Stationes	Sinistra. Pedes.	Unciæ.	Puncta.	Dextra. Pedes.	Unciæ.	Puncta.
1.	4.	3.	2.	7.	1.	4.
2.	10.	3.	5.	3.	3.	7.
3.	2.	9.	4.	12.	1.	6.
4.	3.	10.	9.	11.	9.	10.
Summa	21.	2.	8.	34.	4.	3.
			Subtrahe	21.	2.	8.
			Altitudo	13.	1.	7.

Scholion.

In libellationibus præſertim longioribus alii dioptras adhibent, ut certiùs colliment, alii dioptrarum locô teleſcopia.

ELEMENTUM III.

De Lineis Circularibus, earúmque mutuô inter ſe, & cum Lineis Rectis occurſu.

SUPERIORIBUS Elementis, poſtquam rectarum linearum invicem concurrentium, & earum etiam, quæ nunquam concurrunt, ſymptomata perſecuti fuimus, ordò rerum poſtulat, ut hæc eadem conſideratio ad lineas circulares traducatur.

DEFINITIONES.

124. Planam ſuperficiem comprehenſam circuitu unius lineæ A B G D E, cujus omnia puncta æqualiter diſtent ab Tab. IV. Fig. 50.

eodem puncto C ejusdem plani, diximus n. 56. vocari circulum, punctum C centrum, lineam ABGDE circumferentiam, quamlibet portionem circumferentiæ arcum, & lineam quamvis rectam à centro ad circumferentiam ductam radium nominari. Hisce definitionibus sequentes addendæ sunt.

125. *Omnis recta linea, puta, BD, cujus duæ extremitates B & D in circumferentiam desinunt, dici solet Chorda, quæ, si per centrum transit, uti AD, vocatur etiam Diameter, & duobus radiis æquatur.* Atque hinc omnes diametri ejusdem circuli sunt æquales.

126. *Si recta EF ita circulum tangat in E, ut producta ad F, nullâ ratione circulum secet, sed tota jaceat extra ipsum, dicetur recta EF Tangens circuli.*

TAB. IV. Fig. 50. 127. *Segmentum circuli est figura, quæ sub arcu BGD, ejúsque chordâ BD comprehenditur.*

Spatium, seu figura comprehensa ab arcu AB, & duobus radiis CA, CB, nominatur Sector circuli.

128. *Si à quovis circumferentiæ puncto B ad diametrum AD ducatur perpendicularis BH, hæc dicitur ordinata circuli respectu diametri AD; & partes AH, HD diametri, vocantur abscissæ ordinatæ BH.*

Omnis recta, quæ circulum secat, generatim dicitur Secans.

Circu-

Circuli Concentrici ſunt, qui idem centrum habent: Excentrici, qui centra habent diverſa. TAB. IV. Fig. 51. 52.

Corollarium. I.

129. Duæ circumferentiæ concentricæ, quarum radii ſint æquales, in unicam commiſcentur; quarum autem radii ſunt inæquales, nuſquam concurrunt.

Corollarium II.

130. Hinc circuli ſe mutuò ſecantes, aut interiùs tangentes non habent idem centrum. *Euclid. lib. 3. prop. 5. & 6*

PROPOSITIO I.

131. Problema. *Per data tria puncta non in directum jacentia* A, B, D *circulum deſcribere.* Euclid. lib. 4. prop. 5.

Reſolutio. Puncta data A, B, D binis rectis AB, BD connecte, quas [n. 73.] biſeca perpendicularibus MN, OP, concurrentibus in C. Hoc erit centrum circuli per A, B, D tranſeuntis.

Demonſtratio. Quia recta MN perpendicularis eſt in medio rectæ AB, punctum C ejusdem perpendicularis erit (n. 51.) æqualiter diſtans ab extremitatibus A & B. Et rurſum, quia OP perpendicularis eſt in medio rectæ BD, punctum pariter C erit æqualiter diſtans à punctis B & D [n. 51.]. Itaque punctum C æquidiſtat à tribus punctis A, B, D, & conſequenter (n. 56.) erit centrum TAB. IV. Fig. 53.

circum-

circumferentiæ tranſeuntis per tria data puncta A, B, D. Quod erat &c.

PROPOSITIO II.

132, Theorema. *Si extra circulum,*
TAB. *vel in ipſa circumferentia circuli, vel in*
IV. *circulo quodvis aliud à centro* C *accipia-*
Fig. *tur punctum* A, *ex quo rectæ plures in*
54. *circumferentiam cadant.*
55. *I. Maxima erit* AB, *quæ per centrum*
56. *tranſit.*

II. Aliarum AE, AD *major eſt illa* AD, *cujus extremitas* D *eſt propior extremitati* B *maximæ* AB.

Et reciprocè.

I. Si recta AB *à quovis puncto* A, *quod non ſit centrum, ducta ad circumferentiam, ſit omnium rectarum maxima, quæ ab eodem puncto* A *ad circumferentiam duci poſſint, recta* AB *tranſibit per centrum.*

II. Si duarum rectarum inæqualium AD, AE *neutra per centrum tranſeat, rectæ* AD, *quæ major eſt, extremitas* D *propior erit extremitati* B *ejus rectæ* AB, *quæ per centrum tranſit.* Euclid. lib. 3. prop. 7, & 8.

Demonſtratio. Ducantur radii CD, CE ad extremitates rectarum AD, AE, quæ per centrum non tranſeunt: erit

I. CB = CD; additáque utrinque communi AC, fiet AB = AC + CD.

Atqui

Atqui [n. 28.] $AC+CD>AD$. Ergò $AB>AD$. Eôdem modô demonſtrabitur $AB>AE$. Quare maxima erit AB, quæ per centrum tranſit. Quod erat primum.

II. $CD=CE$. Atqui [n. 28.] $CO+OD>CD$. Ergò $CO+OD>CE$. Aufer OC ex utroque membro: reſiduum $OD>OE$. Adde AO utrinque: fiet $AO+OD$, ſeu $AD>AO+OE$. Sed $AO+OE>AE$ (n. 28.) Ergò multò magìs $AD>AE$. Quare rectarum per centrum non tranſeuntium major eſt illa, quæ maximæ propior. Quod erat alterum.

Et reciprocè.

I. Quia ex prima parte hujus, recta, quæ non tranſit per centrum, non eſt omnium maxima linearum, quæ ab eodem puncto A, quod non eſt centrum, in circumferentiam cadunt: perſpicuum eſt, rectam AB per centrum tranſire, ſi omnium maxima ſit. Quod erat tertium.

II. Si duarum rectarum inæqualium AD, AE, quæ major eſt AD, non eſſet maximæ proprior, per primam partem hujus minor eſſet, contra hypotheſin. Quæ omnia erant demonſtranda.

Corollarium I. TAB.

133. Si duæ rectæ AD, AG ab eodem puncto A, quod non ſit centrum, ad circumferentiam ductæ, ſint æquales, earum IV. Fig. 57.58 59,

earum extremitates D, G erunt æqualiter diſſitæ ab extremitate B rectæ AB tranſeuntis per centrum: hoc eſt, arcus BD, BG erunt æquales.

Et reciprocè, ſi ſint æquidiſtantes, erunt æquales.

Corollarium II.

134. Fieri ergò non poteſt, ut ab eodem puncto A, quod non ſit centrum, ad circumferentiam tres rectæ æquales duci poſſint: hoc eſt, ut tria puncta ejusdem circumferentiæ æquidiſtent ab eodem puncto A, quod non eſt centrum. *Euclid. lib. 3. prop. 8. & 9.*

TAB. IV. Fig. 60. Similiter tria puncta ejusdem circumferentiæ, cujus centrum C, pertinere non poſſunt ad aliam circumferentiam, cujus centrum A.

Ergò duæ circumferentiæ FBDF, EBDE in tribus punctis ſe mutuò ſecare non poſſunt. *Euclid. lib. 3. pro.p 10.*

Corollarium III.

135. I. Diameter AB eſt omnium chordarum maxima (n. 132.) Et reciprocè. *Euclid. lib. 3. prop. 15.*

II. Duorum arcuum inæqualium AED, AE, quorum uterque ſit ſemicirculò minor, ſive in eodem circulo, ſive in circulis æqualibus, major arcus AED majorem chordam AD ſubtendit (n. 132.)

III. Dua-

III. Duarum chordarum inæqualium AD, AE, ſive in eodem circulo, ſive in circulis æqualibus, major AD majorem etiam arcum ſubtendit.

IV. Si chordæ AD, AG ſint æquales, eorum arcus AED, AHG erunt æquales. Et reciprocè. (n. 133.) *Euclid. lib. 3. prop. 26. & 27.*

V. Si punctum A bifariam dividat arcum DAG punctum æqualiter diſtabit à punctis D & G. Nam chordæ AD, AG erunt æquales.

PROPOSITIO III.

136. Theorema. *I. Omnium rectarum, quæ à puncto* A, *quod non ſit centrum, in circumferentiam cadunt, minima eſt* AM, *quæ producta tranſit per centrum* C.

Et reciprocè.

II. Si recta AM *ſit omnium minima linearum, quæ à puncto* A, *quod non ſit centrum, in circumferentiam incidunt, eadem* AM *producta ſemper tranſit per circuli centrum* C. Euclid. lib. 3. prop. 7. & 8.

Demonſtratur I. pars. Eſto quævis alia recta AN ab eodem puncto A ad circumferentiam ducta, quæ producta non tranſeat per centrum C. Dico hanc fore majorem ipsâ AM. TAB. IV.

Ducatur radius CN. Si punctum A eſt intra circulum, erit NA + AC > Fig. 54.

N

NC [n. 28.]. Sed NC = MC. Ergò NA + AC > MC; ſublatóque utrinque AC, erit [n. 36.] AN > AM.

Si verò punctum A ſit extra circulum,
TAB. IV. Fig. 56. erit AN + NC > AC; ſublatiſque utrinque æqualibus, id eſt, radio NC ex una parte, & radio MC ex altera, erit (n. 36.) AN > AM. Quot erat primum.

Demonſtratur II pars. Nam, ſi AM non tranſiret per centrum C, non eſſet ex prima parte hujus Theor. omnium linearum minima, contra hypotheſin. Quod erat alterum.

PROPOSITIO IV.

137. Theorema. *Si recta* FG *circumferentiæ occurrat in duobus punctis* A & B, *circulum ſecat.* Euclid. lib. 3. prop. 2.

TAB. IV. Fig. 63. *Demonſtratio.* Ducantur radii CA, CB ubi circumferentiæ occurrit recta FG. Hi duo radii, cùm ſint æquales, perpendiculares eſſe non poſſunt rectæ FG, ſed æquidiſtantes erunt à perpendiculari ductâ à centro C. [n. 92.]. Itaque perpendicularis CD à centro ducta cadet in medio rectæ AB. Atqui hæc perpendicularis CD minor eſt radiô CA, aut CB; quin imò omnes rectæ ductæ à centro C inter A & B minores ſunt eiſdem radiis CA, CB (n. 89.). Ergò omnia puncta rectæ AB

inter

inter A & B contenta, intra circulum cadunt. Omnes pariter rectæ à centro C ductæ ad F G, inter A & F, vel inter B & G erunt longiores radiis C A, C B (n. 89.) Ergò partes A F, B G ejusdem rectæ F G extra circulum cadunt. Itaque recta F G, quæ circumferentiæ occurrit in duobus punctis A & B, circulum secat. Quod erat &c.

Corollarium I.

138. Ergò tangens F G circumferentiæ occurrit in unico puncto E; aliter secaret circulum. TAB. IV. Fig. 64.

Corollarium II.

139. Recta C E, à centro C ad punctum contactûs E ducta, tota intra circulum cadit; & quævis alia recta, puta, C D à centro ad tangentis punctum quodvis aliud à puncto contactûs ducta, egreditur à circulo. Hinc sequitur TAB. IV. Fig. 64.

I. Rectam C E, à centro ductam ad punctum contactûs, minimam fore omnium linearum, quæ duci possint à centro ad tangentem, & consequenter huic tangenti perpendicularem esse (n. 89.). *Euclid. lib. 3. prop.* 18.

II. Aliam quamvis lineam C D, quæ à centro ad punctum contactûs ducta non sit, non esse minimam linearum, quæ duci possint à centro ad tangentem, & consequenter huic tangenti perpendicularem non esse.

III. Tangens itaque F G tota cadit extra circulum, eúmque tangit in E. *Euclid. lib. 3. prop. 16. part 1.*

Corollarium III.

TAB. IV. Fig, 64. 140. Recta igitur CE, quæ à centro C perpendiculariter ducatur ad tangentem F G, transit per punctum contactûs; aliter non esset tangenti perpendicularis.

Hoc Corollarium usui est resolutioni problematis, in quo quæratur, ut determinetur punctum, in quo tangens occurrit circumferentiæ circuli.

Corollarium IV.

141. Quia radius CE, à centro ad punctum contactûs ductus, tangenti F G perpendicularis est, erit reciprocè tangens F G perpendicularis radio C E in puncto contactûs, seu in extremitate ejusdem radii.

Corollarium V.

TAB. IV. Fig. 64. 142. Et reciprocè recta F G, quæ perpendiculariter ducatur ad extremitatem radii CE, tanget circulum in Puncto E.

Nam, si hæc perpendicularis F G circulum non tangeret in puncto E, recta, quæ circulum tangeret in eodem puncto E, non esset perpendicularis radio CE in ejusdem extremitate: quod repugnat præced. Corol.

Habes hinc methodum facillimam, quâ ad datum circumferentiæ punctum tangentem ducas.

PRO-

PROPOSITIO V.

143. Theorema. *Si recta* AE *perpendiculariter, & bifariam secet chordam* FG,

I. Recta AE *transibit per centrum* C.

II. Eadem bifariam secabit arcum FEG.

Demonstratur I. pars. Puncta omnia, quæ æqualiter distabunt à duabus extremitatibus rectæ FG, erunt necessariò in perpendiculari AB [n. 51.]. Atqui centrum C est æqualiter distans à duabus extremitatibus F & G, quæ sunt in circumferentia (n. 56.). Ergò centrum C est in perpendiculari AB; & consequenter hæc perpendicularis per centrum transit. Quod erat primum. TAB. IV. Fig. 65.

Demonstratur II. pars. Punctum medium E arcûs FEG est æqualiter distans à suis extremitatibus F & G [n. 135.]. Ergò perpendicularis AB transibit etiam per hoc punctum medium E (n. 51.), & consequenter arcum FEG secabit bifariam. Quod erat alterum.

Scholion.

144. *Hoc Theorema viam aperit resolvendi duo problemata.*

Nam ex prima parte hujus invenies centrum dati circuli, aut arcûs ABD; *si nempe in hoc arcu ducantur duæ chordæ* AB, BD, *& in earum medio excitentur perpendiculares* MN, OP, *quarum* TAB. IV. Fig. 53.

rum utraque transibit per centrum; & consequenter in puncto C concursûs determinabitur centrum. Eôdem artificiô datum arcum perficies. Euclid. lib. 3. prop. 25.

. *Secunda pars Theorematis docet methodum secandi arcum bifariam.*

Corollarium I.

TAB. IV. Fig. 65. 145. Quoniam ex præced. Theor. recta A E perpendicularis in medio chordæ F G transit per centrum, & secat arcum F E G bifariam: perspicuum est, quòd punctum medium B chordæ F G, punctum medium E sui arcûs F E G, & centrum C circuli in eadem recta linea consistant. Quarè, si linea recta per duo ejusmodi trium punctorum B, E, C ducatur, necessariò per tertium transibit, erítque simul perpendicularis in medio chordæ F G: hoc est,

I. Si recta A E transit per centrum C, & per punctum medium B chordæ F G, eadem dividet arcum F E G bifariam, & erit perpendicularis in medio chordæ F G. *Euclid. lib. 3. prop. 3. & 30.*

II. Si recta A E transit per centrum C, & per punctum medium E arcûs F E G, eadem erit perpendicularis in medio B chordæ F G.

III. Si recta A E bifariam secat & chordam F G, & arcum F E G, eadem transibit per centrum, & erit perpendicularis in medio chordæ F G.

Ita-

Itaque duobus datis dantur reliqua.

Corollarium. II.

146. Quoniam ad idem punctum medium B chordæ F G perpendicularis unica duci poteſt (n. 50.) ; & præterea ex præced. Theor. hæc perpendicularis tranſit per centrum C, & per punctum medium E arcûs F G E : illud evidenter conſequitur, quòd, ſi linea recta ſit perpendicularis chordæ F G , & tranſeat per unum ex tribus punctis B, E, C , tranſibit quoque neceſſariò per duo reliqua , hoc eſt ,

I. Si recta AE ſit perpendicularis chordæ F G, ac biſariam ſecet arcum F E G, eadem tranſibit per centrum C, & per punctum B medium chordæ F G.

II. Si recta A E ſit perpendicularis chordæ F G , & tranſeat per centrum C , eadem ſecabit biſariam & chordam, & arcum. *Euclid. lib. 3. prop. 3.*

Corollarium III.

147. Duo arcus AF , B G à duabus chordis parallelis AB , F G intercepti , ſunt æquales. Nam, ſi à centro C ducatur recta C E perpendicularis ſuper AB , erit eadem perpendicularis alteri parallelarum F G. Itaque per Corol. præced. recta C E tranſibit per punctum medium E duorum arcuum A E B, F E G. Erit ergò arcus AFE= arcui B G E; & arcus F E= arcui GE.

Quarè, si secunda æqualitas subducatur à prima, residuum erit arcus AF = arcui BG.

TAB. IV. Fig. 66. Et reciprocè, si in eodem circulo duo arcus AF, BG ab iisdem chordis AB, FG intercepti, sint æquales, chordæ erunt parallelæ. Nam, si ad punctum medium E arcûs FEG ducatur radius CE, hic erit perpendicularis chordæ FG (n. 145.). Atqui punctum E est quoque per constructionem medium arcûs AFEGB. Ergò radius CE erit etiam perpendicularis chordæ AB (n. 145.): hinc idem radius CE erit perpendicularis duabus chordis AB, FG. Ex quo sequitur, (n. 87.) duas chordas AB, FG perpendiculares esse eidem rectæ CE, & consequenter parallelas [n. 91.].

148. Hinc disces per datum punctum F parallelam ducere datæ rectæ AB. Sumptô enim quovis punctô C pro centro, describatur per punctum F arcus AFEGB, qui rectam AB secabit in duobus punctis A & B; dein accipiatur arcus BG æqualis arcui AF: recta à puncto G ad punctum datum F ducta, erit parallela quæsita.

Corollarium IV.

TAB. IV. Fig. 66. 149. Ergò duo arcus AE, BE sunt æquales, si intercipiantur à chorda AB, & tangente FG, quæ sint invicem pa-

rallæ

rallelæ. Nam radius CE ad punctum contactûs E ductus, tangenti perpendicularis est (n. 139.), & pariter perpendicularis chordæ parallelæ AB (n. 99.); & consequenter dividet arcum AEB bifariam. Ergò punctum contactûs E tangentis, quæ chordæ AB sit parallela, secat arcum AEB in duos arcus æquales.

PROPOSITIO VI.

150. Theorema. *Duæ circumferentiæ, quæ se invicem secant, in duobus tantùm punctis sibi mutuò possunt occurrere.*

Et vicissim.

Duæ circumferentiæ, quæ in duobus punctis B & D *sibi mutuò occurrunt, se invicem secant.* Euclid. lib. 3. prop. 10. TAB. IV. Fig. 68.

Demonstratur I. pars. Nam duæ circumferentiæ in tribus punctis non possunt occurrere, quin mutuò congruant, & in unicam confundantur (n. 134.). Ergò duæ circumferentiæ, quæ se invicem secant, in duobus tantùm punctis sibi mutuò occurrunt, hoc est, in puncto ingressûs unius in alteram, & in puncto egressûs. Quod erat primum.

Demonstratur II. pars. Ex A centro unius ciruli ducantur radii AB, AD ad puncta, in quibus circumferentiæ sibi mutuò occurrunt. Itaque, cùm duæ rectæ AB, AD sint æquales, neutra earum tranſibit per centrum C alterius circuli B G D E, ſed ambo deſinent in puncta B & D æquè diſtantia ab extremitate E rectæ AE, quæ tranſit per centrum C hujus circuli (n. 133.). Concipe jam ab eodem puncto A ad omnia circumferentiæ B G D E B puncta infinitas rectas duci: rectæ, quæ ab arcu B G D terminantur, minores erunt radiis A B, A D (n. 136.); rectæ, quæ ab arcu B E D terminantur, majores erunt iisdem radiis A B, A D (n. 132.). Ergò arcus B E D erit extra eundem; & conſequenter duo circuli, qui in duobus circumferentiæ punctis ſibi mutuò occurrunt, ſe invicem ſecant. Quod erat alterum.

Corollarium I.

TAB. IV. Fig. 69. 70.

151. Duæ ergò circumferentiæ, quæ ſe tangunt vel exteriùs, vel interiùs, in unico puncto E ſibi mutuò occurrunt; alioqui contra hypotheſin ſe invicem ſecarent. *Euclid. lib. 3. prop.* 13.

Quinimò omnes, quotquot ducere libuerit, circuli, qui habent centra in una recta, eámque ſecant in eodem puncto E, ſe mutuò in puncto illo contingunt. Quod perſpicuum eſt, inquit P. Tacquet, ex notione ipſa linearum, quæ comparantur. Neque enim aut recta linea, & curva circuli peripheria, aut peripheriarum inæqualium diverſæ curvaturæ ſecundùm ullam ſuî partem poſſunt con-

congruere; congruerent autem, si se in tota invicem parte aliqua tangerent.

Corollarium II.

152. Ergò recta AE, quæ à centro A circuli X ad punctum contractûs E utrique circulo X & Z commune ducitur, est omnium rectarum minima, quæ duci possint ab eodem puncto A ad circumferentiam circuli Z. Nam, ùt patet, AB > AE.

Corollarium III.

153. Si duo circuli X & Z se intus, vel exteriùs tangant, recta AE, quæ à centro A unius X ducitur ad punctum contactûs E, ulteriùs producta transibit per centrum C alterius circuli Z. Nam AE in utroque casu est omnium rectarum minima, quæ duci possint à puncto A ad circulum Z [n. 136.].

Duorum ergò circulorum se intus, vel exteriùs contingentium duo centra, & punctum contactûs sunt in una eadémque linea recta.

Itaque, si duo circuli se intus, vel exteriùs tangant, recta conjungens eorum centra C & A transibit per contactum E. *Euclid. lib. 3. prop.* 11. & 12.

Corollarium IV. TAB.

154. Hinc duorum circulorum se se tangentium facilè determinatur punctum contactûs E: si nimirum per eorum centra ducatur recta AC. IV. Fig. 69. 70.

Corollarium V.

155. Ex Corol. 4. consequitur etiam methodus describendi quemvis circulum, aut arcum, qui datum circulum tangat in dato puncto. Nam per dati circuli centrum, & per datum punctum contactûs ducta recta transibit per centrum alterius circuli intervallô quôvis describendi.

Scholion.

156. *Postrema hæc operatio Architectis maximi usûs esse solet; quippe qui, adhibitis portionibus ejusdem circuli, vel diversorum circulorum se se contingentium, diversas curvas eô artificiô describunt, ut curva ex his segmentis composita, una eadémque, suæque originis esse videatur. Exponam itaque hoc loco in gratiam Tironum praxes ab Architectis adhibitas.*

Tab. IV. Fig. 71. 72. 157. Praxes. *Cymatium* E D C *est curva sinuosa, quæ punctum inflexionis habet in* D, *quæque componitur ex duobus segmentis circulorum se se tangentium in hoc puncto inflexionis* D. *Quare centra* A & B, & *punctum contactûs* D *duorum arcuum sunt in eadem recta linea* A D B.

Tab. IV. Fig. 73. 158. *Arcus depressi, qui ad similitudinem semiellipsium accedunt, constant tribus segmentis circulorum, quorum medium* D F *tangit extremitatibus suis* D

&

& F duos alios arcus ED, FG. *Itaque centrum* A *arcûs* ED, *centrum* B *arcûs* DF, *& punctum commune contactûs* D, *quô hi duo arcus junguntur, sunt in unica recta linea* BAD. *Similiter centrum* B *arcûs* DF, *centrum* C *arcûs* FG, *& punctum contactûs* F, *quô duo istiusmodi arcus connectuntur, sunt in eadem recta* BCF.

159. *Helices, quæ spiralium formam imitantur, constant pluribus arcubus* ED, DF, FG, *sibi invicem succedentibus, qui se contingunt in punctis, ubi uniuntur. Itaque centrum* A *primi arcûs* ED, *& centrum* B *secundi* DF, *& punctum contactûs* D, *ubi connectuntur hi duo arcus, sunt in eadem recta linea* DB. *Pariter centrum* B *arcûs* DF, *centrum* C *arcûs sequentis* FG, *& punctum contactûs* F *commune duobus arcubus, sunt in eadem recta* BF. *Atque ità porrò de reliquis arcubus, qui connecti possent, & curvam non interruptam componere videntur.*

TAB. IV. Fig. 74.

PROPOSITIO VII.

160. Theorema. *Inter tangentem* ED, *& arcum circuli nulla duci potest recta linea, quin circulum secet.* Euclid. lib. 3. prop. 16.

TAB. IV. Fig. 75.

Demonstratio. Infra ED, si fieri potest, cadat FB tota extra circulum. Quoniam tangens ED per B extremitatem diame-

diametri perpendicularis eſt radio A B (n. 139.), erit eadem F B obliqua radio A B, & reciprocè radius A B obliquus rectæ F B; duci ergò poteſt à centro A ad rectam F B perpendicularis A B, quæ minor erit radio A B (n. 89.). Itaque punctum C intra circulum cadet; adeóque recta F B circulum ſecat. Quod erat &c.

Corollarium I.

TAB. IV. Fig. 76. 161. Quæ ab hoc Theoremate conſequuntur Corollaria, vel potiùs paradoxa, breviſſimè in gratiam Tironum juvat attingere, eíſque infiniti myſteria hoc loco primùm aperire, varióſque infinitorum ordines, hoc eſt, calculi infiniteſimalis principia. Angulus igitur contactûs tangente H L, & arcu M L interceptus, eſt quovis rectilineô minor. Angulus verô ſemicirculi inter radium C L, & arcum M L interceptus, eſt quovis rectilineô acutô major.

Scholion.

162. *Hoc paradoxum Euclidis exercuit Mathematicorum ingenia. Agitata eſt hæc de angulo contactûs controverſia inter Jacobum Peletarium Cenomani in Gallia Matheſeos Profeſſorem, & Chriſtophorum Clavium. Hic in ſchol. ad 16. elem. 3. angulum contactûs rectilineo heterogeneum agnovit, quemadmodum linea eſt ſuperficiei heterogenea; ille verò*

angu-

angulum contactûs è numero angulorum sustulit, & pro non quanto declaravit. Egregium etiam de angulo contactûs, & semicirculi tractatum conscripsit Wallisius vol. 2., ubi cum Peletario angulum contactûs omni assignabili minorem, adeóque nullius magnitudinis esse defendit. Verùm nemo meliùs mysterium hoc enucleavit, quàm Newtonus lib. 1. princip. philosoph. natural. lem. 6., ubi prima jacit calculi infinitesimalis principia, demonstrátque, quomodo angulus rectilineus sub tangente, & chorda, quæ versùs tangentem continuò accedat, comprehensus, minuatur in infinitum, & ultimò evanescat: nimirum

163. LEMMA. Si arcus quilibet positione datus ACB subtendatur chordâ AB, & in puncto aliquo A, in medio curvaturæ continuæ, tangatur à recta utrinque producta AD, dein puncta A & B ad invicem accedant, & coëant: Dico, quòd angulus BAD sub chorda, & tangente contentus minuetur in infinitum, & ultimò evanescet. Nam, si angulus ille non evanescit, continebit arcus ACB cum tangente AD angulum rectilineo æqualem; & propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothesin. TAB. IV. Fig. 77.

Itaque inter tangentem AD, & chordam infinitesimam AB nulla duci potest recta linea, quæ angulum finitum cum chor-

chorda, vel tangente efficiat; ideóque inter arcum AB, & tangentem AD nulla duci poteſt recta linea, quæ arcum non ſecet.

Corollarium II.

164. Cùm recta linea omni carens latitudine inter tangentem, & circulum ad contactum duci non poſſit, quin circulum ſecet: perſpicuum eſt ſpatium inter tangentem, & circulum fore infinitè parvum.

Corollarium III.

165. Hoc tamen ſpatium in ſe ipſo infinitè parvum dividi adhuc poteſt in alia infinita minora ſpatiola infinitè parva. Nam per idem punctum contactûs infiniti circuli majores duci poſſunt. Quâ in re latet totum myſterium aſymptoticum, hoc eſt, lineæ rectæ ad hyperbolam unà ſecum in infinitum productam accedentis ad intervallum quocunque datô minus, nunquam tamen concurrentis.

Corollarium IV.

166. Ex his ſequitur diverſos eſſe, & pariter infinitos infinitè parvorum ordines. Quod P. Guido Grandus luculenter expoſuit, & demonſtravit in opere egregio, quod inſcribit: *De infinitis infinitorum, & infinitè parvorum ordinibus.* Atque hinc calculi infiniteſimalis principia ſanè fœcundiſſima. Verùm hæc alibi multò accuratiùs tractabuntur.

ELE-