Einladungsschrift

zu der

mit sämmtlichen Classen

des

Obergymnasiums

Montags, den 17. März 1856

Morgens von 9 — 12 Uhr und Nachmittags von 2 — 5 Uhr

anzustellenden

öffentlichen Prüfung.

Inhalt:

1. Zur Einführung in die geometrische Analysis. Ein Beitrag zur Methodik des mathematischen Unterrichts in der Geometrie, von dem Oberlehrer Gifhorn.

2. Schulnachrichten vom Director.

Braunschweig,

Druck von Friedrich Otto.

1856.

Zur Einführung in die geometrische Analysis.

Vorbemerkung.

Seit mehren Jahren ertheilt der Verfasser in der Unterprima, nach Beendigung des planimetrischen Cursus in der Obersecunda, den Schülern, neben der Repetition und Einübung des planimetrischen Stoffes, zugleich Anleitung zur Lösung geometrischer Aufgaben. Als Sammlung von Aufgaben befindet sich zu diesem Zweck in den Händen der Schüler „Woeckels Geometrie der Alten", welche in kurzer Zeit die dritte Auflage erlebt hat, und diesen Erfolg vollständig verdient, weil Behandlung, Auswahl und Folge der Aufgaben sehr zweckmäßig sind. Ein Leitfaden lag bei diesem Unterrichte nicht zum Grunde, weil dem Verfasser kein Buch bekannt war, das seinen und seiner Schüler Bedürfnissen gerade genügt und nicht viel überflüssigen, wenn auch sonst vortrefflichen Stoff enthalten hätte. Um den Schüler auf dem Gebiete der Geometrie, von dem er bereits einen abgeschlossenen Theil kennen gelernt hat, zu orientiren, um ihn, soweit es thunlich ist, mit der geometrischen Methode bekannt zu machen, und besonders um ihm eine zusammenhängende Anleitung zur Lösung geometrischer Aufgaben zu geben, sah sich der Verfasser großentheils zum Dictiren des Nachfolgenden genöthigt, da die selbständige schriftliche Ausarbeitung des Durchgenommenen den Schülern zu viel Zeit gekostet und ihre Lust an der Lösung der Aufgaben abgeschwächt hätte. Die nachfolgenden Blätter beabsichtigen, dem Schüler das Nachschreiben von Dictaten zu ersparen, ihnen das Wichtigste über Eintheilung und Methodik des geometrischen Stoffes mitzutheilen und ihnen so viel von der geometrischen Analysis zu geben, als zur Lösung der von ihnen billiger Weise zu fordernden Aufgaben nöthig ist und sie zugleich befähigt, andere größere Werke über den Gegenstand zu verstehen. Aus diesem praktisch pädagogischen Gesichtspunkte allein bittet der Verfasser seine Herren Collegen, das Folgende beurtheilen zu wollen. Es macht nicht den geringsten Anspruch auf wissenschaftliche Neuheit, im Gegentheil bekennt der Verf. gern, daß er seinen Stoff aus den Werken von Gerwien und von Holleben, S. Unger, M. Ritt, Burg, Biot, Nagel, Klügel's math. Wörterbuche und Andern geschöpft, aber für seine Zwecke ausgewählt, geordnet und verarbeitet hat. — Aus diesem Grunde macht das Folgende eben so wenig Anspruch darauf, eine strengwissenschaftliche Einleitung zu sein, oder als absolut nothwendiger Eingang zur geometrischen Analysis gelten zu wollen, es begnügt sich damit, einen Weg zu ihr den Schülern geöffnet zu haben. Die den einzelnen §§. hinzugefügten Erläuterungen sollen nicht als vollständige Ausführungen gelten, sondern nur als Andeutungen dessen, was in dem Unterrichte selbst vorkommt und an Beispielen dem Schüler ausführlicher dargelegt wird.

Begriff und Eintheilung der Geometrie.

§. 1.

Begriff der Geometrie. Die Geometrie ist die Wissenschaft von den räumlich nach einem bestimmten Gesetz erzeugten Constructionen oder Gebilden.

Erläuterung 1. Obgleich das Wort Geometrie seiner Ableitung nach nur den Theil der Wissenschaft bezeichnet, der seinen Ursprung der Befriedigung eines äußeren Bedürfnisses verdankt, der schon von Plato dem rein speculativen, strengwissenschaftlichen Theile gegenübergestellt und seit Aristoteles Geodäsie genannt wurde, so wird dennoch die althergebrachte Benennung der Wissenschaft mit Recht beibehalten, da die andern dafür in Vorschlag gebrachten Namen eben so wenig den ganzen Inhalt in einem Ausdrucke bezeichnen, wie z. B.: Raumgrößenlehre, Raumformenlehre.

Erläuterung 2. Die Geometrie hat es nur mit den im Raume gesetzmäßig erzeugten Constructionen zu thun, nicht aber mit dem Raume selbst. Sie setzt im Gegentheil den Raum mit seinen Grundeigenschaften, der Stetigkeit, der Dreistreckigkeit, Unendlichkeit, unendlichen Theilbarkeit, allseitigen Richtung als bekannt voraus und überläßt das Geschäft der Ableitung dieser Eigenschaften aus dem Wesen des Raumes, sowie die Nachweisung über den Ursprung der Vorstellung vom Raume in unserm Vorstellungsvermögen der Psychologie und Metaphysik. Was die Geometrie gleich beim Eintritt in die Elemente über Raum, Grenze, Stetigkeit, Dreistreckigkeit u. s. w. lehrt, ist nicht der wissenschaftliche Anfang der Geometrie, denn der beginnt ganz mit Recht seit Euklid mit der Untersuchung der einfachsten Construction, dem Punkte, sondern nur eine populäre Feststellung, Abgrenzung und Erläuterung dieser Begriffe, um falsche damit gar zu leicht verbundene Vorstellungen abzuschneiden, kurz um den Grund und Boden des Vorstellungsvermögens von Unkraut zu reinigen und ihn zur Aufnahme der abstracten geometrischen Begriffe geschickt zu machen. Eine gründliche, strengwissenschaftliche Ableitung dieser obersten Grundbegriffe der Wissenschaft ist Sache der Philosophie, und sie scheint uns in dem Systeme von Krause am einfachsten gegeben zu sein, besonders in seinen Vorlesungen über die Grundwahrheiten der Wissenschaft und in seinen Vorlesungen über Logik. Der Begriff des Unendlichen und Unendlich-Kleinen namentlich ist von einem Epigonen Krause's, einem Schüler des Professor Ahrens in Grätz, früher in Brüssel, von Tiberghien sehr gründlich behandelt und auf alle Lebens- und Wissenssphären angewandt in seiner Doctor-Dissertation, die den Titel führt: „Dissertation sur la théorie de l'infini, soutenue publiquement à la faculté de philosophie et de lettres de l'université de Bruxelles, pour obtenir le grade de docteur agrégé, par Guillaume Tiberghien. Bruxelles, Wauters frères, imprimeurs-libraires, 8. rue d'Assaut. 1846. Die Schrift enthält zugleich auch eine Geschichte dieses Begriffes, der in der Geschichte der neueren Mathematik der Angelpunkt ist, um den sich die ganze Wissenschaft drehet.

Erläuterung 3. Die Geometrie hat es ferner nur mit den nach einem bestimmten Gesetz erzeugten Constructionen zu thun, weil nur solche Constructionen einer wissenschaftlichen, d. h. gleichfalls gesetzmäßigen Betrachtung unterworfen werden können, und setzt deshalb diese Gesetzmäßigkeit bei jeder Construction ihrer Untersuchung, wie die Naturforschung, stillschweigend voraus.

§. 2.

Aufgabe der Geometrie. Die Geometrie hat bei jeder Construction ihr Bildungsgesetz oder ihren Begriff, ihre wichtigsten Eigenschaften und ihre merkwürdigsten Beziehungen zu anderen Constructionen nachzuweisen.

Erläuterung 1. Aus dem Begriffe der Geometrie folgt, daß sie bei ihren Untersuchungen entweder die Constructionen als gegeben ansehen kann, um ihr Bildungsgesetz, sowie die aus ihm abgeleiteten Eigenschaften und Beziehungen zu finden, oder daß sie das Bildungsgesetz oder bestimmte Eigenschaften und Beziehungen als gegeben ansieht, um die Constructionen zu suchen. — Den Inhalt der ersteren Untersuchungen, bei denen sie von den gegebenen Constructionen ausgeht, prägt sie gewöhnlich in der Form von Lehrsätzen aus, während sie in der Form von Aufgaben die Constructionen zu finden sucht. Von den Lehrsätzen und Aufgaben wird später ausführlicher die Rede sein.

Erläuterung 2. Der Begriff oder das Bildungsgesetz einer Construction ist entweder in Worten, in einer Erklärung niedergelegt, wie in der niederen Geometrie, oder in einer Formel oder Gleichung, wie in der höheren Geometrie. (Erklärung und Gleichung einer Construction werden am Kreise, an der geraden Linie und an der Parabel oder einem anderen Kegelschnitte erläutert.) Aus beiden völlig heterogenen Ausdrucksweisen für das Bildungsgesetz werden dann nach den der Wissenschaft eigenthümlichen Methoden die wichtigsten Eigenschaften und Beziehungen abgeleitet.

Erläuterung 3. Von den Eigenschaften und Beziehungen kann die Wissenschaft, bei dem unendlichen Reichthume ihres Inhaltes, nur das Wichtigste herausheben. Unter den verschiedenen Beziehungen hebt sie besonders die der Lage, Richtung, Gestalt und Größe hervor, weil sie die größte praktische Bedeutung haben. Die neuere Geometrie hat ihre Eroberungen namentlich auf dem Felde der Beziehungen gemacht und ganz neue Theile der Wissenschaft geschaffen (géometrie descriptive), von denen die alte griechische Geometrie keine Ahnung hatte. — Außer den Beziehungen der Aehnlichkeit, Gleichheit, Congruenz und Symmetrie hat sie die Affinität, Collineation, Projection, Perspective u. s. w. in Betracht gezogen, und nicht nur den Stoff unendlich vermehrt, sondern auch die vereinzelt stehenden Sätze durch Transformationen der Figuren in immer engere Verbindung gebracht und die innigste Beziehung und Verwandtschaft unter Constructionen nachgewiesen, die auf den ersten Blick sich sehr fern zu stehen scheinen.

§. 3.

Ziel der Geometrie. Wenn gleich die Geometrie jede gesetzmäßig gebildete Construction einer wissenschaftlichen Untersuchung unterwerfen kann, so kommt es ihr jedoch weniger darauf an, ohne allen Zweck selbst Bildungsgesetze für Constructionen zu erfinden, als vielmehr die in der Natur und Kunst gegebenen Constructionen zu untersuchen, um entweder ihr Bildungsgesetz selbständig zu finden, oder dasselbe als übereinstimmend mit dem einer schon erkannten geometrischen Construction nachzuweisen. Die Geschichte der Geometrie zeigt, daß die Wissenschaft bisher nur die einfachsten Constructionen, abgesehen von ihrer Realität in der Natur, untersucht hat — daß sie dann aber die Resultate ihrer Untersuchungen auf die Constructionen in der Natur oder Kunst angewandt hat. Bevor eine solche Anwendung gemacht ist, können diese Untersuchungen dem Nichtmathematiker als eine völlig unnütze und überflüssige Speculation erscheinen. So konnten bis auf Keppler und die Entdeckung seiner drei nach ihm benannten Gesetze den Nichtmathematikern die Untersuchungen der griechischen Mathematiker über die Kegelschnitte als leere Hirngespinnste erscheinen; als aber Keppler die Realität der Ellipse in den Bahnen der Planeten nachgewiesen hatte, zeigte sich die Fruchtbarkeit und der Segen der scheinbar sterilen Untersuchung. Denn Keppler konnte, ohne Kenntniß von den Eigenschaften der Ellipse zu haben, gar nicht auf den richtigen Gedanken des Gesetzes für ihre Bahnen kommen, es sei denn, daß er zugleich auch die ganze Theorie der Kegelschnitte in ihren Grundzügen zuvor gefunden hätte. Bei der immer größer werdenden praktischen Wichtigkeit der geometrischen Constructionen in den Künsten, und namentlich in der Baukunst und Mechanik, hat die Wissenschaft, bei dem nun schon fast unübersehbar gewordenen geometrischen Stoffe, eine sorgfältige Auswahl zu treffen, und zunächst nur das hervorzuheben, was für das praktische Bedürfniß oder für das fernere Studium von größter Wichtigkeit ist. Ihr letztes Ziel soll aber immer sein und bleiben, das Gesetz der Constructionen in der Natur zu finden; denn daß eine jede Construction, von der einfachsten Form an bis zu der complicirtesten, dem menschlichen Leibe, hinauf, einem bestimmten Gesetze folgt, ist ja die Grundhypothese der ganzen Naturwissenschaft. Sollte auch das Schönheitsgesetz der Pyramiden, der griechischen Tempel, der gothischen Dome, der griechischen Götterbilder nnd des menschlichen Organismus, wie er aus den Händen der Natur hervorgeht, nicht der „goldene Schnitt" sein, wie es A. Zeising in seiner „Neuen Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers" und in der Allgem. Zeitung nachgewiesen zu haben glaubt: so muß es irgend ein anderes geometrisches Gesetz sein, das entweder schon längst bekannt, aber als solches bisher nicht erkannt ist, oder das erst noch gefunden werden muß.

§. 4.

Eintheilungsgründe der Geometrie. Der seit 2000 Jahren besonders durch Griechen, Inder, Araber, Italiener, Franzosen, Engländer und Deutsche gewonnene geometrische Stoff wird nach mehren Eintheilungsgründen geordnet und in größere und kleinere mit mehr oder weniger Selbständigkeit neben einander stehende Theilsysteme zerlegt und gegliedert. Entweder ist es die Verschiedenheit des Stoffes selbst, oder der Hülfsmittel bei der Untersuchung, oder der Methode, oder endlich auch die größere oder geringere Wichtigkeit für die Praxis oder den weiteren Ausbau der Wissenschaft, was die einzelnen Theile von einander sondert, ohne sie völlig zu trennen. Denn eine vollkommene Selbständigkeit und Selbstgenügsamkeit erlangt kein Theil bei dieser Gliederung, und wenn auch einzelne Theile, wie die analytische Geometrie, wegen der Allgemeinheit und praktischen Fruchtbarkeit ihrer Methode, überwiegenden Einfluß gewonnen haben, so hat dies nur die Folge gehabt, daß die vernachlässigten Theile der synthetischen Geometrie mit desto größerem Eifer in neuester Zeit wieder angebauet sind. — Der Stoff bietet zwei Eintheilungsgründe dar: die Lage und die Beschaffenheit der Constructionen.

§. 5.

Planimetrie — Stereometrie. Die Verschiedenheit der Lage sondert den geometrischen Stoff in

a) die Lehre von den Constructionen in einer Ebene (Planimetrie, Geometrie der Ebene);
b) die Lehre von den Constructionen in mehren Ebenen oder im Raume (Stereometrie, Geometrie des Raumes).

Erläuterung. Daß die Verschiedenheit der Lage einen wichtigen, ja sogar unumgänglich nothwendigen Eintheilungsgrund bildet, braucht für niemand weiter nachgewiesen zu werden, der nur die einfachsten Sätze über Constructionen in der Ebene und im Raume erfaßt hat; eben so wenig brauchen die Gründe angegeben zu werden, warum nicht statt oder neben der Ebene die Linie als Eintheilungsgrund eingeschoben sei. Gegen die gewöhnlichen Regeln der sogenannten formalen Logik, die sich um die beschränkte Natur der Sache nicht kümmert, wird auch sonst öfter verstoßen, und nichts kann dieselben überhaupt leichter in Miscredit bringen, als das Studium der Mathematik.

§. 6.

Niedere — höhere Geometrie. Die Beschaffenheit der Constructionen scheidet die Geometrie in

a) die Lehre von den geradlinigen und Kreisconstructionen (niedere Geometrie);
b) die Lehre von den übrigen krummlinigen Constructionen (höhere Geometrie).

Erläuterung 1. Die Eintheilung in höhere und niedere Geometrie, wenn sie nur mit Berücksichtigung des Stoffes gemacht wird und von der Verschiedenheit der Methode und den Hülfsmitteln der Betrachtung absieht, ist von minderer Wichtigkeit, als sie auf den ersten Blick zu sein scheint. Sie war im Alterthume nicht üblich, und hat in der neueren Zeit alle Bedeutung verloren, wo alles Gewicht auf die Methode und die Hülfsmittel der Betrachtung gelegt wird, und die Gliederungen nach diesen Eintheilungsgründen das Uebergewicht erlangt haben.

Erläuterung 2. Daß der Kreis und sämmtliche Kreisconstructionen mit zur niederen Geometrie gezogen werden, obgleich sie krummlinige Constructionen wie die Parabel, Ellipse u. s. w. sind, hat weniger seinen Grund in der praktischen Wichtigkeit dieser Constructionen, oder in der Möglichkeit, sie mit denselben Hülfsmitteln wie die geradlinigen Constructionen untersuchen zu können, als vielmehr darin, daß Kreis und gerade Linie ihrer Entstehung nach ganz auf gleicher Stufe stehen, beide Grundconstructionen sind, mit denen alle übrigen geradlinigen Constructionen hergestellt und untersucht werden.

Erläuterung 3. Von der niederen Geometrie hat man seit Euklid's Zeiten einen Theil unter dem Namen der Elemente oder der elementaren Geometrie abgesondert, und in ihr besonders die Sätze aus der niederen Geometrie zusammengestellt, die für den weiteren Aufbau der Wissenschaft unumgänglich nothwendig sind, oder die in der Praxis die meiste Verwendung finden. Dem Umfange und Inhalte nach haben sich die Elemente seit Euklid's Zeiten wenig verändert, wenn auch die Methode in ihnen bei einer großen Classe von Schriftstellern und Lehrern eine ganz andere geworden ist. Von dem fast unermeßlichen Reichthume an Sätzen der niederen Geometrie, der in den drei letzten Jahrhunderten durch die großen mathematischen Genien aufgehäuft ist, wird freilich von einigen neueren Schriftstellern auch manches in den Elementen mitgetheilt, aber wohlweislich meistentheils abgesondert von dem übrigen Lehrstoffe unter den Rubriken: Anhänge, neuere Geometrie; harmonische Strahlen und harmonische Verhältnisse; das Malfattische Problem; das mystische Sechseck des Pascal u. s. w., weil jeder fühlt, daß dieser Stoff nicht für den Anfänger in der Geometrie, sondern nur für den paßt, der mit ganzer Seele sich der Mathematik als seinem künftigen Berufsstudium widmen will.

Erläuterung 4. Da die Benennung „niedere Geometrie" unpassend ist und leicht falsche Vorstellungen über das Verhältniß der höheren und niederen Geometrie erwecken kann, als diene die niedere Geometrie nur dem äußeren Bedürfniß, habe wenig selbständigen Werth und sei nur Stütze der höheren Geometrie, die Kenntniß der höheren Geometrie setze die der niederen in allen Einzelheiten nothwendig voraus u. s. w.; so haben einige Schriftsteller geradezu die Elemente der höheren Geometrie gegenübergestellt, was aber eben so wenig zu billigen ist; denn dann bleibt bei der Eintheilung der ganze Reichthum der „neueren Geometrie" ausgeschlossen, und bei dem Nichtmathematiker oder demjenigen, der die Geometrie nur aus den Vorlesungen auf öffentlichen Anstalten kennen lernt, wird leicht der Wahn erzeugt, als gebe es außer Elementen und höherer Geometrie (analytischer Geometrie) keinen weiteren geometrischen Stoff. Zum Glück hilft die folgende Eintheilung mit ihrem Gegensatze und den dafür eingeführten Benennungen diesem Uebelstande ab.

§. 7.

Synthetische und rechnende Geometrie. Der Geometer bedient sich zur Herstellung und Untersuchung seiner Constructionen zweier Hülfsmittel, der Zeichnung und Rechnung, die dem Grundgegensatze in seinem wissenschaftlichen Objecte selbst, dem Dualismus der Lage und Größe entsprechen. Nach diesen beiden Hülfsmitteln der Untersuchung zerfällt der geometrische Stoff in

a) zeichnende Geometrie (synthetische Geometrie, Geometrie schlechtweg);

b) rechnende Geometrie (ohne einen allgemein gebräuchlichen Namen).

Erläuterung 1. Für die zeichnende Geometrie sind zwei Bezeichnungen gleich verbreitet; die Einen nennen sie synthetische Geometrie, im Gegensatz zur analytischen Geometrie; die Andern dagegen Geometrie schlechtweg, im Gegensatz zur Trigonometrie und analytischen Geometrie. Die letztere Bezeichnung dürfte die passendere sein und nicht leicht ein Mißverständniß hervorrufen, während mit synthetischer Geometrie, oder besser geometrischer Synthesis, auch von vielen nicht sowol das Hülfsmittel der Betrachtung, als die Methode bezeichnet und in Gegensatz zur algebraischen Analysis gestellt wird. Für die rechnende

Geometrie ist keine allgemeine Bezeichnung im Gebrauch; man nennt nur ihre Theile: algebraische Geometrie — Trigonometrie — analytische Geometrie.

§. 8.

Algebraische Geometrie — Trigonometrie — analytische Geometrie. Die rechnende Geometrie betrachtet ihre Constructionen entweder entstanden aus der Zusammensetzung endlicher discreter Grundbestandtheile, der Seiten, oder der Seiten und Winkel zugleich, oder sie denkt sie erzeugt durch Festlegung eines jeden Punktes in ihnen, um auf diese Weise durch die Einführung unendlich kleiner Größen und Intervalle den Charakter der Stetigkeit, den Grundcharakter aller geometrischen Construction, der durch die endliche Zahl und die Rechnung verloren geht, wieder zu gewinnen. — Die rechnende Geometrie zerfällt demnach in

a) algebraische Geometrie, welche die geradlinigen Figuren, selbst den Kreis aus der geraden Linie entstanden denkt, ohne die Winkel in Betracht zu ziehen;
b) Trigonometrie, welche die geradlinigen Figuren, selbst den Kreis aus Seiten und Winkeln entstanden denkt, durch die Einführung der trigonometrischen Functionen die Verbindung heterogener Größen, der Seiten und Winkel in der Rechnung ermöglicht, und dadurch im Stande ist, den ganzen Inhalt der niederen Geometrie mit ihren Hülfsmitteln darzulegen, und nicht etwa allein fehlende Stücke ihrer Constructionen zu berechnen. — Die Trigonometrie zerfällt, je nachdem die Constructionen in einer Ebene durch gerade Linien, oder auf der Oberfläche einer Kugel durch größte Kreisbögen gebildet werden, in
   aa) ebene Trigonometrie,
   bb) sphärische Trigonometrie;
c) analytische Geometrie, welche alle Figuren durch die stetige Bewegung eines Punktes entstanden denkt, die Lage eines jeden Punktes in ihnen entweder durch die Entfernung von zwei oder drei sich durchschneidenden geraden Linien, Coordinatenaxen festlegt, oder durch Angabe der Drehung und der Größe einer sich um einen festen Punkt bewegenden veränderlichen Linie (Leitlinie, Radius vector — Polarcoordinaten).

9.

Verhältniß der synthetischen und rechnenden Geometrie in der Geschichte der Geometrie. In der historischen Entwickelung der Geometrie treten beide eben in ihrem obersten Gegensatze berührten Zweige der Wissenschaft nicht zugleich hervor. Die rechnende Geometrie, als der abstractere Theil, ist später hervorgetreten, und ihr Haupttheil, die analytische Geometrie, verdankt ihr Dasein erst dem Descartes (1596 — 1650) in der ersten Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts. Die Griechen haben, bei dem unvollkommenen Zustande ihres Ziffernsystems und den dadurch herbeigeführten unbedeutenden Fortschritten in einer wissenschaftlichen Arithmetik und Algebra, fast allein die synthetische Geometrie ausgebildet, während die Inder (Brahmegupta, Bhascara) sich vorzugsweise der rechnenden Geometrie zuwandten. Die Araber, welche aus den Schriften beider Völker schöpften, haben beide Theile gleichmäßig ausgebildet. Von ihnen lernten die Völker des Abendlandes, und bei der größeren Entwickelung, welche die Algebra durch die Entdeckung allgemeiner Auflösungsmethoden für Gleichungen des 2ten, 3ten und 4ten Grades empfing, wurde das Uebergewicht der rechnenden Geometrie entschieden. Seit dem Hervortreten der analytischen Geometrie, und besonders seit der Erfindung der Differenzialrechnung, hat die synthetische Geometrie im Hintergrunde gestanden, wenn auch einzelne große Mathematiker, wie Halley, Simson, Maclaurin, Desargues, Pascal, de la Hire u. A. sich ihr mit Vorliebe auch ferner zuwandten. Einen größeren Aufschwung hat die synthetische Geometrie in der neueren Zeit genommen, besonders seit-dem durch Monge's (1746 — 1818) Lehre von den Projectionen ein ganz neuer, im höchsten Grade wichtiger Zweig der Wissenschaft, die darstellende Geometrie (géometrie descriptive) entstanden ist, denn durch die Anwendung dieser Methode ist man nicht allein zur strengwissenschaftlichen Lösung vieler wichtigen Probleme der Praxis gelangt, sondern man hat auch wichtige Lehrsätze auf eine leichte Weise gefunden, wo die analytische Geometrie mit großen Schwierigkeiten zu kämpfen hat. Unter den neueren Mathematikern haben die synthetische Geometrie mit Vorliebe und dem größten Erfolge angebauet: Carnot, Poncelet, Brianchon, Gergonne, Chasles, Steiner, Adams, Paulus u. A.; ihr wärmster Lobredner ist der Geschichtschreiber der Geometrie Chasles, der keine Gelegenheit vorbeiläßt, um ihre Vorzüge in das glänzendste Licht zu stellen und den durch Monge, Carnot, Hachette u. s. w. gewonnenen Stoff im Gegensatz zu der griechischen Geometrie „Neuere Geometrie" nennt.

Bemerkung. Von der Verschiedenheit der Methode in der synthetischen und rechnenden Geometrie wird später die Rede sein.

Eintheilung des elementaren geometrischen Stoffes seiner logischen Form nach.

§. 10.

Begriffe — Sätze. Der gesammte Inhalt der elementaren Geometrie läßt sich unter zwei logische Kategorien bringen, unter Begriffe und Sätze. Die Begriffe, z. B. Raum, geometrische Körper, Grenze, Fläche, Linie, Dreieck, Winkel, Tangente u. s. w., enthalten das Bildungsgesetz der einzelnen geometrischen Constructionen in seinen grundwesentlichen Bestimmungen, die Sätze dagegen entwickeln die übrigen aus dieser Grundwesenheit sich ergebenden Eigenschaften und Beziehungen. Nachdem z. B. der Begriff des gleichschenkligen Dreiecks erkannt und abgeleitet ist, werden die übrigen aus seiner Grundeigenschaft, der Gleichheit zweier Seiten, sich ergebenden anderweitigen Eigenschaften durch einzelne Sätze über die Größe der Winkel, der Höhen, der Transversalen u. s. w. abgeleitet.

§. 11.

Grundbegriffe. Die Begriffe sind entweder Grundbegriffe oder abgeleitete Begriffe, Begriffe schlechthin genannt. Unter den ersteren werden diejenigen Begriffe verstanden, die auf keine noch höhere und allgemeinere zurückgeführt werden können, die also, wie man gewöhnlich sich auszudrücken pflegt, keiner Erklärung bedürfen und fähig sind. Es sind Begriffe, die auch dem unentwickeltsten Vorstellungsvermögen nicht fehlen und ohne welche wir überhaupt keinen einzigen abgeleiteten Begriff aufzufassen im Stande sind. Z. B. Raum, Größe, Ganzes, Theil, Grenze, Grund, Linie u. s. w. Freilich werden diese Grundbegriffe häufig sehr unklar und ungenau aufgefaßt, darum ist es nöthig, sie zu erläutern und von allen Seiten zu betrachten, damit keine falsche Vorstellungen damit verbunden werden; aber alle diese, wenn auch noch so weit gehenden Erläuterungen, sind keine Erklärungen oder Definitionen, denn diese können sie ihrer Natur nach nicht haben, da sie auf keinen höheren Begriff zurückgeführt werden können, was, wie wir aber bald sehen werden, bei jeder Erklärung nöthig ist.

§. 12.

Abgeleitete Begriffe — Erklärungen. Abgeleitete Begriffe, oder Begriffe schlechthin genannt sind diejenigen Begriffe, die aus den Grundbegriffen durch irgend eine nähere Bestimmung abgeleitet sind. So ist z. B. der Begriff der geraden Linie schon ein abgeleiteter Begriff, weil in ihm der Begriff der Linie näher bestimmt ist. Von den abgeleiteten Begriffen können meistentheils wieder neue Begriffe abgeleitet werden und so fort durch mehrere Abstufungen. So werden z. B. von dem Begriffe Figur durch immer weiter gehende nähere Bestimmungen die Begriffe: ebene Figur, ebene geradlinige Figur, Viereck, Viereck mit parallelen Gegenseiten, Parallelogramm, gleichseitiges Parallelogramm, gleichseitig-rechtwinkliges Parallellogramm oder Quadrat, abgeleitet. Jeder Begriff erfordert eine Erklärung oder Definition, durch die er auf den nächst höheren Begriff zurückgeführt und zugleich von den ihm nebengeordneten Begriffen unterschieden wird. Jede Erklärung enthält demnach zwei Bestimmungen: a) die Angabe des nächst höheren Begriffes (genus altius) als eines höheren Gattungsbegriffes, und b) die Angabe des allein eigenen Wesens (differentia specifica). Zur Vollkommenheit einer Difinition gehört auch, daß die ganze Wesenheit des zu definirenden Begriffes in der Definition bestimmt ist, und nicht blos eine einzelne sich aus ihr erst ergebende abgeleitete Eigenschaft. Freilich kennen wir von vielen Begriffen noch nicht ihre ganze Wesenheit und müssen uns dann häufig, wie in allen empirischen Wissenschaften, mit sehr einseitigen und unvollkommenen Definitionen begnügen. Der Begriff einer theilweisen und totalen Definition läßt sich sehr gut an zwei verschiedenen Definitionen des Kreises veranschaulichen. Wird der Kreis erklärt als eine Linie, in der alle Punkte von einem Punkte außer ihr gleiche Entfernung haben, so ist diese Erklärung zwar richtig, aber sie drückt nicht das ganze Wesen der Linie aus, sondern nur eine Beziehung derselben zu einem Punkte außer ihr. Wird dagegen der Kreis erklärt als diejenige krumme Linie, deren Krümmung in jedem Punkte gleichförmig ist, so ist dies eine totale, ganz wesentliche Erklärung, denn die Kreislinie ist weiter nichts, als das Angegebene und alle ihre weiteren Eigenschaften können aus der Gleichförmigkeit ihrer Krümmung abgeleitet werden. Jede Definition soll außerdem folgenden Bedingungen genügen:

a) das zu Definirende darf nicht wieder in der Definition vorkommen (terminns definitus non debet ingredi definitionem). Gegen die Regel wird sehr häufig verstoßen, wenn versucht wird, Grundbegriffe oder scheinbare Grundbegriffe zu definiren; z. B. Raum, Zeit, Größe, Grund. „Der Raum ist die Form, wonach das Körperliche neben einander ist"; „die Zeit ist die Form, wonach die Aenderungen der Dinge nach einander sind"; „groß ist dasjenige, was sich vermehren oder vermindern läßt"; „Grund ist dasjenige, wodurch etwas ist." In allen diesen Beispielen ist nichts erklärt, man hat nur ein anderes Wort eingeschoben, das dieselbe Bedeutung hat und das eben so gut noch der Erklärung bedarf.

b) Die Definition muß das nächste genus angeben (definitio non debet involvere saltum). Auch gegen diese Forderung wird häufig verstoßen, namentlich dann, wenn der wahre Zusammenhang der Begriffe nicht bekannt ist, und selbst jene früher angeführte Definition des Euklid vom Kreise leidet daran, da in ihr nicht der nächst höhere Begriff, krumme Linie, enthalten ist.

c) Die Definition muß ihrem Definito angemessen sein, sie darf nicht enger, sie darf nicht weiter sein, d. h. sie darf weder auf andere Begriffe passen, noch dürfen durch sie Begriffe derselben Gattung ausgeschlossen werden.

d) Die Definition soll nicht verneinend, negativ sein. Auch gegen diesen Forderung muß in den empirischen Wissenschaften häufig aus Unvollkommenheit der Beobachtung verstoßen werden.

§. 13.

Wort- und Sacherklärungen. Die Erklärungen sind entweder Wort- oder Sacherklärungen. Jene erklären nur den Sinn eines Wortes, diese die Bedeutung und das Wesen der Sache selbst. Die Worterklärungen setzen die Sacherklärungen schon als bekannt voraus. Die Sacherklärungen werden noch näher bestimmt zu genetischen Erklärungen, wenn neben dem Wesen des Begriffes die Erklärung zugleich auch die Entstehung des Begriffes angibt. Die meisten Erklärungen in der Geometrie lassen sich als genetische Erklärungen fassen und geben dann immer eine deutlichere Vorstellung von dem Definito. Erklärt man z. B. die Nebenwinkel als Winkel, die einen Schenkel und den Scheitelpunkt gemein haben und deren beide andere Schenkel eine gerade Linie bilden, so ist zwar gegen die Richtigkeit der Erklärung nichts einzuwenden, aber der Lernende würde die Erklärung nicht so leicht auffassen, als folgende: Nebenwinkel entstehen, wenn der eine Schenkel eines Winkels über die Spitze hinaus verlängert wird.

§. 14.

Eintheilung der Sätze. In den Sätzen werden die Eigenschaften und Beziehungen der Begriffe zu einander nachgewiesen und der unendliche Reichthum der geometrischen Erkenntnisse entfaltet. Sie bilden den Hauptbestandtheil des geometrischen Stoffes. Nach ihrem Inhalte und ihrer Form zerfallen sie in zwei Classen, in theoretische und praktische Sätze, oder in Lehrsätze und Aufgaben im weiteren Sinne. Die Lehrsätze im weiteren Sinne weisen Eigenschaften oder Beziehungen bestimmter gegebener Raumgrößen nach; die Aufgaben dagegen verlangen, daß Raumgrößen von bestimmten Eigenschaften oder Beziehungen hergestellt werden. Beide stehen in umgekehrtem Verhältniß zu einander. Was bei den Lehrsätzen vorausgesetzt ist, wird in den Aufgaben gesucht, und umgekehrt, was in den Lehrsätzen gesucht wird, ist in den Aufgaben vorausgesetzt. Dennoch sind Lehrsätze und Aufgaben innig verwandt, und ihr Gegensatz liegt mehr in der Form, als im Inhalte. Man kann jeden Lehrsatz in eine Aufgabe, und jede Aufgabe in einen Lehrsatz verwandeln. Der pythagoräische Lehrsatz läßt sich eben so gut als Aufgabe einkleiden: „Ein Quadrat zu construiren, das zwei anderen Quadraten, deren Seiten gegeben sind, gleich ist." Nachdem die Aufgabe gelöset ist, wird der Beweis dafür wie bei dem pythagoräischen Lehrsatze zu führen sein. Aehnlich verhält es sich mit anderen Lehrsätzen und den mit ihnen in Verbindung stehenden Aufgaben. Ob ein Satz als Lehrsatz oder als Aufgabe ausgesprochen ist, hängt meistens von äußeren Rücksichten ab, z. B. ob er sich in dieser oder jener Form bequemer aussprechen und behalten läßt, oder ob die darin ausgedrückte Eigenschaft oder Beziehung eine größere oder geringere Wichtigkeit besitzt, zur Lösung von mehr oder weniger Aufgaben dient u. s. w.

§. 15.

Theoretische Sätze im Allgemeinen — Grundsätze. Die theoretischen Sätze zerfallen, entsprechend den Begriffen, in zwei Classen: in Grundsätze und Lehrsätze (axiomata und propositiones). Unter Grundsätzen versteht man diejenigen Sätze, deren Behauptung so einfach ist, daß sie weder auf eine höhere, noch allgemeinere Behauptung zurückgeführt werden kann, oder wie man gewöhnlich zu sagen pflegt, deren Wahrheit so unmittelbar einleuchtend ist, daß es zu ihrer Einsicht keines besonderen Beweises bedarf. Die Grundsätze weisen entweder die Grundeigenschaften der einfachen geometrischen Constructionen nach, die an ihnen unmittelbar mit ihrem Begriffe in die Augen springen, oder sie enthalten Behauptungen über die einfachsten Beziehungen der Dinge überhaupt zu einander. Z. B.: Jede Größe ist sich selbst gleich; ein Theil oder einige Theile sind kleiner als das Ganze; durch zwei Punkte ist nur eine gerade Linie möglich; der Raum ist stetig ausgedehnt; die Linie hat Richtung u. s. w. Es sind keineswegs alle schlechthin einfache, höchste Grundsätze; sie gelten nur für die Mathematik so, und ihre Ableitung und Begründung gehören einer anderen Wissenschaft, der Metaphysik, an. Früher wurden viele Sätze als Grundsätze aufgestellt, die heutiges Tages als specielle Folgerungen aus noch allgemeineren Sätzen angesehen werden. Z. B. der Satz: es ist erlaubt, die Posten zu vertauschen, ist nur eine Folgerung aus einem weit allgemeineren Satze: die Anordnung der Theile hat auf die Größe keinen Einfluß. Dagegen hat man neuerdings angefangen, wahre Grundsätze als abgeleitete Sätze darstellen und beweisen zu wollen, wie z. B. den Satz: Die gerade Linie ist die kürzeste zwischen zwei Punkten. Dies Verfahren ist jedoch eben so falsch als unzweckmäßig, führt zu keiner deutlichen Einsicht in die Sache, sondern verwirrt die Begriffe, fordert Beweise bei Dingen, die ihrer Natur nach keinen Beweis zulassen, weil sie sich aus keinem noch höheren Satze ableiten lassen, und erregt Zweifel, wo es die größte Sicherheit voraussetzen oder bewirken sollte.

§. 16.

Lehrsätze und ihre Bestandtheile. Lehrsätze nennt man diejenigen Sätze, in denen die ausgesprochene Behauptung oder die Aussage nicht unmittelbar einleuchtend ist, sondern eines Beweises bedarf. In jedem Lehrsatze sind folgende Bestandtheile enthalten:

1) Satz.
   a) Bedingung und b) Behauptung.
2) Construction, Hülfsconstruction.
3) Beweis.

Der geometrische Satz ist ein allgemeines hypothetisches Urtheil, in dem die Bedingung, Voraussetzung (hypothesis) von der Behauptung (thesis) zu unterscheiden ist. Zwar erscheinen äußerlich nicht alle Sätze in hypothetischer Form, sie sind aber als hypothetische Sätze zu denken, da von jeder Construction immer etwas vorausgesetzt wird, und sollte es nur ihr Vorhandensein selbst sein, unter dessen Voraussetzung erst die ausgesprochene Behauptung stattfinden soll. Im Satze selbst erscheint gewöhnlich das Urtheil in kategorischer, in seiner Construction dagegen in hypothetischer Form. Die Bedingungen können sehr verschiedener Art sein: entweder enthalten sie nur die Voraussetzung einer bestimmten Construction, oder einer Eigenschaft derselben, oder einer Beziehung der einen Construction zur andern u. s. w. (Jeder Lehrsatz kann zur Erläuterung dienen.) Die Behauptung dagegen spricht entweder aus, daß Constructionen bestimmte Eigenschaften haben, z. B. Winkel, Seiten, Transversalen, Höhen u. s. w. von bestimmter Größe und Länge, oder sie sucht die Größenbeziehungen zwischen diesen Dingen ins Licht zu stellen, oder sie stellt Behauptungen über die Beziehungen der Constructionen zu einander auf, mögen sich diese nun auf ihre Gestalt, Größe, Lage oder auf mehre Punkte zu gleicher Zeit erstrecken.

Die Construction des Satzes enthält die Darstellung und Veranschaulichung der allgemeinen Behauptung von einer bestimmten nach ihr entworfenen geometrischen Gestalt oder Construction. Die Construction des Satzes ist aber im strengen Sinne immer nur innerlich zu nehmen, sie ist eine Construction in unserm Vorstellungsvermögen, in der Raumwelt unserer Phantasie. Was wir äußerlich mit Kreide, Lineal und Zirkel darstellen, ist immer nur ein mangelhaftes Bild von der inneren wahren Construction. So oft es daher der Gegenstand erlaubt, muß die Figur nur im Innern construirt werden, damit immer der Geist sich der Vorstellung bewußt bleibt, daß es sich nicht um die äußere Figur handelt, sondern um die ideale Figur, die in seinem Innern ist. Häufig ist es nöthig, nicht allein den Satz in einer Figur darzustellen, sondern auch außerdem noch Linien, Ebenen, oder Winkel zu ziehen, die zum Beweise des Satzes dienen. Solche Constructionen nennt man Hülfsconstructionen, zum Unterschiede von der Darstellung des Satzes selbst.

Der **Beweis** enthält die Nachweisung der Richtigkeit der aufgestellten Behauptungen aus schon früher erkannten Wahrheiten, mögen diese nun früher bewiesene geometrische Wahrheiten, oder geometrische Grundsätze, oder allgemeine Grundsätze überhaupt sein. Die Beweise zeigen entweder, daß die aufgestellte Behauptung aus früher erkannten Wahrheiten als ein nothwendiger Schluß sich ergebe, oder sie zeigen, daß unter den gegebenen Bedingungen und Voraussetzungen jede andere Behauptung entweder zu einem Widerspruche mit den Voraussetzungen, oder zu einem Widerspruche mit schon erkannten Wahrheiten führen muß. Jener Beweis heißt der directe, dieser der indirecte, apagogische (deductio ad absurdum) Beweis. Des apagogischen Beweises bedient man sich sehr häufig bei den Umkehrungen. Man sucht ihn zu vermeiden, wenn die Zahl der anderen möglichen Behauptungen groß ist und der Widerspruch nicht leicht in die Augen springt. — Die Anordnung der einzelnen Beweisgründe kann verschieden sein. Man kann entweder von der Voraussetzung ausgehen, und von ihr aus durch mehr oder weniger Zwischensätze die aufgestellte Behauptung zuletzt als richtig ableiten, oder man kann auch von der Behauptung als erwiesen ausgehen, und von ihrer Wahrheit auf die sie begründenden Wahrheiten schließen, und so weiter rückwärts bis zur Voraussetzung hin. Kommt man dann am Ende auf die Voraussetzung als eine richtige Schlußfolgerung, so ist die Behauptung ebenfalls wahr. Jene Anordnung der Beweisgründe gibt den synthetischen (progressiven), diese den analytischen (regressiven) Beweis.

§. 17.

Zusätze. Außer den Grundsätzen und Lehrsätzen pflegen auch oft noch Zusätze aufgeführt zu werden. Sie sind Lehrsätze, in denen die Behauptung durch einen einfachen Schluß aus einem vorangestellten Satze sich ergibt. Wenn der Satz über die drei Winkel des Dreiecks bewiesen ist, so sind folgende Sätze Zusätze: Zwei schiefe Winkel sind kleiner als zwei rechte; die beiden schiefen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind gleich einem rechten u. s. w.

§. 18.

Praktische Sätze im Allgemeinen — Forderungen. Den theoretischen oder Lehrsätzen gegenüber, wie wir oben gesehen haben, stehen die praktischen Sätze oder Aufgaben im weiteren Sinne, die verlangen, daß Raumgebilde von bestimmten Eigenschaften oder Beziehungen bildlich dargestellt werden. Sie zerfallen, wie die Lehrsätze, in zwei Hauptklassen: in Forderungen (postulata) und Aufgaben im engeren Sinne (problemata). Jene entsprechen den Grundbegriffen und Grundsätzen, diese den abgeleiteten Begriffen und Lehrsätzen. Die Forderungen verlangen die Darstellung einer einfachen räumlichen Construction, die auf keine noch allgemeinere Construction zurückgeführt werden kann. Die Geometrie kennt nur zwei Postulate:

a) eine gerade Linie zu ziehen oder zu verlängern,

b) einen Kreis oder Winkel zu zeichnen.

Auf diese beiden Postulate werden alle, auch die verwickeltsten Aufgaben der Geometrie zurückgeführt und mittelst dieser beiden Constructionen gelöset. Daher stellt man an jede elementare geometrische Lösung oder an jede geometrische Lösung im Sinne der alten griechischen Mathematiker die Forderung, daß zu ihrer Lösung nur gerade Linie und Kreis, oder Lineal und Zirkel gebraucht werden sollen. Freilich bedient man sich zur äußeren Darstellung auch oft anderer Hülfsmittel, z. B. des rechtwinkligen Dreiecks oder Winkelhakens, des Parallel-Lineals, des Theilungszirkels, des Proportionalzirkels u. s. w. Doch sind dies nur mechanische Erleichterungsmittel bei der Zeichnung, keineswegs aber einfache Constructionen, auf welche die verwickelteren zurückgeführt würden. Die neuere Geometrie seit Descartes hat auch noch außer dem Kreise andere krumme Linien, wie die Kegelschnitte u. s. w., als einfache Constructionen betrachtet, und sieht daher auch noch Constructionen als geometrische an, zu deren Darstellung die Construction dieser Linien gefordert wird. Denn wollte man streng an dem Begriffe einer geometrischen Lösung im Sinne der Alten festhalten, so mußte man darauf verzichten, gerade die wichtigsten und interessantesten Aufgaben zu lösen, wie die Dreitheilung des Winkels, die Zeichnung zweier mittleren Proportionalen u. s. w.

Bemerkung. Einige Mathematiker haben versucht, die geometrischen Constructionen nur mit einer dieser Grundconstructionen herzustellen, wie z. B. Mascheroni (Géometrie du compas) mit dem Zirkel, Brianchon mit der geraden Linie (Géometrie de la règle). Cardan, Tartalea und neuerdings Steiner haben mehre Probleme des Euklid durch die gerade Linie und einen bestimmten Kreis aufgelöset, als hätte man in der Anwendung nur ein Lineal und einen unveränderlichen Zirkel. (Geschichte der Geometrie von Chasles, übersetzt von Sohncke, S. 210. Anm.)

§. 19.

Aufgaben. Die Aufgaben dagegen verlangen die Darstellung von Constructionen, die mit Hülfe der beiden Forderungen gelöset werden können. — Die Aufgabe im engeren Sinne enthält folgende Bestandtheile:

a) die Aufgabe, d. h. die Angabe des Darzustellenden;

b) die Construction, oder die Darstellung des Geforderten;

c) den Beweis, oder die Nachweisung, daß durch die Construction das Geforderte wirklich dargestellt ist;

d) die Determination, d. h. die Angabe des Größenverhältnisses der einzelnen gegebenen Stücke, wenn die Aufgabe möglich sein soll;

e) die Discussion, d. h. die Erörterung der Lösung und des Resultates in Bezug auf ihre Allgemeinheit, praktische Brauchbarkeit u. s. w.,

von denen einzeln und ausführlicher in den nächsten §§. die Rede sein soll.

§. 20.

Von der Aufgabe und ihren Bedingungen. Die Aufgabe, d. h. die Angabe der darzustellenden geometrischen Construction, enthält auch die Bedingungen und die zur Construction gegebenen Stücke: Linien, Winkel, Kreise und ihre Beziehungen zu einander.

Die Aufgaben zerfallen in bestimmte, unbestimmte und überbestimmte Aufgaben, je nachdem zu ihrer Darstellung alle nöthigen Bestimmungsstücke, oder weniger oder mehr gegeben sind. Die ersteren lassen jedesmal nur eine bestimmte Anzahl von Lösungen zu; die unbestimmten Aufgaben geben eine unbegrenzte, unendliche Anzahl von Lösungen, und die überbestimmten geben in den meisten Fällen gar keine Lösung, wenn nicht die überflüssigen Bestimmungsstücke so durch Zufall gegeben sind, wie sie durch die nöthigen Bestimmungsstücke ihrer Größe nach bestimmt sein müssen; z. B. ein Dreieck zu zeichnen aus drei Seiten und einem Winkel. Die Bestimmtheit, Unbestimmtheit oder Ueberstimmtheit der Aufgaben hängt von der Zahl, der Größe und dem Verhältniß der gegebenen Bestimmungsstücke zu einander ab. Auf die Bedingungen bei der Aufgabe ist daher ein besonderes Augenmerk zu richten. Sie müssen folgenden Erfordernissen genügen: sie müssen

1) unabhängig von einander sein, denn zwei von einander abhängige Bestimmungsstücke gelten nur für eins. So enthält die Aufgabe, ein Dreieck aus drei Winkeln zu zeichnen, nur zwei unabhängige Stücke; sie ist in Bezug auf die Form überbestimmt und in Bezug auf Form und Größe zugleich unbestimmt;

2) sie müssen keinen Widerspruch enthalten, weder unter sich, noch gegen die Eigenschaften der geforderten Construction. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen aus Grundlinie und Schenkel, der kleiner ist, als die Hälfte der Basis.

Jede bestmmte Aufgabe erfordert eine ganz bestimmte Anzahl von Bedingungen. Die Unbestimmtheit der Aufgaben kann verschiedene Stufen haben, je nachdem ein, zwei oder mehre Bestimmungsstücke fehlen. Wenn zur Zeichnung eines Dreieckes nur eine Linie gegeben ist, so kann der dritte Punkt überall außer ihr in der Ebene liegen. Ist außerdem aber noch ein anliegender Winkel gegeben, so kann der dritte Punkt nur noch in dem Schenkel dieses an die Linie angetragenen Winkels liegen. Für die verschiedenen Klassen der bestimmten Aufgaben muß man daher die Zahl der Bestimmungsstücke kennen, um entscheiden zu können, ob eine fragliche Aufgabe eine bestimmte oder unbestimmte ist, und wie groß in letzterem Falle die Unbestimmtheit sein wird.

§. 21.

Von der Anzahl von Bedingungen für die Hauptklassen der Aufgaben. Die Zahl der verschiedenen Aufgaben, ist zwar unendlich groß, doch lassen sich alle folgenden Hauptconstructionen unterordnen: Constructionen von Dreiecken, Vierecken, Vielecken und Kreisen, deren Bestimmungsstücke der Zahl nach zu bestimmen sind.

A. Zahl der Bestimmungsstücke für das Dreieck.

Die ebene Geometrie zeigt, daß zur vollständigen Bestimmung eines Dreiecks drei von einander unabhängige Stücke gegeben sein müssen, und daß nur in einigen Fällen, wenn z. B. zur Zeichnung eines Dreiecks zwei Seiten und der Gegenwinkel der kleineren Seite gegeben sind, eine doppelte Lösung möglich ist. Bei den besonderen Arten der Dreiecke sind natürlich bei der größeren Bestimmtheit der Aufgabe selbst weniger Bestimmungsstücke erforderlich.

1) So erfordert das gleichschenklige Dreieck, so wie das rechtwinklige Dreieck nur zwei Bestimmungsstücke, indem ein Stück durch die Art des Dreiecks schon gegeben ist.
2) Das gleichseitige und das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck erfordert nur ein Bestimmungsstück, da durch die Natur dieses Dreiecks schon zwei Stücke gegeben sind.

B. Bestimmungsstücke für das Viereck.

Da sich jedes Viereck in zwei Dreiecke zerlegen läßt, denen die Diagonale gemeinschaftlich ist, das zweite Dreieck also schon ein Bestimmungsstück aus dem ersten enthält, so sind zur Bestimmung des Vierecks nicht sechs, sondern nur fünf Stücke erforderlich. Für die bestimmten Arten von Vierecken verringert sich diese Zahl noch, denn:

1) das Trapez bedarf bei der Parallelität zweier Gegenseiten nur vier Bestimmungsstücke;
2) das Antiparallelogramm nur noch drei Stücke, da schon zwei durch die Parallelität der Seiten und die Gleichheit der nicht parallelen Seiten gegeben sind;
3) das Kreisviereck erfordert nur vier Stücke, da ein Stück durch die Bedingung, daß die Gegenwinkel $= 2$ R sind, gegeben ist.
4) das Parallelogramm verlangt drei Stücke:
   a) das gleichseitige Parallelogramm zwei Stücke,
   b) das rechtwinklige Parallelogramm zwei Stücke,
   c) das Quadrat nur ein Stück.

C. Bestimmungsstücke für das Vieleck.

Jedes Vieleck läßt sich durch Diagonale in $n - 2$ Dreiecke zerlegen; da nun die Diagonale immer zwei Dreiecken gemeinschaftlich ist und immer ein Bestimmungsstück für das folgende Dreieck mit abgibt, so sind nur drei Stücke nöthig für ein Dreieck von den $(n - 2)$ Dreiecken, für die übrigen $(n - 3)$ Dreiecke reichen zwei Stücke hin. Daher ist die Zahl sämmtlicher Bestimmungsstücke eines n Ecks

$$= 3 + (n - 3)\,2 = 3 + 2\,n - 6 = 2\,n - 3,$$

d. h. gleich der doppelten Seitenzahl des Vielecks weniger drei.

D. Bestimmungsstücke für den Kreis.

Da sich durch jede drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, ein Kreis beschreiben läßt, so ist ein Kreis durch drei Bedingungen (Punkte) bestimmt. Wenn aber die Lage des Kreises bestimmt, oder der Mittelpunkt gegeben ist, so ist der Kreis durch zwei Bedingungen oder durch ein Stück, die gerade Linie, den Radius, bestimmt.

Bemerkung. Kommt bei einer Aufgabe die Fläche als gegebenes Stück vor, so gilt dieselbe nur für ein Bestimmungsstück. Denn obgleich die Fläche bei den Figuren auf sehr verschiedene Weise bestimmt wird, entweder durch Linien allein (Grundlinie und Höhe, drei Seiten), oder durch Linien und Winkel (zwei Seiten und eingeschlossener Winkel), so gilt die Fläche doch nur für ein Bestimmungsstück, weil die einfachste Fläche, die Maßeinheit aller Flächen, das Quadrat durch eine Seite bestimmt ist, und weil über jeder beliebigen Linie als Grundlinie ein Rechteck von gegebenem Inhalte gezeichnet werden kann, wenn nur die Höhe gegeben ist.

§. 22.

Construction. Die Construction bei den Aufgaben ist wesentlich durch die Art und Weise bestimmt, wie man zu ihrer Lösung gelangt ist, und hängt daher hauptsächlich von der Analysis einer Aufgabe ab, wovon weiter unten ausführlicher die Rede sein wird. Von den häufig sehr verschiedenen Lösungen und Constructionen einer Aufgabe nennt man diejenige, nach dem Vorgange Biot's, eine elegante, bei welcher man sich der in der Figur schon vorhandenen Linien und Winkel so viel als möglich bedient, die ganze Lösung in eine Figur zu bringen sucht, ohne zu Nebenzeichnungen seine Zuflucht zu nehmen, und namentlich dahin strebt, daß die ganze Zeichnung Symmetrie enthält, kurz, einen architektonischen Charakter trägt.

§. 23.

Beweis bei den Aufgaben. Was oben über den Beweis bei den Lehrsätzen gesagt ist, gilt auch durchweg von dem Beweise bei den Aufgaben, nur treten die indirecten Beweise bei den Aufgaben mehr zurück und werden nur in sehr wenigen Fällen gebraucht.

§. 24.

Determination. Die Determination hat genau zu bestimmen, wie die gegebenen Stücke beschaffen sein müssen, damit überhaupt die Aufgabe ihrer Natur nach möglich ist. Sind zur Zeichnung einer Figur nicht allein Linien, sondern Linien und Winkel gegeben, so kann eine strengwissenschaftliche Determination nicht ohne Anwendung der Trigonometrie gegeben werden, weil nur durch diese das Größenverhältniß zwischen Seiten und Winkeln im Dreieck durch Anwendung der trigonometrischen Functionen bestimmt ist. Hat man z. B. die Aufgabe: „Aus zwei Seiten (a b) und dem Gegenwinkel (β) der kleineren (b) ein Dreieck zu zeichnen", zur Lösung vor sich, so bestimmt die geometrische Determination, daß der Winkel spitz und die kleinere Seite eben so groß oder größer als das Perpendikel sein muß, das von dem Endpunkte der größeren Seite auf den anderen Schenkel des gegebenen Winkels gefällt ist. Da aber dies Perpendikel, seiner Länge und Lage nach durch die größere Seite und den Winkel bestimmt, eine Function des Winkels ist, und durch den trigonometrischen Ausdruck a sin. β gegeben ist, so kann ohne Anwendung der Trigonometrie die Determination dieser Aufgabe, streng genommen, nicht gegeben werden. Bei manchen Aufgaben wird die Determination gleich in der Aufgabe mit ausgesprochen, wie in der Aufgabe Einen Kreis durch drei Punkte zu beschreiben, die nicht in gerader Linie liegen.

§. 25.

Discussion. Während die Determination gewöhnlich der Lösung vorangeht, folgt ihr die Discussion nothwendig nach, da sie sich erst aus der Lösung und Construction ergibt. Sie bildet bei der Lösung der Aufgaben einen sehr wichtigen Bestandtheil. Sie legt die Anzahl der verschiedenen Lösungen dar, verallgemeinert die für eine specielle Aufgabe gefundene Lösung und führt häufig zur Entdeckung bis dahin unbekannter Beziehungen oder neuer Lehrsätze. Bei Näherungsconstructionen, z. B. bei der Rectification oder Quadratur des Kreises, oder bei der Construction des Renaldini für die Theilung des Kreises, beurtheilt sie die größere oder geringere Genauigkeit der Lösung. Die wichtigste Rolle fällt ihr freilich in der algebraischen Analysis und analytischen Geometrie zu, wo sie die Endgleichung für die Lösung oder die Gleichung irgend einer krummen Linie in obiger Weise zu besprechen hat; doch ist auch in der geometrischen Analysis mancher Gebrauch von ihr zu machen, namentlich bei den Aufgaben über berührende Kreise, dem sogenannten Problem des Apollonius.

§. 26.

Synthesis — Analysis geometrischer Aufgaben. Die Lösung jeder geometrischen Aufgabe besteht aus zwei Theilen:

a) aus der Auffindung der Lösung (Analysis),
b) aus der Darstellung derselben (Synthesis).

Wenn die Lösung der Aufgaben, wie dies in den meisten Lehrbüchern der elementaren Geometrie der Fall ist, nur die Aufgabe, die Construction und den Beweis enthält, ohne die Mittel und Wege näher zu bezeichnen und anzudeuten, durch welche und auf welchen man zu der Lösung gelangt ist, so ist die Aufgabe *synthetisch* gelöset und dargestellt, d. h. die Lösung enthält dann nur das Resultat und den Beweis seiner Richtigkeit in präcisester Form, ohne anzudeuten, durch welche Combinationen und Schlüsse man zu dieser Lösung gelangt ist. Will man aber die Lösung einer geometrischen Aufgabe selbst finden, so sieht man bald ein, daß man erst durch gehörig auf einander folgende, systematisch angestellte Betrachtungen der gegebenen Bedingungen und der Forderung und daraus gezogenen Schlußfolgerungen die Verbindung, welche zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken stattfinden muß, zu suchen genöthigt ist, um dadurch endlich zu der gesuchten Schlußconstruction zu gelangen, wenn man nicht auf ein zufälliges Rathen oder glückliches Treffen des Resultates sich verlassen will. — Diese Combination des Gegebenen mit dem Gesuchten, diese folgerichtig angestellten Verbindungen zu Mittelgliedern, um daraus mit Nothwendigkeit das geforderte Resultat zu finden, heißt *Analysis der geometrischen Aufgaben*. Sie ist bei der selbständigen Lösung der Aufgaben von der größten Wichtigkeit, denn wenn sie gut durchgeführt ist, so muß sich aus ihr die *Synthesis* mit Leichtigkeit ergeben. Nach den Ansichten der griechischen Mathematiker gehörte zu jeder geometrischen Aufgabe: Forderung, Analysis, Synthesis. Die Analysis ist die Methode der Erfindung, die Synthesis dagegen die der systematischen Anordnung.

§. 27.

Algebraische — geometrische Analysis. Nach den Hülfsmitteln, deren man sich bei der Auffindung der Lösung bedient, unterscheidet man *algebraische* und *geometrische* Analysis geometrischer Aufgaben. — Beide unterscheiden sich wesentlich darin, daß man bei letzterer durch eine beständige Vergleichung der Figur, wobei immer die Linien als Linien, Flächen als Flächen u. s. w. behandelt werden, und durch ein stetiges bis ans Ende geführtes Raisonnement, ohne die Figur aus dem Gesichte zu verlieren, die Mittelglieder construirt, und so endlich die Verbindung findet, welche das Resultat als die geforderte Figur gibt, während bei ersterer die Figur selbst nur so lange betrachtet wird, bis man die Bedingungen der Aufgabe durch algebraische Gleichungen, in welchen die Linien, Flächen u. s. w. als bloße *Absolutzahlen* behandelt werden, ausgedrückt hat, woraus man dann die Werthe der unbekannten Größen, ohne mehr an die Figur zu denken, nach rein algebraischen und arithmetischen Gesetzen entwickelt und bestimmt, bis man die gesuchten Stücke allein auf einer Seite der Gleichung erhält. Ist die Endgleichung auf diese Weise gefunden, dann werden die Absolutzahlen wieder als wirkliche geometrische Größen behandelt, um aus ihrer Construction das Endresultat selbst zu construiren. Bei der algebraischen Analysis kommt es also auf dreierlei an:

1) daß man im Stande ist, den Zusammenhang unter den gegebenen und gesuchten Größen in einer Gleichung darzustellen;
2) daß man die Gleichung nach den Regeln der Algebra lösen, und
3) daß man das Endresultat construiren kann.

Die algebraische Analysis ist leichter, als die geometrische, und viel leichter auf bestimmte Regeln zurückzuführen. Denn die Algebra gibt bestimmte Vorschriften über die Auflösung von Gleichungen, und eine Schwierigkeit wird nur darin liegen, aus der Aufgabe die Fundamentalgleichung zu finden. Doch gibt dazu die Coordinatenlehre in Verbindung mit der Trigonometrie umfassende Mittel an die Hand, und selbst schon die Geometrie in Verbindung mit der Algebra vermag eine Menge von Aufgaben, in denen nur Linien vorkommen, zu lösen. Zur Construction der Endgleichung lassen sich gleichfalls sehr einfache und bestimmte Regeln angeben, da sich die verwickeltsten Ausdrücke vom ersten und zweiten Grade auf wenige einfache Ausdrücke zurückführen lassen, wie in der Lehre von der Construction algebraischer Gleichungen gezeigt wird.

Erläuterung. Da die griechischen Mathematiker im Alterthum, vor dem wissenschaftlichen Ausbau der Algebra, Trigonometrie und analytischen Geometrie, sich der algebraischen Analysis in den allermeisten Fällen enthalten mußten, sich also nur der geometrischen Analysis bedienen konnten zur Auffindung der Lösung einer geometrischen Aufgabe, so nennt man die geometrische Analysis auch Geometrie der Alten (wie z. B. Woeckel es thut), oder richtiger Analysis der Alten, und die algebraische Analysis Analysis der Neueren.

Man hat der algebraischen Analysis nicht ohne Grund den Vorwurf gemacht, daß sie, sobald die Gleichungen gebildet sind, fast blindlings, auf eine mechanische Art zum Ziele gelangt, und daß, wenn man die Endausdrücke nicht blos in Zahlen berechnen, sondern geometrisch construiren will, diese Constructionen gewöhnlich auf die Einfachheit und Zierlichkeit (Eleganz) Verzicht leisten müssen, die man durch die geometrische Analysis erlangt hat. Wenn dies auch zugestanden werden muß, so hat sie doch den Vorzug, daß in den meisten Fällen nicht nur die Antwort erhalten wird, sondern zugleich noch eine Menge anderer Wahrheiten, die wir bei der geometrischen Analysis nicht gefunden haben würden.

Geometrische Analysis.

§. 28.

Wesen der geometrischen Analysis. In dem vorigen Paragraphen, in dem die algebraische und geometrische Analysis vergleichend einander gegenübergestellt wurden, zeigte sich, daß es für die algebraische meistens wenige einfache Regeln gibt, durch deren Anwendung die Grundgleichung, ihre Auflösung und ihre Endconstruction gefunden werden könne. Ganz anders ist das Verfahren der geometrischen Analysis. Von allgemeinen Regeln und Methoden ist bei ihr keine Rede, da die vielen oft sehr von einander abweichenden Constructionen einer und derselben Aufgabe auf den verschiedensten Lehrsätzen beruhen, und es daher Sache theils der erworbenen Kenntnisse, theils des Scharfsinns ist, das Richtige und Passende zu treffen. Der wesentliche Gang der geometrischen Analysis dürfte sich in den meisten Fällen auf folgende Hauptpunkte zurückführen lassen:

1) Man construire eine Figur von der nämlichen Gattung wie die gesuchte.
2) Man denke sich die Figur entstanden aus gegebenen Stücken, welche in der Figur enthalten sind, nur von anderer Größe, als in der Aufgabe.
3) Man unterscheide genau die gegebenen von den gesuchten Stücken, und wo die gegebenen Stücke nicht unmittelbar Theile der Figur sind, werden diese Stücke in der Figur wirklich dargestellt und wo möglich in Verbindung mit einander.
4) Da ferner die Bestimmung von Figuren auf die Bestimmung von Punkten zurückkommt, so untersuche man, welche von den Punkten, durch deren Bestimmung die Figur als gegeben betrachtet werden kann, unmittelbar zu finden sind, also sogleich construirt werden können, welche Punkte aber als gesucht betrachtet werden müssen.
5) Hierauf ist die Lage der gegebenen und gesuchten Punkte in verschiedene Verhältnisse und Beziehungen zu bringen, um darauf durch Anwendung irgend eines Lehrsatzes oder einer schon gelös'ten Aufgabe zu erkennen, wie die gesuchten Punkte aus den gegebenen gefunden werden können.

6) Nicht immer sind die gesuchten Punkte von den gegebenen unmittelbar so abhängig, daß die Figur aus ihnen selbst durch Anwendung irgend eines Lehrsatzes gezeichnet werden könnte. Oft kann diese Abhängigkeit nur mittelbar erkannt werden, indem man Hülfsconstructionen benutzt, die von den gegebenen Linien abhängig sind und aus denen die gesuchten Stücke abgeleitet werden können. Das richtige Ziehen der Hülfslinien ist die Hauptkunst bei der Lösung von geometrischen Aufgaben, aber gerade für sie lassen sich keine allgemeine Regeln geben. Um Hülfslinien zu erhalten, schlägt man übrigens am häufigsten folgende Wege ein:

a) man verbindet Punkte in der Figur, welche noch nicht verbunden sind, durch gerade Linien;
b) man verlängert gerade Linien, wenn solche nicht parallel sind, bis sie sich schneiden;
c) man zieht durch gegebene Punkte Parallelen mit Linien der Figur;
d) man fällt Perpendikel von gegebenen Punkten der Figur auf Linien;
e) man errichtet in gegebenen Punkten gegebener Linien Perpendikel, und verlängert sie bis zu den Durchschnittspunkten mit anderen Linien der Figur;
f) man legt an gegebene Punkte Winkel, welche gegebenen Winkeln gleich sind;
g) man halbirt Winkel;
h) man verdoppelt Dreiecke so, daß Parallelogramme daraus entstehen;
i) man beschreibt aus gegebenen Punkten Kreise mit gegebenen Halbmessern u. s. w.;
k) man beschreibt concentrische, berührende Kreise, Tangenten u. s. w.

Anmerkung. Die selbständige Lösung geometrischer Aufgaben durch eine ohne fremde Hülfe durchgeführte Analysis setzt die Kenntniß der Lehren der Geometrie voraus, und je größer die Kenntnisse sind, desto leichter wird auch die Lösung von Aufgaben bei sonst gleichen Verhältnissen von statten gehen. Die Lehrsätze sind, wie Nagel in seiner vortrefflichen geometrischen Analysis (S. 44) sagt: „die Instrumente oder Werkzeuge, deren sich der Aufgaben Lösende bedient zur Verfertigung der ihm vorliegenden Arbeit, und wie jeder technische Arbeiter jede Arbeit um so leichter ausführen wird, je vollständiger seine Werkstätte mit Werkzeugen ausgerüstet ist, so wird auch die Lösung von Aufgaben um so besser von statten gehen, je umfassender hier die geistige Werkstätte, in welcher das gegebene Material verarbeitet werden soll, mit den Werkzeugen der Lehrsätze versehen ist; ja manche Aufgaben werden ohne vorangegangene Kenntniß bestimmter Lehrsätze gar nicht lösbar sein." — (Ueber das Wesen der geometrischen Analysis vergl. Nagel, S. 40 — 54.)

§. 29.

Verschiedene Hülfsmittel, durch geometrische Analysis Aufgaben zu lösen. Obgleich sich also, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, keine allgemeine Regeln geben lassen, so gibt es doch einige allgemeine Hülfsmittel, auf welche sich die verschiedenen Methoden, Aufgaben zu lösen, zurückführen lassen, und bald ist es eines dieser Mittel, bald eine Combination von mehren derselben, durch welche man zur Lösung gelangt. Alle Auflösungen können nämlich gefunden werden, entweder

1) durch ihren Zusammenhang mit den schon gefundenen Lösungen anderer Aufgaben,
2) durch ihren Zusammenhang mit geometrischen Wahrheiten.

Im ersten Falle ist es entweder die Aehnlichkeit der Aufgabe mit einer schon gelös'ten (Analogie), oder die Abhängigkeit derselben von einer schon gelös'ten (Reduction), was zur Lösung der Aufgabe führt. — Im zweiten Falle gibt es drei verschiedene Arten von Wahrheiten, auf welche die Lösung der Aufgaben sich stützt: Lehrsätze, Daten und Oerter. Daher gibt es im Ganzen fünf Hülfsmittel, Aufgaben zu lösen:

a) durch Analogie, b) durch Reduction, c) durch Lehrsätze, d) durch Daten, e) durch Oerter, von denen wir jetzt einzeln handeln wollen.

§. 30.

Analysis durch Analogie. Die Analysis und Synthesis zweier Aufgaben wird analog sein, wenn die Aufgaben selbst analog sind, d. h. wenn sie bei vorherrschender Identität in einzelnen Punkten verschieden sind. Da aber jede Aufgabe zweierlei enthält, das Gegebene (die Voraussetzung) und das Gesuchte (die Forderung), so kann die Analogie bald in der Voraussetzung, bald in der Forderung liegen. Bei den Aufgaben, an zwei Kreise einmal eine gemeinschaftliche innere, das andere Mal eine gemeinschaftliche äußere Tangente zu ziehen, liegt völlige Identität in der Voraussetzung, theilweise Identität oder Analogie in der Forderung. Bei den beiden Aufgaben dagegen, einen Kreis zu suchen, der einmal zwei gegebene Linien, das andere Mal zwei gegebene Kreise berührt, liegt die völlige Identität in der Forderung, und die theilweise Identität oder Analogie in der Voraussetzung. Wenn von zwei derartigen analogen Aufgaben die eine schon gelös't ist, so ist durch ihre Lösung auch der Weg für die Lösung der andern gezeigt, und die Analysis der zweiten hat nur die Abweichungen in der Lösung aufzufinden, welche durch die theilweise Verschiedenheit in der Aufgabe hervorgerufen werden. Man macht von der Analogie zwar nicht so häufig Gebrauch, als von den andern Hülfsmitteln bei der Lösung, wenn es jedoch der Fall ist, so geschieht es besonders in folgenden drei Fällen:

a) wenn von speciellen Aufgaben zu allgemeinen fortgeschritten wird;

Bemerkung. Man schreitet bei der Lösung von Aufgaben gewöhnlich von den specielleren zu den allgemeineren fort, und nicht umgekehrt, weil die Lösungen für die specielleren Aufgaben gewöhnlich leichter zu finden sind, aber darum auch nicht ohne weitere Veränderung auf die allgemeineren Aufgaben übertragen werden können, weil sie sich auf die specielle Natur der besonderen Aufgabe stützen. Die Lösung der allgemeinen Aufgabe dagegen gilt für alle ihr untergeordnete speciellen Aufgaben.

b) wenn bei den Aufgaben, bei sonstiger Identität, ein Gegensatz in der Voraussetzung oder Forderung stattfindet, mag sich derselbe auf die Lage oder die Größenverhältnisse der gegebenen oder gesuchten Constructionen beziehen. Ein solcher Gegensatz findet Statt, wenn gegebene Punkte auf einer oder auf entgegengesetzten Seiten einer gegebenen Linie liegen, wenn gesuchte Constructionen innerhalb oder außerhalb anderer liegen sollen, wenn statt Summen Differenzen gegebener oder geforderter Constructionen vorkommen;

c) wenn bei Aufgaben statt der Punkte Kreise gegeben sind, und statt der Linien Tangenten gefordert werden, weil in diesen Fällen die Punkte sich als Kreise betrachten lassen, deren Radien zu Null geworden sind, und die Aufgaben, in denen Punkte statt der Kreise gegeben sind, als specielle Aufgaben erscheinen, die leichter als die allgemeineren zu lösen sind.

Beispiel einer Analysis durch Analogie.

Aufgabe: **Um** ein Dreieck einen Kreis zu zeichnen.

Analysis. Man denke sich, die Aufgabe sei gelös't, das Dreieck und der Kreis um dasselbe gezeichnet, die Perpendikel vom Mittelpunkte des Kreises auf die Seiten gefällt und die Eckstrahlen gezogen, so müssen die Eckstrahlen der Forderung gemäß gleich sein. Dies wird aber der Fall sein, wenn zwei Paar der rechtwinkligen Dreiecke über den einzelnen Seiten zu beiden Seiten der Perpen-

Aufgabe. **In** ein Dreieck einen Kreis zu zeichnen.

Analysis. Man denke sich, die Aufgabe sei gelös't, das Dreieck und der Kreis in dasselbe gezeichnet, die Perpendikel vom Mittelpunkte des Kreises auf die Seiten gefällt und die Eckstrahlen gezogen, so müssen die Perpendikel nach der Forderung gleich sein. Dies wird aber der Fall sein, wenn zwei Paar der vor den einzelnen Winkeln zu beiden Seiten der Eckstrahlen liegenden rechtwinkdikel congruent sind. Diese Dreiecke müssen congruent sein, wenn die betreffenden Seiten halbirt und die Perpendikel in den Halbirungspunkten der Seiten errichtet sind. Da nun die Halbirung von zwei Seiten und die Errichtung von Perpendikeln in den Theilungspunkten unbedingt ausführbar ist, diese Perpendikel sich nothwendig schneiden müssen, aber sich nur in einem Punkte schneiden können, so ist die Lösung unbedingt möglich, aber nur ein Kreis zu zeichnen.

Aus der Auflösung folgt, daß alle drei Perpendikel sich in einem Punkte schneiden.

ligen Dreiecke congruent sind. Diese Dreiecke müssen congruent sein, wenn die betreffenden Winkel halbirt und die Perpendikel von den Durchschnittspunkten zweier Eckstrahlen gefällt sind. Da nun die Halbirung von zwei Winkeln und die Zeichnung der Theilungslinien unbedingt ausführbar ist, diese Theilungslinien sich nothwendig schneiden müssen, aber sich nur in einem Punkte schneiden können, so ist die Lösung unbedingt möglich, aber nur ein Kreis zu zeichnen.

Aus der Auflösung folgt, daß alle drei Halbirungslinien sich in einem Punkte schneiden.

Die Aufgaben hätten auch so lauten können:

Durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu ziehen.

Durch drei Linien, die nicht parallel sind, einen berührenden Kreis zu legen.

Bei der zweiten allgemeineren Fassung der Aufgaben läßt die erste auch nur eine Lösung zu, die zweite aber vier, indem zu dem Kreise im Dreieck noch drei andere zwischen den Verlängerungen der Seiten kommen.

Analoge Aufgaben: Ein Perpendikel zu errichten und einen Winkel zu halbiren. Eine Linie in gleiche und proportionale Stücke zu theilen. Von zwei Punkten auf einer und von zwei Punkten auf entgegengesetzten Seiten einer geraden Linie an dieselbe zwei Linien nach einem Punkte zu ziehen, die mit der Linie gleiche Winkel bilden. Die vorige Aufgabe, mit der Voraussetzung von gegebenen Kreisen statt der gegebenen Punkte. In einen Quadranten und in einen Kreisausschnitt einen berührenden Kreis zu beschreiben.

§. 31.

Analysis durch Reduction. Die Auflösung einer Aufgabe durch Reduction besteht im Allgemeinen darin, daß eine Aufgabe auf eine andere schon gelös'te Aufgabe zurückgeführt wird. Da nun aber alle Aufgaben auf einfachere und zuletzt auf die beiden Forderungen (Linie und Kreis) zurückgeführt, also durch Reduction im weiteren Sinne des Wortes gelös't werden, so versteht man unter Reduction im engeren Sinne die Zurückführung einer zusammengesetzten Aufgabe auf eine andere, die nicht zu denjenigen Aufgaben gehört, die in den Elementen gewöhnlich gelös't zu werden pflegen. Die Analysis durch Reduction wird als beendet angesehen, sobald die Aufgabe auf die Construction einer schon gelös'ten Aufgabe zurückgeführt ist. Die Lösung der Aufgaben durch Reduction kommt viel häufiger vor, als die durch Analogie, und läßt sich im Allgemeinen in folgenden Fällen anwenden:

a) wenn eine Aufgabe sich nur durch die Einkleidung von einer schon gelös'ten Aufgabe unterscheidet.
b) Wenn Vierecke und Vielecke, und vorzugsweise wenn Trapeze oder Parallelogramme gezeichnet werden sollen, weil diese Aufgaben sich meistentheils auf Dreiecksaufgaben zurückführen lassen.
c) Aber auch umgekehrt, wenn Dreiecke gezeichnet werden sollen, zu deren Darstellung Transversalen gegeben sind, weil diese sich als die Hälften von Diagonalen doppelt so großer Parallelogramme betrachten lassen, auf deren Zeichnung sich die Dreiecksaufgaben reduciren.
d) Wenn Figuren getheilt oder verwandelt werden sollen, weil solche Theilungen und Verwandlungen Figuren-Constructionen sind, bei denen die Fläche zu den gegebenen Stücken gehört.

e) Wenn Kreise gezeichnet werden sollen, welche durch gegebene Punkte gehen, oder gegebene gerade Linien oder Kreise berühren.

Beispiele einer Analysis durch Reduction.

Aufgabe 1. Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei auf einer Seite einer Linie liegenden Punkte geht und die Linie berührt.

Je nachdem die Verbindungslinie der beiden Punkte der gegebenen Linie parallel oder nicht parallel ist, sind zwei Lösungen zu unterscheiden.

a) Wenn die Verbindungslinie der beiden Punkte der angegebenen Linie parallel ist.

Analysis. Man denke sich die Aufgabe gelös't und den gesuchten Kreis gezeichnet. Zieht man die Verbindungslinie der beiden Punkte, so ist sie die Sehne des Kreises. Errichtet man in ihrem Halbirungspunkte ein Perpendikel, so ist dies auch zugleich ein Perpendikel auf der gegebenen Linie, geht durch den Mittelpunkt des Kreises, und sein Endpunkt ist der Berührungspunkt desselben mit der Linie, daher ist die Aufgabe auf die andere bekannte Aufgabe reducirt: durch drei Punkte einen Kreis zu legen.

b) Wenn die Verbindungslinie der beiden Punkte der gegebenen Linie nicht parallel ist.

Analysis. Man denke sich, die Aufgabe sei gelös't und der Kreis gefunden. Zieht man, wie vorhin, die Verbindungslinie der beiden Punkte, so muß sie, gehörig verlängert, die gegebene Linie schneiden. Da sie nun als eine Sekante des Kreises erscheint, während die gegebene Linie Tangente sein soll, so läßt sich aus ihr vermittelst des Tangentensatzes die Länge der Tangente vom Durchschnittspunkte bis zu dem Berührungspunkte bestimmen, dadurch der Berührungspunkt finden und die Aufgabe gleichfalls auf die Aufgabe: „durch drei Punkte einen Kreis zu legen", reduciren.

Discussion. Da sich die Tangente vom Durchschnittspunkte aus nach beiden Seiten auf der gegebenen Linie abtragen läßt, so sind auch zwei verschiedene Kreise möglich.

Aufgabe 2. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene, nicht parallele Linien berührt und durch einen zwischen ihnen liegenden Punkt geht.

Analysis. Man denke sich, die Aufgabe sei gelös't und der Kreis gefunden. Werden die Linien nun bis zu ihrem Durchschnittspunkte verlängert, der Mittelpunkt des Kreises und die Spitze des entstandenen Winkels durch eine gerade Linie verbunden, außerdem zwei Perpendikel auf die gegebenen Linien von dem Mittelpunkte des Kreises gefällt, sowie ein Perpendikel von dem gegebenen Punkte (p) auf die Verbindungslinie des Mittelpunktes und der Spitze gezogen und bis zur Peripherie nach (p′) verlängert; so müssen die beiden entstandenen rechtwinkligen Dreiecke, die durch die beiden senkrechten Radien zu beiden Seiten der Verbindungslinie gebildet werden, congruent sein (Kathete und Hypotenuse gleich) und daher der Winkel am Durchschnittspunkte der beiden Linien durch die Verbindungslinie halbirt werden. Der Mittelpunkt liegt demnach in der Halbirungslinie des Winkels. Da aber zugleich die senkrechte Linie (p p′) durch die Verbindungslinie halbirt wird, so ist außer dem Punkte p auch noch der Punkt p′ auf der anderen Seite der Halbirungslinie gegeben und die Aufgabe auf die schon gelös'te Aufgabe: „durch zwei Punkte einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene Linie berührt", zurückgeführt.

Discussion. Da die vorige Aufgabe, auf welche die eben behandelte zurückgeführt ist, zwei Lösungen zuläßt, so sind auch bei ihr selbst zwei Lösungen möglich.

Aufgaben, die durch Reduction zu lösen sind.

1) Ein Dreieck zu construiren aus der Summe zweier Seiten, dem von ihnen eingeschlossenen Win-

kel und dem der dritten Seite zugehörigen Höhenperpendikel — durch Reduction auf die Aufgabe: „ein Dreieck zu construiren aus einer Seite, dem Perpendikel und der Halbirungslinie dieses Winkels.“

2) Ein Parallelogramm zu construiren aus der Summe der Diagonalen, dem Winkel, unter dem sie sich schneiden, und der Entfernung zweier parallelen Seiten — durch Reduction auf die Aufgabe: „ein Dreieck zu construiren aus der Summe zweier Seiten, dem eingeschlossenen Winkel und dem zur dritten Seite gehörigen Höhenperpendikel.“

3) Ein Trapez zu construiren aus den beiden nicht parallelen Seiten, der Summe der Winkel, welche dieselben mit einer Parallele machen, und dem Winkel, unter welchem sich die Diagonalen schneiden, durch Reduction auf die Aufgabe: „ein Dreieck zu construiren aus einem Winkel, der zu ihm gehörigen Transversale und dem Winkel, welchen die Transversale mit der Gegenseite macht.“ Diese Aufgabe wird reducirt auf die Aufgabe: „ein Parallelogramm zu construiren aus der Diagonale, dem Winkel, durch den sie geht, und dem Winkel, unter dem sich beide Diagonalen schneiden.“

4) Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Linie und einen gegebenen Kreis berührt.

5) Einen Punkt zu suchen, der von drei Punkten gleich weit entfernt ist.

6) Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln mit zwei gegebenen Seiten, wird reducirt auf die Aufgabe: „ein Dreieck zu zeichnen aus zwei Seiten und der Höhe auf die eine von ihnen.“

7) Zwischen zwei der Lage und Größe nach gegebene Kreise eine gegebene Linie parallel der Centrale einzutragen, wird reducirt auf die Aufgabe: „ein Trapez aus seinen vier Seiten zu zeichnen.“ Diese letztere Aufgabe wird reducirt auf die Aufgabe: „ein Dreieck aus drei Seiten zu zeichnen.“

8) Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise berührt, wird reducirt auf die Aufgabe: „Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Kreise berührt“, und diese Aufgabe wird wiederum auf zwei Aufgaben zurückgeführt, einestheils: „über einer gegebenen Geraden ein Rechteck zu beschreiben, dessen Inhalt sich zu dem eines gegebenen Rechtecks wie zwei gegebene Linien verhalte“; andrerseits darauf: „einen Kreis zu beschreiben, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt“, und diese endlich wird zurückgeführt auf die Aufgabe: „durch drei Punkte einen Kreis zu legen.“

§. 32.

Analysis durch Lehrsätze. Unter der Lösung einer Aufgabe durch Lehrsätze versteht man diejenige Lösung, die sich unmittelbar auf irgend eine erkannte geometrische Wahrheit stützt, die in einem Lehrsatze (nicht in einem Datum oder geometrischen Orte) ausgesprochen ist. Jede Aufgabe wird im weiteren Sinne des Wortes durch Lehrsätze gelös't, da sich alle auf schon erkannte Wahrheiten stützen; man versteht daher im engeren Sinne unter der Lösung durch Lehrsätze — ähnlich wie bei der Reduction — nur diejenige Auflösung, welche eine unmittelbare Folge eines geometrischen Lehrsatzes ist, der nicht zu den gewöhnlich in den Elementen enthaltenen Lehrsätzen gehört. — Die Analysis einer solchen Aufgabe wird als beendet angesehen, sobald der Lehrsatz gefunden ist, durch dessen Anwendung die Aufgabe gelös't wird.

Lehrsätze, mit deren Hülfe Aufgaben bequem gelös't werden können, sind folgende:

1) Die Höhen in einem Dreiecke verhalten sich umgekehrt wie ihre Gegenseiten; — dient zur Lösung der Aufgabe: aus drei gegebenen Höhen ein Dreieck zu zeichnen.

2) die drei Transversalen schneiden sich so in einem Punkte, daß die Abschnitte von den Spitzen aus sich zu denen von den Seiten aus verhalten wie 2 : 1; — dient zur Zeichnung von Dreiecken aus gegebenen Transversalen.

3) Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke das Perpendikel die Hypotenuse stetig theilt, so ist die kleinere Kathete dem größeren der Kathete nicht anliegenden Abschnitte gleich; — dient zur Lösung der Aufgabe: ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen aus der Hypotenuse, dessen eine Kathete gleich ist dem nicht anliegenden Abschnitte der Hypotenuse.

4) die Quadrate der Katheten verhalten sich wie die Abschnitte auf der Hypotenuse; — dient zur Lösung der Aufgabe: zwei Quadrate zu zeichnen, die sich wie zwei gegebene Linien verhalten.

5) Wenn man von dem Schwerpunkte eines Dreiecks ein Perpendikel auf irgend eine Linie fällt, so ist dasselbe das arithmetische Mittel zu den drei Perpendikeln aus den Winkelspitzen auf dieselbe Linie; — dient zur Lösung der Aufgabe: durch einen gegebenen Punkt eine Linie so hindurch zu legen, daß die Summe der von drei anderen Punkten auf sie gefällten Perpendikel einer gegebenen Linie gleich ist.

6) Die Entfernung zwischen dem Berührungspunkte des inneren Berührungskreises eines Dreiecks von dem auf der Verlängerung der nämlichen Seite liegenden Berührungspunkte eines äußeren Berührungskreises, ist gleich der zwischen beiden Berührungskreisen liegenden Seite des Dreiecks; — dient zur Lösung der Aufgabe: ein Dreieck zu zeichnen aus einem Winkel, seiner Gegenseite und dem Halbmesser des inneren Berührungskreises.

7) Wenn man in einem Dreieck eine Linie parallel zur Grundlinie und zugleich von den Endpunkten der Grundlinie nach den gegenüberliegenden Theilpunkten noch zwei andere Linien zieht, die sich in einem Punkte schneiden, so halbirt die Linie, welche von der Spitze des Dreiecks durch diesen Punkt gezogen wird, die Grundlinie des Dreiecks; — dient zur Lösung der Aufgabe: eine Gerade ohne Zirkel zu halbiren.

8) In jedem Dreieck bildet die Halbirungslinie eines Winkels mit der seine Spitze treffenden Höhe einen Winkel, welcher gleich der halben Differenz der Winkel an der Gegenseite ist; — dient zur Lösung der Aufgabe: ein Dreieck zu zeichnen aus einer Seite, der Differenz ihrer anliegenden Winkel und der Halbirungslinie ihres Gegenwinkels.

9) Wenn man in einem Vierecke mit jeder der beiden Diagonalen durch den Mittelpunkt der anderen eine Parallele zieht und den Durchschnittspunkt dieser Parallelen mit den Mittelpunkten der vier Seiten durch gerade Linien verbindet, so theilen letztere das Viereck in vier gleiche Theile; — dient zur Lösung der Aufgabe: ein Viereck durch Linien, die von einem Punkte aus nach den Halbirungspunkten der Seiten gezogen sind, in vier gleiche Theile zu theilen.

Beispiel einer Analysis durch einen Lehrsatz.

Aufgabe: Ein Dreieck aus seinen drei Höhen zu zeichnen. Man denke sich, die Aufgabe sei gelös't und das Dreieck mit seinen Höhen gezeichnet, so müssen die Höhen in umgekehrtem Verhältniß zu ihren Gegenseiten stehen. Denkt man sich nun ein Dreieck aus den drei gegebenen Höhen als Seiten gezeichnet und in ihm gleichfalls die Höhen gezogen, so verhalten sich auch in ihm die Seiten umgekehrt wie die zugehörigen Höhen; daher haben die Höhen dieses Hülfsdreiecks dasselbe Verhältniß, wie die Seiten des gesuchten Dreiecks, und bilden also ein dem gesuchten Dreieck ähnliches Dreieck. Ein diesem letzteren Hülfsdreieck ähnliches Dreieck wird aber erst dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn seinen Seiten auch zugleich die gegebenen Höhen zugehören. Berücksichtigt man aber, daß in einem diesem Hülfsdreieck ähnlichem Dreieck durch eine Höhe auch die anderen bestimmt sind, und daß, wenn eine der gegebenen Höhen in diesem Dreieck vorkommt, auch die anderen sich in ihm finden müssen, so braucht man in dem Hülfsdreieck nur eine Höhe zu ziehen, sie zu verlängern, bis sie der entsprechenden gegebenen Höhe gleich wird, durch ihren Endpunkt eine Parallele mit der Basis zu legen und die beiden anderen Seiten bis zu dieser Parallele zu verlängern, um das geforderte Dreieck zu erhalten.

Determination. Aus der Analysis ergibt sich, daß die drei gegebenen Höhen denselben Bedingungen unterworfen sind, wie die drei Seiten eines Dreiecks, daß also zwei größer sein müssen, als die dritte, wenn überhaupt ein Dreieck zu Stande kommen soll.

Bei der eben analysirten Aufgabe, sowie bei den übrigen acht angeführten, ist der Lehrsatz, auf den ihre Lösung sich stützt, als bekannt vorausgesetzt. Wenn dies der Fall ist, so ist die Analysis einer solchen Aufgabe gewöhnlich sehr kurz, sobald die ganze Lösung sich nur allein auf diesen Lehrsatz stützt, ohne andere Sätze herbeiziehen oder zur Reduction ihre Zuflucht nehmen zu müssen. Dies findet jedoch sehr selten Statt. In den meisten Fällen, wie z. B. selbst in der eben behandelten einfachen Aufgabe, wird die Lösung nur zum Theil durch einen Lehrsatz bewirkt, und der übrig Theil durch andere Hülfsmittel bewerkstelligt, wie hier durch Reduction auf die Aufgabe: zu einem Dreieck ein ähnliches Dreieck zu zeichnen mit einer zu einer bestimmten Seite gehörigen vorgeschriebenen Höhe. Noch schwieriger wird die Analysis einer solchen Aufgabe durch einen Lehrsatz, wenn derselbe nicht bekannt ist; denn dann muß man entweder zu einer anderen Art der Analysis, etwa zur Reduction oder den Oertern seine Zuflucht nehmen, die in den meisten Fällen verwickelter und weitläufiger sein wird, oder man muß zuvor den zu ihr gehörigen Lehrsatz finden und beweisen. — Dies führt auf eine ganz neue Art von geometrischen Arbeiten, die hier erwähnt werden mögen, damit der Schüler von ihnen wenigstens einen Begriff erhalte, jedoch nur beiläufig, weil sie in der Regel die Kräfte der Schüler auf dem Gymnasium übersteigen, auch wenn es sich nur um ganz einfache Sätze handelt. Wir meinen nämlich die:

Auffindung von Beweisen und Lehrsätzen.

Auffindung von Beweisen. Häufig trifft man bei geometrischen Untersuchungen, die zu irgend einem bestimmten Zwecke angestellt werden, durch Zufall auf Eigenschaften und Beziehungen der Constructionen, die man gar nicht suchte, und findet so nebenbei Lehrsätze, deren Beweis dann durch eine selbständige, zu diesem Zwecke angestellte Untersuchung gefunden werden muß. In diesen und ähnlichen Fällen wird die Behauptung des Lehrsatzes als bekannt und richtig vorausgesetzt, wie es in den gewöhnlichen Lehrbüchern der elementaren Geometrie bei allen Lehrsätzen der Fall ist, und es handelt sich dann nur nachträglich um die Auffindung eines Beweises zu schon anderweitig und unter anderen Verhältnissen gefundenen Wahrheiten. Das Verfahren zur Auffindung von Beweisen für solche schon bestimmt formulirte Lehrsätze ist dem Verfahren zur Auffindung der Lösung von Aufgaben ganz ähnlich und gibt zu denselben Analysen und Hülfsconstructionen Veranlassung, die sich eben so wenig auf ganz bestimmte einfache Vorschriften zurückführen lassen, wie dies bei der geometrischen Analysis der Aufgaben der Fall ist. Um dem Schüler einen Begriff von dem anzuwendenden Verfahren zu geben, müssen complicirte Beweise, die eine Reihe von Zwischengliedern enthalten, auf diese Weise zergliedert und ihr Beweis in allen Einzelnheiten ausführlich erörtert werden. Als Beispiele hierzu eignen sich die Beweise von Sätzen über das Verhältniß von Linien oder Figuren, wenn dieselben ohne Anwendung der Aehnlichkeitssätze geführt werden sollen, z. B. die Sehnen- und Tangentensätze, die Sätze über die merkwürdigen Punkte im Dreieck, die Lehrsätze des Pappus, Pythagoras, Ptolomäus und andere. Jeder Lehrer kann nach dem Stande der Kenntniß seiner Schüler leicht selbst sich ähnliche Lehrsätze zur Zergliederung wählen, wenn er nur die Vorsicht gebraucht, solche zu wählen, die dem Schüler in allen Einzelheiten gegenwärtig sind, damit immer an einem völlig bekannten Stoffe die logische Zergliederung Statt hat.

Auffsuchung von Lehrsätzen. In anderen Fällen, wenn man selbständig und unabhängig von früher angestellten Untersuchungen geometrische Constructionen einer wissenschaftlichen Betrachtung unterwirft, geht man absichtlich auf die Entdeckung neuer Wahrheiten oder Lehrsätze aus, und das hierbei anzuwendende Verfahren dürfte sich auf folgende Hauptpunkte reduciren lassen:

1) Man stelle irgend eine Beziehung zwischen von einander abhängigen Constructionen in Frage;

2) man suche durch Hülfsconstructionen, wo es nöthig ist, die Glieder des Verhältnisses in Verbindung zu einander zu bringen;

3) man suche schon bekannte Beziehungen zwischen den Gliedern des Verhältnisses und den Hülfsconstructionenen aufzufinden, und

4) diese so lange umzuformen, bis man zu einem bestimmten Ausdruck für die in Frage gestellte Beziehung kommt.

Als Beispiele zur Erläuterung des Gesagten mögen folgende in Frage gestellte Beziehungen oder Lehrsätze dienen: Welches Größenverhältniß findet zwischen den Seiten und ihren Gegenwinkeln in einem Dreieck Statt? — Wie verhalten sich die drei Perpendikel aus einem Punkte in einem gleichseitigen Dreieck zu der Höhe desselben? — Wie verhalten sich die Quadrate der drei Seiten eines Dreiecks? — Wie verhalten sich die drei Höhen eines Dreiecks zu den zugehörigen Seiten? — Wie verhalten sich die Abschnitte der Transversalen eines Dreiecks zu einander? — Wie verhalten sich die drei Perpendikel aus den Winkelspitzen eines Dreiecks auf eine Linie außerhalb des Dreiecks zu dem Perpendikel aus dem Schwerpunkte auf dieselbe Linie? — Als Beispiele für die Methode bei der Auffuchung von Lehrsätzen mögen folgende zwei mit einander engverbundene Sätze dienen:

1) **Wenn man zwischen zwei nicht parallelen Linien drei parallele Transversalen zieht, in welchem Verhältniß steht die mittlere Transversale zu den beiden anderen und den Abschnitten auf der einen Linie zwischen den Transversalen?**

Sind L und L′ die beiden nicht parallelen Linien, Aa, Bb, Cc die drei parallelen Transversalen, und ist $Aa < Bb < Cc$, so verlängere man die beiden Linien über A und a bis zu ihrem Durchschnittspunkte P, dann ist

$$Cc : Bb = PC : PB \text{ und daher } Cc - Bb : Bb = BC : PB \quad (1)$$
$$Bb : Aa = PB : PA \quad „ \quad „ \quad Bb : Bb - Aa = PB : AB \quad (2)$$

Setzt man (1) und (2) zusammen, so ist $Cc - Bb : Bb - Aa = BC : AB = bc : ab$

$$Bb = \frac{Cc \,.\, AB + Aa\, BC}{Ab + Bb} = \frac{Cc - ab + Aa \,.\, bc}{ab + bc}$$

Wie lautet die Beziehung oder der Lehrsatz in Worten ausgedrückt?

2) Von den drei Winkelspitzen eines Dreiecks und von einem bestimmten Punkte innerhalb desselben sind Perpendikel auf eine Linie außerhalb des Dreiecks, aber in derselben Ebene mit ihm, gefällt; welches Größenverhältniß findet sich zwischen den drei Perpendikeln aus den Winkelspitzen und dem aus dem Punkte innerhalb des Dreiecks?

Ist ABC das gegebene über AC construirte Dreieck, L L′ die gegebene unter AC liegende Linie, sind Aa, Bb, Cc die drei Winkelperpendikel und Gg das Perpendikel aus dem Punkte G, so denke man sich nach BG gezogen und durch den Durchschnittspunkt (J) mit der Seite AC bis zur Linie L L′ nach D verlängert, so ist wenn $Aa < Ji < Cc$ und $Ji < Gg < Bb$, nach dem vorigen Satze:

$$1)\ Gg = \frac{Bb \,.\, GJ + BG \,.\, Ji}{BG + GJ.}$$

$$2)\ Ji = \frac{Cc \,.\, AJ + Aa \,.\, CJ}{CJ + AJ.}$$

Substituirt man den Werth für Ji in den Werth für Gg, so ist

$$Gg = \frac{Bb \,.\, GJ + BG \left(\dfrac{Cc \,.\, AJ + Aa \,.\, CJ}{CJ + AJ}\right)}{BG + GJ.}$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$Gg = \frac{Bb \,.\, GJ \,.\, CJ + Bb \,.\, GJ \,.\, AJ + Cc \,.\, BG \,.\, AJ + Aa \,.\, BG \,.\, CJ.}{(BG + GJ)\,(CJ + AJ)}$$

Dividirt man Dividend und Divisor durch GJ . CJ, so wird

$$Gg = \frac{Bb + Bb\,\frac{AJ}{CJ} + Cc\,\frac{BG}{GJ}\cdot\frac{AJ}{CJ} + Aa\,\frac{BG}{GJ}}{\left(\frac{GB}{GJ} + 1\right)\left(1 + \frac{AJ}{CJ}\right)}$$

Sind nun die Verhältnisse $\frac{BG}{GJ}$ und $\frac{AJ}{CJ}$ gegeben, so ist der Werth von GJ völlig bestimmt.

Setzt man, wie es bei der Transversale durch den Schwerpunkt der Fall ist, $\frac{BG}{GJ} = 2$ und $\frac{AJ}{CJ} = 1$,

$$\text{so ist } Gg = \frac{2\,Bb + 2\,Cc + 2\,Aa}{3\,.\,2} = \frac{Aa + Bb + bc}{3}.$$

d. h. das Perpendikel aus dem Schwerpunkte eines Dreiecks auf eine Linie außerhalb des Dreiecks ist das arithmetische Mittel zwischen den drei Perpendikeln aus den Winkelspitzen auf dieselbe Linie.

Bemerkung. Die allgemeineren Sätze, wie der eben behandelte über die Perpendikel, treten in der Wissenschaft immer später hervor, als die specielleren, weil die letzteren leichter zu finden sind, da die Beziehungen sich desto mehr vereinfachen, je größeren Beschränkungen die Constructionen, an denen sie sich finden, unterworfen werden. Die Wissenschaft muß jedoch stets dahin streben, wie dies vorzugsweise der Charakter der neueren Geometrie ist, die einzelnen speciellen Sätze allgemeinen, und diese wiederum noch allgemeineren unterzuordnen, sowie dahin, die Menge vereinzelter, aber verwandter Lehrsätze als specielle Ausdrücke für einen allgemeinen, sie alle in sich fassenden obersten Satz darzustellen.

Analysis durch Data.

§. 33.

Erklärung. In dem früheren Paragraphen über die Bedingungen der Aufgabe ist gezeigt, daß die zu einer Construction gegebenen Stücke von einander unabhängig sein müssen, wenn durch sie die Lage und Größe der geforderten Figur völlig bestimmt sein soll. Unter Daten (data, δεδόμενα) versteht man dagegen im Allgemeiuen diejenigen abhängigen Stücke einer Coustruction, die durch andere ihrer Größe und Lage nach mitgegeben sind, und im engeren Sinne die Sätze, in denen diese Abhängigkeiten nachgewiesen sind. Man theilt die Daten in unmittelbare und mittelbare oder versteckte ein. Unter jenen versteht man diejenigen, die sich unmittelbar aus dem Grundgesetze einer Construction oder aus schon gelöſ'ten Aufgaben ergeben; unter diesen diejenigen, die erst aus bestimmteu abgeleiteten Eigenschaften der Figuren folgen und als mitgegeben zu betrachten sind, wenn die Stücke, von denen sie abhängen, gegeben werden.

Beispiele unmittelbarer Daten sind: Wenn zwei Größen gegeben sind, so ist ihr Verhältniß gegeben. — Wenn zwei Größen gegeben sind, so ist ihre Summe und Differenz gegeben. — Wenn die Endpunkte einer Linie gegeben sind, so ist sie der Lage und Größe nach gegeben. — Wenn zwei Winkel in einem Dreieck gegeben sind, so ist der dritte Winkel gegeben, das Verhältniß der drei Seiten und das Dreieck seiner Gestalt nach. — Wenn zwei parallele Linien und eine Linie zwischen ihnen gegeben ist, so ist auch der durch sie gebildete Winkel gegeben. — Durch den Durchmesser und das Perpendikel auf ihm zur Peripherie sind auch seine Abschnitte gegeben. — Durch den Radius und die Sehne ist ihr Abstand gegeben. — Mit einer Linie ist zugleich jeder Theil von ihr gegeben, weil man jede Linie durch eine elementare bekannte Construction in jede beliebige Anzahl theilen kann. Mit einem Winkel dagegen ist nur die Hälfte gegeben, da man den Winkel nur in zwei gleiche Theile theilen kann. Mit dem rechten Winkel jedoch ist außer der Hälfte auch noch ein Drittel und zwei Drittel gegeben, die man mit Hülfe des geichseitigen Dreiecks construiren kann. Mit einer Figur ist jeder Theil von ihr und die Seite des ihr gleichen Quadrates gegeben, weil jede Figur beliebig getheilt und in ein Quadrat verwandelt werden kann. Mit einem Kreise und einem Punkte außer ihm, sind auch die beiden an ihn gezogenen Tangenten und der Winkel, den sie bilden, sowie die Centrale u. s. w. gegeben. Mit einer Linie ist auch ihre Mediane gegeben. Mit zwei Linien ist ihre mittlere Proportionale gegeben. Durch die Radien und den Abstand zweier Kreise ist auch ihre gemeinschaftliche äußere oder innere Tangente gegeben.

Beispiele von versteckten Daten sind: In jedem Dreieck stehen die Höhe (h) und die Mittellinie (m) aus einer Winkelspitze, und die Differenz der beiden anderen Winkel ($\beta - \gamma$) in solcher Beziehung, daß durch zwei dieser Stücke das dritte gegeben ist, denn der Winkel (h, m) $= \frac{\beta - \gamma}{2}$.

In jedem Dreieck stehen r, ρ und die Entfernung (e) der beiden Mittelpunkte in solchem Verhältniß, daß durch zwei von ihnen die dritte Größe gegeben ist, denn $e = \sqrt{r(r - 2\rho)}$. — In jedem Dreieck ist durch zwei von folgenden drei (r, P, F) Stücken das dritte mitgegeben, denn $F = \frac{rP}{2}$. — Wenn in einem Parallelogramm von folgenden drei Stücken, einem Winkel, dem Flächeninhalte und der Differenz der Quadrate beider Diagonalen, zwei gegeben sind, so ist damit auch das dritte Stück gegeben. — Wenn von einem um einen Kreis beschriebenen Vierecke von folgenden drei Stücken, dem Halbmesser (r), dem Umfange (P) des Vierecks und dem Flächeninhalte (F), zwei gegeben sind, so ist auch das dritte Stück gegeben, denn $F = \frac{P \cdot r}{2}$.

Wesen und Gebrauch der Daten. Aus den angeführten Beispielen von Daten ergibt sich, daß sie eigentlich Lehrsätze, aber Lehrsätze von besonderer Form sind. Unter Daten versteht man diejenigen Lehrsätze, in denen behauptet wird, daß mit bestimmten gegebenen Stücken zugleich andere Stücke gegeben sind, ohne die Abhängigkeit unter den Stücken in dem Datum selbst näher anzudeuten oder präcis zu formuliren. Sobald das Letztere geschieht, geht das Datum in einen Lehrsatz über. Aus obigen Daten ließen sich folgende Lehrsätze bilden: In jedem Dreieck ist der Winkel, der durch Mittellinie und Höhe aus einer Winkelspitze gebildet wird, dem halben Unterschiede der beiden anderen Winkel gleich. — In jedem Dreieck ist die Entfernung der Mittelpunkte des umschriebenen und eingeschriebenen Kreises die mittlere Proportionale zwischen dem Radius des umschriebenen Kreises und der Differenz desselben Radius und des doppelten anderen Radius. — In jedem Tangentenviereck ist der Flächeninhalt gleich dem halben Product aus Umfang und Radius des eingeschriebenen Kreises.

Der Ausdruck oder die Form der Behauptung ist zwar bei den Daten allgemeiner und unbestimmter gehalten, als bei den Lehrsätzen, aber für die Benutzung bei der Lösung von Aufgaben praktischer ausgedrückt, weil sich die gegenseitige Abhängigkeit gegebener Stücke auf diese Weise besser dem Gedächtniß einprägt und gegenwärtig erhält, als wenn die Abhängigkeit in Form einer Gleichung ausgesprochen wird, die nur für eine Größe in ihr aufgelös't ist. — Die Kenntniß der Daten ist doppelt wichtig; einmal verhütet ihre Kenntniß die Aufstellung von abhängigen Stücken, dann kürzen sie die Analysis auf eine ähnliche Weise wie die Lehrsätze ab, indem sie die gegebenen Bedingungen auf einfachere, von ihnen abhängige reduciren.

Ursprung des Namens. Euklid hat uns außer den Elementen noch eine andere Schrift hinterlassen, die den Titel δεδόμενα (data) führt und Veranlassung zu der Entstehung des Namens gegeben hat. Sie ist eine Fortsetzung der Elemente und dazu bestimmt, ihre Anwendung zur Lösung von Aufgaben zu erleichtern. Euklid nennt aber data alles das, was aus den Bedingungen einer Aufgabe unmittelbar vermöge der in seinen Elementen enthaltenen Sätze folgt. Die alten Geometer und die des Mittelalters bis auf Newton haben bei ihren Untersuchungen die Data eben so citirt, wie die Elemente. Seit den Zeiten Descartes sind diese Spuren der Geometrie der Alten aus den Schriften der Geometer verschwunden, und das Buch der Data dürfte nur den Wenigen noch bekannt sein, die sich vorzugsweise mit der Geschichte der Wissenschaft beschäftigen. (Euklid's Data, verbessert und vermehrt von R. Simson, aus dem Englischen übersetzt und mit einer Sammlung geometrischer, nach der analytischen Methode der Alten aufgelös'ter Probleme begleitet, von Joh. Chr. Schwab, Professor der Philosophie an der Herzogl. Militair-Akademie in Stuttgart. 1780.)

Bemerkung. Der enge dem Programm zugemessene Raum gestattet nicht, die Analysis durch Daten an einigen durchgeführten Beispielen zu erläutern, da außer der Lösung auch die Daten zu ihr vorher abgeleitet werden müßten. In den größeren Werken von Gerwien und Nagel finden sich eine Menge von Beispielen hiehergehöriger Analysen und versteckter Daten, deren Erörterung dem Lehrer hinreichenden Stoff darbietet.

Analysis durch geometrische Oerter.

§. 34.

Erklärung. Unter einem geometrischen Orte versteht man theils eine Construction, welche die Eigenschaft besitzt, daß sämmtliche in ihr liegende Punkte, aber nur diese, einer bestimmten Bedingung Genüge leisten, theils die Sätze, in denen solche geometrische Oerter nachgewiesen werden. So hat z. B. jeder Punkt eines Perpendikels, das in dem Halbirungspunkte einer Linie errichtet ist, die Eigenschaft, daß die beiden Endpunkte der Linie von ihm gleich weit entfernt sind, und das Perpendikel ist daher der geometrische Ort für alle die Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten gleiche Entfernung haben sollen. Ebenso ist die Halbirungslinie eines Winkels der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche die beiden Schenkel des Winkels berühren. Die Oberfläche einer mit d als Radius beschriebenen Kugel ist der geometrische Ort für alle Punkte im Raume, die von einem Punkte a die Entfernung d haben. Die Oberfläche eines mit dem Radius (r) beschriebenen Cylinders ist der geometrische Ort für alle Punkte im Raume, die von einer bestimmten Linie die Entfernung r haben.

Eintheilung der geometrischen Oerter. Die Wichtigkeit der geometrischen Oerter für die Auflösung von Aufgaben ist schon für die griechischen Mathematiker Veranlassung gewesen, sie nach zwei Eintheilungsgründen, nämlich nach der Bestimmtheit, oder nach der Beschaffenheit des Ortes in verschiedene Classen einzutheilen. Nach der größeren oder geringeren Bestimmtheit zerfallen die Oerter in

a) bestimmte Oerter (Τόποι ἐφεκτικοί), d. h. solche, wodurch eine geometrische Construction ihrer Lage nach vollkommen bestimmt ist, gleichsam an einer bestimmten Stelle im Raume haftet;
b) einfach fortschreitende Oerter (T. διεξοδικοί), d. h. solche, bei denen die Lage einer Construction (Punktes, Linie oder Fläche) durch eine Construction von einer Dimension mehr, z. B. die Lage eines Punktes durch eine Linie, die Lage einer Linie durch eine Ebene, bestimmt wird;
c) doppelt fortschreitende Oerter (T. ἀναστροφικοί), d. h. solche, bei denen die Lage einer Construction durch eine Construction von zwei Dimensionen mehr, z. B. die Lage eines Punktes durch eine Ebene, die Lage einer Linie durch einen Körper, bestimmt wird.

Nach der Beschaffenheit der Oerter zerfallen die einfach fortschreitenden wieder in

a) ebene Oerter (T. ἐπίπεδοι, l. plani), d. h. solche, zu denen man, nach der Methode der Alten, schon in der elementaren Planimetrie kam, ohne zu anderen Constructionen seine Zuflucht nehmen zu müssen. Ebene Oerter sind also Kreis und gerade Linie, mit denen wir es hier allein zu thun haben;

b) körperliche Oerter (T. στερεοί, l. solidi), d. h. solche, zu denen die Alten nur durch stereometrische Betrachtungen gelangten. Körperliche Oerter im Sinne der Alten sind die Kegelschnitte, weil sie dieselben durch bestimmte Schnitte auf dem Kegel in Verbindung mit der Kegeloberfläche entstehen ließen und untersuchten;

c) lineare Oerter (T. γραμμικοί), d. h. solche Linien-Constructionen, zu denen die Alten nicht in den Elementen gelangten, wie die Schneckenlinie des Archimedes, die Cissoide, Conchoide und die Quadratrix, weil sie diese Linien einer höheren Ordnung vorzugsweise Linien (γραμμαι) nannten.

Außerdem theilt man die Oerter wie die Daten in unmittelbare und mittelbare ein, indem man unter jenen diejenigen versteht, die sich aus den gewöhnlichen elementaren Sätzen ergeben und als bekannt vorausgesetzt werden, unter diesen aber die, deren Bekanntschaft nicht vorausgesetzt wird, sondern die erst nach einer ähnlichen Methode, wie die unbekannten Lehrsätze und Daten, gesucht werden müssen. Was früher über die Auffindung von Lehrsätzen gesagt ist, gilt auch von den Oertern: ihre Aufsuchung übersteigt die Kräfte der Schüler eines Gymnasiums, da sie einen großen Reichthum von geometrischen Kenntnissen voraussetzt, und eine Gewandtheit in der Combination von Constructionen und Lehrsätzen fordert, wie sie in der Regel von ihnen nicht zu erwarten sind.

Wesen der geometrischen Oerter. Die Oerter im engeren Sinne sind, wie die Daten, eine besondere Art von Sätzen, die sich durch ihre eigenthümliche Ausdrucksweise von den gewöhnlichen Lehrsätzen unterscheiden. Während die Lehrsätze gewöhnlich Größenverhältnisse unter den Constructionen feststellen, drücken die Oerter dieselben Beziehungen als Verhältnisse der gegenseitigen Lage von Constructionen gegen einander aus. Sowie bei den Daten die Beziehungen der Constructionen einen unbestimmteren Ausdruck annahmen, als bei den Lehrsätzen, dennoch aber in dieser Form sich zur Lösung von Aufgaben tauglicher zeigten, als die letzteren, so gewähren auch die Oerter einen passenderen Ausdruck für die Lösung von Aufgaben, als die ihnen entsprechenden Lehrsätze, da sie die Lage von Punkten, auf die es bei den Aufgaben vorzugsweise ankommt, schärfer hervorheben, wenngleich die sie bedingenden Größenverhältnisse in den Hintergrund treten. Man kann die Lehrsätze leicht in Oerter und umgekehrt verwandeln. Z. B: Alle Radien eines Kreises sind gleich, und: die Peripherie eines Kreises ist der geometrische Ort u. s. w. Jede zwei Linien, die von einem Punkte eines in der Mitte einer Linie errichteten Perpendikels nach ihren Endpunkten gezogen werden, sind gleich, und: das Perpendikel ist der geometrische Ort u. s. w. — Alle Perpendikel, von jedem Punkte der Halbirungslinie eines Winkels auf die Linien gefällt, sind einander gleich, und: die Halbirungslinie eines Winkels ist der geometrische Ort u. s. w. — Die Beweise für die geometrischen Oerter sind daher mit den Beweisen für die zugehörigen Lehrsätze ganz gleich und werden auf dieselbe Weise gefunden.

Benutzung der geometrischen Oerter. Wir haben früher gesehen, daß man die Aufgaben in bestimmte und unbestimmte eintheilt, je nachdem die erforderlichen Bedingungen gegeben sind oder nicht. Ist eine Bedingung weniger gegeben, als nöthig ist, so wird sich ein Punkt einer Aufgabe immer so bestimmen lassen, daß er in irgend einer Linie liegen muß, und nicht außer ihr. Die geometrischen Oerter dienen daher zunächst zur Lösung der unbestimmten Aufgaben, aber zur Lösung von bestimmten Aufgaben dadurch, daß, wenn für einen Punkt zwei geometrische Oerter gefunden werden können, in denen er zu gleicher Zeit liegen muß, er nothwendig in ihren Durchschnittspunkt fällt. Sind daher die beiden für den Punkt gefundenen Oerter gerade Linien, so ist der Punkt völlig seiner Lage nach bestimmt; sind die beiden Oerter dagegen eine Linie und ein Kreis oder zwei Kreise, so sind immer zwei verschiedene Punkte möglich, die der Aufgabe genügen. — Die geometrischen Oerter können außerdem auch leicht zur Determination der Aufgabe führen; denn da zwei Oerter, die für einen Punkt gefunden sind, sich schneiden müssen, wenn die Aufgabe möglich sein soll, so ergibt sich hieraus, daß die Auflösung nicht möglich ist, 1) wenn die beiden für einen Punkt gefundenen Oerter parallele gerade Linien sind; 2) wenn die beiden Oerter eine gerade Linie und ein Kreis sind, und zugleich der Abstand des Kreismittelpunktes von der geraden Linie größer ist, als der Radius des Kreises; 3) wenn die beiden Oerter zwei Kreise sind und zugleich die Summe oder Differenz ihrer Radien größer oder kleiner ist, als ihre Centrale u. s. w. Zur Aufsuchung der zu einer Aufgabe dienenden Oerter schlägt man folgenden Weg ein. Man lasse von den nöthigen Bestimmungsstücken einer der Lage und Größe nach gegebenen Figur eins fort, bilde sich also eine unbestimmte Aufgabe in Bezug auf die vorliegende Figur, vergleiche die Lage der verschiedenen möglichen Constructionen mit einander und suche aus ihrer Lage die Construction zu bestimmen, in der sie sämmtlich liegen müssen. Hat man auf diese Weise einen Ort gefunden, so lasse man ein anderes Bestimmungsstück fort und verfahre auf dieselbe Weise, um einen zweiten Ort zu finden, wodurch die Lage des Punktes bestimmt wird. (Beispiele von unmittelbaren und mittelbaren geometrischen Oertern enthält in reicher Auswahl Nagel a. a. O. S. 211 — 265.)

Beispiele von Aufgaben, die durch Oerter gelös't werden. Ein Dreieck aus drei Seiten zu construiren. — Ein Dreieck aus einer Seite, dem Gegenwinkel und der zur Seite gehörigen Höhe zu zeichnen. — Ein Dreieck aus einer Seite, ihrem Gegenwinkel und der zu einer anderen Seite gehörigen Höhe zu zeichnen. — Ein Dreieck aus einem Winkel und den zu seinen einschließenden Seiten gehörigen Höhen zu zeichnen. — Ein Dreieck aus einem Winkel, Perpendikel und Transversale zur Gegenseite zu zeichnen. — Eine Linie so zu ziehen, daß die von zwei Punkten auf sie gefällten Perpendikel eine gegebene Länge haben. — In ein Dreieck ein Quadrat zu beschreiben. — In einer Ebene einen Punkt zu finden, von dem zwei Linien gleich groß erscheinen. — Innerhalb eines Dreiecks einen Punkt zu finden, von welchem aus die drei Seiten gleich groß erscheinen. — Einen Kreis zu zeichnen, der einen gegebenen Kreis halbirt und von einer Linie eine gegebene Sehne abschneidet. — Ein Dreieck zu zeichnen, wenn eine Seite und ihr Gegenwinkel und das Verhältniß der beiden anderen Seiten gegeben ist. — Ein Dreieck aus Seite, Gegenwinkel und Inhalt zu zeichnen. — In drei concentrische Kreise ein Dreieck zu zeichnen, das einem gegebenen Dreieck ähnlich ist und dessen Winkelspitzen auf den drei Kreisperipherien liegen.

Bemerkung. Eine ausführlichere Erörterung über die Oerter findet sich in den Anmerkungen zu G. Fischer's Lehrbuche der Mathematik von Otto Schulz, S. 173 flg., in Klügel's mathematischem Wörterbuche und in Dr. S. Unger's Sammlung geometrischer Aufgaben. — Die Schrift von Apollonius ist ins Deutsche übersetzt und 1796 in Leipzig erschienen unter dem Titel: „Apollonius von Pergen, Ebene Oerter, wiederhergestellt von R. Simson; aus dem Lateinischen übersetzt, mit Berechnungen, Bemerkungen und einer Sammlung geometrischer Aufgaben begleitet, von Joh. Wilh. Camerer."

Analysis durch Combination verschiedener Hülfsmittel.

§. 35.

Bei den meisten nicht ganz einfachen Aufgaben muß von mehren Hülfsmitteln der Analysis zugleich Gebrauch gemacht werden, um die Lösung zu finden, wie es bei der folgenden einfachen Aufgabe der Fall ist.

Aufgabe. Durch einen Punkt (p) innerhalb zweier concentrischen Kreise eine Linie zu ziehen, die in der Peripherie beider Kreise endet und durch den Punkt halbirt wird.

Analysis. Man denke sich, die Aufgabe sei gelös't, xy die gesuchte Linie, welche die Peripherien der beiden um o mit R und r beschriebenen concentrischen Kreise trifft und durch den Punkt p halbirt wird. Zieht man noch op, ox, oy, so sind diese drei Linien einfache Daten aus den Bedingungen der Aufgabe. Da sie aber das Dreieck oyx bilden helfen, zu dem zwei Seiten und die Transversale op aus ihrer Winkelspitze gegeben sind, so ist dadurch auch dies Dreieck, das aus $2op$ oder oo' als Diagonale, und ox und oy als Seiten gezeichnete Parallelogramm, und dadurch endlich der Punkt o' gegeben. Da nun $o'y = ox$ als Gegenseiten in einem Parallelogramm sein müssen, so hat man zwei Oerter für y, einmal den größeren Kreis, und dann den Kreis, der mit dem Radius des kleineren Kreises aus o' beschrieben ist. Da nun beide Oerter Kreislinien sind, so werden sie sich in der Regel, wenn überhaupt die Aufgabe möglich ist, in zwei Punkten schneiden und daher auch zwei verschiedene Linien gefunden werden.

Auflösung. Man ziehe Linie op, verlängere dieselbe über p, so daß $o'p = op$, beschreibe aus o' mit r einen Kreis, und aus den beiden Durchschnittspunkten (y, y') desselben mit dem größeren Kreise die Linie py oder py', bis sie die Peripherie des kleineren Kreises in x und x' treffen, so sind dies die verlangten Linien. —

Beweis und **Determination** ergeben sich leicht aus einfacher Betrachtung der Figur.

Bemerkung über Theilung und Verwandlung von Figuren. Die Aufgaben über Theilung und Verwandlung von Figuren sind gleichfalls Figuren-Constructionen, zu deren Darstellung außer anderen Stücken auch die Fläche gegeben ist; sie müssen sich also auch mit den angeführten Hülfsmitteln analysiren und lösen lassen, und besonders sind die geometrischen Oerter für sie anzuwenden. Bei den Theilungen kann man zwei verschiedene Wege einschlagen; man kann entweder erst ganz einfach theilen, und dann nach den anderen vorgeschriebenen Bedingungen verwandeln, oder umgekehrt. Im ersteren Falle wird man gebrochene Theilungslinien in gerade verwandeln, und im zweiten Falle außerhalb der Figur liegende Theile durch Anwendung der geometrischen Oerter in die Figur hineinbringen müssen.

Schulnachrichten.

Das verflossene Schuljahr brachte gleich bei seinem Beginne unserer Anstalt einen schon längere Zeit vorhergesehenen Verlust durch die Ernennung des bisherigen Religionslehrers, des Herrn Pastors Kelbe, zum Generalsuperintendenten der Diöcese Helmstedt, wohin ihn die dankbare Liebe seiner bisherigen Amtsgenossen und Schüler mit ihren besten Wünschen für eine segensreiche Wirksamkeit in dem neuen erweiterten Berufskreise begleitete. Die Hoffnung, die durch seinen Abgang entstandene Lücke binnen Kurzem wieder ausgefüllt zu sehen, bestätigte sich leider nicht, indem erst gegen die Mitte des Semesters durch Rescript des Herzoglichen Staatsministeriums vom 18. Juni die Uebertragung der erledigten Stelle an Herrn Pastor Steinmeyer hieselbst verfügt wurde. Bei der Nähe der großen Sommerferien wurde daher für angemessen erachtet, den neuen Lehrer erst nach Beendigung derselben in seine Functionen eintreten zu lassen, und es wurde Höchsten Orts die Einführung desselben in sein Amt als Religionslehrer am Obergymnasium auf den Tag der Wiedereröffnung der Schule nach den Ferien, den 30. Juli, angesetzt. Ehe aber dieselbe erfolgte, sollte unsere Anstalt im Verlauf der Ferien noch einen anderen Verlust erfahren, der sie um so schmerzlicher berühren mußte, je weniger sie denselben hatte ahnen können. Es war am 19ten Julius, als die Trauerbotschaft hier eintraf, daß der von allen seinen Amtsgenossen und Schülern auf das Innigste verehrte und geliebte Hauptlehrer der Unterprima, Dr. Bamberger, zu Carlsbad, wohin er am Schlusse der Schule zur Befestigung seiner schon seit längeren Jahren sehr wankenden Gesundheit gereis't war, uns durch einen plötzlichen Tod entrissen sei. Allem Anscheine nach hatte der Gebrauch dieses Bades im vorhergehenden Jahre auf das Vortheilhafteste auf seinen Gesundheitszustand gewirkt, so daß er namentlich während des darauf folgenden Wintersemesters sich einer ununterbrochenen Thätigkeit in seinem Berufe erfreuet hatte, und von der Wiederholung derselben Cur sich die wohlthätigsten Wirkungen erwarten ließen. Allein schon wenige Tage nach dem Anfange derselben war er auf ein Krankenlager geworfen, von dem er nicht wieder erstehen sollte. Nach kurzen, aber schmerzhaften Leiden endete am 17. Julius ein sanfter Tod das Leben des um unsere Anstalt, an welcher er über 20 Jahre auf das Segensreichste gewirkt hatte, hochverdienten Lehrers im 46sten Jahre seines Alters *).

Auf diese Weise knüpfte sich bei dem Wiederanfange der Schule nach den Sommerferien an die zu den frohesten Hoffnungen berechtigende Einführung des neuen Religionslehrers die schmerzliche Feier zum Andenken des Entschlafenen, der nicht bloß durch den Umfang und die Gründlichkeit seines gelehrten Wissens noch in weiteren Kreisen als in dem Kreise seiner Amtsgenossen und Schüler sich die allgemeinste Anerkennung erworben hatte, sondern vorzugsweise bei seinen Schülern wegen der Gediegenheit seines Unter-

---

*) Angestellt als Collaborator am Gymnasium zu Wolfenbüttel im Jahre 1831, wurde er 1833 an das hiesige Obergymnasium versetzt, wo er anfangs in verschiedenen Classen vorzugsweise in den alten Sprachen unterrichtete, seit 1844 aber, nach der Pensionirung des im J. 1846 verstorbenen Oberlehrers Dr. Ludwig Elster, auf diesen Unterricht in der Unterprima angewiesen war, daneben aber auch in Oberprima in den Alterthumswissenschaften unterrichtete und zugleich in den beiden obersten Classen den Unterricht im Hebräischen besorgte. Eine Sammlung seiner verschiedenen philologischen Aufsätze, welche theils in einigen Programmen des Obergymnasiums, theils in verschiedenen antiquarischen Zeitschriften, wie der Zeitschrift für Alterthumswissenschaft, dem rheinischen Museum und dem Philologus erschienen sind, beabsichtigte sein vieljähriger treuer Freund Schneidewin, der schon im Anfange dieses Jahrs durch einen von allen seinen Freunden und Verehrern schmerzlich beklagten eben so frühen Tod den Wissenschaften entrissen und mit dem Vorangegangenen wieder vereinigt ist, zugleich mit einem Nekrologe des Verstorbenen herauszugeben. Da er bereits die Vorbereitungen dazu getroffen hatte, so wird durch diesen Todesfall das Erscheinen nicht gehindert werden, und der Unterzeichnete hat es gern übernommen, was diesem Freunde seines verewigten Amtsgenossen und Freundes versagt war, die Erinnerungen aus dem Leben des Dahingeschiedenen dieser Sammlung hinzuzufügen, welche noch im Laufe des Jahres im Verlage der Teubnerschen Buchhandlung in Leipzig erscheinen wird.

richts und der in seinem ganzen Umgange mit ihnen ausgeprägten Humanität ein Gegenstand der allgemeinsten Liebe und Verehrung war.

Bei der Unmöglichkeit, für diesen schweren Verlust vor dem Ende des Semesters einen Ersatz zu schaffen, wurden die 14 Stunden, welche der Verstorbene in Unterprima gehabt hatte, einstweilen so gedeckt, daß der Director in 8 Stunden die beiden obersten Classen zur gemeinschaftlichen Lectüre griechischer und lateinischer Classiker combinirte *), und eine Stunde zu demselben Zwecke der zweiten Classe allein widmete, während in drei Stunden die lateinischen und griechischen Exercitia und die mit letzteren verbundenen grammatischen Uebungen von dem Herrn Oberlehrer Heller übernommen wurden, zwei Stunden Horaz, und nach Beendigung des für das Sommersemester bestimmten Pensums aus diesem Schriftsteller, der Virgil von Herrn Collaborator Sack. Die hebräischen Stunden sowie die in Oberprima angefangenen griechischen Staatsalterthümer mußten einstweilen ausfallen.

Zur Aushülfe namentlich in der dritten Classe war mit Rücksicht auf den Gesundheitszustand des Hauptlehrers derselben, des Herrn Dr. Skerl, während des Sommersemesters unserer Anstalt der Schulamtscandidat Herr Elster beigegeben, welcher um Michaelis, da seine Hülfe nunmehr entbehrt werden konnte, dieselbe wieder verließ.

Mit dem Anfange des Wintersemesters erfolgte durch Rescript des Herzogl. Staatsministeriums vom 12. October, welches aber erst unter dem 22. October von Seiten der Schulephorie mitgetheilt werden konnte, die Verfügung, daß die Functionen des verewigten Dr. Bamberger von dem bis dahin an dem Progymnasium fungirenden Oberlehrer Dr. Dürre übernommen werden sollten. Da indessen dieser nicht sofort dem Progymnasium entzogen werden konnte, weil die mit seinem Austritte aus der bisherigen Stellung am Progymnasium verbundenen Veränderungen an dieser Anstalt sich nicht sogleich durchführen ließen, so mußten wir im Anfange des Semesters einstweilen noch durch Combination der beiden ersten Classen in einigen Stunden und auf andere Weise helfen. Herr Dr. Dürre trat daher erst gegen Ende des Novembers in einen Theil der ihm in Classe II. zu überweisenden Stunden ein, in alle erst mit dem Anfange des neuen Jahres. Jedoch hatte er die hebräischen Stunden für diese Classe gleich nach Michaelis übernommen; für die erste übernahm sie späterhin der zum Ersatz an dem Progymnasium nach dem Abgange des Herrn Dr. Dürre berufene Schulamtscandidat Herr Spengler.

Außer diesen Veränderungen in dem Lehrerpersonale ist noch zu erwähnen, daß mit dem Anfange des Wintersemesters, in Folge Höchsten Rescripts vom 12. October, der Schulamtscandidat Herr Schönermark sein Probejahr in der Weise bei uns antrat, daß er zugleich zur Aushülfe in Krankheits- und andern Nothfällen bestimmt und ihm dafür eine angemessene Remuneration bewilligt wurde. Da sein Studium außer auf die classische Philologie, besonders auf die neueren Sprachen, namentlich das Französische und Englische gerichtet waren, und er zu diesem Endzwecke und zur Befestigung seiner Fertigkeit im Gebrauche derselben sich längere Zeit zuerst in Genf, darauf in Paris und zuletzt in England aufgehalten hatte, so wurden ihm zunächst die französischen und englischen Stunden in der ersten und zweiten, nebst den französischen in der vierten Classe übertragen. Hierdurch wurden die von diesen Stunden für jetzt dispensirten Lehrer um so leichter in den Stand gesetzt, diejenigen Stunden zu übernehmen, welche in Folge des bis Weihnachten verzögerten vollständigen Uebertritts des Herrn Dr. Dürre vom Progymnasium an das Obergymnasium in der zweiten Classe, und für Herrn Dr. Skerl in der dritten Classe noch zu vertreten waren. Herr Collaborator Sack aber, der seit mehreren Jahren und noch in dem letzten Sommersemester den Geschichtsunterricht in Cl. IV. besorgt hatte, konnte diesen Unterricht jetzt aufgeben, um seine Thätigkeit ausschließlich dem Progymnasium zu widmen, da es ebenfalls in Folge der Zuziehung des Herrn Schönermark möglich wurde, diesen Unterricht nebst dem Geschichtsunterrichte in Cl. III. in die Hände eines und desselben Lehrers, des Herrn Oberlehrers Koch, zu legen.

In Folge der im Vorhergehenden erwähnten verschiedenen Umstände konnte im Verlaufe des verflossenen Schuljahrs die seit mehreren Jahren bestehende Anordnung des lateinischen und griechischen Unterrichts, derzufolge derselbe sich in den einzelnen Classen ausschließlich in den Händen nur eines Lehrers befindet, nicht festgehalten werden, und es erlitt derselbe in dieser Beziehung namentlich in der zweiten und

---

*) Eine Combination beider Classen für einige dieser Stunden hatte schon einmal im Anfange des Sommersemesters, unter Leitung des Dr. Bamberger selbst, einige Wochen hindurch während der Dauer der Landesversammlung Statt finden müssen, durch welche der Director als Abgeordneter derselben außer Stand gesetzt war, alle seine Unterrichtsstunden zu ertheilen. Ueber die in diesen combinirten Classen absolvirten Lehrpensa wird im Nachfolgenden nähere Nachweisung gegeben werden.

dritten Classe, in welcher letzteren dieser Unterricht dem Hauptlehrer der Classe, Herrn Dr. Skerl, zukommt, mehrfache Veränderungen, während er in der ersten, mit Ausnahme weniger Wochen im Anfange des Schuljahrs, nur von dem Director, in der vierten nur von dem Herrn Oberlehrer Heller ertheilt wurde. Dabei blieben indessen die im Verlaufe des Jahrs planmäßig zu absolvirenden Lehrpensa, wenn auch andere Lehrer für einige Zeit eingreifen mußten, unverändert. Bei der nachfolgenden Angabe derselben schien es indessen überflüssig, auch die Namen der Lehrer hinzuzufügen, zwischen denen derselbe eine Zeit lang getheilt war oder abgewechselt hat.

Verzeichniß der gegenwärtigen Lehrer am Obergymnasium.

Professor Dr. Krüger, Director. Pastor Steinmeyer, Professor Dr. Aßmann, die Oberlehrer Dr. Skerl, Dr. Birnbaum, Giffhorn, Koch, Heller, Dr. Dürre, Candidat Schönermark, Candidat Spengler, nebst dem Gesanglehrer Chordirector Mühlbrecht.

Uebersicht der im verflossenen Schuljahre absolvirten Lehrpensa.

A. Religion.

Aus den im Vorhergehenden erwähnten Gründen mußte während des ersten Vierteljahrs dieser Unterricht eingestellt werden. Nach den Sommerferien wurde derselbe von Herrn Pastor Steinmeyer in der von seinem Vorgänger befolgten Weise fortgesetzt. — Classe IV. 2 St. Bibelkunde, mit Erläuterung der Hauptlehren des christlichen Glaubens. Bis Michaelis Einleitung in die biblischen Bücher des A. T., im W. S. die historischen Bücher desselben, nebst der Lehre von der Schöpfung und von der Sünde. — Classe III. 2 St. wie in Cl. IV. Zuerst Einleitung in die biblischen Bücher des N. T., darauf die vier Evangelien, nebst der Lehre von der Person Christi. — Classe II. 2 St. Geschichte der christlichen Religion und Kirche nach Palmers Lehrbuche. Von der Reformation bis auf die neueste Zeit. — Classe I. 2 St. Christliche Glaubenslehre nach Palmer, §. 126 — 205. Die Lehre von der Erlösung, von der Heiligung und von den letzten Dingen.

Einer Anordnung des Herzogl. Consistorii vom 15. Aug. 1855 zufolge wurde in den letzten Wochen des Sommersemesters in den einzelnen Classen unserer Anstalt darauf Bedacht genommen, die Schüler auf die am 25. September auch von Seiten der Schule zu begehende Feier des an diesem Tage vor 300 Jahren abgeschlossenen Augsburger Religionsfriedens durch die erforderlichen geschichtlichen Mittheilungen vorzubereiten. Dies geschah in den beiden unteren Classen von Herrn Pastor Steinmeyer, in den beiden oberen von Herrn Professor Aßmann. Die Feier selbst wurde an dem gedachten Tage in dem dazu uns eingeräumten Saale des Altstadt-Rathhauses von den versammelten Lehrern und Schülern des Ober-, Pro- und Realgymnasiums begangen; die Festrede hielt Herr Pastor Steinmeyer.

B. Sprachen.

1. Deutsch. Classe IV. 3 St. Aufsätze, Declamationsübungen; im S. S. Erklärung Schillerscher Gedichte, im W. S. des Wilhelm Tell. (Koch.) — Cl. III. 3 St. Uebung in deutschen Aufsätzen. (1 St. Skerl.) Declamation und Lectüre Schillerscher Dichtungen, im S. S. der Balladen, culturgeschichtlicher Gedichte u. s. w., im W. S. der Jungfrau von Orleans. (2 St. Aßmann.) — Classe II und I, combinirt. 2 St. Besprechung der eingelieferten Aufsätze und Uebung der Schüler in freien Vorträgen. Die Aufsätze enthielten insbesondere Resultate von Selbststudien der Schüler in der Geographie, der Litteratur- und allgemeinen Geschichte, auch Uebersetzungen von wichtigen Stellen aus Quellenschriften der alten Schriftsteller, Cäsar, Livius, Tacitus, und des Mittelalters, Jornandes, Einhards Annalen u. s. w. (Assmann.)

2. Lateinisch. Cl. IV. 10 St. — Davon 3 Stunden Exercitia, im S. S. nach Grotefends Materialien, 2. Curs., seit Michaelis nach Kühners Anleitung, Abth. II, Extemporalia nach Dictaten; Grammatik nach Krüger; das Wichtigste aus der Wortlehre, aus der Syntax die Einstimmungs- und Casuslehre bis §. 398. — 1 St. prosodische u. metrische Uebungen nach Friedemanns Anleitung, Abth. I. 6 St. Lectüre. S. S. Curtius IV, c. 1 — 9 incl. Ovid. Metam. IV, 1 — 166 und 389 — 788. W. S. Caesar B. G. V — VI, c. 25. Ovid. Metam. V. 1 — 235; 346 — 550. VI, 146 — 381. — Classe III. 9 St. — 3 St. Exercitia nach Süpfle's Aufgaben, Th. II, Abth. I. und Extemporalia zur Einübung grammatischer Regeln. 6 St. Lectüre. S. S. Cic. oratt. Catilinariae und Livius XXI. c. 52 — 59, XXII, 1 — 5. Virg. Aen., lib. II, nebst einigen elegischen Stücken aus Ovid in der Friedemannschen Chrestomathie. W. S. Sallustii Catilina und aus Livius XXI, c. 1 — 7 Virg. Aen. lib. III und elegische Stücke wie im Sommer. — Classe II. 8 St. Davon 2 St. Exercitia nach Süpfle's Aufgaben, Th. II, Abth. 2. und Extemporalia. 6 St. Lectüre. S. S. Ciceronis epistolae, nach der Auswahl von Süpfle, Nr. 1 — 40; Horat. Od. lib. II, ausgewählte Epoden und aus Virg. Aen. lib. VIII, v. 608 bis zu E. (der Schild des Aeneas). W. S. Livius XXII, c. 19. bis XXIII, c. 32, nebst Horat. Od., lib. III. — Classe I. 7 St. S. S. Cic. Tuscul., lib. I.; Horat. Sat. I, 7 — 9. II, 2, 5, 6. Epist. I, 1 — 3. Außerdem ausgewählte Briefe des Cicero während einer Combination mit Cl. II. W. S. Taciti Annal. lib. I; Horat. Epist. I, 4 — 15; II, 1 und 2. Exercitia nach Seyfferts Materialien für die oberste Bildungsstufe eine Woche um die andere mit griechischen abwechselnd; von Michaelis bis Weihnachten, während der Combination mit Cl. II, nach Süpfle's Aufgaben; daneben Uebung in freien Aufsätzen über Themata, welche sich meistens an die Lectüre anschlossen.

3. Griechisch. Classe IV. 6 St. 2 St. Grammatik nach Kühners Elementargrammatik und Exercitia nach Rost und Wüstemann, Th. I. Das Wichtigste aus der Formenlehre wurde wiederholt; die Verba auf μι und die anomalen Verba eingeübt. Aus der Syntax die Lehre vom Particip, der Attraction des Relativs und dem Gebrauche der Präpositionen. 4 St. Lectüre. Hom. Odyss. lib III u. IV. Xenoph. Anabas. lib. III, c. 4 bis lib. IV, c. 6 incl. — Classe III. 6 St. 2 St. Grammatik. Syntax nach Kühners Elementargrammatik, §. 145 — 167 incl. Exercitia nach Kühner, Rost und Wüstemann, Th. II, 4. Cursus. 4 St. Lectüre. Hom. Odyss. lib. XV — XX. Xenoph. Anabas. VII, I, II, bis c. 3. — Classe II. 6 St. 2 St. Grammatik, geknüpft an die Exercitia nach Rost und Wüstemann, Th. II, 4. Curs. 4 St. Lectüre. S. S. Platonis Apologia und Crito. Gemeinschaftlich mit Classe I. Hom. Iliad. XXIII und theilweise XXIV. Herodot. VII, 1 — 60 und 100 — 105. W. S. Hom. Iliad. I — IV. Ausgewählte Reden des Lysias n. d. Ausgabe von Rauchenstein: Nr. 12, 25, 16, 23. — Classe I. 6 St. Gelesen wurde Hom. Iliad. XXII — XXIV und I — IV.; ein Theil davon, sowie Herod. VII, 1 — 60, 100 — 105 gemeinschaftlich mit Classe II. Mit Classe I allein Sophoclis Oed. R. Plato's Phädon, c. 1 — 35, nebst c. 63 bis zu Ende, und Demosthenes erste philippische Rede. Exercitia nach Kühners Anleitung, Abth. III, eine Zeitlang gemeinschaftlich mit Cl. I. nach Rost und Wüstemann, Th. II, Curs. 4.

4. Französisch. Classe IV. 3 St. Lectüre aus der Chrestomathie von Schwob-Dollé, Th. I, p. 67 — 127. Grammatik nach Knebel; Repetition des Wichtigsten aus der Formenlehre, besonders der Pronomina und unregelmäßigen Verba. Aus der Syntax: Gebrauch des Artikels, der Casuszeichen, der Pronomina; das Wichtigste vom Infinitiv, den Participien, dem Gebrauche der Zeiten und des Conjunctivs. Extemporalia zur Einübung der Regeln, Exercitia aus Schultheß Uebungsstücken. (Im S. S. Heller. W. S. Schönermark.) — Classe III. 2 St. Lectüre aus Schwob-Dollé, Th. II, mit Auswahl; Grammatik nach Knebel. Syntax bis § 92 incl. Uebersetzung aus dem Deutschen ins Französische nach Schultheß, wie in Classe IV. (Koch.) — Classe II. 2 St. Gelesen wurde: Jouy quelques journées de l'hermite de la chaussée d'Antin bis zu Ende. Syntax nach Knebel, letzter Theil, von §. 93 bis zu Ende. Ins Französische wurde übersetzt aus Schultheß, theils mündlich, theils schriftlich. (S. S. Koch. W. S. Schönermark.) — Classe I. 2 St. Lectüre: Mignet histoire de la révolution française bis Cap. VI. incl. Uebersetzt ins Französische: Emilie Galotti. Extemporalia und Sprechübungen im Vortrage kleiner Erzählungen. (S. S. Koch. W. S. Schönermark.)

5. Englisch. Classe III. 2 St. (im S. S. 4 St.) Grammatik nach Fölsings Elementarbuch;

Formenlehre und Grundregeln der Syntax. Lectüre: Walter Scott's Tales of a grand-father, Cap. IX bis XX. (Koch.) — Classe II. 2 St. Lectüre aus Herrigs Handbuche, S. 249 — 304. Uebersetzen ins Englische aus Schultheß Uebungsstücken. Extemporalia über grammatische Regeln. (S. S. Koch. W. S. Schönermark.) — Classe I. 2 St. Lectüre S. S.: Byron's Mazeppa; the prisoner of Chillon; the siege of Corinth. W. S.: Julius Caesar von Shakspeare. Ins Englische übersetzt: Emilie Galotti, und Extemporalia. (S. S. Koch. W. S. Schönermark.)

6. Hebräisch. In Classe II und I. bis zu den Sommerferien bei Bamberger. Von Michaelis an in Classe II. bei Dürre 2 St. wöchentlich. Grammatik nach Gesenius, §. 1 — 17; §. 30 — 67 und §. 75. Gelesen aus Gesenius Handbuche Abschnitt 1 u. 2. In Cl. I. nach Weihnachten bei Spengler. Repetition der Formenlehre, verbunden mit Lectüre von Genes. c. 41 — 45.

C. Wissenschaften.

1. Geschichte. Classe IV. 2 St. Alte Geschichte. S. S. die alten Staaten in Asien und Afrika bis zu ihrer Unterwerfung durch die Römer. (Sack.) W. S. Geschichte Griechenlands bis zur Schlacht bei Chäronea. (Koch.) — Classe III. 2 St. Römische Geschichte bis zum Untergange des abendländischen Reichs. (Koch.) — Classe II. 3 St. S. S. Die letzten Zeiten des Mittelalters, zum Abschluß des $1\frac{1}{2}$jährigen Classencursus, mit stetem Rückblick auf die frühere Geschichte. W. S. Kurze Uebersicht über das Gesammtgebiet der Geschichte als Einleitung. Geschichte der Deutschen von 113 v. C. bis 918 n. C. In einer Stunde wurden hauptsächlich Uebungen in freien Vorträgen zur Repetition der Geschichte angestellt. — Classe I. 3 St. S. S. Nach kurzer Repetition der früheren Geschichte die neueste Zeit von 1789 bis 1815. W. S. Ebenfalls nach kurzer Repetition des Früheren, Geschichte der neueren Zeit von 1492 bis 1648. In den Lehrzimmern der beiden oberen Classen sind die Bilder des Prof. K. Hermann zur Darstellung der Geschichte des deutschen Volkes in historischer Folge aufgestellt; in Cl. II Geschichte des Mittelalters, in Cl. I neuere Geschichte. Auf die Betrachtung und weitere Benutzung derselben wurden die Schüler wiederholentlich hingewiesen, und insbesondere Einzelne zu genauerem Studium der nordischen und deutschen Mythologie nach Tafel I und II veranlaßt. In Cl. II. wurde am Schlusse des Semesters die Wiederholung des ganzen eingeübten Pensums an eine Uebersicht der einzelnen Felder auf Taf. I bis V geknüpft. (Assmann.)

2. Geographie. Classe IV und III. 2 St. S. S. Afrika und Australien. Einleitung in die mathematische Geographie. W. S. Asien und Amerika. In beiden Classen derselbe Cursus. (Giffhorn.) Classe II. 2 St. S. S. Allgemeine Geographie zur Einleitung. Uebersicht von Asien und Europa, mit Hervorhebung der für die geschichtliche Entwickelung wichtigen Momente. W. S. Allgemeine, besonders mathematische Geographie. Uebersicht über Australien, Afrika und Amerika. Der Unterricht in der Geographie wie in der Geschichte war in den oberen Classen mit beständiger Anleitung zum Selbststudium verknüpft. (Assmann.)

3. Mathematik. Classe IV. S. S. 3 St. Geometrie nach Fischer, Abschn. VI — X. incl. Die Lehre vom Kreise und den regulären Figuren. 1 St. Arithmetik. Repetition des früheren Cursus. W. S. 3 St. Arithmetik. Die Lehre von der Rechnung mit Brüchen, der Theilbarkeit der Zahlen, den Decimalbrüchen, den Verhältnissen und Proportionen. 1 St. Geometrie. Repetition des früheren Cursus. — Classe III. S. S. 3 St. Geometrie nach Fischer, Abschn. XI. bis zu Ende. Lehre von der Aehnlichkeit und Berechnung der Figuren. 1 St. Arithmetik. Repetition. W. S. 3 St. Arithmetik. Die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. 1 St. Geometrie. Repetition. — Classe II. 3 St. S. S. Geometrische Analysis als Repetition des gesammten geometrischen Lehrstoffes. W. S. Stereometrie n. Kauffmanns Lehrbuche. — Classe I. S. S. 3 St. Trigonometrie u. Arithmetik. Ebene Trigonometrie. Die Lehre von den Progressionen und Kettenbrüchen. 1 St. Repetition des gesammten mathematischen Lehrstoffes. W. S. 3 St. Algebra. Gleichungen vom 2ten Grade mit einer und mehreren Unbekannten. Unbestimmte Gleichungen vom ersten Grade; Gleichungen mit einer Unbekannten vom dritten Grade. 1 Stunde Repetition wie im S. S. — In der Arithmetik und Algebra wurde in sämmtlichen Classen die Aufgabensammlung von Heis benutzt. (Giffhorn.)

4. Physik. Im Verlaufe des Schuljahrs Classe II. 2 St. Uebersichtliche Einleitung in die Physik. Lehre vom Magnetismus und der Elektricität; Lehre vom Galvanismus. — Classe I. 2 St. Nach einer kurzen Wiederholung des Anfangs der Lehre von der Wärme aus dem vorigen Semester, Schluß derselben. Hierauf die Lehre von dem Lichte. (Birnbaum.)

5. Antiquitäten. Classe I. 2 St. Der durch den Tod des Dr. Bamberger unterbrochene Vortrag der griechischen Staatsalterthümer wurde nach Weihnachten von Dr. Dürre wieder angefangen. Die vorgeschichtliche Zeit und die Verfassung Sparta's.

Gesangunterricht. 2 St. Von größeren Sachen wurde im S. S. die oratorische Tondichtung Luther, von Fr. Rohr, Text von Ludwig Bechstein, unter Zuziehung der Schüler des Pro- und Realgymnasiums, eingeübt und aufgeführt. Hauptsächlich aber wurde die zu Hannover 1855 in der Hahnschen Hofbuchhandlung erschienene dritte Abtheilung des „Neuen Liederhains" zu den Singübungen benutzt, außerdem aber auch verschiedene Chöre zugleich mit den Pro- und Realgymnasiasten eingeübt.

Zeichenunterricht erhielten diejenigen Schüler, welche denselben wünschten, in dem Zeichensaale des Collegium Carolinum bei Herrn Professor Brandes.

Frequenz der Schule im verflossenen Schuljahre.

	Cl. IV.	III.	II.	I.	Im Ganzen:	Darunter Auswärtige:
Johannis 1855	29	17	13	6	65	16
Michaelis —	30	15	12	6	63	17
Weihnachten—	32	21	15	8	76	17
Ostern 1856	28	24	12	8	72	17

Verzeichniß der seit Ostern 1855 abgegangenen und diese Ostern abgehenden Schüler.

Ostern 1855, außer den im vorjährigen Programme aufgeführten Schülern: Franz Hasenkamp, aus Braunschweig, 1/2 Jahr in Cl. III, wird Sattler. — Philipp Reden, aus Dreileben, 1 Jahr in Cl. IV, auf das Collegium Carolinum. — Albert von Schleinitz, aus Braunschweig, 1 Jahr in Cl. II, desgleichen.

Johannis 1855. Carl von Cramm, aus Lesse, 3/4 Jahr in Cl. III. — Max Eyserbeck, aus Braunschweig, 3/4 Jahr in Cl. III, beide zum Militär. — Julius Schröder, aus Braunschweig, 3/4 Jahr in Cl. III, zur Apothekerkunst.

Michaelis 1855 gingen auf die Universität nach bestandener Maturitätsprüfung aus Cl. I: Adolf Steinmeyer, aus Braunschweig, 2 Jahr in Cl. I, nach Jena, zum Studium der Theologie und Philologie. — August Koch, aus Braunschweig, 1 1/2 Jahr in Cl. I, zum Studium der Theologie, nach Göttingen. — Gustav Krüger, aus Braunschweig, 1 1/2 Jahr in Cl. I, zum Studium der Philologie, nach Göttingen. — Edmund Knittel, geb. zu Gandersheim, 1 1/2 Jahr in Cl. I, zum Studium der Philologie, nach Jena.

Außerdem gingen ab: Rudolf Ramdohr, aus Braunschweig, 1 1/2 Jahr in Cl. III, zur Buchhandlung. — Gustav Pini, aus Braunschweig, 1 Jahr in Cl. III, zur Maschinenkunde. — Fritz Schwabe, aus Duttenstedt, 1 Jahr in Cl. III, zum Forstwesen. — Carl Saul, aus Braunschweig, 1 Jahr in Cl. IV, zur Oekonomie. — Adolf Klenke, aus Braunschweig, 1 Jahr in Cl. IV, auf das Gymnasium zu Hannover. — Adolf Hertz, aus Braunschweig, 1/2 J. in Cl. IV, auf das Realgymnasium. — Hugo Schnevoigt, geb. zu Braunschweig, 1 Jahr in Cl. IV.

Weihnachten 1855. Wilhelm Gerhard, geb. zu Gandersheim, 3/4 Jahr in Cl. IV, zur Droguerie-Handlung. — Adolf Henkel, aus Braunschweig, 1 1/4 Jahr in Cl. II, zum Postwesen. — Theodor Hartig, geb. zu Berlin, 1 1/4 Jahr in Cl. IV, zum Militär. —

Ostern 1856 gehen auf die Universität nach bestandener Maturitätsprüfung aus Cl. I: Fritz Broistedt, aus Braunschweig, 1 1/2 Jahr in Cl. I, Heinrich Schrader, aus Braunschweig, 1 1/2 Jahr in Cl. I, beide zum Studium der Theologie nach Göttingen.

Außerdem gehen ab: Friedrich Feustell, geb. zu Arolsen, 1 Jahr in Cl. III, zur Apothekerkunst. — Albrecht Meier, aus Braunschweig, 1 Jahr in Cl. III, zum Hüttenwesen. — Albert Lieff, aus Braunschweig, 1 Jahr in Cl. III, zum Militair. — Wilhelm von Münchhausen, aus Braunschweig, 1 Jahr in Cl. IV, zum Militär. — Johannes Meyne, aus Braunschweig, 1 Jahr in Cl. IV, zur Saamenhandlung.

Durch den Tod verlor die Anstalt am 24sten August v. J. einen fleißigen und hoffnungsvollen Schüler Hans Ribbentrop, welcher nach längeren Leiden an einem Herzübel starb.

Zuwachs der Schulbibliothek seit Ostern 1855.

Foß, Geschichte des deutschen Volks, Erläuterung zu K. Hermanns funfzehn großen Bildern unter gleichem Titel. Gotha 1854. 8.
ſſmann, kleine Weltgeschichte od. Geschichtskatechismus in Gedächtnißversen. Braunschweig 1855. (Geschenk des Verf.)
Mühlbrecht, theoretisch-praktische Gesangschule. Hannover, 1855. 8. (Geschenk des Verf.)
J. Grimm, deutsches Wörterbuch. Bd. II. 3te Lief.
Giesebrecht, Geschichte der deutschen Kaiserzeit. Bd. I. Abth. 2. Braunschweig, 1855. 8.
Heeren und Ukert, Geschichte d. europäischen Staaten. 29ste Lief. Pauli, Geschichte von England. Th. IV. Carlson, Geschichte Schwedens. Th. IV. 30ste Lief. Zinkeisen, Geschichte des osmanischen Reichs in Europa. Thl. III.
Das Nibelungenlied, übersetzt von Simrock. 9te Aufl. Stuttg. und Tübingen. 1854. 8.
Gudrun, übersetzt von Simrock, 2te Aufl. Stuttgart und Tübingen 1851. 8.
Götzinger, deutsches Lesebuch für Gymnasien und Realschulen. 2ter Theil. Schaffhausen 1854. 8.
Desselben Stylschule, zu Uebungen in der Muttersprache. 2 Thle. Schaffhausen 1854 u. 55. 8.
Schlosser, Weltgeschichte. 30ste, 33ste und 34ste Lief.
Koberstein, Grundriß der Geschichte der deutschen Nationallitteratur, 4te Aufl. Abth. II. Bog. 104—115.
Thiele, kurze Geschichte der christlichen Kirche. 2te Aufl. Zürich 1852. 8. (Geschenk des Verf.)
Kutzen, das deutsche Land. Skizzen und Bilder. Breslau 1855. 8.
Thesaurus Graecae linguae. Vol. VIII. Fasc. 3.
Schömann, griechische Alterthümer, Berlin 1855. Bd I. 8.
Aſſmann, Handbuch der allgemeinen Geschichte. Th. IV. Braunschweig 1855. 8. (Geschenk des Verf.)

Ordnung der Prüfung.

Morgens von 9 — 12 Uhr.
Classe IV und III.

Chorgesang.
Eröffnungsrede des Directors.
Cl. IV. Religion. Steinmeyer.
Ovid. Heller.
Französisch. Schönermark.
Declamation: Arion von Schlegel, vorgetragen von dem Untersecundaner Westermann aus Braunschweig.
Cl. III. Xenophon. Skerl.
Sallust. Koch.
Mathematik. Giffhorn.
Declamation: Aus Herders Cid Nr. 63 — 67, vorgetragen von dem Obersecundaner von Minnigerode aus Braunschweig.

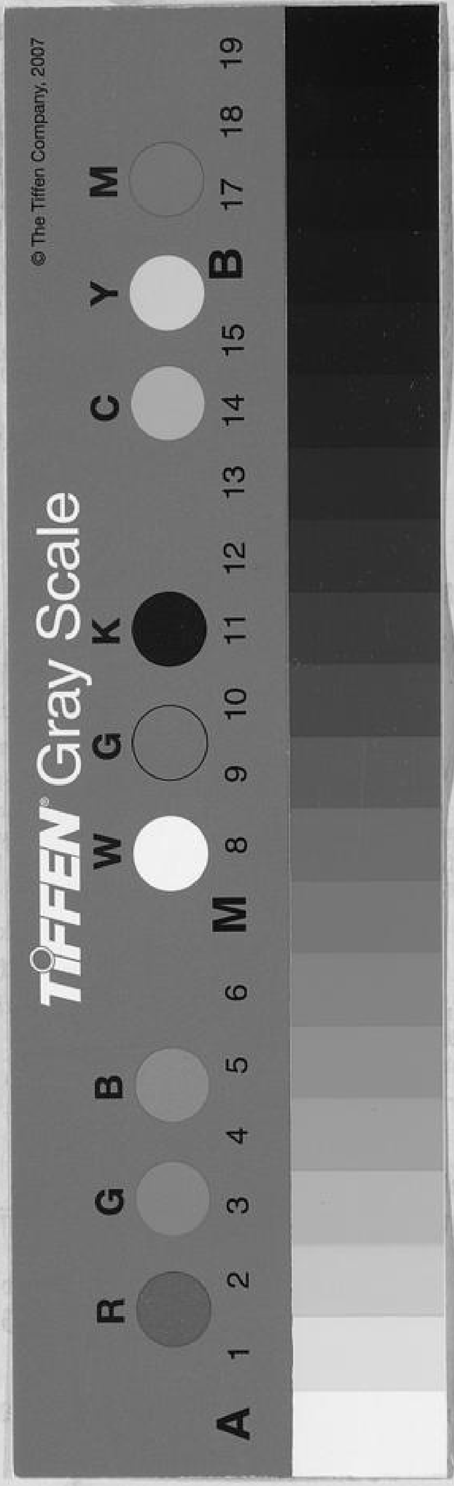
Nachmittags von 2 — 5 Uhr.
Classe II und I.

Cl. II und I. Homer. Krüger.
Cl. II. Horaz. Dürre.
Declamation: Rede des Antonius bei Cäsars Leiche, aus Shakspeare's Julius Cäsar nach Schlegels Uebersetzung, vorgetragen von dem Unterprimaner Adolph Buß aus Braunschweig.
Cl. I. Tacitus. Krüger.
Cl. II und I. Geschichte. Aſſmann.
Cl. II und I. Englisch. Schönermark.
Entlassung der Abiturienten durch den Director.
Chorgesang.

Zu dieser Prüfung ladet die hohen Vorgesetzten unserer Schule, die Väter und Pfleger der ihr anvertraueten Jugend und alle Freunde des öffentlichen Unterrichts ehrerbietigst ein

der Director des Obergymnasiums
Professor Dr. G. T. A. Krüger.

Wiederanfang der Schule nach den Osterferien, Donnerstag den 3. April Morgens 8 Uhr.


TIFFEN Gray Scale
© The Tiffen Company, 2007