

ELEMENTUM IV

De Angulorum Mensura.

HACTENUS cujusvis anguli verticem consideravimus tanquam in centro circuli intervallò quovis descripti constitutum ; & arcum à lateribus anguli interceptum mensuram esse ejusdem quantitatis definivimus n. 60. Quoniam verò angulus quilibet tres reliquas positiones diversas , etiam respectu circuli , obtinere potest , ità ut ejus vertex vel sit in circumferentia circuli, vel inter centrum , & circumferentiam , aut denique extra circulum ; scienda erit in hoc Elemento generalis lex, quâ scienda sit angulorum mensura ex eodem circulo, datis tribus hisce positionibus.

DEFINITIONES.

167. *Segmentum circuli est figura , quæ sub chorda , & circumferentia comprehenditur ; quemadmodum chorda CE circulum dividit in duo inæqualia segmenta, nimirum, majus CBE, & minus CAE.*

168. *Angulus FCE comprehensus à tangente FG, & chorda, seu secante CE à puncto contactus ductâ, dicitur angulus minoris segmenti.*

Angulus GCE comprehensus ab eadem chorda CE, eadèmq; tangente FG, dicitur majoris segmenti.

Uter-

TAB.
IV.
Fig.
78.

Uterque autem simpliciter vocari solet
angulus segmenti.

169. *Angulus CAE*, cujus vertex
est in circumferentia minoris segmenti,
& cujus latera à chorda terminantur, vo-
catur angulus in segmento minore; & si-
militer angulus *CBE* vocatur angulus
in segmento majore.

Omnis autem angulus sive in majore,
sive in minore segmento dicitur angulus
in segmento, sive angulus inscriptus, &
angulus ad circumferentiam.

170. *Angulus CBE* insistere dicitur
arcti *CAE*, qui illi opponitur.

PROPOSITIO I.

171. Theorema. *Angulus quilibet C*
AB, cujus vertex *A* est in circumferen-
tia circuli, comprehensus vel à duabus chor-
dis *AC*, *AB*, vel à tangente *CA*, &
chorda, seu secante *AB*, hoc est, à duo-
bus lateribus, quæ ultra verticem pro-
ducta nusquam circumferentia possint oc-
currere, habet pro mensura medietatem
arcûs à suis lateribus intercepti.

Quoniam Propositio tres casus com-
plectitur, idcirco tripartitâ demonstra-
tione opus erit.

172. *Demonstratio casûs I.* Si latus
AB anguli *BAC* transit per centrum
O, ducatur per idem centrum *O* recta
PM parallela alteri lateri *AC*. His stan-
tibus, angulus $BAC = BOP$ (n. 108.).
Atqui

TAB.
V.
Fig.
79.
80.

Atqui angulus BOP, cujus vertex est in centro, habet pro mensura arcum DP [n. 60.]. Ergo angulus BAC habet pro mensura eundem arcum DP. Reliquum jam est, ut demonstretur arcum DP semissem esse arcus DPE.

Anguli ad verticem oppositi BOP, AOM, quorum vertex est in centro O, sunt æquales (n. 86.). Ergo arcus DP = AM. Atqui arcus AM = PE (n. 147.). Ergo arcus DP = PE; & consequenter DP est semissem arcus DPE. Angulus itaque BAC habet pro mensura medietatem arcus DPE à suis lateribus intercepti. Quod erat &c.

173. *Demonstratio casus II.* Si centrum O inter duo latera anguli BAC sit positum, ducatur recta AP à vertice A per centrum O. Hæc angulum BAC in duos angulos secabit BAP, PAC, ad normam Casus I.; hoc est, utriusque anguli latus unum AP transibit per centrum O. Quare

I. Angulus BAP habebit pro mensura semissem arcus DP.

II. Angulus PAC habebit pro mensura semissem arcus PE.

Ergo totius anguli BAC mensura erit semissem totius arcus DPE à suis lateribus intercepti. Quod erat &c.

174. *Demonstratio casus III.* Si centrum O neque in uno latere reperitur, neque inter latera anguli BAC, à vertice

Fig.

81.

82.

Fig.

83.

84.

ce A per centrum O ducatur recta AP.
Itaque

I. Summa duorum angulorum BAC,
CAP, five angulus totalis BAP, cujus
unum latus transit per centrum, habet
per Casum I. pro mensura medietatem
arcûs DEP, hoc est, $\frac{DE}{2} + \frac{EP}{2}$.

II. Atqui angulus CAP per Casum I.
habet similiter pro mensura semissem ar-
cûs EP, five $\frac{EP}{2}$.

Ergò alter angulus BAC habet pro
mensura $\frac{DE}{2}$, id est, semissem arcûs à
suis lateribus intercepti. Quod erat &c.

Scholion.

175. Habes hinc universalem regulam
metiendi quemcunque angulum ad cir-
cumferentiam, five in segmento circuli,
hoc est, ut vocant, circulo inscriptum,
five angulum segmenti à tangente, & se-
cante à puncto contactûs comprehensum.
Ex hac autem propositione spontè fluunt
pleraque, quæ ab Euclide lib. 3. multò
operosius demonstrantur, Theoremata.

Corollarium. I.

TAB. 176. Anguli ABD, DCE, quorum
V. vertices B & C sunt in eadem circum-
Fig. ferentia, & æqualibus arcibus AD,
85. DE insistent, inter se omnes sunt æ-
quales.

Vel:

Vel: anguli BAC, BDC, BEC,
 quorum vertices A, D, E sunt in eadem circumferentia, & eidem arcui BC insistant, inter se omnes sunt æquales.
Euclid. lib. 3. prop. 21.

Corollarium II.

177. Angulus ad centrum CAD duplus est anguli CBD ad circumferentiam, cum idem arcus CD est basis angulorum. *Euclid. lib. 3. prop. 20.*

TAB.
V.
Fig.
86.

Nam angulum ad centrum CAD metitur integer arcus CD, ejusque semifis [171.] metitur angulum CBD ad circumferentiam.

Scholion.

178. Dominus Deidier in egregio Opere, quod inscripsit: Science des Geom. p. 1. n. 159, Geometras coarguit, quasi verò hoc Theorema non satis circumscriptè pronunciaverint. Ait enim eosdem contentos fuisse hanc expressione: Angulus ad centrum duplus est anguli ad peripheriam, cum uterque eidem arcui insitit, vel, ut exponit Clavius, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum. Monet itaque Deidier, addi oportere: cum uterque angulus summitatem habet ad easdem partes arcus converfam.

Ratio est, inquit ipse, I. quia angulus BAC ad circumferentiam est angulus in semicirculo; neque tamen ad cen-

trum angulus ullus fieri potest, qui eidem arcui insulat.

II. Angulus BAC ad circumferentiam est angulus in segmento minore; angulus autem ad centrum BDC, cuius vertex ad oppositam partem convertitur, non semper duplex erit anguli ad peripheriam. Nam angulum ad centrum BDC metitur arcus BAC; & angulum ad peripheriam BAC metitur (171.) semissis arcus BEC, quæ semissis non æquat arcum BAC, nisi quando arcus BAC est tertia pars totius circumferentia.

At, pace tanti Viri, hoc additamentum & inutile mihi videtur, & alienum censeo à trita Geometrarum loquendi consuetudine. Quid enim aliud sibi volunt, cum dicunt: utrumque angulum eidem arcui debere insistere, vel, eundem arcum basim esse utriusque anguli, nisi id ipsum quod Deidier adjiciendum putat, verticem utriusque anguli ad easdem partes arcus debere converti?

Duo autem, quos Deidier recenset casus de angulo in semicirculo, & de angulo in segmento minore, neque à Theoremate comprehenduntur, uti palam est, eosque multò antè prospexerat Clavius lib. 3. elem., qui, quam relationem habere adhuc possent ad angulum centri, luculenter explicat, & demonstrat hisce verbis.

Quod

Quod si rectæ BD , CD in centro angulum non constituent ad partes basis BC ; quod tum demum fit, quando segmentum BAC est vel semicirculus, vel segmentum minus: nihilominus spatium illud ad centrum duplum erit anguli ad circumferentiam, qui eandem habeat basim, quam spatium illud. Ductâ enim rectâ AE per centrum, erit tam angulus BDE ad centrum duplus anguli BAE ad circumferentiam, quàm angulus CDE ad centrum, anguli CAE ad circumferentiam: ut ostensum est. Spatium igitur ad centrum D , basim habens BEC , constansque ex duobus angulis BDE , CDE , duplum est totius anguli BAC . Quod est propositum.

Corollarium III.

¶ 179. In circulis æqualibus, vel in eodem, si anguli sive ad centra, sive ad circumferentiam sint æquales, etiam arcus, quibus insunt, sunt æquales.

Et reciprocè, si arcus sunt æquales, etiam anguli æquales erunt. *Euclid. lib. 3. prop. 26. & 27.*

Constat pariter duos angulos inæquales, quorum vertices sunt in circumferentia ejusdem circuli, insistere arcibus inæqualibus, majorémque angulum insistere majori arcui.

Et reciprocè.

Corollarium IV.

TAB. 180. Angulus BAC in semicirculo
 V. rectus est. *Euclid lib. 3. prop. 31. pars 1.*
 Fig. Nam semissis semicirculi, cui insitit
 89. idem angulus ad circumferentiam, est
 quadrans, mensura anguli recti (n. 61).

Corollarium V.

TAB. 181. Angulus BAC in segmento
 V. majore est minor recto, id est, acutus.
 Fig. *Euclid. lib. 3. prop. 31. pars 2.*
 90. Nam insitit arcui, qui semicirculo
 minor est, ejusque semissis quadrante
 minor, mensura anguli acuti.

Corollarium VI.

TAB. 182. Angulus BAC in segmento mi-
 V. nore est major recto, id est, obtusus.
 Fig. *Euclid. lib. 3. prop. 31. pars 3:*
 91. Nam insitit arcui: qui semicirculo
 major est, ejusque semissis quadrante
 major, mensura anguli obtusi.

Corollarium VII.

TAB. 183. Hinc examen normæ, num ex-
 V. actè rectangula sit, instituitur. In cir-
 Fig. culo enim quocunque, positò ad cir-
 92. cumferentiæ punctum quodvis A nor-
 mæ vertice, si latera per diametri ex-
 trema B, C transeunt, angulus est re-
 ctus; sin minus, aut acutus, aut obtu-
 sus erit.

Si normæ latera ad puncta B & C
 continuò adjuncta teneantur, interea
 dum

dum angulus utrinque circumagatur : vertex anguli A describet circumferentiam circuli, cujus diameter est linea BC,

Corollarium VIII.

184. Ab extremitate A rectæ AC, quæ ultra punctum A produci non possit, perpendicularem excitare.

TAB.
V.
Fig.
93.

Sumptò quovis extra datam lineam punctò F, ex quo, tanquam centrò, intervallò FA describatur circulus, qui datæ rectæ AC occurrat in E, ductæque diametrò EFB, recta BA erit perpendicularis quæsitâ (n. 180.).

Similiter ex dato extra rectam BC punctò quòvis A, ad eandem ducenda sit perpendicularis.

Ex puncto dato A ducatur obliqua AE, quæ occurrat rectæ BC in aliquo puncto E; tum super AE, tanquam diametro, describatur semicirculus ABE, qui rectæ BC occurrat in alio puncto B: recta AB erit perpendicularis quæsitâ.

TAB.
V.
Fig.
94.

Corollarium IX.

185. Ex puncto dato A rectam ducere, quæ datum circum Bb tangat. *Euclid. lib. 3. prop. 17.*

Centrum C, & datum punctum A jungantur rectâ CA: super qua, tanquam diametrò, describatur circulus ABCb occurrens dato in punctis B & b. Utraque recta Ab, A|B erit tangens

TAB.
V.
Fig.
96.

quæſita. Nam ductis radiis Cb , CB , anguli CbA , CBA in ſemicirculo utrinque recti ſunt; & conſequenter rectæ Ab , AB eruat perpendicularares extremitati radiorum Cb , CB , atque adeo tangentés (n. 142.).

Corollarium X.

TAB. 186. Si recta BC circulum tangat, & V. alia ex contactu A ducta AD eundem Fig. ſecet, erit angulus CAD à tangente, & 97. ſecante factus, par angulo AED , qui fit in ſegmento alterno. *Euclid. lib. 3. prop. 32.*

Nam utriuſque anguli CAD & AED meſura eſt ſemiſſis ejuſdem arcûs AFD .

Corollarium XI.

Fig. 187. Angulus CAD minoris ſeg- 97. menti, & angulus AED inſcriptus in eodem ſegmento, ſimul ſumpti æquantur duobus rectis.

Nam ex dictis angulum CAD metitur ſemiſſis arcûs AFD ; & angulum AED metitur ſemiſſis arcûs reliqui AED . Ergò utrumque angulum ſimul ſumptum metitur ſemiſſis totius circumferentiæ, ideſt, meſura duorum rectorum. Simili ratiociniò demonſtrabis, angulum BAD majoris ſegmenti, & angulum AED inſcriptum in eodem ſegmento, ſimul ſumptos æquari duobus rectis.

Corol-

Corollarium XII.

188. Duo anguli circulo inscripti AD B & ACB, oppositi, & insistentes iisdem punctis A & B, æquantur duobus rectis. *Euclid. lib. 3. prop. 22.*

TAB.
V.
Fig.
98.

Nam alterutrum metitur semissis arcuum, quibus insistent. Ergò utrumque metitur totius circumferentiæ semissis, quæ est mensura duorum rectorum.

Corollarium XIII.

189. Si centris in eadem recta linea A O in infinitum protracta acceptis describantur per A plures circuli in amplitudinem quamcunque excrecentes, & à puncto contactus A ducatur secans A B C D: arcus singuli, intercepti à tangente A G, & chordis AB, AC, AD, erunt totidem graduum.

TAB.
V.
Fig.
99.

Nam eundem angulum GAD metitur semissis arcûs AB, semissis arcûs AC, & semissis arcûs AD &c.

PROPOSITIO II.

190. Problema. *A dato circulo X segmentum DGE auferre capiens angulum DGF parem dato.* *Euclid. lib. 3. prop. 34.*

TAB.
V.
Fig.
100.

Resolutio. Ducatur tangens DF (n. 142.); & à puncto contactus D age secantem DE, quæ cum tangente efficiat angulum FDE parem dato. Hæc secans

DE auferet segmentum DGE capiens angulum dato parem.

Demonstratio. Nam angulus quivis DGE in scriptus circulo, & insistentis arcui DE habet pro mensura semissem ejusdem arcus [n. 173.]. Atqui semissis arcus DE est mensura anguli FDE = dato angulo (n. 174.). Ergo factum est, quod jubebatur faciendum.

PROPOSITIO III.

191. Problema. *Super data recta BD segmentum circuli construere capiens angulum dato parem.* Euclid. lib. 3. prop. 33.

TAB.
V.
Fig.
101.

Resolutio. Super BD fac angulum FBD dato : à puncto B excitetur BG perpendicularis ipsi BF ; & in medio rectæ BD perpendicularis altera EC, quæ secabit rectam BG in puncto C, à quo circulus intervallo BC describitur. Dico factum.

Demonstratio. Ex puncto quovis N segmenti BND jungantur rectæ NB, ND. BF perpendicularis radio BC tanget circulum [n. 142.]. Quare angulum FBD, æqualem per hypothesin angulo dato, metitur semissis arcus BED. Sed idem angulus FBD æquatur angulo BND segmenti alterni (n. 186.). Ergo segmentum circuli BND capit angulum dato parem. Quod erat &c.

Scholion.

192. Ex eadem Prop. I. Corol. I., nimirum, quod omnes anguli ad circumferentiam inscripti, eidem arcui insistentes, sint æquales, consequitur methodus omnium expeditissima, quæ portio cujusvis circuli describi possit, tot graduum, quot libuerit, sine circino, aut centro ejusdem circuli; quæ praxis est maximæ utilitatis.

Esto AB chorda arcus quæsitæ. Oportet autem arcum describere graduum 10. Angulus itaque in hoc arcu inscriptus habebit pro mensura semissem graduum 350, hoc est, gradus 175.

His positæ, duas regulas CD, CE ita firmiter conjungo in C, ut DCE sit graduum 175, quique nunquam variari possit; dein duos clavos extremitatibus chordæ AB desigo; & verticem anguli C eâ lege circumago, ut duæ regulæ CD, CE semper radant clavos A & B, iisque in motu adrepant. Hâc ratione vertex C lineam circularem ACB describet, hoc est, arcum circuli quæsitum graduum 10.

Hâc praxi portio circuli cujuslibet magnitudinis describi potest. Verùm, cum hæc operatio mechanica sit, geometricam alteram exhibeo ex iisdem principiis.

PROPOSITIO IV.

193. Problema. Datâ cujusvis segmenti circuli chordâ AB, datoque angu-

TAB.
V.
Fig.
102.

TAB. *l*o in eodem segmento, invenire puncta
 V. omnia, per quæ transibit arcus ejusdem
 Fig. chordæ AB, quin cognoscatur, aut quæ-
 103. ratur centrum circuli, cujus est portio
 arcus quæsitus.

Resol., & *Demonstratio* A puncto B
 ducatur utrunque recta BC: fiat angu-
 lus BCG par dato; tum ab extre-
 mitate altera A ejusdem chordæ BA du-
 catur AF parallela ipsi CG, quæ rectæ
 BC occurrat in puncto F. Angulus B
 $FA = BCG$ [n. III.], hoc est, per
 hypothefin angulo datò. Itaque arcus
 quæsitus transibit per F. Eadem me-
 thodò inveniēs alia puncta ejusdem ar-
 cûs, quin quæretur centrum circuli,
 cujus est portio arcus quæsitus. Quod
 erat &c.

Scholion.

194. In Propositione I. hujus elemen-
 ti angulum, cujus vertex sit in circum-
 ferentia circuli, ita circumscripsimus,
 ut ejus latera ultra verticem producta
 nusquam circumferentiæ occurrere pos-
 sint; atque adèd Theorema I. unicè lo-
 cum habet, vel quando angulus inscri-
 bitur in segmento, vel quando angulus
 segmenti à tangente, & secante à puncto
 contactûs comprehenditur. Fieri autem
 interdum potest, ut anguli, cujus ver-
 tex est in circumferentia, latus unum
 ultra verticem productum secet eandem
 circumferentiam: in quo casu, quâ lege
 definien-

Definienda sit hujus anguli mensura, sic statuimus.

PROPOSITIO V.

195. Theorema. *Angulus BAC, cuius vertex A est in circumferentia circuli, comprehensus à chorda AC, & extra circumlum à recta BA, quæ tamen, si ultra verticem A producat, circumulum secet, & aliam chordam AD subtendat, habet pro mensura medietatem duorum arcuum, hinc AFE, inde AMD, quos due chordæ AC, AD subtendunt.*

TAB.

V.

Fig.

104.

Demonstratio. Anguli BAC, CAD æquantur duobus rectis (n. 74.); & consequenter horum mensura est semissis totius circumferentiæ (n. 61.), nimirum, $\frac{AFE}{2} + \frac{AMD}{2} + \frac{ED}{2}$. Atqui per

Theorema I. anguli CAD mensura est $\frac{ED}{2}$. Ergò anguli BAC mensura erit semissis reliquorum duorum arcum, id est, $\frac{AFE}{2} + \frac{AMD}{2}$. Quod erat &c.

196. *Aliter.* Per punctum A ducatur tangens NAO. Angulus BAC æquatur duobus angulis BAN, NAC. Atqui BAN = OAD opposito ad verticem. Ergò totus angulus BAC æquatur duobus simul sumptis angulis segmenti, nimirum, NAC & OAD, quorum mensura est semissis arcuum AFE,

A

AMD. Itaque angulum totalem BAC metiuntur semisses eorumdem arcuum, quos duæ chordæ AE, AD subtendunt. Quod erat &c.

PROPOSITIO VI.

TAB. 197. Theorema. *Angulus quivis BAC*
V. C, cujus vertex A est inter centrum, &
Fig. circumferentiam, habet pro mensura se-
 105. *missæ arcûs BC à suis lateribus inter-*
cepti, cui insilit, ac præterea semissæ
arcûs EF comprehensi à lateribus ad cir-
cumferentiam productis anguli EAF op-
positi ad verticem.

Hoc est summa semissium eorumdem arcuum BC & EF, sive $\frac{BC}{2} + \frac{EF}{2}$ erit mensura solius anguli BAC.

Demonstratio. A puncto F, ubi latus unum BA occurrit circumferentiæ, ducatur recta FD parallela alteri lateri AC. Erit angulus BAC = BFD (n. 108.). Atqui (n. 171.) angulum BFD metitur semissis arcûs BD, nimirum, $\frac{BC}{2} + \frac{CD}{2}$.

Ergò pariter angulum BAC metitur $\frac{BC}{2} + \frac{CD}{2}$. Sed $\frac{CD}{2} = \frac{EF}{2}$, quia CD = EF [n. 147.]. Ergò angulus BAC habet pro mensura $\frac{BC}{2} + \frac{EF}{2}$.

Quod erat &c.

Hinc

Hinc etiam demonstrari facile potest, angulum BAE, cujus vertex est inter centrum, & circumferentiam, habere pro mensura semissem arcus BE à suis lateribus intercepti, ac præterea semissem arcus FC comprehensi à lateribus oppositi anguli ad verticem.

Nam anguli BAE, BAC simul æquantur duobus rectis, & consequenter habent pro mensura semicirculum, nimirum, $\frac{BE}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{FC}{2} + \frac{EF}{2}$.

Atqui ex nuper dictis angulus BAC habet pro mensura $\frac{BC}{2} + \frac{EF}{2}$. Ergò

angulus BAE habet pro mensura $\frac{BE}{2} + \frac{FC}{2}$. Quod erat &c.

PROPOSITIO VII.

198. Theorema. *Angulus BAC, cujus vertex A est extra circumulum, ejusque latera AB, AC arcum concavum DPE interveipiunt, & arcum convexum MN, habet pro mensura semissem differentie duorum arcuum DPE, MN, quos eadem latera comprehendunt.*

TAB.
V.
Fig.
106.

Hoc est, si ab arcu concavo subducatur arcus convexus, semissis residui arcus erit mensura anguli BAC,

Demonstratio. A puncto M, ubi latus unum AB occurrit circumferentiæ, ducatur

caur recta MP parallela alteri lateri A
 C . Angulus $BAC = BMP$ propter
 parallelas [n. 108.]. Atqni angulus
 BMP habet pro mensura $\frac{DP}{2}$ (n. 171.).

Ergò angulus BAC habet pariter pro
 mensura $\frac{DP}{2}$. Sed $PE = MN$ (n.

147.). Ergò DP est duorum arcuum
 DPE , MN differentia. Itaque angu-
 lus BAC habet pro mensura semissem
 differentiae duorum arcuum, concavi D
 PE , & convexi MN , quos eadem la-
 tera intercipiunt. Quod erat &c.

Fig. 199. Demonstratio universalis est,
 107. sive anguli BAC duo latera circum-
 108. secant, sive latus unum BA circum-
 tangat, & alterum CA secet, sive utrum-
 que latus circum tangat.

Corollarium.

Ab hisce tribus Theorematis nuper
 demonstratis hæc consequuntur.

I. Angulus, cujus mensura est semif-
 sis arcus concavi à suis lateribus inter-
 cepti, habet verticem ad circumferen-
 tiam circuli, cujus est pars datus arcus.

II. Angulus, cujus mensura est major
 semissi arcus concavi à suis lateribus in-
 tercepti, habet verticem intra circum-
 ferentiam, cujus est portio datus arcus.

III. Angulus, cujus mensura est minor
 semissi arcus concavi, cui insistit, habet
 verticem extra circumferentiam, cujus est pars
 datus arcus.