QUATRIÈME SECTION,

Dans laquelle on traite plus particulièrement de quelques objets dont il a été question dans les sections précédentes.

290. Tout ce qui précède a fait connoître suffisamment l'usage de l'Astronomie & de la Trigonométrie sphérique dans la Navigation. Il en est encore d'autres usages que nous nous proposons de faire connoître dans cette section. Mais comme les données que l'on emploie dans la résolution des questions dépendantes de la Trigonométrie sphérique, sont le résultat d'observations plus ou moins susceptibles d'erreur; il ne peut être que très-utile d'exposer ici la manière de déterminer l'effet que ces erreurs peuvent produire sur les parties des triangles sphériques que l'on veut connoître d'après ces données. Cet examen peut guider dans le choix entre plusieurs méthodes qui tendent à un même but par différens moyens. Il peut faire connoître les circonstances les plus favorables ou les plus contraires à certaines observations. Nous en avons déja vu des exemples (257). Il peut servir à ramener à un même instant, des observations faites à des intervalles de temps peu éloignés; nous en avons vu un exemple (279).

Des rapports qu'ont entre elles les variations très-petites des Triangles sphériques dont on suppose deux parties constantes.

291. Si l'on conçoit que le triangle sphérique ZPS (*fig.* 55) devienne le triangle zPs, très-peu différent du premier; la différence de chaque partie à sa correspondante, de PZ à Pz par exemple, ou de l'angle PZS, à l'angle Pzs, sera ce que nous appelons *la variation* de cette partie, & nous la représenterons par cette partie même précédée de la lettre d.

Ainſi pour marquer la variation du côté PZ nous écrirons dPZ ; celle de l'angle PZS ſera repréſentée par $dPZS$.

Pour diſtinguer les variations des côtés ou angles qui croiſſent, d'avec celles des parties qui décroiſſent, nous donnerons aux variations de ces dernières, le ſigne —, & le ſigne + aux premières. Et lorſque celles-ci n'auront aucun ſigne, elles ſeront toujours cenſées avoir le ſigne +.

292. Nous ſuppoſerons que les arcs, ou angles, que nous allons conſidérer, ſont tous plus petits que 90°. Les rapports que nous trouverons entre les variations n'auront pas moins lieu quand les parties des triangles ſeront de plus de 90° ; mais pour connoître le ſigne qui convient alors aux variations, il faudra donner le ſigne — à tous les coſinus, tangentes, & contangentes des arcs au-deſſus de 90°, ſi elles ont le ſigne +, ou le ſigne + ſi elles ont le ſigne —, & obſerver cette règle générale, que dans la multiplication de deux quantités, le produit a toujours le ſigne + lorſque ces deux quantités ont le même ſigne ; & il a le ſigne —, quand ces quantités ont différens ſignes. Il en eſt de même du quotient, dans la diviſion.

293. Les variations que nous ſuppoſerons dans les parties des triangles ſphériques ſeront telles que l'on puiſſe ſans erreur ſenſible ou comparable au rayon, ſuppoſer que leur ſinus ne diffère pas de l'arc même qui meſure ces variations, & que leur coſinus peut être pris pour le rayon même. Si la variation eſt d'un degré, ou moindre, l'erreur que l'on commet en prenant le rayon pour la valeur du coſinus, eſt tout au plus de la moitié du quarré du ſinus. Or le ſinus de 1°, le rayon étant 1, eſt 0,0175241 ; l'erreur ne va donc pas à plus de 0,00015 ; c'eſt-à-dire, à $\frac{15}{100000}$ partie du rayon. L'erreur que l'on fait en prenant l'arc pour le ſinus eſt encore beaucoup plus petite. Et ces erreurs diminuent ; la première, comme le quarré de l'arc ; & la ſeconde, comme le cube.

294. *Si un arc quelconque* AB (fig. 56) *augmente d'une quantité très-petite* Bb, *ſon ſinus augmente d'une quantité qui eſt par rapport à l'augmentation de l'arc, comme le coſinus de cet arc eſt au rayon. Et ſon coſinus diminue d'une quantité qui eſt à l'augmentation de l'arc, comme le ſinus de cet arc eſt au rayon* ; c'eſt-à-dire, que $d\ ſin.\ AB : dAB :: coſ.\ AB : R$; & $-\ d\ coſ.\ AB : dAB :: ſin.\ AB : R$.

Car l'arc Bb étant supposé très-petit peut être considéré comme une ligne droite ; & si on mène Bm parallèle à AC le triangle Bbm sera semblable à BNC, & l'on aura par conséquent $bm : Bb :: CN : CB$, & $Bm : Bb :: BN : CB$. Or bm est l'augmentation du sinus, & Bm la diminution du cosinus lorsque l'arc AB devient Ab ; donc $d\,sin.\,Ab : dAB :: cos.\,AB : R$, & $-\,d\,cos.\,AB : dAB :: sin.\,AB : R$.

295. Nous supposerons d'abord qu'il y ait deux parties (angles ou côtés) qui restent les mêmes, & nous chercherons quelles variations subissent les trois des quatre autres, par la variation de la quatrième. Nous verrons ensuite comment on en conclut la variation totale que subit chaque partie par la variation du tout.

296. Question première. *L'angle* BAC *& le côté opposé* BC (fig. 57) *demeurant les mêmes ; on demande*, 1°. *Le rapport de la variation d'un des côtés de l'angle constant, à la variation de l'angle qui lui est opposé.* 2°. *Le rapport des variations des côtés qui comprennent l'angle constant.* 3°. *Le rapport de la variation d'un côté* AB *de l'angle constant, à celle de l'angle* B *adjacent à ce côté.* 4°. *Le rapport des variations des deux angles adjacens au côté constant.*

1°. Puisque (*Géom.* 349) on a $sin.\,ACB : sin.\,AB :: sin.\,BAC : sin.\,BC$, on aura aussi $d\,sin.\,ACB : d\,sin.\,AB :: sin.\,BAC : sin.\,BC$; puisque le rapport de $sin.\,BAC$ à $sin.\,BC$ reste le même. Or (294) $d\,sin.\,ACB = \frac{dACB \times cos.\,ACB}{R}$,

& $d\,sin.\,AB = \frac{dAB \times cos.\,AB}{R}$, donc $\frac{dACB \times cos.\,ACB}{R} : \frac{dAB \times cos.\,AB}{R} :: sin.\,BAC : sin.\,BC$, ou (en multipliant les deux termes du dernier rapport, par $cos.\,ACB \times cos.\,AB$, & divisant les antécédens par $cos.\,ACB$, & les conséquens par $cos.\,AB$), on aura $dACB : dAB :: sin.\,BAC \times cos.\,AB : sin.\,BC \times cos.\,ACB$.

Mais puisque (*Géom.* 349) $sin.\,BAC : sin.\,BC :: sin.\,ACB : sin.\,AB$, & (*Géom.* 278) $cos.\,AB : sin.\,AB :: R : tang.\,AB$, & $sin.\,ACB : cos.\,ACB :: tang.\,ACB : R$; on aura, en multipliant & réduisant, $sin.\,BAC \times cos.\,AB : sin.\,BC \times cos.\,ACB :: tang.\,ACB : tang.\,AB$; donc aussi $dACB : dAB :: tang.\,ACB : tang.\,AB$.

On démontrera, de même que $dABC : dAC :: sin.\,BAC \times$

cos. AC : *sin. BC* × *cos. ABC* ou : : *tang. ABC* : *tang. AC*.

2°. Soit *Bb* l'augmentation de *AB* ; pour que *BC* ne change pas de valeur en devenant *bc*, il faut que le côté *AC* diminue. Convenons que des points *B* & *C*, on ait abaissé les perpendiculaires *Bn*, *Cm* ; on pourra les considérer comme de petits arcs décrits du point *O*; alors *mn* sera égal à *BC*, & par conséquent à *bc*; on aura donc $bn = cm$. Mais le triangle *Bnb*, censé rectiligne & rectangle en *n*, donne (*Géom.* 295) *Bb* : *bn* : : *R* : *cos. Bbn* ou : : *R* : *cos. ABC* qui en diffère infiniment peu. Pareillement le triangle *Cmc* donne (*Géom.* 295) *cm* ou *bn* : *Cc* : : *cos. mcC*, ou *cos. Acb*, ou *cos. ACB* : *R* ; multipliant ces deux proportions, on aura *Bb* : *Cc* : : *cos. ACB* : *cos. ABC*; c'est-à-dire, *dAB* : —*dAC* : : *cos. ACB* : *cos. ABC*.

3°. Puisque *dAB* : —*dAC* : : *cos. ACB* : *cos. ABC* ; & que précédemment on a trouvé *dAC* : *dABC* : : *sin. BC* × *cos. ABC* : *sin. BAC* × *cos. AC*; si on multiplie ces deux proportions, on aura *dAB* : —*dABC* : : *sin. BC* × *cos. ACB* : *sin. BAC* × *cos. AC*.

On trouvera de même, —*dAC* : *dACB* : : *sin. BC* × *cos. ABC* : *sin. BAC* × *cos. AB*.

4°. Puisqu'on a trouvé ci-dessus *dACB* : *dAB* : : *sin. BAC* × *cos. AB* : *sin. BC* × *cos. ACB* ; & qu'on vient de trouver *dAB* : —*dABC* : : *sin. BC* × *cos. ACB* : *sin. BAC* × *cos. AC* ; multipliant ces deux proportions & réduisant, on aura *dACB* : —*dABC* : : *cos. AB* : *cos. AC*.

Remarque sur la manière de faire usage de ces Rapports.

297. Les variations dont nous donnons ici les rapports, sont exprimées par les longueurs mêmes des arcs ; mais comme ces arcs sont tous d'un même rayon, ils sont proportionnels à leurs parties de degrés. Ainsi, dans l'usage, on peut mettre tout de suite les nombres de minutes & secondes de ces arcs, au lieu de ces mêmes arcs.

A l'égard des sinus, tangentes, &c. qui entrent dans les seconds rapports de ces analogies, on suppose qu'ils sont connus, puisque le triangle dont on veut calculer les variations est supposé connu. Si cependant les données de ce triangle n'étoient pas les parties mêmes qui entrent dans ces rapports, on les calculeroit par les règles ordinaires de la Trigonométrie sphérique.

298. Question II^e. *Supposons que dans le triangle sphérique* ACB (fig. 58) *le côté* AB *& l'angle adjacent* A *soient constans; on demande*, 1° *le rapport de la variation de* AC, *à celle de* BC; 2°. *le rapport de la variation de* AC, *à celle de l'angle* ABC; 3°. *le rapport de la variation de* BC, *à celle de l'angle* ABC; 4°. *le rapport de la variation de* AC, *à celle de l'angle* ACB; 5°. *le rapport de la variation de* BC, *à celle de l'angle* ACB; 6°. *le rapport de la variation de* ABC, *à celle de* ACB.

Soit Cc la variation de AC. Imaginons que du point B comme pôle, on ait décrit l'arc Cm qui rencontre Bc en m; cm sera la variation de BC; & CBc sera la variation de ABC, mesurée par RS, en imaginant que BC & Bc sont prolongés jusqu'à 90° en R & S.

Or, 1°. Le triangle Ccm, censé rectiligne, donne (*Géom.* 295) $Cc : cm :: R : cos.\ Ccm :: R : cos.\ ACB$; donc $dAC : dBC :: R : cos.\ ACB$.

2°. Le même triangle donne (*Géom.* 295) $Cc : Cm :: R : sin.\ Ccm$ ou $sin.\ ACB$; mais (*Geom.* 329) on a $Cm : RS :: sin.\ BC : R$: donc en multipliant, on a $Cc : RS :: sin.\ BC : sin.\ ACB$; c'est-à-dire, $dAC : dABC :: sin.\ BC : sin.\ ACB$.

3°. Le même triangle Ccm donne (*Géom.* 296) $cm : Cm :: R : tang.\ Ccm$ ou $tang.\ ACB$; mais (*Géom.* 329) $Cm : RS :: sin.\ BC : R$; donc $cm : RS :: sin.\ BC : tang.\ ACB$; c'est-à-dire, $dBC : dABC :: sin.\ BC : tang.\ ACB$.

4°. Si on imagine (*Géom.* 336) le triangle supplémentaire $A'B'C'$ (*fig.* 59); la variation de chaque côté ou de chaque angle de celui-ci sera égale à la variation de l'angle ou du côté qui lui sera opposé dans le triangle ABC, puisque chaque partie de l'un est supplément de la partie qui lui est opposée dans l'autre; & le côté AB & l'angle A étant constans, l'angle A' & le côté $A'B'$, seront aussi constans. La question de trouver le rapport de la variation de AC, à celle de l'angle ACB, sera donc réduite à trouver le rapport de la variation de l'angle B' adjacent au côté constant, à celle du côté $B'C'$ opposé à l'angle constant. Or, par le 3^e. cas de la question présente, on a $dA'B'C' : dB'C' :: tang.\ A'C'B' : sin.\ B'C'$ ou (292) $dA'B'C' : dB'C' :: -tang.\ A'C'B' : sin.\ B'C'$; mettant donc dAC, au lieu de $dA'B'C'$,

$dACB$, au lieu de $dB'C'$, *tang.* BC, au lieu de *tang.* $A'C'B'$; *ſin.* ACB, au lieu de *ſin.* $B'C'$, & tranſportant le ſigne — au ſecond terme, ce qui ne change point la proportion, on a $dAC : -dACB$: *tang.* BC : *ſin.* ACB.

5°. Puiſqu'on a $dAC : -dACB$: : *tang.* BC : *ſin.* ACB; & que par le 1er. cas, on a $dBC : dAC$: : *coſ.* $ACB : R$; en multipliant, on aura dBC : $-dACB$: : *tang.* $BC \times$ *coſ.* $ACB : R \times$ *ſin.* ACB. Mais (*Géom.* 278) *coſ.* ACB : *ſin.* ACB : : R : *tang.* ACB; multipliant & ſimplifiant, on aura dBC : $-dACB$: : *tang.* BC : *tang.* ACB.

6°. Puiſqu'on a $dBC : -dACB$: : *tang.* BC : *tang.* ACB; & que par le 3e. cas, on a $dABC : dBC$: : *tang.* ACB : *ſin.* BC; en multipliant, on aura $dABC : -dACB$: : *tang.* BC : *ſin.* BC; ou (puiſque (*Géom.* 278) on a *tang.* BC : *ſin.* BC : : R : *coſ.* BC) on aura $dABC : -dACB$: : R : *coſ.* BC.

299. Queſtion IIIe. *Suppoſons que les deux côtés* AB *&* AC *du triangle ſphérique* ABC *(* fig. 60 *) ſoient conſtans; on demande*, 1°. *le rapport des variations des deux angles adjacens à l'un des côtés conſtans;* 2°. *le rapport des variations des deux angles adjacens au troiſième côté;* 3°. *le rapport de la variation du troiſième côté, à celle de l'angle qui lui eſt oppoſé;* 4°. *le rapport de la variation du troiſième côté, à celle de chacun des deux angles adjacens.*

1°. Suppoſons que le triangle ABC devienne AnC, AB étant égal à An; ſi des points A & C comme pôles, on conçoit décrits les arcs Bn, Bm, & qu'on imagine les arcs AB & An, CB & Cn prolongés juſqu'à 90°, en R & S, T & V; on aura RS & TV pour les meſures des variations des angles BAC & ACB dont le premier augmentant, le ſecond diminue. Or (*Géom.* 329) $TV : Bm$: : R : *ſin.* BC; mais le triangle Bmn cenſé rectiligne & rectangle en m, donne $Bm : Bn$: : *coſ.* $mBn : R$ ou : : *coſ.* $ABC : R$; parce que ſi de chacun des deux angles droits ABn, CBm, on retranche le même angle ABm, les angles reſtans mBn & ABC ſeront égaux. Concluant de ces deux proportions on aura $TV : Bn$: : *coſ.* ABC : *ſin.* BC; mais (*Géom.* 329) $Bn : RS$: : *ſin.* $AB : R$; donc $TV : RS$: : *coſ.* $ABC \times$ *ſin.* $AB : R \times$ *ſin.* BC; c'eſt-à-dire, $-dACB : dBAC$: : *coſ.* $ABC \times$ *ſin.* $AB : R \times$ *ſin.* BC.

On démontrera, de même, que $-dABC : dBAC$: : *coſ.* $ACB \times$ *ſin.* $AC : R \times$ *ſin.* BC.

2°. Si dans cette dernière proportion, on met les antécédens à la place des conséquens, & qu'on multiplie ensuite, par la précédente, on aura $-dACB : -dABC$ ou $dACB : dABC :: cos.\ ABC \times sin.\ AB : cos.\ ACB \times sin.\ AC$.

Mais puisque (*Géom.* 349) $sin.\ AB : sin.\ AC :: sin.\ ACB : sin.\ ABC$, que d'ailleurs $sin.\ ACB : cos.\ ACB :: tang.\ ACB : R$, & $cos.\ ABC : sin.\ ABC :: R : tang.\ ABC$; multipliant ces trois proportions, & simplifiant, on aura $cos.\ ABC \times sin.\ AB : cos.\ ACB \times sin.\ AC :: tang.\ ACB : tang.\ ABC$; donc aussi $dACB : dABC :: tang.\ ACB : tang.\ ABC$.

3°. On a $RS : Bn :: R : sin.\ AB$; mais le triangle Bmn donne $Bn : mn :: R : sin.\ mBn$ ou $sin.\ ABC$; donc $RS : mn :: R^2 : sin.\ ABC \times sin.\ AB$; c'est-à-dire, $dBAC : dBC :: R^2 : sin.\ ABC \times sin.\ AB$.

Et puisque (*Géom.* 349) $sin.\ AB : sin.\ ACB :: sin.\ AC : sin.\ ABC$; ce qui donne $sin.\ AB \times sin.\ ABC = sin.\ AC \times sin.\ ACB$, on aura également $dBAC : dBC :: R^2 : sin.\ ACB \times sin.\ AC$.

4°. On a $mn : Bm :: tang.\ mBn$ ou $tang.\ ABC : R$ (*Géom.* 296); mais (*Géom.* 329) $Bm : TV :: sin.\ BC : R$; donc $mn : TV :: sin.\ BC \times tang.\ ABC : R^2$, c'est-à-dire, $dBC : -dACB :: sin.\ BC \times tang.\ ABC : R^2$.

On démontrera de même, que $dBC : -dABC :: sin.\ BC \times tang.\ ACB : R^2$.

300. Question IV^e^. *Supposons que les deux angles* A & B *du triangle* ABC (fig. 59) *soient constans; on demande*, 1°. *le rapport des variations des deux côtés qui comprennent l'un des deux angles constans*; 2°. *le rapport des variations des deux côtés opposés aux angles constans*; 3°. *le rapport de la variation du troisième angle, à celle du côté qui lui est opposé*; 4°. *le rapport de la variation du troisième angle, à celle de chacun des deux côtés qui le comprennent.*

Si on imagine le triangle supplémentaire $A'C'B'$; on aura dans celui-ci deux côtés constans; & les variations de ses autres parties seront les variations de celles qui leur sont opposées dans le triangle ABC. Ainsi d'après la question III^e^. on trouvera facilement les analogies suivantes.

1°. $dBC : dAB :: cos.\ AC \times sin.\ BAC : R \times sin.\ ACB$
& $dAC : dAB :: cos.\ BC \times sin.\ ABC : R \times sin.\ ACB$
2°. $dBC : dAC :: cos.\ AC \times sin.\ BAC ; cos.\ BC \times sin.\ ABC$
ou $dBC : dAC :: tang.\ BC : tang.\ AC$

3°. $dACB : dAB :: \text{ſin. } AC \times \text{ſin. } BAC : R^2$
ou $dACB : dAB :: \text{ſin. } BC \times \text{ſin. } ABC : R^2$
4°. $dACB : dBC :: \text{ſin. } ACB \times \text{tang. } AC : R^2$
& $dACB : dAC :: \text{ſin. } ACB \times \text{tang. } BC : R^2$

De la variation totale que ſubit l'une quelconque des parties d'un triangle ſphérique, lorſqu'on ne ſuppoſe rien de conſtant dans ce triangle.

301. Puiſqu'un triangle ſphérique eſt déterminé lorſqu'on connoît trois quelconques de ſes parties ; il eſt clair que les variations très-petites de trois des parties d'un triangle ſphérique connu, déterminent les variations des autres ; & que par conſéquent on ne peut pas prendre à volonté les variations de plus de trois de ces parties.

Connoiſſant donc les variations de trois parties d'un triangle ſphérique, voici comment on déterminera la variation totale que doit ſubir l'une quelconque des trois autres.

302. Suppoſez ſucceſſivement conſtantes, deux à deux, les trois parties dont vous connoiſſez les variations. Avec la variation de la troiſième, calculez par les analogies données dans les queſtions précédentes, la variation partielle que doit avoir dans cette ſuppoſition, la partie dont vous cherchez la variation totale. Vous trouverez ainſi, trois variations partielles ; ſi elles ont le même ſigne, leur ſomme précédée de ce ſigne, ſera la variation totale demandée. Si l'une a un ſigne différent des deux autres, prenez la différence entre celle-là, & la ſomme de ces deux-ci, & donnez à cette différence le ſigne commun à ces deux-ci, ou celui de la troiſième, ſelon que cette ſomme ſera plus grande ou plus petite que la troiſième.

En effet, la variation totale, réſultant des variations de pluſieurs quantités, doit être telle que ſi on ſuppoſe toutes ces variations nulles, à l'exception de l'une quelconque, elle ſe réduiſe à cette dernière ; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant qu'elle ſera compoſée de la ſomme de toutes ces variations priſes avec leurs propres ſignes.

Applications des Règles précédentes, à divers objets, & particulièrement à quelques Méthodes qu'on pourroit être tenté d'employer pour trouver la Latitude.

303. I. *Trouver combien une petite variation dans la déclinaison, produit de variation dans le lever ou le coucher d'un astre*:

Soit AC (*fig.* 60) la distance du pôle au zénith; C le pôle; A le zénith; BC la distance de l'astre au pôle; AB, de 90° s'il s'agit du lever ou du coucher réel. Il est donc question de trouver le rapport de dBC à $dACB$.

Or par le quatrième cas de la III^e^. question, on a $dBC : -dACB :: \sin. BC \times \text{tang.}\ ABC : R^2$.

Mais à cause que AB est de 90°, on trouvera par les règles de la Trigonométrie sphérique, que $R : \cos. ABC :: \sin. BC : \cos. AC$.

Cette dernière proportion fera connoître l'angle ABC; (la latitude & la déclinaison étant supposées connues). Alors dans l'analogie précédente, connoissant la variation dBC en déclinaison, on connoîtra tout ce qui est nécessaire pour déterminer $dACB$.

304. Si l'angle ABC étoit nul ou très-approchant de zéro; c'est-à-dire, si le cercle de déclinaison ne faisoit qu'un angle infiniment petit avec le vertical de l'astre, (& c'est le cas où l'astre reste 24 heures sur l'horizon, lorsqu'il est du côté du pôle élevé), alors la plus petite erreur en déclinaison, en produiroit une infinie sur l'heure du lever ou du coucher; l'analogie ci-dessus, exacte dans cette conclusion qu'elle donne, ne le seroit cependant pas pour déterminer la valeur rigoureuse de cette erreur; parce qu'elle est fondée sur la supposition que les variations soient toutes deux très-petites à l'égard du rayon. Cette circonstance arrive lorsque la latitude du lieu est égale à la distance de l'astre au pôle; par exemple pour la latitude de $66^{\circ}\frac{1}{2}$ dans le solstice. Mais si on suppose la latitude, plus petite seulement d'un degré; alors on trouvera par les deux analogies ci-dessus que l'erreur sur l'angle horaire est moindre que 9 fois celle sur la déclinaison; donc quand on feroit une erreur d'une minute sur la déclinaison, il n'en résulteroit pas 9' d'erreur sur l'angle horaire; c'est-à-dire, environ une demi-minute de temps sur

l'heure du lever ou du coucher. Or en calculant cette heure comme nous l'avons prescrit (191), il s'en faut de beaucoup qu'on puisse faire une erreur d'une minute sur la déclinaison, puisque vers le solstice la variation en déclinaison n'est que d'une demi-minute en 24 heures; & ne seroit par conséquent guères que d'un cinquantième de minute en une heure; donc pour toute latitude depuis l'équateur jusqu'à environ un degré du parallèle où le Soleil ne se couche plus, on peut en toute sûreté, calculer l'heure du lever ou du coucher, comme nous l'avons prescrit (191).

Lorsque le Soleil est fort près de l'équateur, son changement en déclinaison, est alors le plus grand qu'il est possible; il est d'environ 1′ par heure. Mais on peut voir facilement, par la seconde analogie ci-dessus, qu'alors l'angle ABC est égal au complément de la latitude. Et comme *sin.* BC est alors égal au rayon, on a $dBC : -dACB :: tang. AC : R$, qui fait voir que tant que la latitude sera au-dessous de 45°, l'erreur sur l'angle horaire sera plus petite que l'erreur en déclinaison; elle deviendra au contraire plus grande que cette dernière, à mesure que la latitude approchera de 90°; mais à 85°, elle ne seroit encore qu'environ $11\frac{1}{2}$ fois aussi forte que l'erreur en déclinaison. Donc quand même on supposeroit qu'on emploie une déclinaison qui convient à une heure de distance du lever ou du coucher, il n'en résulteroit jamais une minute de temps sur l'heure du coucher; encore faudroit-il être par le parallèle de 85°; mais en-deçà elle sera toujours beaucoup au-dessous.

305. Tout ce que nous venons de dire a également lieu pour le lever ou le coucher réel, & pour le lever ou le coucher apparent; parce que l'angle ABC ne varie pas sensiblement (si ce n'est dans les cas extrêmes mentionnés ci-dessus) lorsque l'arc AB, au lieu d'être de 90°, est de 90° plus quelques minutes.

306. II. *Trouver combien un petit changement connu, en latitude, produit de variation dans l'heure du lever ou du coucher d'un astre.*

Soit C le pôle (*fig.* 60), B le zénith, & par conséquent CB le complément de la latitude; CA la distance de l'astre au pôle, & BA le vertical qui est ici de 90°. Les deux côtés CA & AB sont supposés constans, & il s'agit de trouver le rapport de la variation de BC, à celle de l'angle ACB.

Or par le quatrième cas de la question III^e., on a dBC : $-dACB$ :: *fin.* $BC \times$ *tang.* $ABC : R$; ce qui fait voir d'abord que l'angle horaire augmente lorsque la latitude augmente, parce que celle-ci augmentant, BC diminue, ce qui exige qu'en prenant dBC pour la variation de la latitude, à laquelle dBC est égale, en effet, on lui donne le signe $-$; c'est-à-dire, le même signe qu'à $dACB$, du moins tant que l'angle ABC est plus petit que 90°.

Comme l'arc AB, est supposé de 90°, on trouvera par les règles ordinaires de la Trigonométrie sphérique, que *fin.* BC : *cof.* AC :: R : *cof.* ABC; d'où il sera facile, connoissant la latitude & la déclinaison, de déterminer l'angle ABC; alors, par la première analogie, on aura facilement la variation de l'angle horaire.

307. Comme le cosinus d'un arc plus grand ou plus petit que 90°, est toujours moindre que le rayon, la seconde analogie fait voir que pour que l'astre ait un lever ou un coucher, la latitude doit être plus petite que la distance de l'astre au pôle. Lorsque la latitude, quoique plus petite que la distance de l'astre au pôle, diffère très-peu de celle-ci, l'angle ABC est fort petit, ainsi qu'on peut le voir à l'inspection de la seconde analogie. Alors, par la première, on voit qu'un très-petit changement dans la latitude peut en produire un très-grand sur l'heure du lever ou du coucher. Dans ce cas, l'usage de cette analogie pour trouver la variation du lever ou du coucher, seroit insuffisant, parce que cette analogie est fondée sur la supposition que chaque variation soit très-petite à l'égard du rayon.

Au contraire, plus la latitude sera au-dessous de la distance de l'astre au pôle, plus l'angle ABC augmentera, & par conséquent moins le changement en latitude produira de variation dans le lever ou le coucher.

308. Ces conclusions sont également vraies pour le lever ou le coucher apparent, parce que l'arc AB ne différant (192) que de 37', d'un cas à l'autre, l'angle ABC ne varie que d'une quantité qui ne peut influer sensiblement sur le rapport de dBC à $dACB$ que lorsque cet angle BAC est très-petit; c'est-à-dire, lorsque la latitude diffère peu de la distance de l'astre au pôle.

309. Il paroîtroit donc que l'on pourroit faire usage de cette question pour trouver le changement en latitude par l'observation du lever ou du coucher d'un astre, en suppo-

sant d'ailleurs que l'on ait l'heure à l'aide d'une montre réglée peu de temps auparavant. En effet, on pourroit calculer l'heure du lever ou du coucher apparent pour la latitude déduite de l'estime, & en observant le lever ou le coucher apparent, ayant d'ailleurs égard au chemin fait en longitude depuis que la montre a été réglée, la comparaison de l'heure calculée à l'heure observée & réduite, feroit connoître $dACB$. Calculant donc par la seconde analogie, l'angle ABC qui convient à la latitude estimée, & ayant la déclinaison, on connoîtroit, dans la première analogie tout, excepté dBC, qui seroit donc facile à conclure de cette analogie. Mais outre que l'erreur d'une seconde sur le temps, en produit une de 15 secondes de degré sur $dACB$, il faut remarquer, que l'erreur sur $dACB$ influe d'autant plus sur dBC ou sur le changement en latitude, que l'angle ABC est plus grand ; la méthode ne pourroit donc guères être employée que lorsque l'azimuth ABC seroit petit ; mais dans ce cas l'analogie dont on fait usage, n'est pas suffisamment exacte pour le lever ou le coucher apparent, ainsi que nous venons de l'observer ci-dessus.

310. III. *Trouver le temps qu'un astre emploie à varier d'une petite quantité en hauteur, vers l'horizon.*

Soit A le pôle (*fig.* 60) ; C le zénith ; CB le vertical, & AB le cercle de déclinaison. L'astre étant supposé ne pas changer sensiblement de déclinaison pendant l'intervalle de temps cherché, les deux côtés AC, AB seront constans : il s'agit de trouver le rapport de dBC à $dBAC$ lorsque BC est de 90° ou fort approchant.

Or par le troisième cas de la question III^e^., on trouve $dBC : dBAC :: \sin. AB \times \sin. ABC : R^2$.

Et comme BC est supposé de 90°, les règles de la Trigonométrie sphérique donnent $\sin. AB : \cos. AC :: R : \cos. ABC$.

Ainsi connoissant la latitude & la déclinaison, on aura l'angle ABC, par la seconde analogie ; & la première donnera alors le rapport de dBC à $dBAC$.

311. La seconde analogie fait voir que pour qu'on puisse supposer l'astre à l'horizon, il faut que la latitude soit plus petite que la distance de l'astre au pôle. Et que si cette latitude, quoique plus petite que la distance de l'astre au pôle, en diffère fort peu, l'angle ABC sera fort petit ; d'où & de la première analogie, on conclut qu'une très-petite va-

riation en hauteur, en produit une très-grande dans l'angle horaire, lorſque la latitude diffère peu de la diſtance de l'aſtre au pôle.

Au contraire ſi la latitude étoit fort petite à l'égard de la diſtance de l'aſtre au pôle, l'angle *ABC* approcheroit beaucoup de 90°, & la première analogie fait voir qu'alors la variation dans l'angle horaire produit le plus grand effet dans la hauteur; mais la variation de la hauteur eſt toujours moindre que celle de l'angle horaire.

312. Les deux analogies ci-deſſus ſuppoſent, à la rigueur, que l'aſtre eſt à l'horizon; elles auroient cependant encore lieu s'il en étoit fort près; à l'exception ſeulement du cas où la latitude différeroit peu de la diſtance de l'aſtre au pôle, parce que l'angle *ABC* étant alors fort petit, peut changer ſenſiblement par la variation du côté *CB* qui a été ſuppoſé de 90°.

313. La première analogie préſente un moyen de déterminer la latitude par l'obſervation du temps que le Soleil emploie à s'élever ou à s'abaiſſer de tout ſon diſque à l'égard de l'horizon. En effet, ce temps fait connoître *dBAC*; & comme l'on connoît *dBC* qui eſt le diamètre du Soleil, connoiſſant d'ailleurs la diſtance *AB* de l'aſtre au pôle, cette analogie fera connoître l'angle *ABC*; alors la ſeconde analogie donnera facilement *BC* complément de la latitude.

Mais d'après les obſervations ci-deſſus, on voit que cette méthode ne doit point être employée lorſque la latitude diffère peu de la diſtance de l'aſtre au pôle; car le bord du Soleil n'étant point véritablement à l'horizon lorſqu'on l'y obſerve, l'arc *CB* n'eſt pas de 90°; & quoiqu'il en diffère peu, cette différence influe ſenſiblement ſur l'angle horaire dans cette circonſtance.

D'ailleurs, il ne faut pas perdre de vue qu'une ſeconde d'incertitude ſur le temps, en produit une de 15″ de degré ſur l'angle horaire; ainſi l'obſervation du contact de chaque bord avec l'horizon, exige la plus ſcrupuleuſe exactitude. On ne doit donc employer cette méthode que lorſqu'on ne pourroit avoir recours à d'autres moyens.

314. La même queſtion que nous venons de traiter (310) ſert auſſi à déterminer la différence de temps, entre le lever ou le coucher réel, & le lever ou le coucher apparent, en prenant pour variation en hauteur la réfraction plus l'inclinaiſon de l'horizon due à la hauteur de l'œil.

315. IV. *Trouver l'erreur que peut produire ſur la latitude, celle que l'on commettroit ſur la hauteur d'un aſtre.*

Puiſque dès que l'on connoît trois choſes dans le triangle ſphérique ZPS (*fig.* 61) on peut en conclure les trois autres; ſuppoſons donc que l'on en ait déterminé trois, dont deux ſoient exactement déterminées; & que la troiſième qui eſt la diſtance ZS au zénith ou le complément de la hauteur, ſoit ſuſceptible d'une erreur connue; il s'agit de ſavoir ce que cette erreur peut produire ſur la latitude.

Suppoſons, par exemple, qu'avec la hauteur, on emploie l'angle horaire ZPS, & la diſtance SP de l'aſtre au pôle.

Puiſqu'on ne ſuppoſe aucune erreur dans ces deux dernières, la queſtion ſe réduit donc à trouver le rapport de dZS à dZP dans le triangle ZPS dont le côté SP & l'angle ZPS ſont ſuppoſés conſtans.

Suppoſant donc ce triangle repréſenté par le triangle ABC (*fig.* 58) dont AB repréſente PS, A repréſente P, & B repréſente S, il s'agit de trouver le rapport de dBC à dAC. Or par le premier cas de la queſtion II^e. (298) on a $dBC : dAC :: cof. ACB : R$; c'eſt-à-dire, (*fig.* 61) $dZS : dZP :: cof. PZS : R$; d'où l'on conclut que l'erreur ſur la latitude eſt toujours plus grande que l'erreur ſur la diſtance au zénith ou ſur la hauteur; qu'elle eſt la plus petite dans le méridien où elle eſt préciſément égale à l'erreur ſur la hauteur, & qu'elle croît à meſure que l'azimuth approche de 90°: en ſorte que la plus petite erreur ſur la hauteur, vers le premier vertical, donneroit une très-grande erreur ſur la latitude.

On voit par là la néceſſité de ne pas employer les hauteurs priſes hors du méridien.

Au contraire, l'erreur commiſe ſur la latitude, en produit toujours une moindre qu'elle, ſur la hauteur de l'aſtre, & d'autant moindre que l'aſtre eſt plus près du premier vertical, où elle n'a plus aucun effet ſur la hauteur.

316. V. *Trouver l'erreur que peut produire ſur la latitude, l'erreur commiſe ſur le temps auquel on prendroit la hauteur de l'aſtre.*

Si c'eſt le Soleil qu'on obſerve, l'heure donne l'angle horaire ZPS (*fig.* 61). Si c'eſt une étoile, l'heure donne la diſtance du Soleil au méridien; & la différence d'aſcenſion droite du Soleil & de l'étoile, donne la diſtance de l'étoile au Soleil en ascension droite, d'où il est facile de conclure l'angle horaire ZPS de l'étoile.

Supposant donc qu'on a mesuré bien exactement la hauteur; avec la distance ZS au zénith, la distance PS de l'astre au pôle, & l'angle horaire ZPS, il est facile de calculer le complément ZP de la latitude; mais si l'on s'est trompé sur l'angle horaire, alors pour trouver l'erreur qui peut en résulter sur la latitude, il faut chercher le rapport de $dZPS$ à dZP, ou le rapport de dBC à $dACB$ (*fig.* 60) dans le triangle ACB dont C représente P, CA représente PS, AB représente SZ. Or par le quatrième cas de la Question III^e., on a $dBC : -dACB :: \sin. BC \times \text{tang.}\ ABC : R$; c'est-à-dire, (*fig.* 61) $dPZ : -dZPS :: \sin. PZ \times \text{tang.}\ PZS : R^2$.

317. D'où l'on voit que l'erreur sur la latitude est plus petite que l'erreur sur l'angle horaire (toutes choses d'ailleurs égales) tant que l'azimuth est au-dessous de 45°. Que lorsque l'azimuth surpasse 45°, l'erreur sur l'angle horaire influe de plus en plus sur la latitude, ensorte que l'erreur sur cette dernière peut surpasser de beaucoup l'erreur sur l'angle horaire, & d'autant plus que l'azimuth approche plus de 90°; & comme l'erreur sur le temps en produit une sur l'angle horaire, qui, numériquement, est 15 fois plus grande, il s'ensuit qu'on ne doit avoir recours à l'angle horaire pour déterminer la latitude, que lorsqu'on ne peut faire autrement, & s'en abstenir sur-tout lorsque l'azimuth approche de 90°.

318. Au contraire, l'erreur sur la latitude produit sur l'angle horaire une erreur qui (toutes choses d'ailleurs égales) est d'autant plus petite que l'azimuth approche plus de 90°. Ainsi *la circonstance la plus favorable pour déterminer l'heure, est d'observer la hauteur de l'astre lorsqu'il passe dans le premier vertical, ou lorsqu'il en est très-près.*

Car alors l'erreur que l'on peut avoir commis sur la latitude, n'influe point, ou que très-peu, sur l'angle horaire. C'est d'ailleurs (257) la circonstance la plus favorable pour observer la hauteur de l'astre exactement, & celle où l'erreur sur cette hauteur influe le moins sur l'angle horaire.

Réflexions sur l'Octant, & sur la correction qu'on doit faire aux Arcs observés avec cet instrument.

319. Nous venons de voir (315) que la méthode la plus sûre pour déterminer la latitude, est l'observation de la hauteur méridienne des astres. Et (318) que la circonstance la plus favorable pour déterminer exactement l'heure, est le passage de l'astre par le premier vertical. La détermination de l'heure dépend donc doublement de l'exactitude avec laquelle on peut mesurer les hauteurs avec l'octant, puisqu'elle dépend de la latitude, & de la hauteur de l'astre. Il est donc à propos d'examiner ici jusqu'à quel point on peut compter sur les hauteurs prises avec l'octant.

Le rayon de cet instrument ne passant point ordinairement 18 pouces; & l'arc d'une minute dans un cercle de 18 pouces de rayon, n'ayant pas plus d'un 16^e. de ligne d'étendue; il s'ensuit que sur l'octant où les minutes sont représentées par des demi-minutes, l'arc qui peut servir à mesurer une minute, n'occupe qu'un 32^e. de ligne. Cette quantité est trop petite pour être saisie à la vue simple, si le *nonius* que porte l'alidade n'aidoit pas à la distinguer. A l'extrémité de l'alidade, est un arc faisant corps avec elle, & dont l'étendue comprend ordinairement $3^o\frac{1}{2}$ ou 210′ de part & d'autre de la ligne de foi. Ces 210′ sont partagées en 10 parties qui sont par conséquent de 21′ chacune; mais sur le limbe, l'étendue du degré est partagée en trois parties qui sont par conséquent de 20′ chacune; d'où il suit que chaque partie du nonius excède chaque partie du limbe de 1′. Or en plaçant la ligne de foi de l'alidade, sur une des divisions du limbe, on voit facilement la différence de la seconde division de l'alidade, à la seconde division du limbe; on peut donc à la vérité s'assurer des divisions du limbe à moins d'une minute près. Mais cette différence est si petite, qu'on ne peut sans témérité répondre d'en distinguer la moitié à la vue; ainsi on ne peut pas garantir une demi-minute d'erreur dans quelqu'une des divisions de l'instrument.

Cette demi-minute n'occupant qu'un 64^e. de ligne, il est clair qu'on ne peut pas en répondre non plus dans l'estimation de la coincidence d'une division de l'alidade, avec une division du limbe. Or chaque obſervation ſuppoſe deux fois cette eſtimation ; une fois pour l'obſervation même, & une autre fois pour la vérification du parallélisme des miroirs de l'inſtrument ; voilà donc une erreur d'une minute & demie que l'on ne peut garantir, qui à la vérité pourra ſouvent être moindre, par des compenſations ; mais en un mot on ne peut en répondre.

Si on ajoute à cela, ce que le mouvement du vaiſſeau peut apporter d'incertitude dans le concours des deux images qu'on réunit, ſoit en vérifiant le parallélisme des miroirs, ſoit dans l'obſervation même, incertitude que l'on ne peut guère eſtimer au-deſſous d'une demi-minute dans chaque cas, il en réſultera encore une minute au moins ; & l'on n'aura pas de peine à en convenir, ſi on fait attention combien un arc d'une demi-minute dans le ciel paroît petit.

320. D'après ces obſervations, il paroît donc qu'on ne peut pas aſſurer qu'il n'y ait des cas où, ſans mal-adreſſe, & avec toute l'habitude poſſible, on ne peut pas répondre d'un arc meſuré avec l'octant, à moins de deux minutes & demie près.

Tout cela ſuppoſe encore que l'inſtrument ſoit auſſi parfaitement exécuté qu'il eſt poſſible. Mais n'eſt-il pas encore d'autres ſources d'erreurs qui ſoient inévitables, & qui cependant peuvent avoir un effet ſenſible ſur les arcs meſurés ? Le défaut de parallélisme dans les deux faces oppoſées de chaque miroir, ne peut-il pas produire une erreur qui mérite attention ? C'eſt ce qu'il eſt bon d'examiner.

321. Chacune des deux ſurfaces d'un miroir de glace donne une image de l'objet. Celle qui eſt du côté de l'objet, en donne une très-foible, mais celle qui eſt étamée donne l'image la plus vive ; celle que nous remarquons ordinairement. Or celle-ci eſt formée, non par une ſimple réflexion, mais par une réflexion à cette ſeconde ſurface, précédée & ſuivie d'une réfraction à l'entrée & à la ſortie de la première. Nonobſtant ces deux réfractions, les angles que le rayon feroit avec la première ſurface, en entrant & en ſortant ſeroient égaux, ſi les deux ſurfaces étoient exactement parallèles. Mais ſi elles ne le ſont pas ; ſi petite qu'on ſuppoſe cette inclinaiſon, il peut en réſulter dans les obſervations une erreur plus grande que cette inclinaiſon. Par exemple, ſi cette inclinaiſon eſt d'une minute ſeulement, il peut en ré-

ſulter pluſieurs minutes d'erreur ſur l'arc meſuré. Or comment peut-on répondre que la différence d'épaiſſeur d'un côté à l'autre du miroir, ne ſoit pas de la trois centième partie d'une ligne ? C'eſt cependant toute la différence néceſſaire pour produire une minute d'erreur dans la poſition des faces d'un miroir d'environ 1 pouce de largeur.

Examinons donc comment on peut déterminer l'erreur que peut produire le défaut de parallèliſme des faces de chácun de deux miroirs de l'octant.

322. Soit ABC (*fig.* 62) un priſme de verre dont la face BC ſoit étamée. Le rayon Se qui pénètre dans le verre ſouffre en e une déviation qui l'approche de la perpendiculaire en lui faiſant ſuivre la ligne eg au lieu de Seh, de manière que le ſinus de feh, eſt au ſinus de feg, comme 3 eſt à 2. Au point g où le rayon réfracté eg rencontre la ſurface étamée BC, ce rayon ſe réfléchit en faiſant l'angle hgB égal à l'angle egC, & rencontre de nouveau la ſurface BA en k. Là, au lieu de continuer ſa route ſuivant kl, il s'en écarte ſuivant kM, de manière que kn étant perpendiculaire à BA, le ſinus de nkl ou de ghi eſt au ſinus de nkM, comme 2 eſt à 3.

Cela poſé, on a donc $\text{ſin.}\ Mhn = \frac{3}{2}\,\text{ſin.}\ lkn = \frac{3}{2}\,\text{ſin.}\ ikg = -\frac{3}{2}\,\text{coſ.}\ Bkg$, parce que l'angle Bkg a pour complément ikg ; mais comme il eſt obtus, ſon coſinus eſt négatif. Or $Bkg = 180° - B - Bgk = 180° - B - egC$; & $egC = B + Beg = B + 90° - gef$; donc $Bkg = 90° - 2B + gef$; donc $\text{coſ.}\ Bkg = \text{coſ.}\,(90° - 2B + gef) = -$ (*) $(\text{ſin.}\ gef - 2B) = \text{ſin.}\ 2B\ \text{coſ.}\ gef - \text{ſin.}\ gef\ \text{coſ.}\ 2B$ (*Géom.* 284) ; mais l'angle B étant fort petit, $\text{ſin.}\ 2B = 2B$, & $\text{coſ.}\ 2B = 1$; en ſuppoſant le rayon $= 1$; donc $\text{coſ.}\ Bkg = 2B\ \text{coſ.}\ gef - \text{ſin.}\ gef$. Or $\text{ſin.}\ gef = \frac{2}{3}\,\text{ſin.}\ hef = \frac{2}{3}\,\text{ſin.}\ Ser$; & par conſéquent $\text{coſ.}\ gef = \sqrt{(1 - \frac{4}{9}\,\text{ſin.}^2\ Ser)}$; donc $\text{coſ.}\ Bkg = -\frac{2}{3}\,\text{ſin.}\ Ser + 2B\sqrt{(1 - \frac{4}{9}\,\text{ſin.}^2\ Ser)}$; donc $\text{ſin.}\ Mkn = (-\frac{3}{2}\,\text{coſ.}\ Bkg) = \text{ſin.}\ Ser - 3B\sqrt{(1 - \frac{4}{9}\,\text{ſin.}^2\ Ser)}$. Par conſéquent $\text{ſin.}\ Ser - \text{ſin.}\ Mkn = 3B\sqrt{(1 - \frac{4}{9}\,\text{ſin.}^2\ Ser)}$. Or puiſque la différence des ſinus de ces deux angles, & par conſéquent celle de ces angles même, eſt petite, il ſuit de ce qui a été dit (294), que ſi on nomme D cette dernière différence, on aura $1 : \text{coſ.}\ Ser :: D : 3B\sqrt{(1 - \frac{4}{9}\,\text{ſin.}^2\ Ser)}$; donc

(*) Parce que l'angle Bkg eſt obtus.

$D = \frac{3B}{\text{cos. } Ser} \sqrt{} \left(1 - \frac{4}{9} \text{sin.}^2 \, Ser\right)$, ou $D = \frac{3B}{\text{sin. } a} \sqrt{} \left(1 - \frac{4}{9} \text{cos.}^2 \, a\right)$, en nommant a l'angle d'incidence SeA complément de Ser.

323. Cette valeur de D suppose tacitement que le rayon incident Se, & le rayon émergent kM soient dans un même plan; ce qui n'est pas vrai à la rigueur, si ce n'est dans un seul cas. Car Se & eg doivent être dans un même plan perpendiculaire à la surface réprésentée par AB; eg & gk doivent être dans un même plan perpendiculaire à la surface représentée par BC; & gk & kM doivent être dans un même plan perpendiculaire à la surface représentée par AB; or delà il suit que kM ne peut être dans un même plan avec Se qu'autant que le plan passant par Se perpendiculairement à la surface représentée par AB, sera en même temps perpendiculaire à la surface représentée par BC. Mais comme l'angle AbC est supposé très-petit, il s'en faut infiniment peu que Se & kM ne soient dans un même plan; & la valeur que l'on vient de trouver pour l'angle Mkn ne diffère de sa valeur rigoureuse, que d'une quantité infiniment plus petite que l'inclinaison ABC. Quant à l'angle ABC, il n'est l'inclinaison des deux faces du prisme que dans le cas où le plan SeA est perpendiculaire à ces deux faces; c'est l'angle que forment entre elles les sections des deux faces du prisme coupées par le plan conduit par Se perpendiculairement à la face AB; mais il n'importe nullement pour notre objet qu'il soit ou ne soit point l'inclinaison des deux surfaces.

324. Cela posé, concevons, que Sa (*fig.* 63) soit un rayon parti d'un astre S & tombant au point a sur le grand miroir EF de l'octant; qu'après avoir subi deux réfractions & une réflexion à ce miroir, il arrive suivant aB au petit miroir HG, d'où après deux réfractions & une réflexion, il arrive suivant BO à l'œil O. Pour trouver l'erreur que ces réfractions peuvent occasionner dans la mesure de la hauteur de l'astre, j'imagine que le rayon BO retourne sur lui-même suivant $OBaS$, & je conçois par le point a une droite aM parallèle à BO. La hauteur vraie de l'astre (abstraction faite de l'inclinaison de l'horizon, due à la hauteur de l'œil, dont il est toujours aisé de tenir compte) sera MaS ou $MaE - SaE$, ou $M'AE - SaE$, en imaginant

AM' parallèle à aM; c'est-à-dire, en appellant h la hauteur; $h = M'AE - SaE$.

Mais $M'AE = 180^\circ - M'AF = 180^\circ - M'AB - BAF$; or à cause des parallèles, on a $M'AB = ABO$; d'ailleurs en imaginant que ef soit la position du grand miroir lorsque la ligne de foi de l'alidade AR tombe sur le premier point C de la graduation, on a $BAF = BAf - FAf = BAF - CAR$; donc $M'AE = 180^\circ - ABO - BAf + CAR$; donc $h = 180^\circ - ABO - BAf + CAR - SaE$. Voyons donc quelle est la valeur de SaE.

Selon ce que nous avons vu ci-dessus, le rayon incident OB devenant Ba par les réfractions & la réflexion en B, l'angle ABH (égal à OBG par la construction de l'instrument) augmente de la quantité ABa que nous avons nommée D. Or l'angle BaF qui est actuellement l'angle d'incidence sur le miroir EF, est $= BAF + ABa = BAf - CAR + D$. Soit D' la quantité dont l'angle SaE sera plus grand que l'angle d'incidence BaF, quantité qui se déduit de la valeur de BaF, comme D se déduit de OBG. Nous aurons $SaE = BaF + D' = BAf - CAR + D + D'$; donc $h = 180^\circ - ABO - 2BAf + 2CAR - D - D'$.

Supposons que les surfaces étamées des deux miroirs ne se trouvent pas exactement parallèles lorsque la ligne de foi de l'alidade tombe sur le premier point de la graduation; & qu'elles fassent entre elles un petit angle p; alors BAf qui, si ces surfaces étoient alors parallèles seroit $= ABH = OBG$, sera $= OBG + p$ (ou $OBG - p$, selon le sens de cette inclinaison, lequel se détermine par l'expérience, comme on le verra plus bas). On aura donc $2BAf = 2OBG + 2p = OBG + ABH + 2p$; donc $ABO + 2BAf = OBG + ABO + ABH + 2p = 180^\circ + 2p$; donc $h = -2p + 2CAR - D - D'$; donc $h - 2CAR = -2p - D - D'$.

325. Supposons que l'on observe le terme de l'horizon, c'est-à-dire, que $h = 0$; nous aurons $2CAR = 2p + D + D'$. On voit donc que la quantité $2CAR$, ou la quantité marquée sur le limbe entre la ligne de foi de l'alidade, & le premier point de la graduation, lors de la vérification (220) à l'horizon, ne marque le défaut de parallélisme des deux surfaces étamées qu'autant qu'il est bien décidé que les deux faces de chaque miroir sont exactement parallèles entre elles, car il n'y a que lorsque leur inclinaison est nulle, que les quantités D & D' sont nulles.

326. Voyons maintenant quelles sont les valeurs de D & D' selon les différentes hauteurs de l'astre sur l'horizon.

Soit a l'angle OBG qui est connu, ou qui peut être déterminé par des mesures prises sur l'instrument même. On aura, d'après ce qui a été dit ci-dessus (322), $D = \frac{3B}{\text{sin. } a} \sqrt{(1 - \frac{4}{9} \cos.^2 a)}$, B étant l'angle que forment entre les deux intersections des deux faces du miroir HG, par le plan du rayon OB parallèle au plan de l'octant.

Nous venons (324) de trouver $BaF = BAf - CAR + D$, où (en mettant pour BAf sa valeur trouvée ci-dessus) (324) $BaF = OBG - CAR + p + D$; donc si on appelle a' l'angle CAR ou la moitié du nombre des degrés que l'on trouve marqués de C en R sur le limbe lorsqu'on observe une hauteur, on aura $BaF = a - a' + p + D$; il faut donc substituer cette quantité au lieu de a dans la valeur de D, pour avoir celle de D'. Mais comme la quantité $p + D$ est supposée très-petite à l'égard des angles a & a', & à l'égard de leur différence $a - a'$, il suffit de substituer $a - a'$ au lieu de a, & nous aurons $D = \frac{3B'}{\text{sin. } (a-a')} \sqrt{[1 - \frac{4}{9} \cos.^2 (a-a')]}$; en appellant B', pour le grand miroir, ce que nous avons appelé B pour le petit. Donc la correction $h - 2CAR$ ou dh, à faire à une hauteur quelconque estimée par les graduations de l'instrument, est $dh = -2p - \frac{3B}{\text{sin. } a} \sqrt{(1 - \frac{4}{9} \cos.^2 a)} - \frac{3B'}{\text{sin. } (a-a')} \sqrt{[1 - \frac{4}{9} \cos.^2 (a-a')]}$.

327. Il semble d'abord que pour être en état de trouver la correction qu'on doit appliquer à chaque hauteur, il faille préalablement déterminer les valeurs des trois quantités p, B, & B'. Mais si on fait attention que les quantités $2p$ & $\frac{3B}{\text{sin. } a} \sqrt{(1 - \frac{4}{9} \cos.^2 a)}$ restent les mêmes quel que soit a', on voit qu'il s'agit moins de connoître les valeurs particulières de ces deux quantités, que la valeur de leur somme qui sera une correction constante; ainsi si on représente cette somme par p', on aura plus simplement $dh = -p' - \frac{3B'}{\text{sin. } (a-a')} \times \sqrt{[1 - \frac{4}{9} \cos.^2 (a-a')]}$, p' étant une quantité

qui, ainſi que B', doit être déterminée par expérience, & qu'on pourra déterminer de la manière ſuivante.

328. Suppoſons un octant dans lequel la perpendiculaire AT (*fig.* 63) abaiſſée du centre A du grand miroir ſur la ligne BO, ne ſoit pas de plus de 3 pouces (elle eſt beaucoup moindre ordinairement). 1°. On ſe placera à un point C (*fig.* 64) d'où l'on puiſſe voir à travers la partie non étamée du petit miroir, un objet B qui ne ſoit pas éloigné de moins de 300 toiſes ; & l'on fera, enſuite, concourir avec cet objet, ſon image vue ſur la partie étamée du même miroir. Cette obſervation donnera, entre la ligne de foi de l'alidade & la première graduation du limbe, une petite quantité quelconque qui ſera l'erreur de l'inſtrument pour le cas où l'objet & le terme de comparaiſon ſont les mêmes. Repréſentant donc cette quantité par dh' (*) on aura $dh' = -p' - \frac{3B'}{\text{ſin. } a} \sqrt{(1 - \frac{4}{9} \text{coſ.}^2 a)}$, en négligeant a' qui étant alors la moitié de dh' eſt cenſé nul par rapport à a ; parce que, quoique nous ſuppoſions qu'on ignore ſi les deux faces étamées ſont parallèles ou non, nous ſuppoſons auſſi qu'elles ne diffèrent pas beaucoup du paralléliſme, ou que ſi elles en différoient beaucoup, on les y a ramenées à peu près, par le moyen ordinaire.

2°. On fera (ſoit avec un inſtrument ſuffiſamment exact, ſoit par les moyens que fourniſſent la géométrie & la trigonométrie) un angle BCA d'une grandeur connue : le plus approchant de 135° ſera le meilleur ; ainſi on le fera de 90° par exemple, puiſque c'eſt le plus grand angle que l'on meſure communément avec l'octant ; & l'on prendra ſur ſon côté CA un point A tel que CA ſoit égal à CB au moins. Viſant à l'objet B à travers la partie non étamée du petit miroir, on fera enſuite concourir l'image de A vue ſur la partie étamée, avec l'objet B vu directement, & comparant la meſure que l'inſtrument donnera pour l'angle ACB avec celle qu'on a donnée à ce même angle, ſi on repréſente par dh'' la différence de ces deux angles, on aura $dh'' = -p' - \frac{3B'}{\text{ſin. } (a-a')} \sqrt{[1 - \frac{4}{9} \text{coſ.}^2 (a-a')]}$.

(*) Nous ſuppoſons ici que l'alidade tombe alors entre C & D ; ſi elle tomboit au-delà de C par rapport à D, on mettroit $-dh'$ au lieu de dh'. On doit faire la même obſervation pour ce qui ſuit.

Alors comme les angles a & a' sont connus, on connoîtra tout dans ces deux équations, excepté p' & B' qu'il sera donc facile de déterminer, tant pour leur valeur que pour le signe qu'ils doivent avoir.

329. Comme la valeur de B' n'est point sujette à changer; lorsqu'une fois elle aura été déterminée, on s'en tiendra à cette valeur pour toutes les observations faites avec le même octant. Mais comme les quantités dh' & dh'' qui servent à déterminer B', sont fort petites, & que quelque soin qu'on apporte dans les deux observations par lesquelles on les déterminera, on ne peut pas répondre de ne pas commettre quelque erreur, il sera bon de répéter plusieurs fois ces observations, & de ne prendre pour dh' & dh'', que la valeur moyenne entre celles que ces observations auront données pour chacune de ces quantités.

330. Il faut cependant observer que si les deux faces du grand miroir, non-seulement n'étoient pas parallèles; mais si elles n'étoient pas exactement planes, la valeur de B varieroit pour chaque angle. Ainsi il sera à propos de déterminer, pour B, une valeur moyenne entre celles qui résulteront de l'expérience ci-dessus appliquée à différens angles.

331. A l'égard de p', comme il peut varier par la position respective des deux miroirs, qui peut varier elle-même par quelque dérangement dans l'instrument, il sera toujours sage de le vérifier à chaque observation; & cette vérification est absolument la même que celle que l'on a coutume de faire pour le parallélisme des deux miroirs. Cette vérification donnera, non pas p' mais la valeur de $-p'-\frac{3B'}{\text{sin. } a}\sqrt{(1-\frac{4}{9}\text{cos.}^2 a)}$; d'où il sera facile de déduire p', puisque B' & a étant connus, il est très-aisé de calculer la valeur de $\frac{3B'}{\text{sin. } a}\sqrt{(1-\frac{4}{9}\text{cos.}^2 a)}$.

Au reste, il n'est pas même nécessaire de conclure la valeur de p'; car comme dh a, en général, pour valeur $-p'-\frac{3B'}{\text{sin. }(a-a')}\sqrt{[1-\frac{4}{9}\text{cos.}^2 (a-a')]}$, & qu'à l'horizon on a $dh'=-p'-\frac{3B'}{\text{sin. } a}\sqrt{(1-\frac{4}{9}\text{cos.}^2 a)}$; on aura

$dh - dh' = -\frac{3B'}{\text{ſin.}\ (a-a')}\sqrt{[\,1 - \tfrac{4}{9}\,\mathit{coſ.}^{2}\,(a-a')\,]} + \frac{3B'}{\text{ſin.}\ a}$ $\sqrt{(\,1-\tfrac{4}{9}\,\mathit{coſ.}^{2}\ a\,)}$; donc ſi d'après la valeur connue de B' & de celle de a, on calcule toutes les valeurs ſucceſſives de $\frac{3B'}{\text{ſin.}\,(a-a')}\sqrt{[\,1 - \tfrac{4}{9}\,\mathit{coſ.}^{2}\,(a-a')\,]}$, en ſubſtituant pour a' tous les nombres depuis 0° juſqu'à 45° (ce qui répond à toutes les hauteurs au-deſſus de l'horizon juſqu'à 90°) la différence entre l'une quelconque de ces valeurs, & la première, ſera $dh - dh'$. Or Comme dh' eſt la correction que fournit la vérification à l'horizon, $dh - dh'$ ſera la variation que cette correction doit ſubir à différens degrés de hauteur. Ce ſera donc la correction à faire à chaque hauteur dejà corrigée par la vérification à l'horizon.

Ainſi, ſuppoſant qu'on ait obſervé une hauteur quelconque, & qu'on l'ait corrigée d'après la vérification ordinaire faite à l'horizon, il faudra de plus appliquer à cette hauteur la correction indiquée par la Table ſuivante ; correction qui doit être retranchée de la hauteur déjà corrigée, ſi B' eſt poſitif, & ajoutée dans le cas contraire. Cette Table ſuppoſe que l'angle a, que le petit miroir fait avec la ligne par laquelle on viſe à l'horizon, eſt de 71° 20', ainſi que nous l'avons trouvé ſur quelques octans. On pourroit l'employer ſans erreur ſenſible pour quelques degrés de plus ou de moins. Nous y avons laiſſé B indéterminé, afin qu'on puiſſe plus facilement avoir la correction qui convient pour la valeur que l'expérience aura fait trouver pour B'.

Pour calculer plus facilement cette Table, on fera $\tfrac{2}{3}\,\mathit{coſ.}\,(a-a') = \mathit{coſ.}\,k$; & l'on aura $\frac{3B'\ \text{ſin.}\ k}{\text{ſin.}\ (a-a')}$ pour la quantité que l'on doit calculer.

TABLE

TABLE de la correction qu'on doit faire aux hauteurs observées, lorsqu'elles ont été réduites par la vérification de l'octant à l'horizon.

DEGRÉS DE HAUTEUR.	CORRECTION.
0	0 B'
10	0,06 B'
20	0,15 B'
30	0,26 B'
40	0,40 B'
50	0,59 B'
60	0,84 B'
70	1,18 B'
80	1,65 B'
90	2,33 B'

332. Pour connoître plus particulièrement l'effet de l'inclinaison des deux faces de chaque miroir, reprenons la première valeur que nous avons trouvée par dh, savoir $dh = -2p - \frac{3B}{\sin. a} \sqrt{(1 - \frac{4}{9} \cos.^2 a)} - \frac{3B'}{\sin. (a - a')} \sqrt{[1 - \frac{4}{9} \cos.^2 (a - a')]}$, qui à l'horizon devient $dh' = -2p - \frac{3B}{\sin. a} \sqrt{(1 - \frac{4}{9} \cos.^2 a)} - \frac{3B'}{\sin. a} \sqrt{(1 - \frac{4}{9} \cos.^2 a)}$. Substituant 71° 20′ pour a, on aura $dh' = -2p - 3{,}09\, B - 3{,}09\, B'$; donc en ne supposant que 1′ dans la valeur que donne à B & à B', le défaut de parallélisme des deux faces de chaque miroir, on auroit 6′, 18 ou 6′ 11″ d'erreur, si la vérification à l'horizon ne faisoit connoître que celle qui résulte du défaut de parallélisme des miroirs entre eux. On trouvera de même, qu'à 90°, il y auroit 8′ 31″.

Mais la vérification à l'horizon comprend, non-seulement ce qui appartient au défaut de parallélisme des deux surfaces étamées, mais encore l'erreur que peut produire à l'horizon le défaut de parallélisme des surfaces de chaque miroir, de sorte qu'il n'y a heureusement d'autre correction à faire que celle de la Table ci-dessus pour les différentes positions du grand miroir, à chaque observation. Mais comme cette correction augmente proportionnellement à la valeur de B', il est indispensable de s'assurer, par expérience, de la valeur de B' pour l'octant dont on fera usage. Ce n'est que par-là qu'on peut savoir si, pour cet octant, on peut négliger l'usage de cette Table.

Examen de l'erreur qu'on peut commettre dans la réduction des routes, en employant le moyen parallèle.

333. Nous supposerons ici que l'on ait connoissance des *Principes de Calcul qui servent d'introduction aux Sciences physico-mathématiques*, & particulièrement de ce qui y a été dit au N°. 127.

Cela posé, soit m la latitude du départ, $m+q$ celle d'arrivée; a le rhumb de vent, z la différence de longitude. On aura donc (*Principes de Calcul*, &c.) $z = \frac{1}{2}$ *tang.* a *log.* $\frac{1+\text{sin.}\,(m+q)}{1-\text{sin.}\,(m+q)} \times \frac{1-\text{sin.}\,m}{1+\text{sin.}\,m}$, ou (faisant les multiplications indiquées, & la division partielle) $z = \frac{1}{2}$ *tang.* a *log.* $\left(1 + \frac{2\,[\,\text{sin.}\,(m+q) - \text{sin.}\,m\,]}{[\,1-\text{sin.}\,(m+q)\,]\,(1+\text{sin.}\,m)}\right)$.

Or (*Alg.* 419 & *suiv.*) on a $\text{sin.}\,(m+q) - \text{sin.}\,m = 2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}q\,\text{cos.}\,(m+\frac{1}{2}q)$; $1 - \text{sin.}\,(m+q)$ ou $\text{sin.}\,90^\circ - \text{sin.}\,(m+q) = 2\,\text{sin.}\,(45^\circ - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}q)\,\text{cos.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}q)$; & $1 + \text{sin.}\,m = 2\,\text{sin.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}m)\,\text{cos.}\,(45^\circ - \frac{1}{2}m)$. Mais (*Alg.* 418) $\text{sin.}\,(45^\circ - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}q) \times \text{sin.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}m) = \frac{1}{2}\,\text{cos.}\,(m + \frac{1}{2}q) - \frac{1}{2}\,\text{cos.}\,(90^\circ - \frac{1}{2}q) = \frac{1}{2}\,\text{cos.}\,(m+\frac{1}{2}q) - \frac{1}{2}\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}q$. Pareillement $\text{cos.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}q)\,\text{cos.}\,(45^\circ - \frac{1}{2}m) = \frac{1}{2}\,\text{cos.}\,(90^\circ + \frac{1}{2}q) + \frac{1}{2}\,\text{cos.}\,(m + \frac{1}{2}q) = -\frac{1}{2}\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\,\text{cos.}\,(m+\frac{1}{2}q)$; donc $z = \frac{1}{2}$ *tang.* a *log.* $\left(1 + \frac{4\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}q\,\text{cos.}\,(m+\frac{1}{2}q)}{[\,\text{cos.}\,(m+\frac{1}{2}q) - \text{sin.}\,\frac{1}{2}q\,]^2}\right)$.

Rappellons-nous (*Principes de Calcul*, &c.) que $\log.\,(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \&c.$, & ayant fait $x = \frac{4\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}q\,\text{cos.}\,(m+\frac{1}{2}q)}{[\,\text{cos.}\,(m+\frac{1}{2}q) - \text{sin.}\,\frac{1}{2}q\,]^2}$, ou plutôt $x =$ à la valeur de cette quantité réduite en série (*Alg.* 160), substituons pour x, cette valeur dans la série qui exprime $\log.\,(1+x)$; nous aurons, en négligeant ce qui est au-delà de la troisième puissance de $\text{sin.}\,\frac{1}{2}q$, $z = \text{tang.}\,a\left(\frac{2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}q}{\text{cos.}\,(m+\frac{1}{2}q)} + \frac{\frac{2}{3}\,\text{sin.}^3\,\frac{1}{2}q}{\text{cos.}^3\,(m+\frac{1}{2}q)}\right)$.

Or d'après ce qui a été dit (*Principes de Calcul, &c.*), on a $\textit{sin.}\ \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}q - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{8}q^3$, en négligeant ce qui est au-delà de l'ordre 3 ; donc $z = \textit{tang.}\ a \left(\frac{q}{\text{cos.}\ (m+\frac{1}{2}q)} + \frac{1}{12}q^3 \times \frac{(1-\frac{3}{2}\text{cos.}^2)\ (m+\frac{1}{2}q)}{\text{cos.}^3\ (m+\frac{1}{2}q)} \right)$.

Mais si on appelle z' la différence de longitude que donne le moyen parallèle, il est facile de voir qu'on a $z' = \textit{tang.}\ a\ \frac{q}{\text{cos.}\ (m+\frac{1}{2}q)}$; donc l'erreur $z - z' = \textit{tang.}\ a\ \frac{1}{12}\ q^3 \left(\frac{1-\frac{3}{2}\text{cos.}^2\ (m+\frac{1}{2}q)}{\text{cos.}^3\ (m+\frac{1}{2}q)} \right)$.

Soit l la longueur de la route. On aura (39) $3l$ pour le nombre de minutes de degrés que vaut cette longueur. Donc puisque la valeur de la minute dans le cercle qui a pour rayon 1, est 0,00029, à très-peu près, on aura $3l \times 0{,}00029$ pour la longueur de la route rapportée à la sphère qui a pour rayon 1. Or q étant l'arc correspondant en latitude, on a $3l \times 0{,}00029\ \textit{cos.}\ a = q$; donc $z - z' = \frac{27}{12}\ l^3.\ \overline{0{,}00029}^3\ \textit{sin.}\ a\ \textit{cos.}^2\ a \left(\frac{1-\frac{3}{2}\text{cos.}^2\ (m+\frac{1}{2}q)}{\text{cos.}^3\ (m+\frac{1}{2}q)} \right)$, & par conséquent $\frac{z-z'}{0{,}00029} = \frac{9}{4}\ l^3\ .\ \overline{0{,}00029}^2\ \textit{sin.}\ a\ \textit{cos.}^2\ a$ . . $\left(\frac{1-\frac{3}{2}\text{cos.}^2\ (m+\frac{1}{2}q)}{\text{cos.}^3\ (m+\frac{1}{2}q)} \right)$. Or $\frac{z-z'}{0{,}00029}$ exprime le nombre des minutes de l'arc $z-z'$; donc si on représente ce nombre de minutes, par N, on aura $N = \frac{9}{4}\ l^3\ .\ \overline{0{,}00029}^2\ \textit{sin.}\ a\ \textit{cos.}^2\ a \left(\frac{1-\frac{3}{2}\text{cos.}^2\ (m+\frac{1}{2}q)}{\text{cos.}^3\ (m+\frac{1}{2}q)} \right)$.

Soit n le nombre des centaines de lieues de la route, on aura $\frac{l}{100} = n$, ou $l = 100\,n$, & par conséquent $\frac{9}{4}\ l^3 \times \overline{0{,}00029}^2 = 0{,}1892\ n^3$. Faisons de plus, $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \textit{cos.}\ (m+\frac{1}{2}q) = \textit{cos.}\ k$; & en substituant, nous aurons enfin $N = 0{,}1892\ n^3\ \textit{sin.}\ a\ \textit{cos.}^2\ a\ \frac{\text{tang.}^2\ k}{2\sqrt{\ 2}\ \text{cos.}\ k}$.

Donnons à $fin.\ a$ la valeur qui rend $fin.\ a\ cof.^2\ a$ le plus grand qu'il est possible ; c'est-à-dire, supposons $fin.\ a = \sqrt{\frac{1}{3}}$; nous aurons $N = 0{,}1892\ n^3 . \frac{2}{3} . \sqrt{\frac{1}{3}} . \frac{tang.^2\ k}{2\sqrt{2\ cof.\ k}} =$ $\frac{0{,}0631\ n^3\ tang.^2\ k}{cof.\ k . \sqrt{6}} = \frac{0{,}0257\ n^3\ tang.^2\ k}{cof.\ k}$.

334. Si on suppose $m + \frac{1}{2}q$ successivement $= 0°$, $= 45°$, $= 60°$, $= 75°$, $= 80°$, on aura pour valeurs correspondantes de N, $N = 0{,}036\ n^3$; $N = 0{,}154\ n^3$; $N = 0{,}509\ n^3$; $N = 4{,}05\ n^3$; $N = 13{,}62\ n^3$. Donc si le moyen parallèle est supposé, successivement, sous l'équateur, à 45°, à 60°, à 75°, à 80° ; & que la longueur de la route n'excède pas 200 lieues ou 2 centaines de lieues ; alors l'erreur en longitude, résultante de l'usage du moyen parallèle, ne peut pas être de plus de 0', 29 ou 0' 17" sous l'équateur ; de 1', 23 ou 1' 14" sous le parallèle de 45° ; de 4', 08 ou 4' 5" sous le parallèle de 60° ; mais elle seroit de 32' 40 ou 32' 24" sous le parallèle de 75°, & de 108', 96 ou 1° 48' 58" sous le parallèle de 80°.

Si la route est moitié plus petite, les erreurs seront huit fois plus petites ; & au contraire elles seront 8 fois, 27 fois, 64 fois plus grandes, si la route est 2 fois, 3 fois, 4 fois plus grande.

335. Réciproquement, on aura $n^3 = \frac{N\ cof.\ k}{0{,}0257\ tang.^2\ k} =$ $\frac{38{,}91\ N\ cof.\ k}{tang.^2\ k}$. D'où l'on pourra conclure quelle doit être la longueur de la route, pour que l'usage du moyen parallèle ne cause pas dans la longitude, une erreur plus grande qu'une quantité donnée.

Par exemple, si l'on demande quelle peut être la longueur de la route lorsque le moyen parallèle tombe par 0°, 45°, 60°, 75°, 80° de latitude, pour que l'erreur sur la longitude n'excède pas une minute, on fera $N = 1$, $m + \frac{1}{2}q$ successivement $= 0°$, 45°, 60°, 75°, 80° ; & on trouvera $n = 3{,}02$, $n = 1{,}87$, $n\ 1{,}25$, $n = 0{,}62$, $n = 0{,}42$; c'est-à-dire, que pour que l'erreur causée par l'usage du moyen parallèle n'excède pas une minute, il faut que la route n'excède pas 302 lieues sous la ligne, 187 lieues, sous le parallèle de 45° ; 125 lieues, sous celui de 60° ; 62 lieues, sous celui de 75° ; & 42 lieues, sous celui de 80°.

Du rapport qu'ont entre elles l'erreur commise sur la latitude, l'erreur commise sur le rhumb de vent, & celle que chacune de ces deux causes peut produire sur la longitude.

336. Lorsque par l'observation de latitude, & d'après ce qui a été dit (239 *& suiv.*), on a déterminé l'erreur en latitude & l'erreur sur le rhumb de vent, on peut sans chercher l'erreur commise sur la distance, déterminer de la manière suivante la correction qu'on doit faire à la longitude.

Conservant les mêmes dénominations que ci-dessus (333), on a $z = \frac{1}{2}\, tang.\ a\ log. \frac{1 + \text{sin.}\,(m+q)}{1 - \text{sin.}\,(m+q)} \times \frac{1 - \text{sin.}\ m}{1 + \text{sin.}\ m}$. Si on différencie cette quantité, en regardant m comme constante, z, a & q, comme variables, on aura $dz = \frac{dq\ \text{tang.}\ a}{\text{cos.}\ (m+q)} + \frac{\frac{1}{2}\,da}{\text{cos.}^2\ a}\ log. \frac{1+\text{sin.}\,(m+q)}{1-\text{sin.}\,(m+q)} \times \frac{1-\text{sin.}\ m}{1+\text{sin.}\ m}$, ou bien (en mettant pour ce dernier logarithme, sa valeur tirée de la première équation) $dz = \frac{dq\ \text{tang.}\ a}{\text{cos.}\ (m+q)} + \frac{z\,da}{\text{sin.}\ a\ \text{cos.}\ a}$, équation dans laquelle quoique dz, dq & da expriment les longueurs mêmes des arcs qui mesurent les variations en longitude, latitude, &c. on peut cependant mettre au lieu de ces quantités, leurs valeurs en minutes, qui leur sont proportionnelles. Mais comme z est aussi censé exprimé en parties du rayon supposé $= 1$, & qu'il est plus commode de l'avoir exprimé en minutes; si on appelle z' ce nombre de minutes, on aura $z = 0{,}00029\ z'$, en supposant que le rayon R de 100000 parties, est 1. On aura donc $dz = \frac{dq\ \text{tang.}\ a}{\text{cos.}\ (m+q)} + \frac{0{,}00029\ z'\ da}{\text{sin.}\ a\ \text{cos.}\ a}$, pour la correction de la longitude due à l'erreur dq & à l'erreur da.

La première partie de la valeur de dz, donne la correction en longitude, due à l'erreur en latitude; & la seconde donne celle que produit l'erreur sur le rhumb de vent. L'une & l'autre sont très-faciles à calculer par logarithmes. Mais il faut observer, que comme cette solution ſuppoſe que la latitude & le rhumb de vent pèchent tous deux par défaut, ſi l'un ou l'autre ou tous les deux pèchoient par excès, on feroit dq ou da ou tous les deux négatifs.

Prenons pour exemple, le cas que nous avons ſuppoſé dans le premier exemple (248). L'erreur en latitude étoit de 8′ par défaut ; & l'erreur ſur le rhumb de vent, étoit de 1° 15′ ou 75′ auſſi par défaut. Le rhumb de vent eſtimé étoit de 56° 15′, la latitude eſtimée, de 25° 57′, & la différence de longitude eſtimée, étoit de 4° 36′ ou 276′. On aura donc comme il ſuit. . . . .

Log. 8′.	0,90309	Log. 75′.	1,87506
Log. *tang.* 56° 15′	10,17510	Log. 0,00029. . .	6,46240
Compl. Arith. log.		Log. 276.	2,44091
coſ. 25° 57′. . .	0,04615	Compl. Arith. Log.	
Somme.	11,12434	*ſin.* 56° 15′. . .	0,08016
Nombre correſp. .	13′,3	Compl. Arith. Log.	
		coſ. 56° 15′. . .	0,25526
		Somme.	11,11379
		Nombre correſp. .	13′,0

Donc la correction à faire à la différence de longitude, eſt 26′, 3 ; la même, à moins d'une minute près, que celle que nous avons trouvée dans l'exemple cité.

337. La valeur dz que nous venons de trouver, peut ſervir à réſoudre, par approximation, la queſtion dont nous avons fait mention (113) ; celle où connoiſſant le lieu de départ, la différence de longitude d'arrivée & de départ, & les lieues de diſtance, on demanderoit la latitude d'arrivée & le rhumb de vent.

En effet, on a $dz = \frac{dq \text{ tang. } a}{\text{coſ. } (m+q)} + \frac{0{,}00029\, z' da}{\text{ſin. } a \text{ coſ. } a}$, en ſuppoſant le rayon $=1$. Mais on a auſſi $q = 3l \times 0{,}00029$ *coſ.* a (333) ; & par conſéquent $dq = -3lda \times 0{,}00029\, \textit{ſin. } a$; donc $dz = \frac{dq \text{ tang. } a}{\text{coſ. } (m+q)} - \frac{z' dq}{3l \text{ ſin.}^2 a \text{ coſ. } a}$; d'où l'on tire $dq = \frac{3ldz \text{ ſin.}^2 a \text{ coſ. } a \text{ coſ. } (m+q)}{3l \text{ ſin.}^3 a - z' \text{ coſ. } (m+q)}$; d'où connoiſſant à peu près le rhumb de vent & la latitude, on pourra calculer la correction dq qu'on doit faire à cette latitude à peu près connue, en mettant pour a & q leurs valeurs à peu près connues, pour z' la différence de longitude qui répond aux valeurs à peu près connues de a & de q, & pour dz la différence entre la différence de longitude donnée, & celle qui répond à la différence de latitude & au rhumb de vent à peu près connus.

Par exemple, ſuppoſons qu'étant parti de 42° 23′ de latitude nord, & 10° de longitude, on ait fait 864 lieues entre le ſud & l'eſt, & qu'on ſoit actuellement dans un lieu dont la longitude eſt de 72° 53′. On eſtime avoir couru au *S-E* 6° 58′ *E*, & être arrivé par la latitude de 69°; on demande de confirmer ou de rectifier cette eſtime.

Si la latitude & le rhumb eſtimés étoient exacts, la différence de longitude ſeroit de 63° 31′ qui excéde celle qu'on connoît, de 38′; j'ai donc $dz = -38'$, $z' = 3811$, $a = 51° 58'$, & $m + q = 69°$, $3l = 2592$; ſubſtituant ces valeurs, on trouve $dq = 136' = 2° 16'$; donc la latitude d'arrivée corrigée, eſt de 71° 16′.

Pour connoître ſi cette correction eſt ſuffiſante, avec cette nouvelle latitude d'arrivée, je calcule le rhumb de vent, & la différence de longitude; je trouve $a = 48° 2' \frac{1}{2}$, $z' = 3763'$. Donc la différence de longitude qui réſulte de la correction précédente, eſt moindre de 10′ que la différence de longitude donnée; on a donc $dz = +10'$; ſubſtituant ces valeurs comme ci-deſſus, dans celle de dq, on trouve $dq = -22'$. Donc la latitude d'arrivée, corrigée de nouveau, eſt 70° 54′. Je calcule de nouveau le rhumb & la différence de longitude; & je trouve 48° 38′ pour le rhumb, & 3771′ ½ ou 62° 51′ ½ pour la différence de longitude. Il y a donc encore une minute & demie de moins ſur la longitude. Je fais donc $dz = +1' \frac{1}{2}$; & ſubſtituant cette valeur & celles qu'on vient de trouver pour a & pour z', j'ai enfin $a = 48° 50'$, & $m + q = 70° 49'$ qui ſatisfont.

De la Correction qu'on doit faire à la latitude & à la longitude déduites de l'eſtime, lorſqu'on a égard à l'applatiſſement de la Terre.

338. Juſqu'ici nous avons regardé la terre comme ſphérique; mais les obſervations ayant fait reconnoître qu'elle s'écarte un peu de cette figure, il eſt à propos d'examiner

quel changement il doit en résulter dans la réduction des routes.

Soit donc PEp (*fig.* 65) l'un des méridiens de la terre, représenté par une ellipse dont le grand axe EC soit l'un des rayons de l'équateur, & dont le petit axe Pp soit l'axe même de la terre. On a trouvé par observation que l'axe Pp étoit plus petit que le diamètre de l'équateur, d'environ $\frac{1}{179}$ de celui-ci, ensorte que $EC : CP :: 179 : 178$.

Si à chaque point R de l'ellipse on conçoit des perpendiculaires telles que RI; ces perpendiculaires qui représentent la verticale de chaque lieu R, formeront par leur rencontre une ligne courbe AIB; & chacune pourra être considérée comme le rayon du cercle dont la courbure se confond avec celle de l'ellipse au point R. D'où il suit que ces rayons augmentant continuellement de E en P, les arcs qui mesurent un degré, ou une même partie quelconque de degré, augmentent en même rapport en allant de l'équateur vers le pôle; que par conséquent si on conçoit un demi-cercle MDN qui ait pour rayon CD, celui que nous avons jusqu'ici supposé à la terre, c'est-à-dire, celui qui donne 57030 toises pour un degré; l'arc ER du méridien compris entre l'équateur & le lieu quelconque R, n'est pas de même longueur que celui DQ (en imaginant CQ parallèle à IR) qui mesuroit la même latitude; & qu'ainsi, pour déterminer la latitude EPR sur le sphéroïde applati, par les arcs ER du méridien, il faut appliquer une correction à la longueur des arcs DQ par lesquels nous avons jusqu'ici mesuré cette latitude.

339. Pour déterminer cette correction & celle qu'on doit faire à la longitude, représentons par a le rayon EC de l'équateur (*fig.* 66); soit b la moitié CP de l'axe; x, une abscisse quelconque CQ; y le rayon QR du parallèle de R. Nous aurons (*Alg.* 304) $y = \frac{a}{b}\sqrt{(bb - xx)}$; & en prenant l'arc RS infiniment petit, $RS = dx\sqrt{\left(\frac{b^4 + (aa - bb)xx}{bb(bb - xx)}\right)}$ (*Principes de Calcul, &c*); le rayon de la développée RI (*fig.* 65) $= \frac{[b^4 + (aa - bb)x^2]^{\frac{3}{2}}}{ab^4}$.

Soit k le sinus de la latitude $RP'E$; les triangles semblables RtS, $RP'm$ donneront $Rt : St :: Rm : mP'$, c'eſt-à-dire, $-dy : dx :: k : \sqrt{(1-kk)}$, ou $\frac{axdx}{b\sqrt{(bb-xx)}} : dx :: k : \sqrt{(1-kk)}$, d'où l'on tire $k = \frac{ax\sqrt{(1-kk)}}{b\sqrt{(bb-xx)}}$, & $xx = \frac{kkb^4}{aa-(aa-bb)kk}$. Tirant de cette équation la valeur de dx, & la ſubſtituant ainſi que celle de xx, dans celles de y, de RS & de RI, on aura $y = \frac{a^2\sqrt{(1-kk)}}{\sqrt{[a^2-(aa-bb)kk]}}$; $RS = \frac{a^2b^2dk}{\sqrt{(1-kk)}\times[aa-(aa-bb)k^2]^{\frac{3}{2}}}$ $RI = \frac{a^2b^2}{[aa-(aa-bb)k^2]^{\frac{3}{2}}}$.

Réduiſons en ſérie (*Algèbre* 160) la valeur de $[aa-(aa-bb)k^2]^{\frac{3}{2}}$, & bornons-nous aux deux premiers termes; nous aurons $\frac{1}{a^3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{aa-bb}{a^3}k^2$. Suſtituant cette valeur dans celle de RS, il vient $RS = \left(\frac{b^2\,dk}{a} + \frac{3}{2} \cdot b^2 \cdot \frac{aa-bb}{a^3}\,k^2dk\right)(1-kk)^{-\frac{1}{2}}$. Pour intégrer cette quantité (*Principes de Calcul*, &c.), je la ſuppoſe $= d[Ak(1-kk)^{\frac{1}{2}} + Bdk(1-kk)^{-\frac{1}{2}}]$. Exécutant la différenciation indiquée, & comparant les termes affectés de puiſſances égales de k, on a $A = -\frac{3}{4}\frac{b^2}{a^3}(aa-bb)$, & $B = \frac{b^2}{a} + \frac{3}{4}\frac{b^2}{a^3} \cdot (aa-bb)$. Donc $RS = -d[\frac{3}{4}\frac{b^2}{a^3}(aa-bb)k\sqrt{(1-kk)} + \left(\frac{b^2}{a} + \frac{3}{4}\frac{b^2}{a^3} \cdot (aa-bb)\right)\frac{dk}{\sqrt{(1-kk)}}$.

Puiſque b ne diffère de a que d'une quantité fort petite; ſuppoſons $b = a - ma$, m étant $= \frac{1}{179}$; & ſubſtituons pour b cette valeur, en négligeant le quarré & les puiſſances plus élevées de m. Nous aurons $RS = -d[\frac{3}{2}mak\sqrt{(1-kk)}] + (a - \frac{1}{2}ma) \times \frac{dk}{\sqrt{(1-kk)}}$.

Mais ſi on cherche la valeur du rayon de la développée en E & en P, en faiſant ſucceſſivement dans la valeur de

RI, $k=0$, & $k=1$, on trouve $\frac{b^2}{a}$ & $\frac{a^2}{b}$, qui en mettant pour b sa valeur $a-ma$, deviennent $a-2ma$ & $\frac{a}{1-m}$ ou $-2ma$ & $a+ma$ (en divisant par $1-m$, & rejettant les puissances plus élevées de m). Or la moitié de la somme de ces deux quantités est $a-\frac{1}{2}ma$, c'est-à-dire, la quantité qui ci-dessus multiplie $\frac{dk}{\sqrt{(1-kk)}}$. Donc si on conçoit Cq (*fig.* 65) parallèle à IS, on a $(a-\frac{1}{2}ma)\frac{dk}{\sqrt{(1-kk)}}=Qq=d(DQ)$, puisque la quantité CD qu'on prend pour rayon de la terre supposée sphérique, est moyenne entre le plus petit & le plus grand rayon osculateur. On a donc RS ou $d(ER)=-d[\frac{3}{2}mak\sqrt{(1-kk)}]+d(DQ)$; donc en intégrant $ER=-\frac{3}{2}mak\sqrt{(1-kk)}+DQ$ ou $DQ-ER=\frac{3}{2}mak\sqrt{(1-kk)}$; intégrale à laquelle il n'y a point de constante à ajouter, parce que lorsque $k=0$, DQ & ER deviennent zéro ainsi que cela doit être.

Si on représente le rayon moyen CD, par 1, on aura donc $a-\frac{1}{2}ma=1$, & $a=\frac{1}{1-\frac{1}{2}m}=1+\frac{1}{2}m$, donc $ma=m+\frac{1}{2}m^2=m$; on aura donc $DQ-ER=\frac{3}{2}mk\sqrt{(1-kk)}=\frac{3}{2}m$ *sin. lat.* $\times$ *cos. lat.* $=\frac{3}{178}$ *sin. lat.* $\times$ *cos. lat.* C'est-à-dire, que pour avoir la différence de longueur entre l'arc qui mesure une latitude proposée, pour la terre supposée sphérique, & celui qui mesure la même latitude en ayant égard à l'applatissement, il faut prendre les $\frac{3}{178}$ du produit du sinus de la latitude, par le cosinus de la latitude.

Mais comme il est plus commode d'avoir cette correction en minutes de degré, ou en *milles*, qu'en parties du rayon, il n'y a qu'à diviser cette quantité par 0,00029 qui exprime combien il faut de parties du rayon pour faire la longueur de l'arc d'une minute, & l'on aura, toute réduction faite, *Correct. de la Latit.* $=28'$, 9 *sin. lat.* $\times$ *cos. lat.* C'est d'après cette formule que nous avons calculé la Table ci-dessous, quant à la latitude.

340. A l'égard de la correction en longitude. D'après ce qui a été dit (*Principes de Calcul*, &c.), il est facile de voir que si on appelle a le rhumb de vent, dz la petite différence en longitude, correspondante au changement RS en latitu-

de, on aura $dz = \frac{RS \times \text{tang. } a'}{y}$, ou (en mettant pour RS & y, leurs valeurs en k trouvées ci-dessus) $dz = \frac{b^2 dk \text{ tang. } a'}{(1-kk)[aa-(aa-bb)k^2]}$. Pour intégrer cette quantité; je la décompose (*Principes de Calcul*, &c.) en deux fractions qui aient pour dénominateur, l'une $1-kk$, & l'autre $aa-(aa-bb)k^2$, & je trouve $dz = \left(\frac{dk}{1-kk} - \frac{(aa-bb)\,dk}{aa-(aa-bb)k^2}\right)$ *tang.* a'. Or $\frac{dk \text{ tang. } a'}{1-kk}$ est (*Principes de Calcul*, &c.) la différentielle de la longitude dans la supposition de la terre sphérique; donc si on la représente par dz', on aura $dz' - dz = \frac{(aa-bb)\,dk \text{ tang. } a'}{aa-(aa-bb)kk}$ & en intégrant $z'-z$, ou la correction de la longitude, $= \int \frac{(aa-bb)\,dk \text{ tang. } a'}{aa-(aa-bb)kk}$.

Faisons $k\sqrt{(aa-bb)} = au$, & nous aurons $\int \frac{(aa-bb)\,dk \text{ tang. } a'}{aa-(aa-bb)kk} = \int \frac{\sqrt{(aa-bb)}}{a} \; \frac{du \text{ tang. } a'}{1-uu}$. D'où (*Principes de Calcul*, &c.) nous concluerons que la correction à faire à la longitude est égale à $\frac{\sqrt{(aa-bb)}}{a}$, multiplié par la longitude qui correspond à la latitude dont le sinus u est $= \frac{k\sqrt{(aa-bb)}}{a}$.

341. C'est sur ce principe que sont calculées dans la Table suivante les corrections que l'on doit faire à la longitude; corrections qui, ainsi que celles de la latitude, doivent toujours être retranchées de la longitude ou latitude déterminée dans la supposition de la terre sphérique. Les corrections de longitude dans la Table ci-dessous, sont calculées dans la supposition que le rhumb est de 45°; elles expriment, à proprement parler, les corrections qu'on doit faire aux latitudes croissantes. Lorsqu'on voudra en faire usage, pour tout rhumb de vent, il faudra les multiplier par la tangente du rhumb de vent, ainsi que le fait voir le calcul ci-dessus. Nous avons supposé, comme pour la correction des latitudes, $b = a - \frac{1}{179}a$; ce qui donne à très-peu près $\frac{\sqrt{(aa-bb)}}{a} = \sqrt{\frac{2}{179}}$.

TABLE de la Correction qu'on doit faire aux latitudes ſimples, & aux latitudes croiſſantes, eu égard à l'applatiſſement de la Terre.

Degrés de Latitude.	Correction de la Latit. ſimple.	Degrés de Latitude.	Correction de la Latit. croiſſ.
0	0',0	0	0',0
5	2,5	5	3,3
10	4,9	10	6,7
15	7,2	15	10,0
20	9,3	20	13,1
25	10,1	25	16,3
30	12,5	30	19,3
35	13,6	35	22,2
40	14,3	40	24,8
45	14,5	45	27,2
50	14,3	50	29,6
55	13,6	55	31,6
60	12,5	60	33,4
65	10,1	65	35,0
70	9,3	70	36,3
75	7,2	75	37,3
80	4,9	80	37,9
85	2,5	85	38,5
90	0,0	90	38,6

342. Pour donner un exemple de l'uſage de cette Table, ſuppoſons qu'on ait couru 954 lieues à l'*O-N-O*, étant parti de 30° 43' de latitude nord, & de 24° 52' de longitude occidentale comptés de Paris; on demande le lieu de l'arrivée.

En opérant comme il a été dit (109), on trouve que la latitude d'arrivée eſt de 48° 58'; & la longitude, de 82° 51'. Comme la latitude du départ eſt ſuppoſée exacte, c'eſt-à-dire, la même qu'on l'obſerveroit, on ne doit donc corriger la latitude de l'arrivée, que de l'excès de la quantité qui dans la Table ci-dessus répond à cette latitude, sur celle qui répond à la latitude du départ; ainsi puisqu'à la latitude 48° 58′ il répond 14′, 3 & à la latitude 30° 43′ il répond 12′, 6, la correction est 1′, 7 ou 2′ que l'on doit soustraire de la latitude d'arrivée, laquelle sera par conséquent de 48° 56′.

Quant à la longitude; avec les latitudes 30° 43′ & 48° 56′ de départ & d'arrivée, je cherche les corrections qu'on doit faire aux latitudes croissantes correspondantes, & je trouve 19′, 8 & 29′, 1 dont la différence 9′, 3 étant multipliée par la tangente du rhumb de vent 67° 30′, donne 22′ $\frac{1}{2}$ pour la correction de la longitude d'arrivée, qui par conséquent est de 82° 28′ $\frac{1}{2}$.

343. Nous avons supposé dans les calculs ci-dessus, que le méridien étoit une ellipse. Cette supposition ne s'accorde pas parfaitement avec la mesure des degrés faite au Pérou, en France, & en Laponie, par laquelle on a fixé le degré du méridien sous l'équateur, à 56768 toises; sous le parallèle de 45°, en France, à 57030 toises; & sous le cercle polaire, à 57422. Mais l'erreur que cette supposition peut introduire dans l'usage des Tables ci-dessus, n'est d'aucune conséquence.

Résolution de quelques questions de Trigonométrie sphérique qui peuvent être d'usage dans quelques cas.

344. C'est principalement pour donner quelques exemples de la manière d'appliquer le calcul à la Trigonométrie sphérique, que nous plaçons ici les questions suivantes qui peuvent, d'ailleurs, avoir leur application dans certains cas. Le but qu'on doit principalement se proposer dans ces sortes d'applications, est de réduire les solutions, au seul usage des logarithmes, sans être obligé de repasser aux nombres. En un mot, de rendre la solution de ces questions, semblable à celle que la Trigonométrie donne pour les triangles sphériques.

Supposons d'abord qu'ayant observé trois distances d'un astre au zénith, & les intervalles de temps écoulés entre les observations, on veuille déterminer l'heure, la latitude du lieu, & la déclinaiſon de l'aſtre, que l'on ſuppoſe reſter la même.

Soit *HZO* (*fig.* 67) le méridien; *HAO* l'horizon; *ZC*, *ZB*, *ZA*, les trois verticaux dans leſquels l'aſtre a été obſervé en *F*, *E*, *D*; *P* le pôle. Soient nommés a la diſtance *ZP* du zénith au pôle; b la diſtance *PF* de l'aſtre au pôle. Soient c, c', c'' les diſtances au zénith *ZF*, *ZE*, *ZD*, e, e', e'', les angles horaires correſpondans *ZPF*, *ZPE*, *ZPD*. Si de *Z* on conçoit un arc *ZQ* perpendiculaire ſur *PF*, on aura (*Géom.* 353) $1 : cof.\, e :: tang.\, a : tang.\, x$, en nommant *PQ*, x. Et (*Géom.* 357) $cof.\, x : cof.\, (b - x) :: cof.\, a : cof.\, c$, ou $cof.\, x : cof.\, b\ cof.\, x + fin.\, b\ fin.\, x :: cof.\, a : cof.\, c$, ou $1 : cof.\, b + fin.\, b\ tang.\, x :: cof.\, a : cof.\, c$; donc $cof.\, c = cof.\, a\ cof.\, b + cof.\, a\ fin.\, b\ tang.\, x$, ou enfin, en mettant pour $tang.\, x$, ſa valeur, $cof.\, c = cof.\, a\ cof.\, b + fin.\, a\ fin.\, b\ cof.\, e$.

En raiſonnant de même pour les deux autres triangles *ZPE*, *ZPD*, on aura donc en tout, les trois équations ſuivantes.

$cof.\, c = cof.\, a\ cof.\, b + fin.\, a\ fin.\, b\ cof.\, e \ldots\ldots$ (A)

$cof.\, c' = cof.\, a\ cof.\, b + fin.\, a\ fin.\, b\ cof.\, e' \ldots\ldots$ (B)

$cof.\, c'' = cof.\, a\ cof.\, b + fin.\, a\ fin.\, b\ cof.\, e'' \ldots\ldots$ (C)

Retranchant la ſeconde & la troiſième, de la première, on aura. . . . .

$cof.\, c - cof.\, c' = fin.\, a\ fin.\, b\ (cof.\, e - cof.\, e') \ldots$ (D)

$cof.\, c - cof.\, c'' = fin.\, a\ fin.\, b\ (cof.\, e - cof.\, e'') \ldots$ (E)

Donc en égalant les deux valeurs de $fin.\, a\ fin.\, b$, on a $\dfrac{cof.\, c - cof.\, c'}{cof.\, c - cof.\, c''} = \dfrac{cof.\, e - cof.\, e'}{cof.\, c - cof.\, e''}$, équation qui d'après ce qui a été dit (*Alg.* 419) peut être changée en cette autre.

$$\frac{fin.\, \frac{1}{2}(c'+c)\ fin.\, \frac{1}{2}(c'-c)}{fin.\, \frac{1}{2}(c''+c)\ fin.\, \frac{1}{2}(c''-c)} = \frac{fin.\, \frac{1}{2}(e'+e)\ fin.\, \frac{1}{2}(e'-e)}{fin.\, \frac{1}{2}(e''+e)\ fin.\, \frac{1}{2}(e''-e)};$$ donc

$$\frac{fin.\, \frac{1}{2}(e'+e)}{fin.\, \frac{1}{2}(e''+e)} = \frac{fin.\, \frac{1}{2}(c'+c)\ fin.\, \frac{1}{2}(c'-c)\ fin.\, \frac{1}{2}(e''-e)}{fin.\, \frac{1}{2}(c''+c)\ fin.\, \frac{1}{2}(c''-c)\ fin.\, \frac{1}{2}(e'-e)},$$

or tout eſt connu dans ce ſecond membre.

Suppoſons donc $\dfrac{fin.\, \frac{1}{2}(c'+c)\ fin.\, \frac{1}{2}(c'-c)\ fin.\, \frac{1}{2}(e''-e)}{fin.\, \frac{1}{2}(c''+c)\ fin.\, \frac{1}{2}(c''-c)\ fin.\, \frac{1}{2}(e'-e)} = fin.\, m$, on aura facilement $fin.\, m$, par Logarithmes, & par conſéquent m.

On aura donc auſſi $\dfrac{fin.\, \frac{1}{2}(e'+e)}{fin.\, \frac{1}{2}(e''+e)} = fin.\, m$. Soit $\frac{1}{2}(e'+e)$

$+\frac{1}{2}(e''+e)=y$, & $\frac{1}{2}(e''+e)-\frac{1}{2}(e'+e)$ ou $\frac{1}{2}(e''-e')=g$; g ſera connu; & l'on aura $\frac{1}{2}(e''+e)=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}g$, & $\frac{1}{2}(e'+e)=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}g$; donc $\frac{\sin.(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}g)}{\sin.(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}g)}=\sin. m$, ou $\frac{\sin.\frac{1}{2}y\cos.\frac{1}{2}g-\sin.\frac{1}{2}g\cos.\frac{1}{2}y}{\sin.\frac{1}{2}y\cos.\frac{1}{2}g+\sin.\frac{1}{2}g\cos.\frac{1}{2}y}=\sin. m$, ou $\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}y-\text{tang.}\frac{1}{2}g}{\text{tang.}\frac{1}{2}y+\text{tang.}\frac{1}{2}g}=\sin. m$; d'où l'on tire $\text{tang.}\frac{1}{2}y=\frac{1+\sin. m}{1-\sin. m}\text{tang.}\frac{1}{2}g$. Mais (*Géom.* 286) $\frac{1+\sin. m}{1-\sin. m}=\frac{\text{tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}m)}{\text{tang.}(45^\circ-\frac{1}{2}m)}=\text{tang.}^2(45^\circ+\frac{1}{2}m)$, parce que $\text{tang.}(45^\circ-\frac{1}{2}m)=\cot.[90^\circ-(45^\circ-\frac{1}{2}m)]=\cot.(45^\circ+\frac{1}{2}m)=\frac{1}{\text{tang.}(45^\circ+\frac{1}{2}m)}$; donc enfin $\text{tang.}\frac{1}{2}y=\text{tang.}\frac{1}{2}g\,\text{tang.}^2(45^\circ+\frac{1}{2}m)$; il ſera donc facile d'avoir y, & par conſéquent e, puiſqu'on a $\frac{1}{2}(e'+e)+\frac{1}{2}(e''+e)=y$ ou $\frac{1}{2}(e'-e+2e)+\frac{1}{2}(e''-e+2e)=y$, qui donne $e=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}(e'-e)-\frac{1}{2}(e''-e)$, équation dont le ſecond membre eſt entièrement connu.

345. Pour avoir a & b; je prends dans l'équation (D) la valeur de $\sin. a \sin. b$, ſavoir $\frac{\cos. c-\cos. c'}{\cos. e-\cos. e'}$; & après avoir ajouté les deux équations (A) & (B), je ſubſtitue dans leur ſomme, la valeur de $\sin. a \sin. b$, & j'en tire celle de $\cos. a \cos. b=\frac{\cos. c'\cos. e-\cos. c\cos. e'}{\cos. e-\cos. e'}$.

De cette valeur de $\cos. a \cos. b$, je retranche celle de $\sin. a \sin. b$, pour avoir celle de $\cos.(b+a)$; je les ajoute au contraire, pour avoir celle de $\cos.(b-a)$, & j'ai $\cos.(b+a)=\frac{\cos. c'(1+\cos. e)-\cos. c(1+\cos. e')}{\cos. e-\cos. e'}$, & $\cos.(b-a)=\frac{\cos. c(1-\cos. e')-\cos. c'(1-\cos. e)}{\cos. e-\cos. e'}$, mettant donc au lieu de $\cos. e-\cos. e'$, ſa valeur $2\sin.\frac{1}{2}(e'+e)\sin.\frac{1}{2}(e'-e)$; pour $(1-\cos. e')$ ſa valeur $2\sin.^2\frac{1}{2}e'$, pour $1+\cos. e$, ſa valeur $2\cos.^2\frac{1}{2}e'$, & ainſi des autres, on aura $\cos.(b+a)=\frac{\cos. c'\cos.^2\frac{1}{2}e-\cos. c\cos.^2\frac{1}{2}e'}{\sin.\frac{1}{2}(e'+e)\sin.\frac{1}{2}(e'-e)}$ $\cos.(b-a)=\frac{\cos. c\sin.^2\frac{1}{2}e'-\cos. c'\sin.^2\frac{1}{2}e}{\sin.\frac{1}{2}(e+e)\sin.\frac{1}{2}(e'-e)}$.

Faisons $\frac{\text{cos}.\, c\, \text{cos}.^2 \frac{1}{2} e'}{\text{sin}.\, c'\, \text{cos}.^2 \frac{1}{2} e} = tang.\, p$, & $\frac{\text{cos}.\, c'\, \text{sin}.^2 \frac{1}{2} e}{\text{sin}.\, c\, \text{sin}.^2 \frac{1}{2} e} = tang.\, p'$; p & p' feront faciles à déterminer par logarithmes. On aura $cos.\, (b + a) = cos.^2 \frac{1}{2} e \frac{(\text{cos}.\, c'\, \text{cos}.\, p - \text{sin}.\, c'\, \text{sin}.\, p)}{\text{cos}.\, p\, \text{sin}.\, \frac{1}{2}(e' + e)\, \text{sin}.\, \frac{1}{2}(e' - e)}$, ou $cos.\, (b + a) = \frac{\text{cos}.^2 \frac{1}{2} e\, \text{cos}.\, (c' + p)}{\text{cos}.\, p\, \text{sin}.\, \frac{1}{2}(e' + e)\, \text{sin}.\, \frac{1}{2}(e' - e)}$, & $cos.\, (b - a) = \frac{\text{sin}.^2 \frac{1}{2} e' (\text{cos}.\, c + p')}{\text{cos}.\, p'\, \text{sin}.\, \frac{1}{2}(e' + e)\, \text{sin}.\, \frac{1}{2}(e' - e)}$; d'où l'on voit qu'en employant les logarithmes, on aura a, b, e, par de fimples additions & fouftractions.

Mais il faut obferver que comme rien ne détermine à prendre $cos.\, (b - a)$ plutôt que $cos.\, (a - b)$ pour repréfenter $cos.\, a\, cos.\, b + sin.\, a\, sin.\, b$, on ne faura entre la valeur de a & celle de b, quelle eft celle qu'on doit prendre pour le complément de la latitude, qu'autant qu'on faura fi la latitude eft plus grande ou plus petite que la déclinaifon.

346. Si les trois hauteurs font prifes dans les environs du méridien, enforte que les angles horaires e, e', e'' foient petites; alors on peut réfoudre la queftion plus fimplement de la manière fuivante.

$b - a$ eft la diftance méridienne de l'aftre au zénith; foit z la différence de c à $b - a$, enforte que $b - a = c - z$. Cela pofé, l'équation $cos.\, c = cos.\, a\, cos.\, b + sin.\, a\, sin.\, b.\, cos.\, e$ qui eft la même que $cos.\, c = cos.\, (b - a) - sin.\, a\, sin.\, b\, (1 - cos.\, e)$, fe change en $cos.\, (c - z) - cos.\, c = sin.\, a\, sin.\, b\, (1 - cos.\, e)$; ou parce que z & e étant de petites quantités, on a $cos.\, (c - z) = cos.\, c + z\, sin.\, c$, & $1 - cos.\, e = \frac{1}{2} e^2$, on aura $z\, sin.\, c = \frac{1}{2} e^2$, $sin.\, a\, sin.\, b$. Par la même raifon, fi on fait $c' - c = k$, $c'' - c = l$, $e' - e - r$, $e'' - e = s$, k, l, r, & s étant de petites quantités connues, on aura $z\, sin.\, c. + k\, sin.\, c = \frac{1}{2}(e^2 + 2er + r^2)\, sin.\, a\, sin.\, b$, & $z\, sin.\, c + l\, sin.\, c = \frac{1}{2}(e^2 + 2es + s^2)\, sin.\, a\, sin.\, b$. De ces trois équations on conclura facilement $e = \frac{ks^2 - lr^2}{2(rl - ks)}$, $sin.\, a\, sin.\, b = \frac{(rl - ks)\, \text{sin}.\, c}{2rs\,(s - r)}$, & $z = \frac{(ks^2 - lr^2)^2}{4rs\,(s - r)\,(rl - ks)}$.

347. Lorfque les intervalles entre les obfervations font égaux,

égaux, on a $s=2r$, & z devient $z=\frac{(4k-l)^2}{4(2l-4k)}$; c'est la quantité que l'on doit retrancher de la plus petite des trois distances au zénith pour avoir la distance méridienne au zénith.

348. Quoique cette solution puisse être d'un usage assez étendu, elle ne doit cependant pas être employée, sans une vérification que nous allons enseigner.

En effet, dans cette approximation, nous avons supposé $cos.\,(c-z)=cos.\,c+z\,sin.\,c$, au lieu que la valeur rigoureuse est $cos.\,c\,cos.\,z+sin.\,c\,sin.\,z$, ou (en ne négligeant que les quantités de degrés au-delà de z^2) $cos.\,c-\frac{1}{2}z^2\,cos.\,c+z\,sin.\,c$. Ainsi on auroit pour la première équation ci-dessus, $-\frac{1}{2}z^2\,cos.\,c+z\,sin.\,c=sin.\,a\,sin.\,b\,(1-cos.\,e)$. Et comme la solution ci-dessus fait connoître que z est de l'ordre e^2, il faut pour la valeur approchée de $1-cos.\,e$, prendre non-seulement $\frac{1}{2}e^2$, mais $\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{24}e^4$; ensorte que nous aurons $-\frac{1}{2}z^2\,cos.\,c+z\,sin.\,c=sin.\,a\,sin.\,b\,(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{24}e^4)$, d'où l'on tire $z=tang.\,c-\sqrt{}\left[tang.^2\,c-\frac{2\,\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,b}{\text{cos.}\,c}(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{24}e^4)\right]=tang.\,c-tang.\,c\left[1-\frac{\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,b}{\text{tang.}^2\,c\,\text{cos.}\,c}(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{24}e^4)-\frac{1}{2}\frac{\text{sin.}^2\,a\,\text{sin.}^2\,b}{\text{tang.}^2\,c\,\text{cos.}^2\,c}(\frac{1}{4}e^4)\right]$, en réduisant le radical en série, & négligeant les quantités qui passent l'ordre de e^4. Ainsi on a $z=\frac{\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,b}{\text{sin.}\,c}\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{24}\frac{\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,b}{\text{sin.}\,c}e^4+\frac{1}{8}\frac{\text{sin.}^2\,a\,\text{sin.}^2\,b\,\text{cos.}\,c}{\text{sin.}^3\,c}e^4$. Mais en appellant z' la valeur approchée de z, trouvée par la première approximation, on a $z'=\frac{1}{2}e^2\frac{\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,b}{\text{sin.}\,c}$; on a donc $z=z'-\frac{1}{12}e^2z'+\frac{1}{2}\frac{e^2z'^2}{\text{tang.}\,c}$.

Donc si la valeur de c, & les valeurs trouvées pour z' & pour e, étoient telles que $-\frac{1}{12}e^2z'+\frac{1}{2}\frac{e^2z'^2}{\text{tang.}\,c}$, donnât une quantité qui passât la limite jusqu'à laquelle on a besoin d'avoir z, c'est-à-dire, qui passât 1 minute, lorsqu'on veut avoir z à moins d'une minute près, il faudroit s'abstenir de l'uſage de cette méthode; & quoique ſouvent — $\frac{1}{12} e^2 z' + \frac{1}{2} \frac{e^2 z'^2}{\text{tang.}\, c}$ ſoit une correction ſuffiſante pour la valeur de z, il vaut mieux en général, dans ce cas, avoir recours à la ſolution rigoureuſe ci-deſſus (344).

Obſervons que dans la quantité $- \frac{1}{12} e^2 z' + \frac{1}{2} \frac{e^2 z'^2}{\text{tang.}\, c}$; e eſt cenſé évalué en parties du rayon, quoique dans celle de z', il ſoit compté en parties de degrés. C'eſt pourquoi, comme e eſt donné en parties de degré, il faudra pour ſubſtituer dans $- \frac{1}{12} e^2 z'$ &c., multiplier la valeur de e, par 0,01745 ſi e eſt donné en degrés; pareillement, dans le terme $\frac{\frac{1}{2} e^2 z'^2}{\text{tang.}\, c}$, on ne mettra pour z' ſa valeur en degrés, qu'une ſeule fois & pour l'autre facteur z' on mettra la valeur de z' en degrés, multipliée par 0,01745.

349. Si l'on vouloit avoir égard au changement en déclinaiſon dans l'intervalle des obſervations; alors en nommant m le changement en déclinaiſon, correſpondant à $e' - e$, & n, le changement correſpondant à $e'' - e$, on auroit les trois équations. . . . .

$$\text{cos.}\, c = \text{cos.}\, (b - a) - \text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, b\, (1 - \text{cos.}\, e)$$
$$\text{cos.}\, c' = \text{cos.}\, (b - a - m) - \text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, (b - m)\, (1 - \text{cos.}\, e')$$
$$\text{cos.}\, c'' = \text{cos.}\, (b - a - n) - \text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, (b - n)\, (1 - \text{cos.}\, e'')$$

en ſuppoſant que la diſtance de l'aſtre au pôle, va en augmentant.

Prenant donc $\text{cos.}\, (b - a) + m\, \text{sin.}\, (b - a)$ au lieu de $\text{cos.}\, (b - a - m)$, & $\text{cos.}\, (b - a) + n\, \text{sin.}\, (b - a)$ au lieu de $\text{cos.}\, (b - a - n)$; négligeant m & n, dans $\text{sin.}\, (b - m)$ & $\text{sin.}\, (b - n)$, parce que le terme $m\, \text{cos.}\, b$, & $n\, \text{cos.}\, b$ qu'ils donneroient, devant être multiplié par $\frac{1}{2} e'^2$, & $\frac{1}{2} e''^2$ feroit du troiſième ordre; mettant enfin au lieu de $\text{cos.}\, (b - a)$ ſa valeur $\text{cos.}\, (c - z)$, & au lieu de $m\, \text{sin.}\, (b - a)$ & $n\, \text{sin.}\, (b - a)$, mettant ſeulement $m\, \text{sin.}\, c$, & $n\, \text{sin.}\, c$, on aura toute réduction faite, ...

$$z\, \text{sin.}\, c = \text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, b . \tfrac{1}{2} e^2$$
$$z\, \text{sin.}\, c + k\, \text{sin.}\, c + m\, \text{sin.}\, c = \tfrac{1}{2} (e^2 + 2er + r^2)\, \text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, b$$
$$z\, \text{sin.}\, c + l\, \text{sin.}\, c + n\, \text{sin.}\, c = \tfrac{1}{2} (e^2 + 2er + r^2)\, \text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, b.$$

D'où il eſt facile de conclure que pour avoir z, il ne s'agit que de ſubſtituer, dans la valeur de z donnée dans la ſolution précédente $k + m$, au lieu de k, & $l + n$ au lieu de l. Quant à la distance méridienne au zénith, elle n'est plus $b - a$; mais $b - a$ augmenté du changement en déclinaison correspondant à la valeur de l'angle horaire e, qui se trouvera comme ci-dessus (346) en mettant $k + m$ pour k, & $l + n$ pour l.

350. Proposons-nous actuellement de trouver l'équation du midi conclu par des hauteurs correspondantes, soit à terre soit à la mer.

Pour connoître la marche d'une horloge, lorsqu'on reste dans un même lieu, & si le Soleil ne changeoit point en déclinaison, la méthode la plus exacte seroit d'observer pendant deux jours consécutifs, les deux instans de chaque jour, où le Soleil arrive à une même hauteur quelconque sur l'horizon. Le milieu entre ces deux instans seroit l'heure que la montre a dû marquer à midi; ensorte que si les observations de chaque jour s'accordoient à donner la même heure, on seroit assuré que la montre est bien réglée, sur le mouvement du Soleil; & la différence entre midi, & l'heure que l'on auroit conclu, seroit l'erreur absolue de la montre. Que si au contraire, on trouvoit de la différence entre les deux midis consécutifs: si on trouvoit par exemple, qu'au midi du premier jour, la montre a dû marquer $12^h\ 4'$, & qu'au midi du second jour elle a dû marquer $12^h\ 2'$, on en concluroit, que le premier jour elle avançoit de $4'$; & le second de $2'$ seulement, ensorte qu'on connoîtroit qu'elle retarde de $2'$ en 24 heures.

Mais si le Soleil change de déclinaison, & si en même temps on change de lieu dans l'intervalle des deux observations d'un même jour, il est visible que le Soleil ne sera pas l'après-midi, à la même hauteur que le matin, à pareille distance du méridien; & que par conséquent le midi conclu par un milieu pris entre les instans marqués à l'horloge, lors des deux observations d'un même jour, aura besoin d'une correction.

Nous allons la déterminer d'abord en supposant que le changement en déclinaison, & le changement de lieu soient quelconques. Nous verrons ensuite une méthode plus expéditive, lorsque l'un & l'autre de ces changemens sont fort petits.

351. Soit donc c la distance du Soleil au zénith lors de l'observation du matin & de celle du soir, distance qu'il n'est pas nécessaire de connoître, il suffit qu'elle soit la même

dans chaque cas. Soit a la diſtance du zénith au pôle, b la diſtance de l'aſtre au même pôle, & e l'angle horaire lors de la première obſervation, ſoient a', b', e' les valeurs reſpectives de ces quantités lors de la ſeconde obſervation. On aura. . . . .

$\cos. c = \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b \cos. e$

$\cos. c = \cos. a' \cos. b' + \sin. a' \sin. b' \cos. e'$; donc. . . :

$0 = \cos. a \cos. b - \cos. a' \cos. b' + \sin. a \sin. b \cos. e - \sin. a' \sin. b' \cos. e'$.

Soit fait $\cos. a \cos. b = \cos. m$, $\cos. a' \cos. b' = \cos. m'$, $\sin. a \sin. b = \sin. p$, $\sin. a' \sin. b' = \sin. p'$. Puiſque a, b, a', b' ſont connus, il ſera aiſé d'avoir m, p, m' & p' par les Tables, & par de ſimples additions de logarithmes.

On aura donc $0 = \cos. m - \cos. m' + \sin. p \cos. e - \sin. p' \cos. e'$. Soit $e' + e = q$, & $e' - e = z$; $e' + e$ ſera connu en retranchant (ſi la route porte à l'oueſt, ou en ajoutant ſi elle porte à l'eſt) la différence des méridiens, de l'intervalle de temps écoulé entre les deux obſervations, reduit en degrés à raiſon de 15° par heure. On aura donc $e' = \frac{1}{2}(q + z)$ & $e = \frac{1}{2}(q - z)$.

Donc $0 = \cos. m - \cos. m' + \sin. p \cos. \frac{1}{2}(q - z) - \sin. p' \cos. \frac{1}{2}(q + z)$ ou bien (*Algèbre*, 419 & 415) $0 = 2 \sin. \frac{1}{2}(m' + m) \sin. \frac{1}{2}(m' - m)$. . . . .

$$\left.\begin{array}{l} + \sin. p \cos. \frac{1}{2} q \cos. \frac{1}{2} z + \sin. p \sin. \frac{1}{2} q \sin. \frac{1}{2} z \\ - \sin. p' \cos. \frac{1}{2} q \cos. \frac{1}{2} z + \sin. p' \sin. \frac{1}{2} q' \sin. \frac{1}{2} z \end{array}\right\}, \text{ ou. . .}$$

$\sin. \frac{1}{2}(m + m) \sin. \frac{1}{2}(m' - m) = \cos. \frac{1}{2}(p' + p) \sin. \frac{1}{2}(p' - p) \cos. \frac{1}{2} q \cos. \frac{1}{2} z - \sin. \frac{1}{2}(p' + p) \cos. \frac{1}{2}(p' - p) \sin. \frac{1}{2} q \sin. \frac{1}{2} z$.

Soit fait $\cos. \frac{1}{2}(p' + p) \sin. \frac{1}{2}(p' - p) \cos. \frac{1}{2} q = \sin. \frac{1}{2}(p' + p) \cos. \frac{1}{2}(p' - p) \sin. \frac{1}{2} q \tan g. r$, qui eſt la même choſe que $\cot. \frac{1}{2}(p' + p) \cot. \frac{1}{2} q \tan g. \frac{1}{2}(p' - p) = \tan g. r$; il ſera facile d'avoir r par de ſimples additions de logarithmes.

On aura donc $\sin. \frac{1}{2}(m' + m) \sin. \frac{1}{2}(m' - m) = \sin \frac{1}{2}(p' + p) \cos. \frac{1}{2}(p' - p) \sin. \frac{1}{2} q \left(\frac{\sin. r \cos. \frac{1}{2} z - \cos. r \sin. \frac{1}{2} z}{\cos. r}\right) = \sin. \frac{1}{2}(p' + p) \cos. \frac{1}{2}(p' - p) \sin. \frac{1}{2} q \frac{\sin. (r - \frac{1}{2} z)}{\cos. r}$; donc enfin on a

$$\sin. (r - \tfrac{1}{2} z) = \frac{\sin. \frac{1}{2}(m' + m) \sin. \frac{1}{2}(m' - m) \cos. r}{\sin. \frac{1}{2}(p' + p) \cos. \frac{1}{2}(p' - p) \sin. \frac{1}{2} q},$$

équation qui par de ſimples additions & ſouſtractions de logarithmes, donnera $r - \frac{1}{2} z$, & par conſéquent $\frac{1}{2} z$, & par conſéquent auſſi, e qui eſt égal à $\frac{1}{2}(q - z)$, dans lequel q eſt connu par ce qui a été dit ci-deſſus.

352. Si les observations étoient faites dans le même lieu, ensorte que a' fût $= a$, le calcul seroit plus simple. Car alors on auroit

$$\cos.\, c = \cos.\, a \cos.\, b + \sin.\, a \sin.\, b \cos.\, e$$
$$\cos.\, c = \cos.\, a \cos.\, b' + \sin.\, a \sin.\, b' \cos.\, e'$$

ou $0 = \cos.\, a\, (\cos.\, b - \cos.\, b') + \sin.\, a\, (\sin.\, b \cos.\, e - \sin.\, b' \cos.\, e')$
ou $0 = 2 \cos.\, a \sin.\, \tfrac{1}{2}(b'+b) \sin.\, \tfrac{1}{2}(b'-b) + \sin.\, a\, (\sin.\, b \cos.\, e - \sin.\, b' \cos.\, e')$
faisant donc comme ci-dessus $e' + e = q$, & $e' - e = z$, on auroit

$$0 = 2 \cos.\, a \sin.\, \tfrac{1}{2}(b'+b) \sin.\, \tfrac{1}{2}(b'-b) + \sin.\, a \left\{ \begin{array}{l} \sin.\, b \cos.\, \tfrac{1}{2} q \cos.\, \tfrac{1}{2} z + \sin.\, b \sin.\, \tfrac{1}{2} q \sin.\, \tfrac{1}{2} z \\ -\sin.\, b' \cos.\, \tfrac{1}{2} q \cos.\, \tfrac{1}{2} z + \sin.\, b' \sin.\, \tfrac{1}{2} q \sin.\, \tfrac{1}{2} z \end{array} \right\}$$

ou $\cos.\, a \sin.\, \tfrac{1}{2}(b'+b) \sin.\, \tfrac{1}{2}(b'-b) = \sin.\, a\, (\cos.\, \tfrac{1}{2}(b'+b) \sin.\, \tfrac{1}{2}(b'-b) \cos.\, \tfrac{1}{2} q \cos.\, \tfrac{1}{2} z - \sin.\, \tfrac{1}{2}(b'+b) \cos.\, \tfrac{1}{2}(b'-b) \sin.\, \tfrac{1}{2} q \sin.\, \tfrac{1}{2} z)$. D'où en faisant $\cos.\, \tfrac{1}{2}(b'+b) \sin.\, \tfrac{1}{2}(b'-b) \cos.\, \tfrac{1}{2} q = \sin.\, \tfrac{1}{2}(b'+b) \cos.\, \tfrac{1}{2}(b-b) \sin.\, \tfrac{1}{2} q\, \text{tang.}\, r$ ou $\cot.\, \tfrac{1}{2}(b'+b)\, \text{tang.}\, \tfrac{1}{2}(b'-b) \cot.\, \tfrac{1}{2} q = \text{tang.}\, r$, on tireroit comme ci-dessus $\cos.\, (r - \tfrac{1}{2} z) = \dfrac{\cot.\, a\, \text{tang.}\, \tfrac{1}{2}(b'-b) \cos.\, r}{\sin.\, \tfrac{1}{2} q}$.

353. Si on suppose que les quantités a', b', e' diffèrent peu des quantités a, b, e, ainsi que cela a lieu en effet, lorsqu'il s'agit du Soleil, & du chemin que le vaisseau peut faire dans un jour; alors si on fait $a' - a = da$, $b' - b = db$, $e' - e = de$; on aura $\cos.\, a' = \cos.\, (a + da) = \cos.\, a - da \sin.\, a$; $\cos.\, b' = \cos.\, b - db \sin.\, b$, $\sin.\, a' = \sin.\, a + da \cos.\, a$, $\sin.\, b' = \sin.\, b + db \cos.\, b$; $\cos.\, e' = \cos.\, e - de \sin.\, e$. Substituant ces quantités dans l'équation $\cos.\, c = \cos.\, a' \cos.\, b' + \sin.\, a' \sin.\, b \cos.\, e'$, négligeant les quantités du second ordre, & retranchant de l'équation résultante, l'équation $\cos.\, c = \cos.\, a \cos.\, b + \sin.\, a \sin.\, b \cos.\, e$: on aura $de \sin.\, a \sin.\, b \sin.\, e = -da\, (\sin.\, a \cos.\, b - \sin.\, b \cos.\, a \cos.\, e) - db\, (\sin.\, b \cos.\, a - \sin.\, a \cos.\, b \cos.\, e)$, d'où l'on tire $de = -da \left(\dfrac{\cot.\, b}{\sin.\, e} - \cot.\, a \cot.\, e \right)$

$- db \left(\dfrac{\cot.\, a}{\sin.\, e} - \cot.\, b \cot.\, e \right)$.

Mais si on appelle t le nombre d'heures écoulées entre les deux observations, & qu'on représente par dM la différence de longitude des deux lieux d'observation, on aura $e' + e = 15^\circ t - dM$; c'est-à-dire, $2e + de = 15^\circ t - dM$, d'où $e = \tfrac{1}{2}(15^\circ t - dM - de)$, & par conséquent $\dfrac{e}{15^\circ}$ (ou l'heure que la montre auroit dû marquer lors de la première obſervation) $= \frac{1}{2}\left(t - \frac{dM + de}{15^\circ}\right)$. Mais comme dM ainſi que de ſont fort petits à l'égard de $15^\circ t$, il ſuffit de ſubſtituer pour e, dans la valeur de de, ſa valeur approchée $\frac{15^\circ t}{2}$, & l'on aura $de = -da\left(\frac{\text{cot. } b}{\text{ſin. } \frac{15^\circ}{2} t} - cot.\, a\; cot. \frac{15^\circ t}{2}\right) - db$ $\left(\frac{\text{cot. } a}{\text{ſin. } \frac{15^\circ}{2} t} - cot.\, b\; cot. \frac{15^\circ t}{2}\right)$. Or $cot.\, b$ eſt la tangente de la déclinaiſon, & $cot.\, a$ eſt la tangente de la latitude ; on a donc $de = -da\left(\frac{\text{tang. décl.}}{\text{ſin. } \frac{15^\circ}{2} t} - tang.\, lat.\; cot. \frac{15^\circ t}{2}\right) - db\left(\frac{\text{tang. lat.}}{\text{ſin. } \frac{15^\circ}{2} t}\right.$ $\left. - tang.\, décl.\; cot. \frac{15^\circ t}{2}\right)$; ainſi mettant pour da & db leurs valeurs en minutes ou en ſecondes, on aura facilement la valeur de de en minutes ou en ſecondes ; & puiſqu'on a $\frac{e}{15^\circ} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{dM + de}{15^\circ}\right)$, ſi on appelle h l'heure que marquoit l'horloge lors de l'obſervation du matin, on aura $h + \frac{e}{15^\circ} = h + \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \frac{dM + de}{15^\circ}$; or $h + \frac{e}{15^\circ}$ eſt l'heure que la montre a dû marquer à midi ; & $h + \frac{1}{2} t$ eſt celle qu'elle auroit marqué ſi dans l'intervalle des obſervations il n'y avoit eu ni changement de lieu, ni changement en déclinaiſon ; donc la correction qu'on doit faire au midi conclu dans cette dernière ſuppoſition, eſt $-\frac{1}{2}\left(\frac{dM + de}{15^\circ}\right)$; c'eſt-à-dire, que c'eſt la quantité qu'on doit retrancher du milieu pris entre l'heure de l'obſervation du matin & celle du ſoir, en ſuppoſant, comme nous l'avons fait ici, qu'on a fait route à l'oueſt du méridien du matin, & que la valeur de de ſoit poſitive. Mais ſi la route avoit porté à l'eſt, on feroit dM négatif. A l'égard du ſigne de de, il eſt déterminé par ceux de da & db. Or nous avons ſuppoſé que a & b croiſſoient; ſi l'un des deux ou tous les deux diminuoient, on changeroit le ſigne de leur variation da ou db, dans la valeur de de.

354. On peut remarquer dans la valeur que nous venons de trouver pour de, 1°. qu'elle eſt compoſée principalement de deux parties, dont l'une dépend du changement da en

latitude ; & l'autre du changement $d\,b$ en déclinaiſon ; mais que l'une ſe calcule par des opérations ſemblables à celles qui donnent l'autre, en changant le mot *latitude* en celui de *déclinaiſon*, & réciproquement.

2°. Que chacun de ces deux termes peut croître juſqu'à l'infini par l'augmentation de la latitude, depuis 0° juſqu'à 90° ; enſorte que la formule devient inſuffiſante lorſqu'on ſe trouve près du pôle ; mais dans ce cas, on auroit recours à la ſolution générale (351).

Additions à ce qui a été dit dans la troiſième Section, ſur la manière de trouver la longitude en mer, par l'obſervation de la diſtance de la Lune aux Etoiles.

355. Nous avons dit (284) que lorſque l'arc de la diſtance de la Lune à l'étoile eſt petit, les corrections que l'on fait à la diſtance apparente, par la méthode expoſée (280), devenoient douteuſes. Il faut donc alors, ou employer une étoile plus éloignée, ou trouver un moyen de calculer plus exactement la correction qu'on doit faire à la diſtance. Nous nous arrêterons d'autant plus volontiers ſur ce dernier objet, qu'il devient ſouvent indiſpenſable lorſqu'on fait uſage du *Mégamètre.* Cet inſtrument, dans la conſtruction duquel *M. de Charnieres*, Lieutenant de vaiſſeau, s'eſt propoſé de rendre l'éliomètre de *M. Bouguer* applicable à la meſure des diſtance d'étoiles à la Lune, a l'avantage de meſurer ces diſtances avec une préciſion beaucoup plus grande qu'on ne peut le faire avec l'octant. Mais comme les arcs qu'il peut meſurer dans ſon état actuel, ne vont guères au-delà de 8 à 10 degrès, il faut pour calculer la correction de la diſtance, une méthode plus rigoureuſe que celle que nous avons donnée (280). Entre pluſieurs que l'on peut aiſément trouver, nous nous arrêterons à la ſuivante.

356. Par l'heure de l'obſervation de la diſtance de la Lune à l'étoile, on a l'angle horaire du Soleil ; & par la différence d'aſcenſion droite entre l'étoile & le Soleil, on a l'angle au pôle, entre l'étoile & le Soleil ; on aura donc facilement l'angle horaire de l'étoile. Alors dans le triangle ZPS (*fig.* 68) où l'on connoît le complément ZP de la latitude, la diſtance PS de l'étoile au pôle (par le ca-

talogue des étoiles), & l'angle horaire *ZPS*, il ſera facile de calculer la diſtance vraie *ZS* de l'étoile au zénith, avec laquelle on trouvera dans la Table, la réfraction correſpondante.

Par la longitude & la latitude de la Lune, calculées comme il a été (276 & 287), & par ce qui a été dit (153) on pourra calculer l'aſcenſion droite & la déclinaiſon de la Lune. De cette aſcenſion droite comparée à celle du Soleil, comme il vient d'être dit pour l'étoile, on conclura l'angle horaire de la Lune. Avec cet angle horaire, la diſtance de la Lune au pôle, conclue de ſa déclinaiſon, & le complément *ZP* de la latitude du lieu, on calculera la diſtance vraie *ZS* de la Lune au zénith; c'eſt-à-dire, la diſtance, ſelon l'eſtime, & indépendante de la réfraction & de la parallaxe. Avec cette diſtance on trouvera la réfraction dans la Table. Puis, pour calculer la parallaxe de hauteur, on fera (169) cette proportion, le rayon eſt au ſinus de la diſtance au zénith, que l'on vient de trouver, comme la parallaxe horizontale, eſt à un quatrième terme qui feroit la parallaxe de hauteur, ſi la diſtance au zénith que nous venons d'employer étoit la diſtance apparente. Mais ce quatrième terme ne ſera que la parallaxe approchée : pour l'avoir plus exactement, on ajoutera cette parallaxe approchée avec la diſtance au zénith, pour avoir la diſtance apparente au zénith approchée, & on fera cette nouvelle proportion . . . le rayon eſt au ſinus de cette diſtance apparente au zénith, comme la parallaxe horizontale, eſt à un quatrième terme qui ſera la parallaxe de hauteur, plus approchée & ſuffiſamment approchée. De cette parallaxe on retranchera la réfraction.

Alors, dans la *fig.* 54, on connoîtra *Ee* réfraction de l'étoile *Ll*; différence entre la réfraction *Ll'* & la parallaxe *l'l* de la Lune. Retranchant de la diſtance vraie *ZE*, la réfraction *Ee*, & ajoutant à la diſtance vraie *ZL*, la quantité *Ll*, on aura dans le triangle *Zel*, les deux côtés *Ze*, *Zl*, & l'arc obſervé *el*; on calculera donc les angles *Zel*, *Zle*, que l'on emploiera enſuite comme il a été dit (281), pour avoir les corrections *eq* & *ls*; après quoi on achèvera comme il a été dit (282).

357. Après avoir conclu la différence des méridiens, ſi on la trouvoit différente de celle de l'eſtime, d'un degré ou plus; pour plus d'exactitude, on recommenceroit le calcul

précédent en employant la longitude & la latitude de la Lune, calculées d'après cette nouvelle connoiſſance de la différence des méridiens.

358. Nous terminerons, en démontrant la méthode dont nous avons fait uſage (287) pour calculer le lieu de la Lune plus exactement que par les parties proportionnelles.

Suppoſons que AE, BF, CG, DH (*fig.* 69) repréſentent quatre longitudes de la Lune correſpondantes à quatre époques ſéparées par les intervalles de temps égaux AB, BC, CD, comme de 12 en 12 heures. Soit CG celle qui répond à l'époque la plus prochaine de celle pour laquelle on veut calculer; & ayant repréſenté par x les parties du temps comptées de C vers Z; & par $-x$, les parties du temps comptées de C vers Y; ſi on repréſente par y, une longitude quelconque de la Lune; & par a, celle qui correſpond à un inſtant déterminé C; les voiſines pourront être repréſentées aſſez exactement par $y = a + bx + cx^2$, b & c étant des quantités que nous allons déterminer.

En effet, ſi la vîteſſe de la Lune étoit uniforme, ſa longitude après un temps quelconque x compté depuis l'inſtant C, feroit $a + mx$, m étant cette vîteſſe. Mais comme cette vîteſſe eſt variable ſi on ſuppoſe (ce qui ne peut s'écarter beaucoup de la vérité pendant de petits intervalles de temps) qu'elle varie uniformément, c'eſt-à-dire, proportionnellement au temps, la vîteſſe m pourra être repréſentée par $b + cx$; & par conſéquent la longitude ſera exprimée par $y = a + bx + cx^2$. Il s'agit donc de déterminer b & c.

Soient y', y'', y''', y'''' les longitudes AE, BF, CG, DH; & ayant repréſenté par l'unité la grandeur de chacun des intervalles de temps AB, BC, CD; les abſciſſes CA, CB, 0 & CD, correſpondantes à ces longitudes, ſeront exprimées par -2, -1, 0, 1, on aura donc. . . . . .

$$\begin{aligned} y' &= a - 2b + 4c \\ y'' &= a - b + c \\ y''' &= a \\ y'''' &= a + b + c \end{aligned}$$

prenant les différences premières. . . . .

$$\begin{aligned} y'' - y' &= b - 3c \\ y''' - y'' &= b - c \\ y'''' - y''' &= b + c \end{aligned}$$

prenant les différences secondes. . : : : : : : : : :

$$(y''' - y'') - (y'' - y') = 2c$$
$$(y'''' - y''') - (y''' - y'') = 2c$$

Ce qui fait voir que si la vîtesse de la Lune étoit uniformément accélérée, les différences secondes devroient être égales entre elles. Mais puisqu'on sait qu'elles diffèrent peu, il faut prendre pour c, non la valeur que donne l'une ou l'autre de ces deux équations, mais celle qui résulte de leur somme, & qui sera le quart de la somme des deux différences secondes.

Soit e cette différence seconde moyenne, on aura donc $c = e$; par conséquent $b = (y'''' - y''') - e$; donc $y = a + (y'''' - y''') x - e x + e x x$, ou $y = a + (y'''' - y''')x - e x (1 - x)$; ou (par ce que nous avons représenté par l'unité, des espaces qui sont de 12 heures) $y = a (y'''' - y''') . \frac{x}{12} - \frac{e x}{12} . \frac{12-x}{12}$, qui fournit la règle que nous avons donnée (287), & qui est un corollaire de la méthode des interpolations dont nous avons parlé (*Algèbre* 413).

FIN.