ELEMENTUM I.

De variis Linearum Rectarum sibi mutuò occurrentium affectionibus.

Ex vario linearum occursu prima hæc Geometriæ quasi lineamenta ducimus: rectarum nimirum vel perpendiculariter, vel obliquè in alias incidentium indolem contemplamur, affectionésque multiplices. Quoniam verò, occurrentibus inter se lineis, primam genesin nanciscuntur anguli, hinc ordiendum nobis est.

DEFINITIONES.

41. *Angulus est duarum linearum in plana aliqua superficie se mutuò tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.* Hoc est, quia duæ lineæ AB, AC concurrunt in A, & non jacent in directum, ideo efficiunt angulum A in eadem existentem superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicentur autem duæ lineæ non in directum jacere, quando altera earum versùs concursum protensa non coincidit cum altera. TAB. I. Fig. I.

Corollarium.

42. Consistit itaque anguli cujusvis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; lineæ enim longiùs excurrentes, sicuti non augent anguli inclinationem, ità neque ejusdem magnitudinem.

43. *Angulus rectilineus est, quem rectæ lineæ efficiunt: curvilineus, quem*
TAB. *curvæ: mixtus, quem recta, & curva.*
I. Rectilineum angulum hoc loco unicè
Fig. consideramus.
1.2.3. 44. *Latera, seu crura anguli sunt lineæ* AB, AC, *quæ angulum efficiunt.*

Vertex anguli est punctum A, *in quo latera sibi mutuò occurrunt.*

45. Cùm angulus est unicus BAC, unicâ etiam litterâ A ad verticem positâ
Fig. designari solet. Cum plures anguli ad
1. unum punctum existunt, solent Geometræ, ut tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus litteris BAC, quarum media A ostendit punctum A, in quo lineæ conficiunt angulum; extremæ verò litteræ B & C significant initia li-
Fig. nearum, quæ angulum continent; in-
4. terdum etiam unicâ litterâ O interiùs positâ designatur,

46. *Anguli æquales, vel potiùs similes dicuntur, si, cùm sibi invicem vertices* A *&* a *imponuntur, latera unius* AB, AC
Fig. *congruant lateribus alterius* ab, ac.
1. Adhoc non requiritur, ut latera sint æquè longa.

47. *Cùm recta* AB *super rectam* FG *consistens in neutram inclinat partem, ac*
Fig. *proinde angulos facit utrinque æquales* A
5. BF, ABG, *recta* AB *alteri insistens dicitur perpendicularis.*

Uterque æqualium angulorum ABF, *vel* ABG *dicitur rectus.*

48.

48. *Sin verò recta DB ſuper rectam FG conſiſtens in alteram partem magìs inclinet, ac proinde angulos faciat utrimque inæquales DBF, DBG, recta DB vocatur obliqua; angulus DBG rectô minor, acutus nominatur; & angulus DBF rectô major, obtuſus.* Fig. 5.

Corollarium I.

49. Omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales. Nam, ùt ex dictis colligitur, angulus rectus nullam patitur varietatem, nec unus alterô major, minórve dici poteſt; cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magìs in unam partem, quàm in alteram inclinare. Obtuſus verò, & acutus augeri poſſunt, & minui infinitis modis; cùm ab illa inflexibilitate, inquit Clavius, lineæ perpendicularis infinitis etiam modis recta linea poſſit recedere.

Corollarium II.

50. Ad idem punctum B datæ rectæ FG, & in eadem ſuperficie perpendicularis unica duci poteſt. Nam quævis alia DB in unam magìs, quàm in alteram partem inclinaret. Fig. 5.

Corollarium III.

51. Si recta AB perpendicularis ſit rectæ FG in puncto medio B, quodvis punctum, puta, C ejuſdem perpendicularis AB æqualiter diſtabit ab extremitatibus F & G datæ rectæ. Perſpicuum eſt enim rectas CF, CG, quæ Fig. 6.

metiuntur diſtantiam ejuſdem puncti C ab iiſdem extremitatibus, fore æquales; aliter perpendicularis AB in unam magìs partem, quàm in alteram vergeret contra hypotheſin.

Corollarium IV.

52. Si recta AB perpendicularis ſit rectæ FG in puncto medio B, quodvis aliud punctum D, quod extra perpendicularem in eadem plana ſuperficie ſumatur, non erit æqualiter diſtans ab extremitatibus F & G. Nam FC = CG ex Corol. I. Si æqualibus addas utrimque CD, erit per Ax. II. FC + CD
Fig. 7. = CG + CD. Atqui (n. 28.) CD + CG > DG. Ergo per Ax. I. FC + CD, hoc eſt, DF > DG.

Corollarium V.

53. Itaque quodvis punctum, quod æqualiter diſtet ab extremitatibus rectæ FG, erit in perpendiculari AB, quæ
Fig. 6. bifariam ſecat rectam FG; eadémque perpendicularis AB tranſit per omnia puncta æqualiter diſtantia ab iiſdem extremitatibus.

Corollarium VI.

54. Denique, quod maximè notandum, ſi duo puncta A & C, vel A & B ſint æqualiter diſſita ab extremitatibus rectæ FG, recta linea AB, quæ per
Fig. 6. hæc duo puncta tranſit, erit perpendicularis in medio rectæ FG. Nam duo puncta

puncta determinant positionem lineæ. (n. 24.)

Scholion I.

55. *Duæ regulæ sic compactæ, ut angulum rectum coutineant, instrumentum efficiunt, quod Norma appellatur. Normæ examen sic instituitur. In quavis recta* BF, *sumptô punctô* A, *normæ latus* AE *applica super* AF ; *& juxta latus alterum describatur recta* CA ; *conversâ deinde normâ versus* B, *si utroque latere congruat rectis* BA, CA, *scito esse legitimam, & exactam. Ratio pendet ex def. perpendicularis* [*n.* 47.] Fig. 8.

Scholion II.

Quia arcus circuli metitur quantitatem angulorum, idcirco definitionem circuli hoc loco antevertimus.

56. *Circulus est plana superficies unius lineæ circuitu comprehensa, quæ circumferentia dicitur, à qua ad aliquod punctum* A *intra contentum, quod centrum dicitur, omnes, quæ duci possunt, rectæ lineæ, sive radii circuli,* AB, AC, AD, AE *sunt æquales.* Omnia itaque circumferentiæ puncta B, C, D &c. æquidistant à centro. Fig. 9.

Scholion.

57. *Si intelligatur recta* AD *circa punctum* A *quiescens moveri, donec ad eumdem redeat locum, à quo dimoveri cœpit, describet ipsa recta totum spatium circulare : punctum verò alterum extremum* D Fig. 9.

 deli-

delineabit circumferentiam, ſeu, ut vocant, peripheriam BCDE.

58. *Diameter circuli eſt recta quædam linea* BAD *per centrum ducta, & ex utraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam ſecat, in duos ut vocant, ſemicirculos, quorum ſemiſſem* B A C *appellant quadrantem circuli.*

Fig. 9. *Arcus circuli eſt pars circumferentiæ major, minórve ſemicirculo.*

Corollarium.

Circuli æquales ſunt, quorum radii ſunt æquales.

Scholium.

59. *Circumferentiam Mathematici partiri ſolent in 360 partes æquales, quas gradus vocant, ob multas illius numeri commoditates, ſemicircumferentiam in 180, quadrantem in 90; gradum verò quemlibet dividunt in 60 alias partes æquales, quas vocant minuta prima, quorum unumquodque dividitur rurſum in 60 alias partes æquales, quas appellant minuta ſecunda; atque ita porrò, ſi modò inſtrumenti magnitudo id patiatur. Ejuſmodi diviſio in minuta prima, & ſecunda adhibetur, cùm exactiſſima angulorum inventio ad uſus potiſſimùm Aſtronomicos requiritur. Quâ verò methodô, quóve artificiô hæc diviſio peragenda ſit, alibi trademus.*

TAB. II. Fig. 39.

60. *Cur autem ad circumferentiæ diviſionem ex omnibus numeris Mathematici*

tici elegerint numeros 360, 90, & 60, causa est, quòd hi numeri plurimas habeant partes aliquotas, quod in calculo solet esse percommodum. Numerus quippe 360 aliquotas habet 22, ùt in adjecto schemate patet.

Partes aliquotæ numeri 360.

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10,
180, 120, 90, 72, 60, 45, 40, 36,
12, 15, 18,
30, 24, 20.

Partes aliquotæ numeri 90.

2, 3, 5, 6, 9,
45, 30, 18, 15, 10.

Partes aliquotæ numeri 60.

2, 3, 4, 5, 6,
30, 20, 15, 12, 10.

In his seriebus numeri oppositi sese invicem denominant, quales nempe sint partes totius; puta, 45 in primo ordine oppositum sibi habet 8; ac proinde 45 est octava pars numeri 360; 8 autem est quadragesima quinta pars numeri 360. TAB. II. Fig. 39.

61. *Mensura anguli est arcus circuli* A C, *qui ab ejusdem anguli vertice* B *tanquam centro, & intervallô quovis describitur, & à lateribus* BA, BC *terminatur.* Quare angulus ABC totidem graduum, & minutorum esse dicetur, quot gradus, & minuta continet arcus interceptus AC. TAB. I. Fig. 10.

62. *Mensura anguli recti est semper*

quadrans circuli, nempe gradum 90. Nam si duæ diametri BD, CE sese ad angulos rectos secent, circumferentiam circuli divident in quatuor partes æquales,
TAB. quarum quælibet est mensura anguli re-
I. cti, qui illi respondet. Hinc dici etiam
Fig. potest, semicirculum esse mensuram duo-
9. rum rectorum.

Corollarium.

63. Intelliges jam multò etiam planiùs, quare angulus non minuatur, neque augeatur, licet crura minuas, vel augeas. Nam, si à vertice B dati anguli C B A, tanquam centrô, describantur intervallô quôvis plures circuli; & arcus IF,
TAB. puta, sit sexta pars suæ circumferentiæ:
I. etiam reliqui ED, CA &c. erunt simi-
Fig. liter sexta pars suæ circumferentiæ; adeó-
11. que arcus quilibet interceptus erit ejusdem anguli mensura.

Scholion.

64. *Atque hinc praxis consequitur examinandi gradus, seu quantitatem dati anguli* EBG *per semicirculum corneum transparentem in* 180 *gradus divisum.*
TAB. *Centrum semicirculi pone supra verticem*
I. B *anguli dati, & semicirculi radium* BD
Fig. *supra anguli latus* BG. *Arcus* CD *in-*
12. *ter anguli crura interceptus ostendet, quot graduum sit datus angulus* EBG.

65. *In planitie. I. Instrumentum goniometricum ità collocatur, ut radius ejus* CG *uni lateri dati anguli immineat; quod facilè obtinetur, collineando per dioptras*

F &

F & G, *seu pinnulas immobiles ad diametrum perpendiculariter erectas, versùs hastam in extremitate lateris defixam.* TAB. III. Fig. 41 & 43.

II. Centrum C *vertici ejusdem anguli immineat, ope perpendiculi ad centrum instrumenti.*

III. Regula HI *circa centrum mobilis, versùs latus anguli alterum promoveatur, donec per dioptras ipsi affixas, hasta in extremitate lateris defixa collineanti occurrat.*

IV. Gradus in arcu GI *inter crura anguli* GC, IC *intercepti notantur.*

* Figura 41 TAB. III. exhibet instrumentum goniometricum, sive semicirculum in gradus & minuta ope scalæ geometricæ divisum. Dioptras seorsim expressas vide TAB. II. N. 5. & 6.

PROPOSITIO I.

66. Problema. *Ex dato extra rectam indefinitam* BF *puncto* A *perpendicularem ducere.* Euclid. lib. 1. prop. 12. TAB. I. Fig. 13.

Constructio. Centrô A describe circulum, qui secet datam BF in D & C: centris D & C describe duos alios æquales circulos, sed primô minores, qui se invicem secent in E; ducatúrque recta AEG. Hæc erit perpendicularis quæsita.

Demonstratio. Ducantur AC, AD, & rursum EC, ED. Per constructionem rectæ AC, AD sunt æquales; quippe quæ sunt radii ejusdem circuli (n. 56.) Similiter EC, ED sunt æquales, nimirum

rum æqualium circulorum radii. Ergò recta A G habet duo puncta A & E æqualiter distantia a punctis C & D. Itaque [n. 54.] recta A G, quæ per hæc duo puncta transit, erit perpendicularis quæsita. Quod erat faciendum.

Scholion I.

67. *Animadvertis, opinor, in omni problemate duo potissimùm esse consideranda: constructionem illius, quod proponitur, & demonstrationem, quâ ritè factum ostenditur, quod fieri jubebatur.*

Scholion II.

Probè apponunt Geometræ in problemate hanc particulam, indefinitam; *si enim linea esset finita, non posset semper à puncto extra ipsam dato perpendicularis ad eam deduci. Volunt itaque Geometræ rectam datam esse indefinitam: hoc est, non habere magnitudinem determinatam, ut saltem ad ipsam productam perpendicularis duci possit.*

Corollarium.

68. Hinc sequitur lineæ perpendicularis terminum, nimirum punctum G æqualiter distare à punctis C & D, & rectam CD bifariam sectam in puncto G perpendicularis incidentis.

69. Praxis. *Applica latus normæ puncto dato* A, *basin verò datæ rectæ. Linea secundùm normæ latus ducta, est perpendicularis quæsita.*

Verùm

Verùm, quia longitudo normæ, quâ in mechanicis utimur, ad ſummum eſt pedum trium, quatuórve, idcirco in campo, & planitie aliter quæſitum obtinebitur

Quadrante menſoriô. *Fige palos in dato puncto* A, *& puncto aliquo* E *datæ rectæ* BD: *deinde in data recta quære punctum* C, *ſupra quod conſtitutô quadrantis centrô poſſis per dioptras laterum* CF, CG *intueri palos fixos in* E *&* A. *Recta per* C *ad* A *extenſa, eſt perpendicularis quæſita.* TAB. I. Fig. 14.

Aliter ſolô fune. *Funem in dato puncto* A *fixum obliquè ad datam rectam* BD *extende, donec eam tangat extremitate ſua in* E: *extende ſimiliter ad partem alteram in* F: *intervallum* EF *ſeca biſariam in* C: *quod fiet funem ipſi* EF *æqualem complicando conjunctis extremitatibus. Recta per* A *&* C *ducta, eſt perpendicularis quæſita. Ratio pendet ex Corol. præc.* TAB. I. Fig. 15.

PROPOSITIO II.

70. Problema. *Ex puncto dato* A *in data recta* BF *perpendicularem excitare.* Euclid. lib. 1. prop. 11.

Constructio. Circinô cape æquales AB, AC: centris B & C deſcribe duos æquales circulos ſe ſecantes in D. Ex D ad A ducta recta erit perpendicularis quæſita

Demon-

TAB. I. Fig. 16. *Demonstratio.* Puncta B & C æquidistant à puncto A; & radius B D æqualis est radio D C per construct. Quare recta D A in neutram partem inclinat; atque hinc perpendicularis est ex def., & n. 54.

71. Praxis. *Applica normæ basin rectæ datæ, sic ut latus normæ respondeat dato puncto. Funis secundùm latus normæ extensus dabit perpendicularem quæsitam.*

In magna distantia non satis tuta est praxis tradita; nam funis à latere tam brevis normæ deviatio, quamvis oculo percipi vix possit, si valde longa perpendicularis quæritur, in fine erit sensibilis, & magna. Quare

Aliter, & certiùs quadrante. *Instrumentum constitue horizonti parallelum, sic ut ejus centrum sit directè supra rectæ datæ* B F *punctum datum* A: *quô ità permanente, unum latus instrumenti* A E *sic verte, ut per ejus dioptras conspicias baculum perpendiculariter humi defixum in datæ rectæ puncto quopiam* C: *quô factô* TAB. I. Fig. 27. *instrumenti latus* A E *respondebit rectæ datæ* B F, *Deinde baculum alterum jube perpendiculariter defigi ex adverso, quantô placuerit intervallô in* L, *sic ut in eum collimans per dioptras lateris* A G *ad gradum 90 constituti, intueri possis. Recta per* A & L *extensa, est perpendicularis quæsita.*

Aliter solô fune. *Ad puncti dati* C *partem*

tem utramque sume duo æqualia intervalla CE, CF : *in* E *&* F *fige duos funes æquales justæ longitudinis ; eósque supra terram extende, dum se mutuò tangant in* A *Recta per* C *ad* A *ducta, est perpendicularis quæsita. Ratio patet ex Probl.* TAB. I. Fig. 15.

Corollarium.

72. Si recta perpendiculariter rectæ insistens infra illam directè producatur, etiam inferius segmentum erit eidem rectæ perpendiculare.

PROPOSITIO III.

73. Problema. *Datam rectam finitam* AB *bifariam, & perpendiculariter secare.* Euclid. lib. 1. prop. 10.

Constructio. Centris A & B eâdem aperturâ circini, sed intervallô majore, quàm sit semissis datæ rectæ AB, describe hinc atque indè duos arcus se se invicem secantes in punctis C & D, per quæ ducatur recta CD. Hæc secabit bifariam, & perpendiculariter rectam AB. TAB. I. Fig. 17.

Demonstratio. Quia arcus eodem intervallo descripti sunt per constructionem, puncta C & D æquidistant ab extremitatibus A & B rectæ AB. Ergò omnia puncta rectæ CD ab iisdem æquidistant ; & consequenter punctum E bifariam, & perpendiculariter secat rectam AB [n. 54.]. Quod erat &c.

Praxis. *In planitie extremitatibus* A *&* B *datæ*

B *datæ longitudinis defige duos clavos, quibus connecte duos funiculos inter se æquales, sed majores semisse datæ rectæ* AB: *extende hos funiculos, donec hinc atque indè se contingant in punctis* C & D, *ubi clavo aliquo retineantur distenti. Funis à puncto* C *ad* D *ductus secabit bifariam longitudinem datam* AB.

PROPOSITIO IV.

74. Theorema. *Cùm recta linea* EB *super rectam* AG *consistens angulos facit, aut duos rectos efficiet, aut duobus rectis æquales.* Euclid. lib. 1. prop. 13.

TAB. I. Fig. 12.

Demonstratio. Si EB fuerit perpendicularis ad rectam AG, perspicuum est (n. 47.) effici duos rectos.

Si EB non fuerit perpendicularis, faciet unum quidem angulum obtusum, alterum verò acutum. Dico igitur, eosdem simul sumptos duobus esse rectis æquales.

Centro B intervallo quovis describatur semicirculus ACD. Arcus AC metitur angulum ABE; & arcus CD metitur angulum EBG. Atqui duo istiusmodi arcus complent semicirculum, qui est mensura duorum rectorum [n. 61.] Duo igitur anguli ABE & EBG duobus rectis sunt æquales. Quod erat &c.

Scholion.

TAB. I. Fig. 12.

75. *Videtur hæc propositio, inquit Clavius, pendere ex communi quadam animi notione. Quò enim angulus obtusus supe-*

ſuperat rectum angulum, eô reliquus angulus acutus ſuperatur ab eodem recto angulo. Quocirca duo anguli ABC, CBD *duobus rectis æquales eſſe demonſtratur, ſiquidem tantum unus eorum ſupra rectum acquirit, quantum alter deperdit.*

DEFINITIO.

76. *Duo anguli, quos efficit perpendicularis* AB, *vel obliqua* DB, *vocantur deinceps poſiti, vel conſequentes.* TAB. I. Fig. 5.

Corollarium I.

77. Duo quicunque anguli deinceps poſiti, ſeu conſequentes æquantur duobus aliis quibuslibet deinceps poſitis. Omnes ſiquidem valent duos rectos.

Corollarium II.

78. Si duo anguli DBF, DBG, quorum latus commune DB, & vertex idem punctum B, ſimul ſumpti vel duos rectos excedant, vel ab iisdem deficiant, duæ lineæ FB, BG non efficient unam rectam, ſed angulum FBG comprehendent in puncto B. *Euclid. lib.* 1. *prop.* 14. TAB. I. Fig. 18. 19

Nam, ſi linea FBG unam rectam efficeret, duo anguli DBF, DBG ſimul ſumpti duos rectos æquarent, contra hypotheſin.

Corollarium III.

79. Itaque, ſi linea FBG detorqueatur in B, hoc eſt, angulum efficiat in B, duo anguli DBF, DBG ſimul ſumpti vel à duobus rectis deficient, vel eoſdem excedent. Ut patet, productâ lineâ FB in C.

Corollarium IV.

Fig. 20. 80. Si duo anguli DBF, DBG simul ſumpti duobus rectis æquantur, linea FG unam rectam efficiet,

Corollarium V.

TAB. I. Fig. 21. 81. Eôdem modô demonſtrabitur, ſi plures rectæ, quàm una, eidem rectæ ad idem punctum inſiſtant, angulos effici duobus rectis æquales.

Corollarium VI.

Fig. 22. 23. 82. Duæ rectæ ſe invicem ſecantes efficiunt angulos, quatuor rectis æquales.

Corollarium VII.

83. Omnes anguli circa unum punctum conſtituti conficiunt quatuor rectos Sunt enim quatuor recti in plures partes ſecti.

DEFINITIO.

TAB. I. Fig. 5. 84. *Si duo anguli deinceps poſiti* DBF, DBG *duos rectos efficiant, eorum quilibet reſpectu alterius vocatur angulus complementi ad duos rectos.*

Similiter ſi duo anguli ABD, DBG, *ſimul ſumpti unum rectum efficiant, eorum quilibet reſpectu alterius vocatur angulus complementi ad unum rectum.*

TAB. I. Fig. 22. 23. *Si duæ rectæ* AB, DE *ſe invicem ſecent in puncto* C, *duo anguli* ACD, BCE, *vel alii duo* ACE, BCD *vocantur anguli oppoſiti ad verticem.*

Corol.

Corollarium I.

85. Ergò anguli æquales habent complementa æqualia. Et duo anguli erunt æquales, quando uterque vel eſt complementum ejusdem anguli, vel angulorum æqualium.

PROPOSITIO V.

86. Theorema. *Si duæ rectæ* AEB, CED *ſe mutuò ſecuerint, angulos ad verticem oppoſitos* AEC, DEB *æquales inter ſe efficient.* Euclid. lib. 1. prop. 15. TAB. I. Fig. 24.

Demonſtratio. Centro E deſcribatur arcus circuli CADB. Si à duobus ſemicirculis CAD & ADB ſubtrahatur communis arcus AD, erit reſiduus arcus AC æqualis reſiduo arcui DB. Itaque anguli ad verticem oppoſiti AEC, DEB æquales ſunt, quos nempe metiuntur arcus æquales.

Simili ratione demonſtrabis, angulos AED, CEB eſſe inter ſe æquales. Quod erat, &c.

Aliter. Angulus ACD eſt complementum anguli ACE ad duos rectos [n. 84.]. Atqui angulus BCE eſt pariter complementum ad duos rectos ejusdem anguli ACE. Ergo anguli ACD, BCE oppoſiti ad verticem ſunt æquales (n. 85.). Eôdem modô demonſtrabis angulos ACE, BCD eſſe æquales. Quod erat &c. TAB I. Fig. 25.

Corollarium.

Fig. 23. Ergò, si recta A B est perpendicularis rectæ E D, erit pariter recta E D reciprocè perpendicularis rectæ AB.

PROPOSITIO VI.

Tab. I. Fig. 25. 87. Theorema. *Si quatuor anguli rectilinei* ACD, ACE, BCD, BCE *ad communem verticem* C *constituti, & in eodem plano descripti, sint ejusmodi, ut anguli ad verticem oppositi æquales fuerint, nimirum*, ACD = BCE, *&* ACE = B C D, *erunt quælibet duæ lineæ adversæ* CD, CE, & CA, CB *in directum sibi, & continuum adjunctæ.*

Demonstratio. Quoniam per hypothesin ACD = BCE, & ACE = B C D, erit

I. ACD + ACE = BCE + B C D. Sed isti quatuor anguli simul sumpti quatuor rectos conficiunt (n. 82. & 83.). Ergò duo ACD + ACE duos rectos conficiunt; & consequenter D E est linea recta (n. 80.)

II. ACD + BCD = BCE + ACE. Sed quatuor anguli simul sumpti quatuor rectos efficiunt [82.]. Ergò duo A C D + B C D duos rectos; & consequenter A B est pariter linea recta [n. 80.]. Quod erat &c.

88. Lemma. *Si à terminis unius lateris* A *&* C *figuræ rectilineæ* ABC *tribus lateribus comprehensæ, jungantur intra*

tra figuram duæ rectæ AD, CD, *hæ simul sumptæ minores erunt summâ* AB + CB *duorum reliquorum laterum figuræ*: Euclid. lib. 1. prop. 21. pars 1.

Demonstratio. Producatur AD in E: erit TAB. I.

I. $AB + BE > AE$ (n. 28.); & utrinque adjectâ EC, erit $AB + BC$ Fig. 26.
$> AE + EC$ (n. 36.).

II. Similiter $DE + EC > DC$ (n. 28.); & utrinque additâ AD, erit $AE + EC > AD + DC$ [n. 36.].

Ergò multò magìs $AB + BC > AD + DC$: hoc est, $AD + DC < AB + BC$. Quod erat &c.

PROPOSITIO VII.

89. Theorema. *I. Si à quovis puncto* A TAB.
ad rectam FG *perpendicularis ducatur,* I.
hæc erit omnium rectarum AD, AF *&c.* Fig.
brevissima, quæ ab eodem puncto A *ad* 28.
eandem rectam FG *duci possint.*

II. Ex duabus obliquis AD, AF, *longior est* AF, *quæ à perpendiculari* AB *magìs recedit.*

Et vicissim,

I. Si recta AB *sit omnium linearum brevissima, quæ ab eodem puncto* A *ad rectam* FG *duci possint, erit eadem perpendicularis huic rectæ* FG.

II. Ex duabus obliquis AD, AF, *quæ longior est, à perpendiculari* AB *magìs recedit.*

Demonstratio. Producatur A B in H hac lege, ut A B = B H; ducantúrque rectæ D H, F H. Quia A B est perpendicularis super F G, erit eadem F G reciprocè perpendicularis super A B [n. 87.). Rursum, quia per constructionem A B = B H, erit F G perpendicularis in medio rectæ A H. Quare punctum quodvis rectæ F G æquidistabit ab extremitatibus rectæ A H (n. 51.)

Erit ergo $AB = BH$ (per constr.)
$AD = DH$ (n. 51.)
$AF = FH$ (n. 51.)

Et consequenter $AB = \frac{AH}{2}$

$$AD = \frac{AD + DH}{2}$$

$$AF = \frac{AF + FH}{2}$$

Atqui $AH < AD + DH$ (n. 28.), & $AD + DH < AF + FH$ (n. 88.). Ergò, si harum quantitatum inæqualium sumantur semisses, habebitur $\frac{AH}{2} < \frac{AD + DH}{2}$, & $\frac{AD + DH}{2} < \frac{AF + FH}{2}$: sive $AB < AD$, & $AD < AF$.

Habes ergò, quod I. quærebatur, rectam A B à quovis puncto A perpendiculariter ductam super F G, esse omnium rectarum A D, A F brevissimam.

II. Ex duabus obliquis A D, A F inæqualiter à perpendiculari A B recedentibus,

tibus, longiorem fore illam, quæ magìs recedit.

Et reciprocè ab hisce duabus propositionibus consequitur

I. Rectam AB, si brevissima sit omnium rectarum, quæ à puncto A super FG duci possunt, fore perpendicularem ipsi FG. Nam, utì nuper demonstravimus, si eadem AB non esset perpendicularis, neque esset contra hypothesin omnium linearum, quæ à puncto A super FG duci possunt, brevissima.

II. Consequitur pariter ex duabus obliquis, quæ ab eodem puncto A ad eandem rectam FG ducuntur, longiorem fore illam, quæ magìs recedet à perpendiculari. Nam, si minùs à perpendiculari recederet; non esset contra hypothesin reliquis obliquis longior, utì demonstratum jam est.

Corollarium I.

90. Ab eodem puncto A ad eandem rectam FG sicuti unica linea omnium brevissima, ita & perpendicularis unica duci potest. Fig. 28.

Corollarium II.

91. Duæ perpendiculares AB, CD ad eandem rectam FG, quamvìs in infinitum producantur, nusquam concurrent. Nam, si in aliquo puncto concurrerent, ab hoc puncto ad eandem rectam duæ perpendiculares duci possent: quod est absurdum ex Corol. I. TAB. I. Fig. 29.

Corollarium III.

TAB. I. Fig. 28. 92. Itaque, ſi duæ obliquæ æquales AF, AG ab eodem puncto A ad eandem rectam FG ducantur, erunt illæ æqualiter diſtantes à perpendiculari AB. Et reciprocè, ſi illæ ſint æqualiter diſtantes à perpendiculari, erunt æquales.

Corollarium IV.

93. Ex prima parte Corol. præced. conſequitur, quòd, ſi duæ rectæ æquales AF, AG ab eodem puncto A ad eandem rectam FG ducantur, ambæ erunt obliquæ eidem rectæ FG. Perpendicularis autem AB cadet inter eaſdem in medio rectæ FG, quæ bifariam à perpendiculari ſecabitur.

Corollarium V.

94. Quamobrem ab eodem puncto A ad eandem rectam FG tres lineæ rectæ æquales duci minimè poſſunt. Nam ad eandem partem ejusdem perpendicularis AB duas rectas æquales ducere oporteret: quod eſt abſurdum.

Similiter tria puncta ejusdem lineæ rectæ FG non poſſunt æqualiter diſtare ab eodem puncto A. Et quemadmodum ex def. n. 56. omnia puncta ejusdem circumferentiæ æquidiſtant ab eodem puncto, quod dicitur centrum; ita perſpicuum eſt, tria puncta ejusdem rectæ lineæ ad eandem circumferentiam minimè poſſe pertinere. Itaque recta linea, & circuli circumferentia in tribus punctis non poſſunt concurrere.

ELE-