* Euclid. lib. 1. prop. 18. & 19.

Conſtructio. Triangulo ABC circumſcribatur circulus

Demonſtratur I. pars- Quoniam angulus C > B, erit arcus AXB > AZC (n. 179.); & conſequenter chorda, ſeu latus AB > AC (n. 135.). Quod erat primum.

Demonſtratur II. pars. Nam, quia latus, ſeu chorda AB > AC, erit arcus AXB > AZC [n. 135.]; & conſequenter angulus C > B (n. 179.) Quod erat alterum.

Corollarium.

228. Triangulum itaque, cujus tres anguli ſunt inæquales, habet tria latera inæqualia, adeóque ſcalenum eſt. Et reciprocè.

PROPOSITIO XI.

TAB. V. Fig. 122. 123. 229. Theorema. *Si duorum triangulorum* ABC, MOP *latus unum* AB

uni

uni MO, *& alterum* AC *alteri* MP *ſit æquale, angulique* A *&* M *ab illis lateribus facti etiam ſint æquales, æquabuntur & baſes, & tota triangula, & reliqui ad baſim anguli.* Euclid. lib. 1. prop. 4.

Demonſtratio. Vertex A anguli BAC ſuperimponatur vertici M anguli æqualis OMP, ita ut latus AB cadat ſuper latus ipſi æquale MO. Perſpicuum eſt [n. 46.], quòd latus AC cadat ſupra latus MP, & punctum C in P; nam AC = MP. Ergo tria puncta A, B, C cadent ſupra tria puncta M, O, P; atque adeò baſis BC tota cadet ſupra totam baſim OP, totáque triangula ſibi mutuò congruent. Omnia igitur per axioma 4. n. 36. ſunt æqualia. Quod erat &c.

PROPOSITIO XII.

230 Theorema. *Si duorum triangulorum* ABC, MOP *latus* BC=OP, *angulíque illis lateribus adjacentes, nimirum,* B *&* C, *ipſis* O *&* P *fuerint æquales, omnia reliqua, & triangula ipſa æqualia erunt.*

Demonſtratio. Latus OP ſuperimponatur lateri ſibi æquali BC. Puncta O & P cadent ſupra puncta B & C; quoniam OP=BC. Sed quia angulus O=B latus MO cadet ſupra latus AB; & quia angulus P=C, latus PM cadet ſupra

A

AC [n. 46.]. Ergò tria latera trianguli MOP cadent ſupra tria latera trianguli ABC. Ergò omnia ſunt per axioma 4. n. 36. æqualia. Quod erat &c.

PROPOSITIO XIII.

231, Theorema. *Si duo triangula* B CA , BCD *duo latera* BC , CA *duobus*
TAB. BC , CD , *alterum alteri æqualia habue-*
V. *rint ; unum verò triangulum angulum*
Fig. *illis lateribus contentum* BCA *majorem*
124. *habeat alterâ* BCD , *habebit qaoque ba-*
125. *ſim* BA *majorem baſi* BD.

Et reciprocè, ſi baſim majorem habuerit , habebit angulum majorem. Euclid. lib. 1. prop. 24. & 25.

Conſtructio. Vertex C anguli BCA ſuperimponatur vertici C anguli BCD , hâc lege, ut latus BC primi cadat ſupra latus ipſi æquale BC ſecundi; tum factô centrô in C, intervallô CA deſcribatur circumferentia , quæ tranſibit per D ; nam CA = CD ; denique producatur latus BC , donec circumferentiæ occurrat in E. His poſitis

Demonſtratur I. Pars. Quoniam angulus BCA major eſt angulô BCD , etiam arcus OA, menſura anguli BCA major erit arcu OD, menſurâ anguli BCD Ergò punctum A proximius, punctum D remotius erit ab extremitate E rectæ BE tranſeuntis per centrum ; atque hinc ſequitur (n. 132.) BA > BD. Quod erat primum.

Demon-

Demonstratur II. pars. Nam, quia basis BA major est basi BD, punctum A proximius, punctum D remotius erit à termino E rectæ BE transeuntis per centrum (n. 132.): hoc est, arcus EA < arcu ED. Ergò arcus OA, mensura anguli BCA major est arcu OD, mensurâ anguli BCE; & consequenter anlus BCA > angulo BCD. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XIV.

232. *Si duo triangula* ABC, MOP *habuerint omnia latera sibi mutuò æqualia, etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppositos habebunt æquales.* Euclid. lib. 1. prop. 8. TAB. V. Fig. 122. 123.

Demonstratio. Ut duo proposita triangula ABC, MOP demonstrentur perfectè æqualia, satis est (n. 229.), si ostendatur duos angulos, puta, ABC, MOP, fore æquales; quod ex præcedenti Prop. consequitur. Nam, si anguli ABC, MOP essent inæquales, latera AC, MP hisce duobus angulis opposita, non essent æqualia, contra hypothesin. Quod erat &c.

Scholion.

233. *Habes jam tres præcipuos characteres, ac signa certissima, quibus evidenter constare tibi possit, an duo triangula sint perfectè æqualia. Quia verò hæc æqualitatis perfectæ signa magni sunt usûs*

Fig. 122. 123. *usûs in Geometria, non erit abs re horum synopsim hôc locô instituere ad juvandam Tironum memoriam.*

Duo triangula ABC, MOP *erunt perfectè æqualia.*

I. Quando habuerint omnia latera sibi mutuò æqualia (*n.* 232.) :

II. Quando duo latera unius duobus alterius æqualia habuerint, utrumque utrique, & angulum angulo æqualem sub æqualibus lateribus contentum (*n.* 229.):

III. Quando latus unum uni æquale habuerint, angulósque illis lateribus adjacentes æquales, utrumque utrique (*n.* 230.).

Ex hoc triplici criterio, quô duorum triangulorum perfecta æqualitas decernitur, triplex aperitur via resolvendi sequens Problema.

PROPOSITIO XV.

TAB. V. Fig. 126. 127. 234. Problema. *Triangulum* MOP *construere æquale dato triangulo* ABC.

Primus resolvendi modus. Fiat MP par lateri B C trianguli ABC; tum centrô M, intervallô BA describatur arcus EOF; & centrô P, intervallô AC describatur arcus GOH, qui priorem secet in O; ducantúrque rectæ OM, OP. Dico factum.

Demonstratio. Nam omnia latera per constructionem sunt mutuò æqualia. Quod erat &c.

Secun-

Secundus resolvendi modus. Fiat angulus MOP [n. 64.] æqualis angulo BAC dati trianguli; tum cape OM = AB, & OP = AC; ducatúrque recta MP. Dico factum.

Demonstratio. Nam duo triangula habent duo latera duobus lateribus æqualia, utrumque utrique, & angulum angulo æqualem sub æqualibus lateribus contentum. Quod erat &c.

Tertius resolvendi modus. Fiat MP = BC; ducantúrque rectæ MO, PO, quæ cum recta MP angulos M & P efficiant pares duobus angulis B & C (n. 64.) dati trianguli ABC, & concurrant in O. Dico factum.

Demonstratio. Nam anguli æqualibus lateribus adjacentes sunt æquales. Quod erat &c.

PROPOSITIO XVI.

235. Theorema. *Si à terminis unius lateris* AC *intra triangulum* ABC *duæ rectæ jungantur* AD, CD, *hæ lateribus trianguli* AB, CA *minores sunt, majorem verò angulum* ADC *comprehendunt.* Euclid. lib. 1. prop. 21. TAB. I. Fig. 26.

Prima pars demonstrata est n. 88.

Demonstratur II pars. Produc AD in E. Angulus externus CDA (n. 221.) major est angulô internô DEC, qui, cùm sit sit externus respectu anguli B, eôdem pariter major est. Ergò ADC multò major est, quàm B. Quod erat &c.

ELE-