ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

Par le citoyen KRAMP,

Professeur ordinaire de Chymie et de Physique expérimentale, et provisoire de Mathématiques à l'Ecole Centrale du Département de la Roër.

A COLOGNE,

chez Oedenkoven et Thiriart, imprimeurs-libraires,

et à Paris chez Amand König, libraire, quai des Augustins N°. 18.

An IX de la République (1801.)

Les soussignés, propriétaires de cet ouvrage déclarent, qu'en vertu du *Decret de la Convention nationale, rendu le* 19 *Juillet* 1793, *l'an* 2, ils poursuivront devant les tribunaux tout *contrefacteur, distributeur* ou *debitant* d'éditions qui ne porteront pas leur signature.

Cologne, le 1er. Ventôse l'an 9 de la République française, une et indivisible.

TABLE DES MATIERES.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES DU CALCUL DÉCIMAL.

CHAPITRE SECOND.

LES QUATRE OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE.

CHAPITRE TROISIEME.

LES NOMBRES COMPLEXES.

Mul-

CHAPITRE QUATRIEME.

LES RAPPORTS DES NOMBRES EN GÉNÉRAL.

Ex-

CHA-

Note. Dans le calcul de ces trois exemples, j'avois supposé le pied de Cologne égal à 122 lignes de l'ancien pied de Roi: tel est en effet leur rapport réciproque d'après la table comparative des mesures de longueur, qui se trouve dans *le Recueil de Tables Logarithmiques et Trigonométriques, en deux volumes, Berlin* 1778. Depuis l'impression de cette feuille je me suis assuré, que le rédacteur de la table avoit très certainement été induit en erreur sur la véritable longueur du pied de Cologne. Il est égal, non à 122, mais à 127, 45 lignes de l'ancien pied de Roi. Il faut donc corriger de la manière suivante les résultats des trois exemples.

Rapport du pied de Cologne à celui de Paris. C'est rigoureusement celui de 12745¦ à 14400 ou bien de 2549 : 2880. Ce rapport nous fournit les quotiens qui suivent: 1, 7, 1, 2, 2, 1, 10, 3. On en retire les valeurs approchés qui suivent:

1	:	1
7	:	8
8	:	9
23	:	26
54	:	61
77	:	87

etc. etc. Ce rapport est donc celui de *huit à neuf,* à *un deux-centieme* de près. Si l'on prend 77 : 87, l'erreur sera au-dessous *d'un cent-millieme.*

Rap-

CHAPITRE CINQUIEME.

LES FRACTIONS.

CHA-

Rapport du pied quarré de Cologne au pied quarré de Paris. C'est rigoureusement celui du quarré de 2549 au quarré de 2880; ou bien, de 6497401 *à* 8294400. On en retire les quotiens 1, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 18 etc. qui fournissent les rapports approchés qui suivent:

1	:	1
3	:	4
4	:	5
7	:	9
11	:	14
18	:	23
29	:	37
47	:	60

etc. Le rapport demandé est donc celui de *sept à neuf*, à *un centieme* de près. Plus exactement celui de 11 : 14. Avec 47 : 60 l'erreur est au-dessous d'un *cent-millieme*.

Rap-

CHAPITRE SIXIEME.

EXTRACTION DE LA RACINE QUARRÉE.

CHAPITRE SEPTIEME.

EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE.

Marche

Rapport du pied cubique de Cologne au pied cubique de Paris. C'est rigoureusement celui du cube de 2549 au cube de 2880; ou bien, de 16561875149 *à* 23887872000. On en retire les quotiens 1, 2, 3, 1, 5, 10 etc. qui fournissent les rapports approchés qui suivent:

1	:	1
2	:	3
7	:	10
9	:	13
52	:	75

etc. Le pied cubique de Cologne est donc égal aux *sept dixiemes*, ou plus exactement aux *neuf treiziemes* de celui de Paris. Avec 52 : 75 l'erreur est au-dessous *d'un cinquante-millieme.*

CHAPITRE HUITIEME.

La Règle de trois simple.

CHAPITRE NEUVIEME.

Règle de trois composée.

CHAPITRE DIXIEME.

RÈGLE DE SOCIÉTÉ.

CHAPITRE ONZIEME.

RÈGLE CONJOINTE.

Emploi

CHAPITRE DOUZIEME.

Règle d'Alliage.

CHAPITRE TREIZIEME.

Les progressions arithmétiques.

CHAPITRE QUATORZIEME.

LA RÉGLE DE FAUSSE POSITION.

CHAPITRE QUINZIEME.

LES PUISSANCES EN GÉNÉRAL.

Pour

CHAPITRE SEIZIEME.

LES PUISSANCES DE DIX.

Règle

CHAPITRE DIX-SEPTIEME.

LES LOGARITHMES.

Les

ÉLÉ-

ÉLEMENS D'ARITHMÉTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES DU CALCUL DÉCIMAL.

1. L'Arithmétique a pour objet les quantités en tant qu'elles sont exprimées en nombres.

2. Le premier objet de l'Arithmétique est la *numération*. On appelle ainsi l'art d'exprimer tous les nombres possibles par une quantité très limitée de noms et de caractères. Ces caractères s'appellent *chiffres*.

3. Les peuples modernes sont convenus de se servir pour la numération, des noms et des caractères suivans :

0 . . . . . *zéro*
1 . . . . . *un*
2 . . . . . *deux*
3 . . . . . *trois*
4 . . . . . *quatre*
5 . . . . . *cinq*
6 . . . . . *six*
7 . . . . . *sept*
8 . . . . . *huit*
9 . . . . . *neuf.*

4. Pour exprimer à l'aide de ces caractères tous les nombres possibles, on observera les deux principes suivans. La dernière place à droite se trouve exclusivement consacrée aux unités. Quant aux autres, chaque caractère obtient une valeur dix fois plus grande, à mesure que de la droite on avance d'une place vers la gauche. Un exemple éclaircira cette méthode. Prenons le nombre, exprimé par les chiffres 368024759. Le premier chiffre, à partir de la droite, désigne *neuf unités*, ou simplement neuf. Le second chiffre désigne *cinq dixaines*, ou cinquante. Le troisième chiffre exprime *sept centaines*, ou sept cent. Le quatrième chiffre, toujours compté de la droite, représentera *quatre mille*. Le cinquième chiffre désignera *deux dixaines de mille*, ou vingt mille. Le sixième chiffre exprimera *zéro centaine de mille* ; ainsi dans cet exemple, la place des cent mille est vacante. Le septième chiffre représentera *huit millions*. Le huitième chiffre désignera *six dixaines de millions*, ou soixante millions. Le neuvième chiffre exprime *trois centaines de millions*, ou trois cent millions. Le nombre entier est dont égal à *trois cent soixante-huit millions, vingt-quatre mille, sept cent cinquante-neuf*.

5. Il suit de ce que nous venons de dire, qu'un zéro, de même que deux ou plusieurs zéros, ajoutés à la gauche d'un nombre, n'en changent aucunement la valeur.

6. Il s'ensuit de même qu'en ajoutant à la droite d'un nombre un zéro, ce nombre en devient dix fois plus grand: que deux zéros le ren-

rendront cent fois plus grand; qu'avec trois zéros il sera mille fois plus grand, et ainsi de suite.

7. Tels sont les principes de la numération décimale. L'origine nous en est inconnue. Les Grecs et les Romains l'ignorèrent. Il paroît qu'elle prit naissance parmi les Indiens. Ces peuples la communiquèrent aux Arabes: et delà elle se répandit parmi les peuples de l'Europe vers le huitième et le neuvième siècle.

8. On doit aux Géomètres de l'Europe moderne, d'avoir étendu ces mêmes principes aux nombres plus petits que l'unité. Pour y parvenir, ils ont fixé la place des unités, en la désignant par une virgule, placée immédiatement à sa droite. Ensuite, continuant de mettre des chiffres à la droite de cette virgule, ils ont consacré la première place aux *dixièmes*, la seconde aux *centièmes*, la troisième aux *millièmes*, la quatrième aux *dixmillièmes*, et ainsi de suite. C'est ainsi que, fidèles aux principes déjà généralement reçus, et supposant toujours à leurs chiffres des valeurs successivement moindres de dix en dix, à mesure qu'ils les faisoient avancer de la gauche vers la droite, ils ont pu désigner tous les nombres possibles, même moindres que l'unité, sans employer la forme fractionnaire. Prénons pour exemple le nombre 37,49274. Ici les chiffres, placés à la gauche de la virgule, désignent *trente-sept*, comme à l'ordinaire. Viennent ensuite *quatre dixièmes*, *neuf centièmes*, *deux millièmes*, *sept dixmillièmes*, *quatre centmillièmes* etc.

9. Le même nombre peut-être prononcé d'une autre manière. Comme un *dix millième* équivant naturellement à *dix* centmillièmes; un millième à *cent* centmillièmes; un centième à *mille* centmillièmes; un dixième enfin à *dix mille* centmillièmes; le nombre de l'exemple précédent sera aussi égal à *quarante neuf mille, deux cent soixante et quatorze* centmillièmes.

10. Ainsi donc, pour énoncer un nombre quelconque, on peut employer, si l'on veut, la règle suivante. Enoncez d'abord les chiffres qui sont à la gauche de la virgule, à la manière des nombres entiers. Faites de même pour les décimales qui suivent la virgule, et ajoutez à la fin, le nom des unités décimales de la dernière espèce. L'examen ultérieur de ces principes nous conduit immédiatement aux conséquences suivantes.

11. Il est impossible qu'un nombre quelconque ait plus d'une virgule.

12. La valeur d'un nombre quelconque, composé d'entiers et de décimales, dépend de la place qu'occupe la virgule. On ne peut faire changer de place à la dernière, sans changer la valeur même du nombre proposé. En la faisant avancer de la gauche vers la droite, le nombre sera augmenté. Au contraire, en la faisant reculer de la droite vers la gauche, on aura rendu le nombre dix fois, cent fois, mille fois plus petit, d'après le nombre des places dont on aura changé la position de la virgule.

13. Il se présente donc un moyen bien facile de rendre un nombre proposé dix fois, cent

fois, mille fois plus grand ou plus petit, par le seul déplacement de la virgule. Dans le premier cas, on la fera avancer d'une place, de deux places, de trois places vers la droite. Dans le second, on la fera reculer d'une place, de deux places, de trois places vers la gauche. Dans le cas où le nombre proposé n'auroit pas assez de chiffres, pour effectuer le déplacement qu'exige l'application de la règle précédente, on y supplée par autant de zéros qu'il en faut, pour placer la virgule où elle doit être.

Ainsi, pour rendre le nombre 34,647 dix fois plus petit, il suffira d'écrire 3,4647.

Pour rendre le même nombre cent fois plus grand, on écrira 3464,7.

Le même nombre, rendu mille fois plus petit, déviendra 0,034647.

Enfin, s'il falloit rendre ce même nombre dix mille fois plus grand, il faudroit écrire 346470.

14. Le nombre qui n'a pas de virgule, devant être supposé entier, on pourroit bien lui en donner une, en la plaçant à sa droite. Cependant comme elle est inutile, et que d'ailleurs il seroit presque inévitable de la confondre avec la virgule ordinaire du discours, on est généralement convenu de ne pas en mettre.

15. Par cette même raison, la place des unités ne doit jamais rester vacante. Ainsi dans les cas, ou il n'y auroit pas assez de chiffres pour la remplir, il faut toujours observer d'y mettre un zéro.

16. Observons enfin que nous sommes toujours libres de mettre à la fin d'un nombre, qui a une virgule, placée dans quelque endroit

que ce soit, autant de zéros que nous voulons, et que le besoin de nos opérations exige, sans crainte d'en avoir changé la valeur.

C'est ainsi que le nombre entier 37 pourra être écrit 37,0000..... suivi d'autant de zéros qu'on voudra. Il en est de même du nombre 48,59; qu'on pourra écrire 48,59000.... avec autant de zéros qu'on voudra.

Par cette même raison, il dépendra toujours du calculateur, de supprimer les zéros qu'il verra à la fin d'un nombre, muni d'ailleurs d'une virgule.

Par exemple le nombre 56,7300 ne dira ni plus ni moins que 56,73.

CHAPITRE SECOND.

LES QUATRE OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE.

17. L'Addition, la soustraction, la multiplication et la division, forment ce qu'on appelle les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique.

ADDITION.

18. Le but de *l'addition* est d'exprimer la valeur totale de plusieurs nombres par un seul. Il est évident que les quantités désignées par ces nombres, doivent être de la même espèce. Si elles ne l'étoient pas, il faudroit d'abord les y reduire, avant que d'en tenter l'addition.

19. Avant que d'y procéder, on placera tous les nombres proposés l'un sous l'autre, de manière que toutes les unités se trouvent dans une même colonne verticale; qu'il en soit de

même

même des dixaines, des centaines, ainsi que des dixièmes, des centièmes, des millièmes, et ainsi des autres.

20. Si les nombres proposés sont tous entiers, on sent bien que placés comme on vient de le dire, ils formeront une figure qui se trouvera terminée à droite par une colonne verticale. S'ils sont composés d'entiers et de décimales, il suffira que la colonne des virgules soit verticale, toutes celles des autres alors devant l'être de même. Il ne sera pas nécessaire alors que la figure soit terminée à droite par une colonne verticale; il sera très facile de lui donner cette forme dans tous les cas où les différens nombres proposés pour l'addition ne seront pas suivis d'un même nombre de décimales : il suffira d'ajouter à ceux de ces nombres, qui ont moins de décimales que les autres, autant de zéros qu'il en faut, pour que le nombre des décimales soit le même dans tous.

21. Ayant disposé les nombres comme on vient de le dire, on commencera par ajouter les chiffres qui se trouvent dans la première colonne verticale à droite. S'il en résulte un nombre plus grand que dix, et qui par conséquent renferme des dixaines et des unités, on écrira les unités seules, et on réservera les dixaines pour l'addition des chiffres de la seconde colonne, dont on fera ensuite l'addition, en écrivant de nouveau les unités de cette somme, et en réservant les dixaines pour l'addition des chiffres de la troisième colonne. On continuera ainsi de colonne en colonne,

jus-

jusqu'aux chiffres de la dernière, dont la somme sera écrite telle qu'elle aura été trouvée.

22. Un exemple éclaircira cette méthode, qui d'ailleurs est trop connue, pour avoir besoin d'aucune explication ultérieure. Les cinq nombres dont il faut faire l'addition, sont disposés dans les deux figures de manière que les unités, les dixaines, les centaines etc. se trouvent partout dans une même colonne verticale. Le quatrième de ces nombres étant celui qui a le plus de décimales, il faudra ajouter trois zéros au premier, une au second et au troisième, et deux au cinquième, si l'on veut que les premiers chiffres à droite se trouvent dans une même colonne verticale. Si l'on ne veut pas mettre des zéros, on fera cependant bien d'y suppléer par des points.

	56,43 . . .	56,43000
	1,6408 .	1,64080
	249,2169 .	249,21690
	36,40089	36,40089
	0,567 . .	0,56700
Somme . .	344,25559	344,25559

SOUSTRACTION.

23. L'objet de la *soustraction* est de déterminer l'excès d'un nombre sur un autre nombre, supposé plus petit. Cet excès, qui constitue la différence entre les deux nombres, est nommé *reste*.

24. Pour faire cette soustraction, on commence par disposer les deux nombres de manière, que les unités, les dixaines, les cen-

centaines, de même que les dixièmes, les centièmes etc. se trouvent verticalement placés les uns sous les autres, comme on a fait dans l'addition. Dans les cas où l'un des deux eut plus de décimales que l'autre, on y supplée également par un nombre suffisant de zéros, qu'on ajoute à ce dernier.

25. Cela étant, on ôtera, en commençant par la droite, chaque chiffre inférieur de son correspondant supérieur. Cela n'aura aucune difficulté tant que le chiffre inférieur se trouvera moindre que son correspondant supérieur.

26. Si le chiffre inférieur se trouvoit plus grand que son correspondant supérieur, on augmentera celui-ci de dix, et pour restituer cet emprunt, qu'on supposera fait sur son voisin à gauche, on regardera celui-ci comme moindre d'une unité, dans l'opération suivante.

27. Mais il pourroit arriver que ce dernier chiffre fut zéro lui-même; ce qui obligeroit, pour faire l'emprunt desiré, d'aller jusqu'au premier chiffre significatif qui viendroit après. On fera donc réellement mieux, de conserver au chiffre sur lequel on doit faire l'emprunt, la valeur qu'il a, et de regarder son correspondant inférieur comme plus grand d'une unité, dans l'opération suivante. Cette augmentation du chiffre inférieur sera toujours possible, tandis que la diminution du chiffre supérieur ne le seroit que dans les cas où ce chiffre ne fut pas zéro lui-même. L'une et l'autre d'ailleurs doivent naturellement donner le même résultat. En voici un exemple:

On

On propose de retrancher

du nombre 25961043

le nombre 16172986.

Les deux nombres étant disposés comme on vient de le dire, il faudra d'abord ôter 6 de 3, On ôtera donc 6 de 13; reste 7.

Pour compenser cet emprunt, on changera le second chiffre inférieur 8 en 9; et comme on ne pourra l'ôter de 4, on l'ôtera de 14; reste 5.

Par cette même raison, on changera le troisième chiffre inférieur 9 en 10; et comme on ne pourra l'ôter de 0, on l'ôtera de 10; reste 0.

Ayant encore emprunté ici, on changera le quatrième chiffre inférieur 2 en 3; et ne pouvant l'ôter de 1, on l'ôtera de 11; reste 8.

Pareillement, on changera le cinquième chiffre inférieur 7 en 8; et ne pouvant l'ôter de 6, on l'ôtera de 16; reste 8.

De même on changera le sixième chiffre inférieur 1 en 2; lequel pourra être ôté de son supérieur 9; reste 7.

Comme dans ce cas on n'a pas eu besoin d'emprunt, le septième chiffre inférieur 6 conservera sa valeur; et ne pouvant l'ôter de 5, on l'ôtera de 15; reste 9.

Cet emprunt obligera de changer le dernier chiffre inférieur 1 en 2; lequel étant ôté de 2, restera 0.

Le reste demandé, résultat de la soustraction, sera donc 9788057.

28. Les décimales ne peuvent faire naître de la difficulté dans aucun cas, d'après ce qui a été dit en 22. En voici un exemple.

Soit

Soit proposé de retrancher

du nombre 4509,16
le nombre 1629,24632.

Ayant disposé les deux nombres comme on voit, on ajoutera au premier trois zéros, ce qui n'en changera pas la valeur. Ensuite, ayant à retrancher

du nombre 4509,16000
le nombre 1629,24632
on aura pour reste . . . 2879,91368

en se conformant d'après les règles qu'on vient d'exposer.

MULTIPLICATION.

29. La *multiplication* a pour objet de prendre un nombre autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre. Le premier des deux est appellé *multiplicande;* l'autre est nommé *multiplicateur;* on donne au résultat de l'opération le nom de *produit.*

30. Tant que les deux nombres sont des nombres abstraits, ils sont designés indistinctement par le nom de *facteurs.* Il sera indifférent alors de prendre pour multiplicande celui des deux facteurs qu'on voudra: l'autre alors sera multiplicateur. Il n'y a aucune différence entre trois fois quatre, et quatre fois trois: l'un et l'autre devant être douze.

31. Il n'en est pas de même lorsque l'espèce à laquelle appartient l'un et l'autre des deux facteurs, est désignée. L'unité alors doit être nécessairement de même espèce avec l'un des deux facteurs. Ce facteur sera ré-

regardé comme multiplicateur. L'autre facteur, qui sera de différente espèce avec l'unité, sera le multiplicande de l'opération. Le produit alors sera de même espèce que ce multiplicande: d'où il suit que dans une multiplication quelconque de nombres concrets, l'unité et le produit seront toujours de différentes espèces.

32. Un exemple éclaircira ce que nous voulons dire. Soit proposé de multiplier ensemble trois toises, et quatre francs. Ce problème, tellement énoncé, ne renfermera aucun sens, parce que l'unité, base de la multiplication, n'y est pas designée.

33. Mais si l'on demande ce que coûteront trois toises, à raison de quatre francs par toise, le sens .très naturel de cette question sera, de prendre l'un des deux facteurs, quatre francs, autant de fois que l'autre facteur, trois toises, renferme de toises. Ici la toise est l'unité ; les trois toises seront le multiplicateur, il faudra également que le multiplicande, quatre francs, soit contenu trois fois dans le produit ; lequel sera donc égal à douze francs.

34. Si l'on avoit demandé combien doivent couter trois toises, à raison de quatre francs par pied, on auroit eu le pied pour unité. Et comme cette unité est renfermée dans le multiplicateur, trois toises, non pas trois fois, mais dix-huit fois, il auroit donc fallu prendre le multiplicande, quatre francs, dix-huit fois; ce qui auroit donné pour produit soixante-douze francs. La question dans les deux cas se réduisoit, si l'on veut, à multiplier ensemble

trois toises et quatre francs : mais l'unité n'étant pas la même, il en devoit résulter des produits bien différens entr'eux.

35. Enfin si l'on demande combien on aura de toises pour la somme de quatre francs, à raison de trois toises par franc, le sens de cette question exige, que le multiplicande, trois toises, soit pris autant de fois, que l'unité, qui est ici un franc, est comprise dans le multiplicateur, quatre francs. Il faudra donc prendre le multiplicande quatre fois ; ce qui donnera pour produit douze toises. Les deux facteurs seront encore trois toises et quatre francs, mais le produit, qui étoit douze francs lorsqu'on avoit pour unité la toise, sera douze toises, si c'est le franc qui fait fonction d'unité.

36. Dans le chapitre présent on exposera les règles de la multiplication des nombres, considérés comme abstraits, et ne désignant aucune espèce particulière.

37. Les cas les plus simples sont ici ceux, où il faut multiplier ensemble deux nombres, d'un seul chiffre chacun. Le nombre de ces cas est très borné ; et en ne comptant que ceux qui diffèrent réellement entr'eux, on en aura quarante-cinq en tout. On trouvera facilement ces produits en ajoutant successivement chacun des neuf premiers nombres à lui-même. On en construira la petite table suivante, connue sous le nom de livret d'Arithmétique, et qu'il faudra s'exercer à apprendre par cœur.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

38. Vient ensuite la multiplication d'un nombre entier, composé de plusieurs chiffres, par un nombre d'un seul chiffre. Ecrivez d'abord le multiplicande. Mettez sous lui le multiplicateur; il est indifférent sous quel chiffre, ordinairement on le met sous celui des unités, parce que c'est par elles que l'opération commence. Multipliez ensuite chacun des chiffres du multiplicande par le multiplicateur, en passant des unités aux dixaines, des dixaines aux centaines, et ainsi de suite. Tant que ces produits n'auront qu'un seul chiffre, vous les mettrez de suite l'un à côté de l'autre, chacun au-dessous du chiffre du multiplicande auquel il appartient. Si ces produits passent dix, et que par conséquent ils seront composés de deux chiffres, l'un marquant les unités, l'autre les dixaines, vous ne mettrez que les unités, en réservant les dixaines pour le produit suivant,

auquel

auquel vous l'ajouterez. Un exemple éclaircira encore cette règle.

Soit proposé de multiplier 38496 par 9. Ayant mis le 9 au-dessous du 6, et souligné le tout, si l'on veut, on dira :

$$\begin{array}{r} 38496 \\ 9 \\ \hline 346464 \end{array}$$

9 fois 6 font 54; posez 4, retenez 5.

9 fois 9 font 81, et 5 de retenus font 86; posez 6, retenez 8.

9 fois 4 font 36, et 8 de retenus font 44; posez 4, retenez 4.

9 fois 8 font 72, et 4 de retenus font 76; posez 6, retenez 7.

9 fois 3 font 27, et 7 de retenus font 34, que vous écrirez en entier, parce que la multiplication se termine au chiffre 3 du multiplicande.

Le produit sera donc 346464.

39. Venons au second cas; c'est celui de la multiplication d'un nombre quelconque proposé par un autre nombre d'un seul chiffre, mais suivi d'un, ou de plusieurs zéros. La règle est facile. Faites la multiplication, comme vous auriez fait dans le cas d'un seul chiffre; et ajoutez au produit autant de zéros, qu'il y en a dans le multiplicateur.

Prenons l'exemple précédent; supposons qu'au lieu de multiplier 38496 par 9, il eut fallu multiplier le même nombre par 9000. Le produit alors auroit été mille fois plus grand, ainsi, d'après ce qui a été dit en 6, il auroit fallu y ajouter trois zéros.

40. On peut prendre pour troisième cas celui, où chacun des deux facteurs est composé de plusieurs chiffres. Libre alors de regarder comme mul-

multiplicande celui des deux facteurs qu'on voudra, on préfère cependant de prendre celui des deux qui a le plus de chiffres.

41. Le produit alors sera composé d'autant de produits partiels, qu'il y aura de chiffres dans le multiplicateur. Le premier, résultat de la multiplication par les unités du multiplicateur, sera terminé à la place même des unités. Le second, résultat de la multiplication par les dixaines du multiplicateur, aura un zéro à sa suite; on sera libre de le mettre, ou de ne pas le mettre; mais dans tous les cas, il faudra que son premier chiffre à droite réponde à la place des dixaines. Par la même raison, le premier chiffre du troisième produit se trouvera à la place des centaines; celui du quatrième à la place des mille, et ainsi des autres. Ayant convenablement disposé tous les produits partiels, on les ajoutera ensemble: on aura alors le produit total des nombres proposés.

Soit proposé de multiplier 316437
par 56049.

Il est visible que le produit demandé sera composé des produits partiels suivans :

9 fois 316437
40 fois 316437
000 fois 316437
6000 fois 316437
50000 fois 316437.

Le premier produit se terminera donc à la place des unités. Le second, ayant un zéro à sa suite, finira à la place des dixaines. Le troisième, ayant deux zéros à sa suite, devroit finir à la place des centaines. Comme dans le cas présent il est absolument nul, on ne le mettra point. Passant donc du second au quatrième, on le placera de manière que son premier

premier chiffre à droite se trouve à la place des mille, parce qu'en effet il est supposé avoir trois zéros à sa suite. Par cette même raison le cinquième, qui en aura quatre, finira à la place des dixaines de mille.

Dans la pratique on ne met pas ces zéros, afin de ne pas les confoudre avec d'autres zéros, qui pourroient être le résultat de la multiplication de quelques chiffres significatifs, tels que *deux* et *cinq*. Il vaut donc mieux y suppléer par des points. On pourra même omettre ces points, pourvu qu'on ne manque pas d'observer, qu'en passant d'un chiffre quelconque du multiplicateur à l'autre qui se trouve à sa gauche, il faut toujours porter le premier chiffre de ce produit d'une place en avant vers la gauche; et même de deux, si le chiffre immédiatement prochain du multiplicateur étoit zéro lui-même.

L'exemple qu'on vient de donner, sera donc disposé comme il suit :

```
      2847933
     1265748 .
   1898622 . . .
 1582185 . . . .
```

Ajoutant cet quatre produits partiels, on aura 17735977413 pour produit des nombres proposés.

42. Un autre cas encore seroit celui où les deux facteurs seroient terminés par un certain nombre de zéros. Dans ce cas on fera la multiplication comme s'ils se trouvoient sans zéros; et après l'avoir entièrement achevée, on ajoutera au produit autant de zéros qu'il y en avoit dans les deux facteurs pris ensemble.

43. Le dernier cas enfin est celui où l'un des deux facteurs, ou tous les deux, seroient composés d'entiers et de décimales, ou même n'auroient que des décimales.

44. Dans ce cas, on achevera la multiplication tout comme si on avoit à faire à des nombres entiers, sans faire la moindre attention à la virgule. Lorsqu'elle sera finie, on retranchera du produit, sur la droite, moyennant une virgule, autant de décimales qu'il y en avoit dans les deux facteurs pris ensemble. L'exemple suivant, en éclaircissant cette règle, en donnera en même tems la démonstration.

Soit proposé de multiplier 65,823
par 2,65

Supprimant la virgule, et multipliant 65823 par 265, on aura pour produit 17443095. Mais en supprimant la virgule dans les deux facteurs, on aura rendu le premier mille fois trop grand, et le second cent fois trop grand. Pour réduire à sa juste valeur le produit qui en résulte, et qui naturellement doit être cent mille fois trop grand, il faut le rendre cent mille fois plus petit. Il faut donc lui donner une virgule, et la placer de manière qu'elle laisse après elle cinq décimales: savoir, autant qu'il y en avoit dans les deux facteurs ensemble. Le véritable produit sera donc 174,43095.

45. En suivant cette règle, il arrivera très souvent, dans les cas surtout où les deux facteurs ne consistent qu'en décimales, que le produit aura moins de chiffres significatifs, que la règle n'ordonne de décimales à retrancher. On y suppléera par des zéros: on en mettra à la gauche du produit autant qu'il en faut, pour qu'après avoir retranché le nombre de décimales, ordonné par la règle, il reste encore un zéro, pour désigner la place des unités.

Soit proposé de multiplier 0,00468
par 0,017

Le

Le produit des deux nombres, considérés comme entiers, sera 7956 ; mais de ce nombre, composé de quatre chiffres, il faudra retrancher sept décimales, conformément à la règle. On y suppléera par des zéros ; on en ajoutera quatre à la gauche du produit ; on aura 0,0007956 pour produit véritable des deux nombres proposés.

DIVISION.

46. L'objet de la *division* est de savoir, combien de fois, de deux nombres proposés, l'un est contenu dans l'autre. Ce dernier pour lors est appellé *dividende;* l'autre a le nom de *diviseur.* Le *quotient*, résultat de la division, est le nombre même qui indique combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende.

47. L'opération de la division est donc l'inverse de la multiplication. Le produit de cette dernière, divisé par l'un des deux facteurs, doit laisser pour quotient l'autre facteur. Et dans la division, il est clair qu'en multipliant le diviseur par le quotient, ou le quotient par le diviseur, on doit retrouver le dividende.

48. Il suit delà qu'en ayant égard à l'espèce déterminée, à laquelle le dividende, ou le diviseur, ou bien tous les deux peuvent appartenir, il doit y avoir deux cas de division, bien différens entr'eux.

49. Le premier cas est celui où le diviseur est de même espèce que le dividende. Comme on cherche simplement alors combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende,

l'on voit que le quotient doit être considéré comme un nombre purement abstrait. Ce quotient alors contiendra l'unité, abstraite ou concrète, qui est toujours supposée dans la division, autant de fois que le diviseur est contenu dans le dividende.

50. Le second cas est celui où le diviseur est, ou un nom purement abstrait, ou au moins, d'une espèce différente de celle du dividende. Dans la première de ces deux suppositions, la division est un véritable partage du dividende en un certain nombre de portions égales lesquelles par conséquent seront de même espèce que le dividende. La seconde supposition paroît renfermer une contradiction, mais qu'il n'est pas difficile de résoudre. Nous savons fort bien que des soldats ne peuvent jamais être contenus dans des toises. Mais cela n'empêche pas qu'un certain nombre de soldats ne puisse être contenu dans un certain nombre de toises. Dans cette supposition, l'unité, qui est toujours indiquée par la nature de la question, est de même espèce que le diviseur, tandis que le quotient est de même espèce que le dividende.

51. Nous pouvons donc nous borner dans le chapitre présent, à exposer les règles de la division, le dividende et le diviseur étant considérés comme des nombres abstraits, et ne désignant aucune espèce particulière.

52. Nous en distinguerons trois cas. Le premier est celui d'un diviseur entier, et d'un seul chiffre. Le second est celui d'un diviseur entier, composé de plusieurs chiffres. Dans le troisième enfin, le diviseur, nécessairement

com-

composé de plusieurs chiffres, aura des décimales avec-lui.

Premier cas.

53. Tant que le diviseur sera d'un seul chiffre, on pourra très bien mettre le quotient immédiatement au-dessous du diviseur. Il faut supposer que l'usage du livret d'Arithmétique est entièrement familier au calculateur. Le diviseur n'a point de place fixe: on le mettra où l'on voudra. Ayant donc écrit le dividende, voici la règle que vous suivrez.

54. Examinez combien de fois le diviseur est contenu dans le premier, ou s'il le faut, dans les deux premiers chiffres du dividende à gauche; c'est par là que l'opération commence. Mettez le quotient dans le premier cas sous le premier chiffre du dividende; dans le second cas, vous le placerez sous le second chiffre. Multipliez ensuite le quotient par le diviseur; ôtez en le produit de la partie du dividende qui est au-dessus du quotient, regardez ce reste comme des dixaines et joignez-y, comme unités, le chiffre du dividende qui suit immédiatement, en allant de la gauche vers la droite.

55. Voyez de nouveau combien de fois le diviseur est contenu dans le nombre qui en résulte, composé ordinairement de dixaines et d'unités. Le chiffre qui en résultera, sera le second du quotient que vous cherchez: vous le mettrez à côté de l'autre. Ayant de nouveau multiplié le diviseur par ce chiffre, ôtez ce produit de la partie du dividende qui lui répond. Regardant

ensuite

ensuite le reste que vous aurez comme des dixaines, auxquelles vous joindrez comme unités le chiffre suivant du dividende, vous aurez une nouvelle portion du dividende, composée comme la première, de dixaines et d'unités.

56. Cherchez encore combien de fois le diviseur est contenu dans cette portion : le nombre qui en résulte, sera le troisième chiffre du quotient. Vous trouverez de même les chiffres suivans, jusqu'au dernier. Et si ce dernier chiffre, multiplié par le diviseur, donne un produit égal à ce qui reste du dividende, vous pouvez regarder le quotient comme exact, et l'opération comme terminée. En voici un exemple.

Soit proposé de diviser 39641 par 7. Vous direz : 7 sont contenus dans 39 *cinq* fois. Le premier chiffre du quotient sera donc 5 : vous le placerez sous le 9. Ensuite : 5 fois 7 font 35 : lesquelles ôtés de 39 laissent 4 de reste : qui font avec le chiffre suivant 6 le nombre 46.

Ensuite : 7 sont contenus dans 46 *six* fois. Voilà donc le second chiffre du dividende que vous mettrez à côté du 5. Ensuite : 6 fois 7 font 42, qui étant ôtés de 46, laissent encore 4 de reste ; ce qui donnera avec le chiffre suivant du dividende 4 le nombre 44.

Puis : 7 sont contenus dans 44 *six* fois : troisième chiffre du dividende, que vous mettrez à côté de 56. Ensuite : 6 fois 7 font 42, qui étant ôtés de 44, laissent 2 de reste, qui donneront avec le chiffre suivant et dernier du dividende 1 le nombre 21.

Enfin : 7 sont contenus dans 21 *trois* fois. Ces trois formeront le dernier chiffre du quotient. Et comme cette dernière division ne laisse pas de reste, l'opération sera terminée. Le quotient sera donc 5663.

Di-

4420
Diviseur 7) 39641 dividende
5663 quotient.

Dans la figure ci-jointe, j'ai marqué les restes obtenus à la suite de chaque division, immédiatement au-dessus des chiffres correspondans du dividende. Un calculateur un peu exercé les omettra facilement.

57. En suivant cette méthode, la virgule du dividende, dans les cas où il seroit composé d'entiers et de décimales, ne fera jamais naître la moindre difficulté. Aussitôt que vous en serez venu à la virgule du dividende, mettez en une également dans le quotient. Il pourra arriver que le quotient sera précédé d'un zéro, tandis que le diviseur n'en avoit pas. Dans d'autres cas, le quotient sera précédé d'un zéro de plus, que n'en avoit le diviseur.

C'est ainsi que, pour faire usage de l'exemple précédent, si on avoit proposé de diviser par 7

le nombre 396,41
on auroit eu pour quotient 56,63.
De même le dividende 3,9641
auroit donné pour quotient 0,5663.
Enfin le dividende . . . 0,039641
auroit donné pour quotient 0,005663.

58. Si, après avoir épuisé entièrement le dividende, il y avoit encore un reste, le calcul décimal nous offre un moyen très simple, de n'en continuer pas moins la division, de la pousser à tel degré de précision qu'on veut, et même d'aller dans l'infini, s'il le falloit. Mettez une virgule dans le quotient, pour avertir que les chiffres qui vont suivre seront des parties décimales : ajoutez successivement au dividende

dende tant de zéros que vous voudrez, et qu'il vous paroîtra nécessaire pour atteindre au dégré de précision que vous desirez. Ces zéros, sans rien changer à la valeur du dividende, parce qu'ils viendront après la virgule, vous mettront dans le cas de continuer la division. Si le dividende étoit déjà composé lui-même d'entiers et de décimales, ce qui obligera de marquer une virgule dans le quotient, avant d'être parvenu au dernier chiffre du dividende, il suffira d'ajouter des zéros, et de continuer la division.

Divisant 3980,266 par 4,
on aura pour quotient. . 995,0665.

Divisant . 581,643 par 8,
on aura pour quotient. . . . 72,705375.

Divisant . . 63,158 par 5,
on aura pour quotient. . . . 12,6316.

Divisant . . . 259 par 2,
on aura pour quotient. . . . . 129,5.

Divisant . . . 3,68 par 6,
on aura pour quotient. . . . . 0,613333....

Divisant . . . 4,3 par 7,
on aura pour quotient. . . . . 0,6142857...

Divisant . . . 6 par 9,
on aura pour quotient. . . . . 0,66666....

Divisant . . . 19 par 3,
on aura pour quotient. . . . . . 6,33333....

Divisant . . . . 0,037 par 9,
on aura pour quotient. . . . . . . 0,00411111......

Divisant . . . . 11 par 41, on aura pour quotient 0,26829 26829 26829....

Et ainsi des autres.

59. Toutes les divisions qui se font par les nombres 2, 4, 8, 16 etc. ainsi que celles qui

se

se font par 5, 25 etc. finissent enfin par ne point laisser de reste, lorsqu'on les aura poussées à un nombre suffisant de décimales. Tous les autres nombres au contraire, tels que 3, 6, 7, 9, 11, 12 etc. laissent toujours des restes, à moins que les dividendes proposés eux mêmes ne soient divisibles par eux. Dans tous ces cas, le quotient demandé est une suite infinie de nombres, dont les valeurs constamment décroissantes serviront très bien à en déterminer à volonté la valeur approximative. Toutes ces suites au reste, qui sont les résultats de quelque division, se font remarquer par la loi très-régulière de leurs retours périodiques: nous laissons à l'analyse d'en rendre raison.

60. Comme il est impossible de mettre sur le papier un nombre infini de décimales, il est donc impossible aussi dans tous ces cas, d'atteindre, sans employer la forme fractionnaire, à la valeur exacte et rigoureuse du quotient. Sonvent on pourra s'arrêter à deux décimales: souvent il en faudra quatre: dans d'autres cas on n'aura pas trop de six: dans de certains calculs d'astronomie et de haute analyse on en met jusqu'à douze et plus encore. Plus on aura de décimales, et plus on approchera de la véritable valeur du quotient: leur nombre dépendra donc du degré de précision, qu'on veut apporter à son calcul.

SECOND CAS.

61. Lorsque le diviseur est un nombre entier de plusieurs chiffres, l'opération devient plus longue, sans en être plus difficile. La méthode d'ailleurs est absolument la même que

pour

pour le premier cas. Toute la différence se réduit, à ce qu'au lieu de former et de retenir par mémoire les produits partiels des chiffres successifs du quotient avec le diviseur, ainsi que leurs restes, on est obligé ici de faire des multiplications et des soustractions en règle. A côté de chacun de ces restes, vous abaisserez le chiffre suivant du dividende, et vous continuerez l'opération, jusqu'à ce que vous soyez parvenu à son dernier chiffre. Alors, si vous jugez que le quotient n'a pas encore le degré de précision que vous demandez, quelques zéros de plus vous mettront dans le cas de continuer l'opération, en ayant soin toutes fois d'avertir en cas de besoin, par une virgule, que les chiffres suivants du quotient doivent être regardés comme décimaux. L'exemple suivant éclaircira ceci : nous ne croyons pas qu'il aura besoin de commentaire.

Soit proposé de diviser le nombre 2469,37 par 389. Voici le calcul du quotient demandé, poussé jusqu'à *dix décimales*.

2469,37 } 6,3479948586......
2334
————
1353
1167
————
1867
1556
————
3110
2723
————
3870
3501
————
369

62. Souvent, et dans les calculs très longs surtout, on facilitera beaucoup l'opération, en dressant d'avance une liste de tous les multiples du diviseur, depuis un jusqu'à dix. Par ce moyen, non-seulement vous rendrez impossible toute erreur que le calculateur le plus exercé n'évite pas toujours, en appréciant le nombre de fois que le diviseur pourra être contenu dans chacune des portions successives du dividende, mais vous vous épargnerez la peine de multiplier, en ce que cette table vous offrira les produits en question, tous calculés d'avance. La construction de cette table est très facile : vous commencerez par doubler le diviseur : à ce double vous ajouterez le diviseur lui-même, ce qui en donnera le triple ; continuant d'ajouter, vous arriverez à la fin au decuple, lequel doit être égal au diviseur lui-même, suivi d'un zéro. Vous reconnoîtrez à cette preuve, qu'il ne s'est glissé aucune erreur dans la construction de la table.

Voilà cette table pour le diviseur de l'exemple précédent 389.

389	 1
778	 2
1167	 3
1556	 4
1945	 5
2334	 6
2723	 7
3112	 8
3501	 9
3890	. . . . . 10.

63. Si le dividende et le diviseur étoient suivis de zéros, on les supprimera dans celui

des

des deux qui en a le moins ; on supprimera de même un nombre égal de zéros dans l'autre, après quoi on procédéra à la division. L'un et l'autre ayant été rendus par ce moyen dix fois, cent fois, mille fois plus petit, d'après le nombre de zéros qu'on aura supprimés, il est évident qu'il en résultera le même quotient.

TROISIÈME CAS.

64. Un principe semblable nous apprendra à résoudre le troisième cas de la division ; c'est celui où le diviseur a des décimales avec lui. Quant aux décimales du dividende, on a vu que dans aucun cas elle ne pouvoient causer la moindre difficulté.

65. Dans ce cas, voici la règle. Supprimez la virgule du diviseur : faites avancer de même celle du dividende de la gauche vers la droite, d'autant de places qu'il y avoit eu de décimales dans le diviseur, et procédez à la division. Dans le cas où le dividende n'auroit pas assez de chiffres significatifs pour faire ce déplacement, vous y pourvoirez par un nombre suffisant de zéros.

66. Par ce moyen, le diviseur et le dividende ayant été rendus en même tems dix fois, cent fois, mille fois plus grands, d'après le nombre de décimales qu'avoit eu le diviseur, l'on voit que d'un côté, il doit en résulter le même quotient ; de l'autre, le cas se trouvera reduit à celui d'un diviseur entier.

Soit proposé de diviser 41,647
par 0,05.

Sup-

Supprimant la virgule dans le diviseur, et faisant avancer celle du dividende de deux places vers la droite, il est évident que tous les centièmes auront été convertis en entiers : que les autres chiffres auront été augmentés dans la même proportion, et qu'ainsi le quotient n'en sera pas affecté. Ce quotient deviendra 1388,2333.

Proposons de diviser 8,49 par 0,37. Supprimant la virgule du diviseur, et faisant reculer de même celle du dividende de deux places vers la droite, il vous faudra diviser 8,49 par 37. Dans ce cas, ainsi que dans tous ceux où il y aura un pareil nombre de décimales dans le diviseur et dans le dividende, il sera permis de supprimer la virgule dans l'un et dans l'autre. Vous aurez pour quotient 22,945945......

Essayons enfin de diviser 2,8 par 0,101. Supprimant la virgule du diviseur, il vous faudra ajouter deux zéros au dividende, pour faire avancer sa virgule de trois places vers la droite. Le problème reviendra donc à diviser 2800 par 101 ; ce qui donnera pour quotient 27,72277227722.......

67. Terminons ce chapitre par l'explication des caractères qui servent à désigner chacune de ces opérations. Nous avertissons d'avance que $=$ signifie *égal*.

Le signe de l'addition est $+$; il se met entre les quantités dont il faut faire l'addition ; et il se prononce *plus*.

Le signe de la soustraction est $-$; prononcé *moins*. Il se met à la droite de la quantité dont il faut faire la soustraction ; de manière qu'il ait à sa droite celle qui doit en être soustraite.

Le signe de la multiplication est $\times$; il se met entre les facteurs du produit. L'ordre dans lequel ces facteurs sont placés, est indifférent.

Le signe de la division est tantôt (:) tantôt (—).

Le

Le premier (:) se met de manière qu'il ait à sa gauche le dividende, à sa droite le diviseur. On l'emploie quand il importe que l'un et l'autre se trouvent sur la même ligne.

L'autre (—) se met de manière qu'il ait au-dessus de lui le dividende, et au-dessous le diviseur. On le préfère, lorsqu'il convient de donner au quotient la forme fractionnaire, ce que nous verrons en son lieu.

On comprendra donc ce que veulent dire les énoncés suivans :

$$3 + 8 - 5 = 6$$
$$3 \times 7 = 21$$
$$12 : 4 = 3$$
$$\frac{4 \times 9}{2 \times 6} = 3$$

CHAPITRE TROISIÈME.

LES NOMBRES COMPLEXES.

68. D'après ce que nous avons dit, il seroit à désirer sans doute que dans la subdivision de l'unité qu'on a cru devoir adopter dans les affaires de commerce et de la société en général, on eut toujours suivi le principe du calcul décimal. Le Gouvernement françois, fixant enfin son attention sur cet objet, vient d'ériger en loi une mesure, qui a du être toujours suivie : et dans quelque tems d'ici nous verrons sans doute le calcul décimal devenir d'une application générale à toutes les opérations de la société. En attendant que cela ait lieu, nous ne pouvons pro-

profiter des avantages que le calcul républicain nous présente, que par des règles simples et faciles, qui nous apprennent à y réduire ceux, qui jusqu'ici ont été généralement adoptés.

69. Les rapports des subdivisions de l'unité principale sont absolument arbitraires. Chaque classe de la société a les siennes.

70. L'unité monétaire de la République est le franc. On le divisoit autre fois en vingt sous, et chaque sou en douze deniers. Par la multication on convertissoit les francs en sous et en deniers. Réciproquement on employoit la division, pour réduire les sous et les deniers en francs.

Etant proposée la somme de 13 fr. 17 sous 10 den. pour être convertie en deniers, on multipliera 13 par 20, et ajoutant 17 au produit 260, on aura 277 sous, au lieu des 13 fr. 17 sous. Multipliant ensuite 277 par 12, et ajoutant 10 au produit, on aura 3334 deniers, égaux à 13 fr. 17 sous 10 den.

Réciproquement, étant donnés 4649 deniers, pour être convertis en sous et en francs, on les divisera par 12; on en retirera 387 sous, et on aura 5 deniers de reste. Divisant ensuite les 387 par 20, on en retirera 19 francs, et 7 sous de reste: on aura donc en tout 19 fr. 7 sous 5 den.

71. Le franc d'aujourd'hui est divisé en 100 centimes, conformément aux vrais principes du calcul décimal. Delà il résulte les deux problèmes suivans.

72. *Réduire les centimes en sous et en deniers.* Multipliez les centimes par 20, et retranchez en deux décimales; vous en aurez fait des sous et des décimales de sous. Multipliez

pliez ces décimales par 12; les entiers qui en résulteront, seront les deniers.

Soient donnés 13 fr. 67 cent. Voici le calcul pour les réduire en sous et deniers.

	13 fr. 67 cent.
Multipliez par......	20
	13,40 sous.
Multipliez par......	12
	4,80 deniers.

Vous aurez 13 fr. 13 sous. 4 den.

73. *Réduire les sous et les deniers en centimes.* Ecrivez les deniers, suivis d'une virgule et de deux zéros : deux décimales suffiront pour cette réduction. Divisez ce nombre par 12; et comme alors la place des unités sera occupée par un zéro, mettez-y le nombre de vos sous. Divisez le nombre qui en résulte par 20; et comme la place des unités sera encore occupée par un zéro, mettez-y le nombre des francs, en cas qu'il y en ait. Les deux décimales qui les suivront, seront les centimes demandés.

Soit proposé 19 fr. 18 sous. 8 den. Voici le calcul pour les réduire en centimes.

Mettez	8,00 den.
Divisez par 12;	18,66 sous
Divisez par 20;	19,93 francs.

Vous aurez 19 fr. 93 cent.

74. L'unité temporaire est le jour. Il est divisé en vingt-quatre heures; l'heure en soixante minutes; la minute en soixante secondes. Les François n'ont pas encore aboli

cet

cet usage, généralement établi d'ailleurs chez toutes les nations policées, anciennes et modernes, dont l'histoire fait mention. Nous passons sous silence la réduction des heures, minutes et secondes en unités de la moindre espèce; de meme que la réduction de ces dernieres en secondes, minutes et heures entieres; la premiere se fait moyennant trois multiplications successives par 24, 60 et 60; la seconde s'opère moyennant trois divisions par 60, 60 et 24: on fera ici comme on avoit fait dans les deux problemes de 70. Reste donc à résoudre les deux problemes qui suivent, et qui ont un rapport bien plus immédiat avec le calcul décimal.

75. *Réduire les parties décimales du jour en heures, minutes et secondes.* Multipliez les décimales par 24: vous en retirerez les heures entieres, et le reste en parties décimales d'une heure. Multipliez ces dernieres par 60; vous en obtiendrez les minutes, et ce qui reste, en parties décimales d'une minute. Multipliez de meme ces dernieres par 60; les entiers qui en résulteront, seront les secondes, qu'il nous restoit à trouver.

Soient proposés 5, 416834 jours.
Multipliez par 24

10, 004016 heures.
Multipliez par 60

0, 24096 minutes.
Multipliez par 60

14, 4576 secondes.

Le nombre de jours et de parties décimales d'un jour, se trouvera donc réduit à 5 jours 10 heures 0 min. 14 sec.

76. *Réduire les heures, minutes et secondes en parties décimales d'un jour.* Ecrivez les secondes, suivies d'une virgule et de six décimales; il vous en faudra autant à-peu-près, pour être à l'abri de toute erreur dans les unités de la moindre espèce. Divisez le tout par 60, et mettez le nombre de vos minutes à la place des entiers. Divisez encore le tout par 60, et mettez le nombre de vos heures à la place des entiers. Divisez encore le tout par 24; et mettez le nombre de vos jours à la place des entiers. Le calcul sera fini.

77. La division par 60 est très facile. Divisez simplement par 6, mais observez de reculer tous les quotiens d'une place de plus vers la droite. De meme, lorsqu'il faudra multiplier par 60, multipliez simplement par 6, mais retranchez du produit une décimale de moins, qu'il n'y en avoit dans le multiplicateur. Vous pouvez en faire de meme pour tous les nombres d'un seul chiffre, suivis d'un zéro.

Soient proposés 5 jours 10 heures 0 min. 14 sec. Il faut réduire les unités de moindre espèce en parties décimales de l'unité principale.

	Ecrivez	14, 000000	secondes.
Divisez par 60;	quotient	0, 233333	minutes.
Divisez par 60;	quotient	10, 003888	heures.
Divisez par 24;	quotient	5, 416828	jours.

Vos 10 heures 0 min. 14 sec. équivaudront donc à 416828 millioniemes d'un jour.

78. L'unité angulaire, servant à la mesure des angles, est le quart de circonférence. Les Géo-

Géomètres et Astronomes de tous les siecles avoient coutume de diviser ce quart de circonférence en 90 dégrés, le dégré en 60 minutes; la minute en 60 secondes, et ainsi de suite; par la raison que ces nombres n'étoient pas seulement divisibles par cinq et dix, mais encore par trois et six. Les Géomètres françois ont senti enfin qu'aucune raison ne devoit prévaloir contre les avantages de la subdivision décimale. Reste donc encore à exposer la règle pour résoudre les deux problemes qui suivent.

79. *Réduire les parties décimales du quart de circonférence, en dégrés, minutes et secondes.* Multipliez les décimales par 90; elles seront converties en dégrés, et parties décimales d'un dégré. Multipliez ces dernieres par 60; elles seront changées en minutes, et parties décimales d'une minute. Multipliez ces dernieres par 60; elles seront converties en secondes, et en parties décimales d'une seconde. Mettez ensemble les dégrés, minutes et secondes; et votre probleme sera résolu.

Soit proposé un angle, égal à 0, 789362 d'un quart de circonférence; on demande combien cela fait en dégrés, minutes et secondes.

Mettez	0, 789362
Multipliez par	90
	71, 04258 dégrés.
Multipliez par	60
	2, 5548 minutes.
Multipliez par	60
	33, 288 secondes.

Vous aurez donc 71 dégrés 2 min. 33 sec.

80. *Reduire les dégrés, minutes et secondes en parties décimales d'un quart de circonférence.* Ecrivez les secondes, suivies d'une virgule et de six zéros. Divisez tout ce nombre par 60, et mettez vos minutes à la place des entiers. Divisez le nombre qui en résulte par 60, et mettez vos dégrés à la place des entiers. Divisez enfin ce dernier nombre par 90; et votre probleme sera résolu.

Soit proposé un angle de 71 dégrés 2 min. 33 sec.; il faut l'exprimer en parties décimales d'un quart de circonference.

	Ecrivez	33, 000000	secondes.
Divisez par 60 :	quotient	2, 550000	minutes.
Divisez par 60 :	quotient	71, 042500	dégrés.
Divisez par 90 :	quotient	0, 789361.	

Vous aurez 789361 millioniemes d'un quart de circonférence : que l'on pourra énoncer, si l'on veut, 78 dégrés, 93 minutes, 61 secondes de la nouvelle division.

81. L'unité de longueur, reçue autrefois en France, étoit la toise. On la divisoit en six pieds, le pied en douze pouces, le pouce en douze lignes, la ligne en douze points. Sans nous arrêter ici à la conversion ordinaire des toises, en pieds, pouces et lignes, ainsi que de ces dernieres en toises, conversion qui ne suppose que les principes ordinaires de la multiplication et de la division, et qui n'a rien de commun avec le calcul des parties décimales, nous proposerons plutôt les deux problemes suivans.

82. *Réduire les parties décimales de la toise en pieds, pouces, lignes et points.* Multipliez ces décimales par 6; les décimales du pro-

produit par 12 ; les décimales de ce dernier produit par 12; les décimales de ce nouveau produit encore par 12, et ainsi de suite. Mettez ensemble les entiers qui se trouvent à la tête de chaque produit ; et vous aurez les pieds, pouces, lignes et points que vous cherchiez.

Soit proposé 0, 21784 d'une toise ; on demande à réduire cette longueur en pieds, pouces, lignes et points.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Ecrivez} & 0,\ 21784 \text{ toise.} \\
 & \underline{\quad\quad 6 \quad\quad} \\
 & 1,\ 30704 \text{ pieds.} \\
 & \underline{\quad\quad 12 \quad\quad} \\
 & 3,\ 68448 \text{ pouces.} \\
 & \underline{\quad\quad 12 \quad\quad} \\
 & 8,\ 21376 \text{ lignes.} \\
 & \underline{\quad\quad 12 \quad\quad} \\
 & 2,\ 56512 \text{ points.}
\end{array}
$$

Vous aurez 1 pied, 3 pouces, 8 lignes, 2 points ; équivalents à la longueur proposée.

83. *Réduire les pieds, pouces, lignes et points, en parties décimales d'une toise.* Ecrivez le nombre des points, suivi de quatre ou de cinq zéros, suivant la précision que vous voulez y mettre. Divisez ce nombre par 12 ; et à la place des entiers, mettez vos lignes. Divisez ce dernier nombre par 12, et à la place des entiers, mettez vos pouces. Divisez celui-ci par 12, et à la place des entiers, mettez vos pieds. Divisez enfin ce dernier nombre par 6, et à la place des entiers, met-

mettez vos toises, si vous en avez. Le probleme sera résolu.

On demande à réduire 1 pied, 3 pouces, 8 lignes, 2 points en parties décimales d'une toise.

	Ecrivez	2, 00000 points.
Divisez par 12	. . . .	8, 16666 lignes.
Divisez par 12	. . . .	3, 68055 pouces.
Divisez par 12	. . . .	1, 30671 pieds.
Divisez par 6	. . . .	0, 21778 toises.

La longueur donnée sera égale à 21778 cent-milliemes d'une toise.

84. L'unité linéaire, établie en France, en conséquence de la loi du 18 *Germinal, an trois*, est le *mètre*, égal à la dix-millionieme partie du quart de circonférence de la terre, évalué à 5130740 *toises;* ce qui donne au mètre la longueur de 0, 513074 *d'une toise;* ou bien 3, 078444 *pieds*; ou 36, 9413 *pouces*; ou enfin 443, 296 *lignes*. Le mètre est subdivisé de dix en dix, d'abord en *dix palmes* (*décimetres*) de 3, 694 pouces chacun; en *cent doigts* (*centimetres*) de 4, 433 lignes; enfin en *mille traits* (*millimetres*) d'une *demi-ligne* environ. Parmi les unités supérieures au metre, vous remarquerez d'abord la *perche* (*décametre*) de 31 pieds environ, et propre à faire une chaine d'arpentage; le *mille* (*kilometre*) de 513 toises, ce qui fait un petit quart de lieue; enfin la *lieue* (*myriametre*) de 5131 toises, ce qui fait un peu plus qu'une poste. Les deux dernieres serviront proprement aux mesures itinéraires.

85. *Une longueur quelconque étant exprimée en mètres, il faut la convertir en toises, pieds, pouces etc.* Multipliez la longueur

gueur donnée par o, 513 ; le quotient vous la fera connoitre, exprimée en toises, et parties décimales d'une toise. Réduisez ces dernieres en pieds, pouces etc. le probleme sera résolu.

Exemple I. *On demande ce que font* 3 met. 7 palm. 4 do. 9 tr. *ou* 3, 749 *mètres, en toises, pieds, pouces etc?* Multipliant 3, 749 par o, 513 on aura pour produit 1, 923237 toises ; ce qui se réduit à 1 to. 5 pi. 6 po. 6 li.

Exemple II. *On demande ce que font* 4 palm. 9 do. 7 tr. *ou* o, 497 *mètres, en pieds, pouces, lignes?* Multipliant o, 497 par o, 513 on trouve o, 254961 ; telle est la longueur en question, exprimée en parties décimales d'une toise, qui se réduisent facilement à 1 pi. 6 po. 4 li,

Le pied de Cologne est à l'ancien pied de France comme *huit* à *neuf* ou plus exactement comme 15 à 17 ; il se réduit donc à o, 2875 d'un mètre ; ce qui donne à la toise de Cologne la longueur de 1, 725 mètres ; et réciproquement au mètre, celle de o, 58 d'une toise de Cologne, ou bien, celle de 3, 4783 pieds de Cologne. Ainsi donc, une longueur quelconque étant exprimée en mètres, s'il faut la convertir en pieds de Cologne, il faut la multiplier par 3, 48 ou plus exactement par 3, 4783. On réduira les décimales du produit en pouces, lignes etc, par des multiplications successives.

Si cette meme longueur devoit être convertie en verges de Cologne (*Ruthen*) de *seize pieds* chacune, il faudroit multiplier par o, 2174 ce nombre de mètres proposé. Car tel est le quotient qui résulte, en divisant par *seize* le multiplicateur 3, 4783 qui avoit servi pour la réduction en pieds.

86. *Une longueur quelconque étant exprimée en toises, pieds, pouces etc. il faut la réduire en mètres et en parties décimales du mètre.* Réduisez les pieds, pouces, lignes en parties décimales d'une toise ; mettez à la place

place des unités les toises que vous avez, et divisez le tout par 0, 513; ou bien, ce qui revient au meme, multipliez par 1, 949. Si l'on ne veut pas regarder à une erreur *d'un sur deux-mille*, et mettre 1, 95 à la place de 1, 949 la règle sera très facile; prenez le double du nombre des toises, et ôtez-en la vingtieme partie de ce même nombre.

Exemple I. Etant proposée la longueur de 28 to. 5 pi. 10 po. pour être convertie en mètres, vous réduirez d'abord ce nombre à 28, 972 toises; et faisant la multiplication par 1, 949 vous aurez le produit 56, 466 mètres. L'autre règle auroit donné

Nombre des toises 28, 972;
Double de ce nombre 57, 944;
Sa vingtieme partie 1, 449;
Soustraction faite, il reste . . 56, 495 *mètres.*

L'erreur sera de *trois doigts*; ce qui équivaut à peine à un pouce.

Si la longueur proposée étoit exprimée en verges de Cologne, et qu'il fallut la convertir en mètres, il faudroit simplement la multiplier par 4, 6 ou bien multiplier par 46 et diviser le produit par 10. *Dix verges de Cologne* font à très peu près *quarante-six mètres.*

Si cette meme longueur étoit exprimée en pieds de Cologne, qu'il faudroit convertir en mètres, il faudroit multiplier par 23 le nombre des pieds, et diviser le produit par 80. *Quatre-vingt pieds de Cologne* font à très peu près *vingt-trois mètres de France.*

87. L'unité de superficie sera naturellement le *mètre quarré (centiare)*: égal à 0, 263245 d'une toise quarrée. La toise quarrée de son côté sera égale à 3, 798744 mètres quarrés; et si l'on ne veut pas regarder à une erreur *d'un sur quatre-mille*, on multipliera

tipliera simplement les toises quarrées par 3,8 pour les convertir en mètres quarrés. Quant au pied quarré, il sera égal à 0,105521 d'un mètre quarré; lequel de son côté, aura 9,48 ou $9\frac{1}{2}$ pieds quarrés. Parmi les unités de superficie, supérieures au mètre quarré, il faut particulierement distinguer la *perche quarrée (are)*; équivalente à 26 toises quarrées environ. Elle est particulierement destinée aux mesures agraires, de meme que *l'arpent*, égal à *cent perches quarrées*, à *dix-mille mètres quarrés*, ou bien à 2632 *toises quarrées*.

Le *mètre quarré* est donc égal à *douze pieds quarrés de Cologne*, plus un dixieme de pied quarré. La *verge quarrée de Cologne* est égale à *vingt et un mètres quarrés*, et un sixieme.

L'arpent de Cologne est un quarré de *seize* verges de long sur autant de large : ce qui fait 256 verges quarrées. L'arpent de Cologne est donc à l'arpent républicain d'aujourd'hui comme 5417 sont à 10000, ou à très peu près comme *treize* est à *vingt-quatre*. Vingt-quatre arpens de Cologne font autant que treize arpens républicains.

88. Par les memes raisons, l'unité de volume sera le *mètre cube* : il a reçu le nom de *stère*, et il est particulierement consacré à la mesure des bois de chauffage. Le stère équivaut à peu près à la demi-voie de bois de Paris. Il est égal à *vingt-neuf* et un sixieme, ou plus exactement à 29,1739 pieds cubiques de France, ce qui fait à très peu près *quarante-deux pieds cubiques de Cologne*. La dixieme partie du stère, égale à trois pieds cubiques environ, a reçu le nom de *solive*.

89. Le mètre cube étant beaucoup trop grand pour la plupart des mesures de volume dont nous faisons usage dans la société; on lui a préféré le décimètre cube, et à cet effet on lui a donné le nom de *pinte (litre)*. Il est égal à *cinquante pouces cubiques et demi*, ou plus exactement à 50,4124; il diffère par conséquent peu du litron et de la pinte de Paris.

La pinte de Cologne (*Kanne*) est égale à un litre et un tiers; ou plus exactement à 1,312 de litre. Elle est donc à la pinte de France comme *quatre* à *trois*; ou plus exactement comme 21 à 16. La *mesure* de Cologne (*Ahme*) comprend 104 *Kannen*; ainsi elle équivaut à 136 et demie, ou plus exactement à 136,448 pintes de France.

90. Ses unités d'une espèce supérieure procèdent de meme de *dix* en *dix*, par *boisseau*, *setier* et *muid*. Le *muid*, autrement mètre cube ou stère, est à peu près un tonneau de mer d'aujourd'hui. Le *setier (solive, hectolitre)* égal à trois pieds cubiques environ, servira pour la mesure des grains, du sel, du platre, de la chaux, des charbons. Le *boisseau (décalitre)* égal à 504 pouces cubiques, peut tenir lieu de l'ancien boisseau, pour la mesure du bled, et de toutes sortes de graines. La *pinte* elle meme servira aux memes usages que l'ancien litron et la pinte de Paris. Le *verre (décilitre)* égal à cinq pouces cubiques, sera équivalent à un gobelet ordinaire.

Le *Sümmer* de Cologne, égal à 36 pintes environ, est donc au sétier à très peu près comme 5 à 14. Quatre *Sümmer* font le *Maldre*: il est dont au sétier comme 10 à 7. La moitié du Sümmer est le *tonneau* (*Faſs*) de Cologne: il est au boisseau à très peu près

près comme 34 à 19. Enfin le *quarteron* de Cologne, qui est la moitié du *tonneau* et le quart du *Sümmer*, est un peu moindre que le boisseau de *France*, dans le rapport de 17 à 19.

91. L'unité de poids, reçue autrefois en France, étoit la livre. Cette livre se divisoit en 16 onces: l'once en 8 gros; le gros en 3 deniers; le denier en 72 grains. On avoit encore le marc, égal à une demi-livre, ou à huit onces. Cela étant, voici les règles pour la solution des deux problemes de réduction qui se présentent ici:

92. *Réduire les parties décimales d'une livre en onces, gros, deniers et grains.* Multipliez ces parties décimales par 16, les entiers qui en résulteront, seront les onces. Les décimales qui les suivront, multipliées par 8, feront connoitre les gros. Les décimales qui suivront ceux-ci, multipliées par 3, indiqueront les deniers; une nouvelle multiplication des décimales de deniers par 24, vous indiquera les grains.

Proposons 0, 70382 parties d'une livre à réduire en onces, gros, deniers et grains.

Mettez	0, 70382 *livres*
Multipliez par 16 . . .	11, 26112 *onces*
Multipliez par 8 . . .	2, 08896 *gros*
Multipliez par 3 . . .	0, 26688 *deniers*
Multipliez par 24 . . .	6, 40512 *grains.*

On aura donc 11 *onces*, 2 *gros*, 6 *grains* et demi.

93. *Réduire les onces, gros, deniers et grains en parties décimales d'une livre.* Ecrivez vos grains, suivis d'une virgule et de cinq

cinq zéros. Divisez ce nombre par 24, et mettez vos deniers à la place des entiers. Divisez ce nouveau nombre par 3, et mettez vos gros à la place des entiers. Divisez ce dernier nombre par 8, et mettez vos onces à la place des entiers. Divisez enfin ceux-ci par 16, et mettant vos livres à la place des entiers, vous aurez résolu le probleme.

Proposons 11 *onces*, 2 *gros*, 6 et demi *grains*, à réduire en parties décimales d'une livre.

Mettez	6, 50000	*grains*
Divisez par 24 . . .	0, 27083	*deniers*
Divisez par 3 . . .	2, 09028	*gros*
Divisez par 8 . . .	11, 26128	*onces*
Divisez par 16 . . .	0, 70383	*livre.*

On aura 0, 70383 *d'une livre* équivalentes à 11 *onces*, 2 *gros*, 6 et demi *grains*.

94. L'unité républicaine des poids est le poids d'un décimètre ou d'un palme cubique d'eau, à la température de la glace fondante. Le poids d'un pied cubique d'eau à cette température ayant été trouvé égal à *soixante-dix* ou plus exactement à 70, 028 livres, dans le vuide, il n'est pas difficile d'en déduire celui d'un palme cubique d'eau; on le trouvera égal à 18 827 grains. Telle est l'unité de poids, reconnue pour telle dans la république: c'est la livre républicaine d'aujourd'hui. L'ancienne livre ayant eu 9216 de ces memes grains, la nouvelle livre est donc plus que le double de l'ancienne livre, poids de marc; le rapport entre les deux étant celui de 23 *à* 47; ou plus exactement, de 70 *à* 143.

95.

95. Conformément au principe du calcul décimal, la livre est divisée en *dix onces*, en *cent gros*, en *mille deniers* ou *grammes* et en *dix-mille grains*. Le *denier* répond assez bien au *gramme* des grecs dont il tire son nom; il est très propre à servir d'unité de poids dans les expériences physiques et chymiques, et en général dans les opérations qui exigent beaucoup d'exactitude, telles que sont les procédés de la plupart des arts. Il est moindre que l'ancien denier, dans le rapport de 11 *à* 14, ou plus exactement de 40 *à* 51. Le *gros* est plus que le double de l'ancien gros; le rapport entre les deux est celui de 5 *à* 13 ou plus exactement de 13 *à* 34. L'once enfin est plus que le triple de l'ancienne once; le rapport entre les deux est celui de 3 *à* 10, ou plus exactement de 15 *à* 49. La dénomination de *grain* a été conservée dans le nouveau sisteme; on donne ce nom à la dixieme partie du gramme, qui est la dix-millieme d'une livre. Le nouveau grain est presque le double de l'ancien grain; le rapport entre les deux est celui de 9 *à* 17, ou plus exactement de 17 *à* 32.

96. Parmi les unités supérieures à la livre, vous remarquerez d'abord le *quintal*, égal à *cent*, et le *millier*, égal à *mille* nouvelles livres. Ce dernier est à peu près le poids d'un tonneau de mer; il est égal à 2043 anciennes livres.

La valeur d'une masse d'argent, du poids de cinq grammes, ayant neuf dixiemes d'argent pur, sur un dixieme d'alliage, est ce qui constitue *le franc*, unité monétaire de la république.

Les dénominations de livres, onces, gros, deniers et grains ont été mises en vigueur par l'arrêté des consuls du 13 *Brumaire, an neuf*. Elles ont paru plus anciennes, plus simples et plus françoises que celles de Kilogrammes, de hectogrammes, de décagrammes, de grammes et de décigrammes, dont on se servoit auparavant dans les actes publics.

L'ancienne livre, poids de marc, est égale à 489 $\frac{1}{2}$ grammes. La livre angloise de Troy en a 372,6. La livre dite *avoir du poids* en contient 453, 1. La livre de Vienne en a 558, 6.

La livre de Cologne en contient 467, 38 : ce qui donne au marc de Cologne 233, 7 grammes ; à la demi once de Cologne 14, 606 grammes ; au gros de Cologne (*Quentchen*) 3,65 grammes. Ainsi *trois* gros de Cologne sont équivalents à *onze* grammes.

97. Ainsi donc, un poids quelconque étant exprimé en grammes, s'il faut le convertir en anciennes livres, onces, gros etc. on commencera par multiplier le nombre des grammes par 18, 827; par cette multiplication on les aura convertis en grains, lesquels, pour être changés en gros, onces, livres, devront être divisés successivement par 72, 8, 16. Réciproquement, un poids quelconque étant proposé en anciennes livres, onces, gros et grains, on le convertira d'abord en grains, après quoi, le nombre de ces grains étant divisé par 18, 827 fera connoitre sur le champ le nombre des grammes qu'on demandoit.

Exemple I. *On demande à réduire 2567 grammes aux anciennes expressions.*

Multipliant 2567 par 18, 827 on trouve le produit 48329; tel est le nom des grains, poids de marc, équivalent aux 2567 grammes. Ensuite, les 48329 grains se réduisent successivement:

d'abord	à			671 gros	17 grains
ensuite	à		83 onc.	7 gros	17 grains
enfin	à	5 livr.	3 onc.	7 gros	17 grains.

Exem-

Exemple II. *Etant proposé le poids de* 5 liv. 3 onc. 7 gros 17 grains, *on demande à le convertir en grammes.*

On pourra y procéder de deux manieres.

Réduisant les 3 onc. 7 gros 17 grains en parties décimales d'une livre, le poids proposé se trouvera égal à 5, 24403 livres, poids de marc. Ensuite, chacune de ces livres étant égale à 489 $\frac{1}{2}$ grammes, il faudra multiplier par 489 $\frac{1}{2}$ le nombre des livres qu'on vient de trouver. Il résultera de cette multiplication 2567 grammes ; que l'on pourra énoncer, si l'on veut, 2 livres 5 onces 6 gros 7 grammes ou deniers.

Ou bien, on prendra les 5 livr. 3 onc. 7 gros 17 grains, et par des multiplications successives par 16, 8, 72 on les convertira en grains. On aura 48329 grains. Ensuite, comme un gramme est égal à 18,827 grains, poids de marc, on divisera par 18, 827 le nombre des grains qu'on a obtenu. On aura également 2567 grammes.

S'il est question de livres de Cologne, on observera que la livre de Cologne est a celle de Paris comme 21 à 22. La livre de Cologne aura donc 467, 38 grammes : ce qui donne au gramme 19,718 grains, poids de Cologne, au lieu des 18, 827. Ainsi 19, 718 sera le facteur, par lequel il faudra multiplier un nombre quelconque de grammes, pour les réduire en grains de Cologne : et par lequel il faudra réciproquement diviser un nombre quelconque de grains de Cologne, pour les réduire en grammes.

98. L'addition et la soustraction des nombres complexes, en usage dans l'Arithmétique ordinaire, n'a pas de difficulté non plus. Dans les deux cas on écrit les nombres proposés les uns au dessous des autres ; et l'on passe des unités de la moindre espèce aux unités des espèces supérieures.

99. C'est proprement dans la multiplication et la division des nombres complexes qu'on sent vivement les avantages immenses du nouveau systeme.

100. Indépendamment de ces avantages nous pourrions cependant tirer parti de ceux que le calcul décimal nous présente, pour opérer avec assez de facilité la multiplication et la division des nombres complexes. Il n'y auroit qu'à réduire dans les deux facteurs, les unités de moindre espèce en parties décimales de l'unité principale ; il faudroit multiplier ou diviser ensemble les deux facteurs ainsi réduits, et on finiroit par réduire les décimales du produit ou du quotient en unités de moindre espece.

101. Mais on fera mieux de suivre à cet égard les règles particulieres, que l'arithmétique a consacrées depuis longtems, et qui peuvent encore trouver leur place à côté du calcul décimal.

102. Il y a deux règles qui tendent également au but qu'on se propose dans la multiplication ; l'une suppose la réduction préalable de chacun des deux facteurs en unités de sa moindre espèce ; l'autre est celle qu'on nomme multiplication par parties aliquotes.

103. Voici d'abord la premiere règle pour opérer la multiplication des nombres complexes. Réduisez les deux facteurs en unités de la moindre espece; multipliez ensemble les deux facteurs réduits et divisez le produit par le rapport qui existe entre l'unité principale et l'unité de la moindre espece dans le multiplicateur. Le quotient qui en résulte, sera le produit demandé, exprimé en unités de la moindre espece du multiplicande.

Exemple. *On demande le prix de* 22 $^{\text{to.}}$ 4 $^{\text{pi.}}$ 7 $^{\text{po.}}$, *la toise à raison de* 17 $^{\text{lb.}}$ 13 $^{\text{sous}}$ 10 $^{\text{den.}}$ Ayant donc 17 $^{\text{lb.}}$ 13 $^{\text{sous}}$ 10 $^{\text{den.}}$ à multiplier par 22 $^{\text{to.}}$

4 pi. 7 po., on réduira les deux facteurs en unités de la moindre espèce : on aura

$$\begin{array}{rr} & 4246 \text{ deniers, à multiplier} \\ \text{par} & 1639 \text{ pouces.} \\ \hline & 38214 \\ & 12738 \\ & 25476 \\ & 4246 \\ \hline & 6959194 \end{array}$$

Il faut bien se garder de prendre ce nombre pour les deniers du produit. En faisant cela, on prendrait le pouce pour unité, tandis que le sens du probleme exige que ce soit la toise. On auroit donc un produit 72 fois trop grand : et pour le réduire à sa juste valeur, il faudra le diviser par 12 et par 6. La premiere division donnera 579933 ; la seconde 96655. Ce dernier nombre exprimera le produit demandé en deniers ; on les réduira d'abord en 8054 sous 7 deniers ; ensuite à 402 fr. 14 sous 7 den.

104. Les deux méthodes précédentes ont en effet tous les avantages, qu'une marche uniforme, générale et applicable à tous les cas présente toujours. Mais elles ont le défaut essentiel, de ne faire connoitre le produit qu'on cherche, que par un calcul très long, et un grand nombre de chiffres inutiles. Il existe une autre méthode, moins générale à la vérité, mais qui conduit bien plus directement au but, et qui se fait remarquer par son élégance, et par l'usage qu'on en peut faire, non seulement à tous les cas de la multiplication des nombres complexes, mais encore à bien d'autres problemes d'Arithmétique. C'est la *multiplication par parties aliquotes*.

105. On appelle *parties aliquotes* d'un nombre, tous les nombres plus petits, par lesquels le premier est exactement divisible sans laisser de reste.

D'après cette definition, les parties aliquotes de 12 seront 1, 2, 3, 4, 6.

Le nombre 15 aura pour parties aliquotes 1, 3, 5.

Le nombre 56 aura pour parties aliquotes 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28.

Le nombre 360 est remarquable surtout par le grand nombre de ses parties aliquotes, savoir : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180. Aussi a-t-il été choisi de préférence, pour exprimer le nombre de dégrés, dans lesquels on vouloit diviser la circonférence du cercle.

106. L'unité est donc partie aliquote de tous les nombres entiers en général. Les nombres pairs sont ceux qui ont *deux* pour partie aliquote : tels sont tous les nombres terminés par 0, 2, 4, 8. Il y a des caractères assez faciles auxquels on peut reconnoitre qu'un nombre est divisible par 3, 5, 9, 10, 11. Nous en parlerons dans le chapitre suivant.

107. Les nombres qui n'ont d'autre parties aliquotes que l'unité seule, sont appellés *nombres premiers*. Tels sont, depuis 1 jusqu'à 120, les nombres suivants :

1, 2, 3, 5, 7,	61, 67,
11, 13, 17, 19,	71, 73, 79,
23, 29,	83, 89,
31, 37,	97,
41, 43,	101, 103, 107, 109,
53, 59,	113.

Il faut observer au sujet de la progression de ces nombres, que jusqu'ici on n'y a rencontré, ni retour périodique, ni même aucune loi constante et générale, déterminable par quelque moyen analytique que ce soit.

108. Il y a de certains nombres, remarquables par une propriété assez singuliere: c'est qu'il sont égaux à la somme de toutes leurs parties aliquotes prises ensemble. Tels sont les nombres 6, 28, 496, 8128, 130816, 2096128. Les anciens les ont appellé *nombres parfaits;* et ils en ont fait un probleme d'analyse fort élégant.

109. Un nombre quelconque étant proposé, il est toujours possible, et meme très facile, de le décomposer en parties aliquotes d'un autre nombre plus grand, pourvu que celui-ci ne soit pas un nombre premier, et que d'ailleurs ses parties aliquotes soient connues, ce qui a toujours lieu dans les nombres qu'on a choisi pour exprimer les rapports de l'unité principale aux unités de moindre espèce.

On demande de décomposer 7 en parties aliquotes de 12? Réponse: *six* et *un*. Divisant 12 par 2, on a 6. Divisant 6 par 6, on trouve un.

On propose de décomposer 13 en parties aliquotes de 16? La moitié de 16 est 8. Celle de 8 est 4. Le quart de 4 est 1. Les parties aliquotes demandées sont donc *huit*, *quatre* et *un*.

Il faut décomposer 17 en parties aliquotes de 20? La moitié de 20 est 10. Celle de 10 est 5. Reste 2, qui se trouvent encore en divisant 10 par 5. Les parties aliquotes sont donc *dix*, *cinq*, *deux*.

On doit décomposer 23 en parties aliquotes de 30? La moitié de 30 est 15. Le tiers de 15 est 5. Restent encore 3, qui se trouvent en divisant 15 par 5, ou 30 par 10. Les parties aliquotes seront donc 15, 5, 3.

On demande de décomposer 55 en parties aliquotes de 72? La moitié de 72 est 36; il reste 19. Le tiers de 36 est 12; reste 7. La moitié de 12 est 6; reste 1. Les parties demandées seront 36,12,6,1.

On veut décomposer 69 en parties aliquotes de 100? La moitié de 100 est 50; reste 19. Le cinquième de 50 est 10; reste 9. La moitié de 10 est 5; reste 4. On peut considérer ce reste comme 2 fois 2; or 2 est le cinquième de 10. Les parties aliquotes seront donc 50, 10, 5, 2, 2.

Décomposons enfin le nombre 283 en parties aliquotes de 360. La moitié de 360 est 180. Celle de 180 est 90. Le neuvieme de 90 est 10; reste 3, qui sont le trentième de 90. Les parties qu'on cherchoit seront donc 180, 90, 10, 3.

110. Or, voici l'usage qu'on fait des parties aliquotes dans la multiplication des nombres complexes. Multipliez d'abord le multiplicande par le nombre d'unités principales qu'il y a dans le multiplicateur. Quant aux unités de moindre espèce, décomposez les en parties aliquotes de l'unité principale. Il faudra faire alors autant de produits partiels qu'il y aura de parties aliquotes. Ces produits partiels, on les trouvera facilement par des divisions simples et successives. Enfin, ajoutant tous ces produits partiels, on aura le produit demandé.

Exemple I. *On demande combien doivent couter* 15 to. 6 pi. 10 po. *à raison de* 23 fr. 46 cent. *la toise?*

Il faut multiplier	23,46
par	13 to. 5 pi. 10 po.
Pour 10 toises	234,60
Pour 3 toises	70,38
Pour 3 pieds	11,73
Pour 2 pieds	7,82
Pour 8 pouces . . .	2,606
Pour 2 pouces . . .	0,652
Produit total . . .	327,788

ou bien, 327 fr. 79 cent.

Le produit partiel pour 13 toises se trouve en multipliant simplement 23,46 par 13. Comme la toise a six pieds, on décomposera les 5 pieds du probleme en parties aliquotes de 6, on aura 3 pieds et 2 pieds : dont l'un est la moitié, l'autre le tiers d'une toise. On trouvera donc les produits partiels correspondans, en prenant d'abord la moitié, ensuite le tiers de 23,46 francs. Les 2 pieds ayant 24 pouces, il faudra décomposer les 10 pouces du probleme en parties aliquotes des 24 ; on aura 8 et 2 ; le premier étant le tiers de 24 ; l'autre le quart de 8. Le produit partiel pour l'un, se trouvera donc, en prenant le tiers de 7,82 francs, qui est 2,606. On trouvera celui de l'autre, en prenant le quart de 2,606? qui est 0,652.

Comme dans ces deux cas la division laisse un reste, on fait bien de pousser l'opération à une décimale de plus. Il en résultera des dixièmes de centimes, insensibles à la vérité tant qu'ils restent seuls ; mais dont l'addition pourroit fort bien faire un ou plusieurs centimes entiers.

Ici l'addition donne 327 fr. 78 cent. et 8 dixièmes de centimes. Et comme cette petite somme excède un demi-centime, on fera bien d'écrire à sa place 327 fr. 79 cent.

Exem-

Exemple II. *On demande ce que couteront* 29 lb. 13 onc. 6 gros 57 grains *d'une marchandise, la livre étant à raison de* 124 fr. 36 cent.

Multipliez	124,36
par	29 lb. 13 onc. 6 gros 57 grains.
Pour 20 livres . .	2487,20
Pour 9 livres . .	1119,24
Pour 8 onces . .	62,18
Pour 4 onces . .	31,09
Pour 1 once , .	7,772
Pour 4 gros . . .	3,886
Pour 2 gros . . .	1,943
Pour 48 grains . .	0,648
Pour 6 grains . .	0,081
Pour 3 grains . .	0,040
Produit . . . ,	3714,080

ou bien 3714 fr. 8 cent.

Les 29 entiers de livres ne feront aucune difficulté. Les 13 onces se décomposent en 12, 4 et 1 once; dont le premier est la moitié d'une livre; le second est la moitié du premier; et le troisième est le quart du second. Cette once ayant 8 gros, on décomposera les 6 gros du probleme en 4 gros et en 2 gros; le premier de ces petits poids étant la moitié d'une once, et l'autre la moitié du premier. Les deux gros enfin auront 144 grains; il faudra donc décomposer les 57 grains du probleme, en 48, 6 et 3 grains; le premier étant le tiers de deux gros; le second est le huitième du premier, et le troisième sera la moitié du second.

Rassemblant tous les produits partiels, il en résultera pour le produit total 3714 fr. 8 cent.

111. Dans les deux exemples que nous venons de proposer, le multiplicande désignoit des francs et des centimes, ce qui permettoit l'application immédiate du calcul décimal. Si le multiplicande avoit, de même que le multiplicateur, des unités de moindre espèce, dans lesquelles la progression décimale ne fut pas observée, il vaudroit mieux de les y réduire, plutôt que d'y appliquer le principe des parties aliquotes. Pour plus de précision, il conviendra d'employer au moins trois décimales; et dans de certains cas on ne feroit pas mal d'en mettre jusqu'à quatre.

Exemple I. *On demande ce que couteront* 22 to. 4 pi. 7 po. *à raison de* 17 fr. 13 sous 10 den. *la toise.*

Réduisons d'abord les 17 fr. 13 sous 10 den.

10,0000
13,8333
17,6916

Ainsi donc, ayant 17,6916 francs à multiplier pas 22 to. 4 pi. 7 po. on procèdera comme il suit:

Pour 20 toises . . .	353,8320
Pour 2 toises . . .	35,3832
Pour 3 pieds . . .	8,8458
Pour 1 pied . . .	2,9486
Pour 6 pouces . .	1,4743
Pour 1 pouce . .	0,2457
Produit	402,7296

Les décimales se réduisent très facilement à 14 sous 7 den. ce qui est parfaitement conforme au résultat obtenu en 103.

Exem-

Exemple II. *On demande ce que couteront* 27 to. 4 pi. 8 po. *à raison de* 72 fr. 6 sous 6 den. *la toise?*

	6,0000
	6,5000
Réduction des 72 fr. 6 sous 6 den.	72,3250
On aura donc à multiplier	72,325 francs.
par	27 to. 4 pi. 8 po.
Pour 20 toises	1446,500
Pour 7 toises	506,275
Pour 2 pieds	24,108
Pour 2 pieds	24,108
Pour 8 pouces . . .	8,036
	2009,027

Les décimales se réduisent très aisément à 6 deniers. Le produit sera donc 2009 fr. 0 sous 6 den.

112. En décomposant les unités de moindre espèce, il arrive quelquefois que les parties aliquotes qui en résultent ne soient pas fort commodes, à cause des grands diviseurs qu'elles présentent. Il faut y suppléer alors par de faux produits, comme on verra par les exemples suivants:

Exemple I. *Combien couteront* 3 lb. 8 onc. 3 gros. *à raison de* 43 fr. 82 cent. *la livre?*

Il faut multiplier	43,82
par	3 lb. 8 onc. 3 gros.
	131,46
Pour 8 onces	21,91
Pour 1 once	(2,739)
Pour 2 gros	0,685
Pour 1 gros	0,342
	154,397 francs.

Les

Les 8 onces, faisant la moitié de la livre, ne causeront aucune difficulté : elles reviendront à 21,91. Mais pour passer des 8 onces aux 2 gros, il faudroit diviser 21,91 dar 32, ce qui exigeroit une division à part. Mais 32 est 8 fois 4; en divisant d'abord par 8, et le quotient qu'on aura obtenu par 4, on aura divisé par 32. La premiere division fera connoitre ce qu'auroit couté une once; savoir 2,739; mais comme c'est un produit simplement supposé, il faudra le rayer, avant que de faire l'addition. On aura pour produit 154 fr. 40 cent.

Exemple II. *Combien pour* 34 fr. 10 sous 2 den. *fera-t-on faire d'ouvrage, à raison d'un franc pour* 17 *toises?*

Il faut multiplier	17 toises
par	34 fr. 10 sous 2 den.
Pour 30 francs . .	510
Pour 4 francs . .	68
Pour 10 sous . . .	8,5
Pour 1 sou . . .	(0,85)
Pour 2 deniers .	0,14166
	586,64166 toises.

On aura pour produit 586,64166 toises. Les décimales se réduisent à 3 pi. 10 po. 2 li. 5 pts.

113. L'application du calcul décimal, enseignée en 102 renferme aussi tous les différens cas de la division des quantités complexes. On ne fera pas mal cependant de réserver cette méthode pour le troisième seul de ces cas; les deux autres pouvant être expédiés avec plus de facilité, quoique d'après des principes moins généraux.

114. Le premier cas concerne la division d'un nombre complexe par un nombre absolu. Le quotient dans ce cas est de meme espèce

que

que le dividende. On commencera donc par diviser les unités principales de celui-ci ; on réduira le reste en unités de l'espèce immédiatement inférieure, à qui on ajoute celles de la même espèce qui se trouvent dans le dividende ; et on continue ainsi la division jusqu'aux unités de la moindre espèce.

Soit proposé de diviser 2071 lb. 18 sous 10 den. par 17. Divisant les 2071 francs par 17, on aura 121 francs de quotient et 14 francs de reste. On les réduira en sous, en y ajoutant les 18 sous du dividende ; on aura 298 sous à diviser par 17 ; on obtiendra 17 sous de quotient et 9 sous de reste. On les réduira en deniers, en y ajoutant les 10 deniers du dividende ; on aura 118 deniers à diviser par 17, ce qui donnera 7 deniers. Le quotient sera dont 121 fr. 17 sous 7 den.

115. Le second cas est celui où le dividende et le diviseur, complexes tous les deux, sont de meme espèce. On les réduira tous à la moindre espèce, et on procédera à la division de l'un par l'autre.

Un certain nombre de livres, onces, gros etc. ayant couté la somme 247 fr. 17 sous 10 den. la livre à raison de 4 fr. 10 sous 8 den. ; on en demande le nombre ? Il faut donc diviser 247 fr. 17 sous 10 den. ou 59494 deniers par 4 fr. 10 sous 8 den. ou 1088 deniers. On procedera donc à cette division ; on aura 54 livres de quotient et 742 livres, faisant 11873 onces de reste. Divisant ces derniers par 1088, on aura 10 onces de quotient et 992 onces, faisant 7936 gros de reste. Divisant ces deniers par 1088, on trouvera 7 gros de quotient et 320 gros de reste. On réduira ces derniers d'abord à 960 scrupules, et ensuite en 23040 grains ; lesquels divisés par 1088, donnent 21 grains de quotient. Il y avoit donc 54 lb. 10 onc. 7 gros 0 den. 21 grains.

116. Le troisième cas est celui où le dividende et le diviseur, complexes tous les deux,

sont

sont de différente espece; l'unité de la division étant toujours de l'espece du diviseur, et le quotient devant être de celle du dividende.

117. Ici la réduction du diviseur en unités de la moindre espèce peut être employée, mais elle exige une précaution particuliere. Après avoir fait cette réduction, il faudra d'abord multiplier le dividende par le rapport qui existe entre l'unité principale et celle de la moindre espèce dans le diviseur; après quoi, faisant la division, le quotient fera connoître la quantité que l'on cherchoit, exprimée en unités principales du dividende.

Ayant acheté 54 lb. 10 onc. 7 gros 21 grains d'une certaine marchandise, pour la somme de 247 fr. 17 sous 10 den., on demande ce que doit avoir couté la livre?

Réduisant le diviseur en unités de la moindre espèce, on trouvera 247 fr. 17 sous 10 den. à diviser par 503949 grains. Mais il est évident que cette division fera immédiatement connoître le prix du grain, et non celui de la livre, qui doit être 9216 fois plus fort, parce que la livre contient 9216 grains. On multipliera donc 247 fr. 17 sous 10 den. par 9216; et on divisera le produit 2284569 fr. 12 sous par 503949. On aura pour quotient 4 fr. 10 sous 8 den.; le même que dans l'exemple précédent.

118. Le calcul décimal leve toute difficulté à cet égard. Réduisez de part et d'autre les unités de moindre espèce en parties décimales de l'unité principale, et faites la division. Vous aurez un quotient composé d'entiers et de décimales : vous réduirez facilement ces dernieres en unités de la moindre espèce.

Prenons l'exemple précédent. Les 247 fr. 17 sous 10 den. se réduisent à 247,892 francs. Les 54 lb. 10 onc. 7 gros 21 grains se réduiront de meme à 54,632 livres

livres. Divisant 247892 francs par 54682, on aura sur le champ, et par un calcul bien plus facile, les 4 fr. 10 sous 8 den. de l'exemple.

CHAPITRE QUATRIEME.

LES RAPPORTS DES NOMBRES EN GÉNÉRAL.

119. L'idée de la division fait naturellement naitre celle du *rapport*. Ce terme qui signifie généralement le résultat de la comparaison est employé particulièrement en Arithmétique, lorsque le but de cette comparaison est de savoir, combien de fois l'un des deux nombres proposés est contenu dans l'autre.

120. Des deux nombres dont on cherche le rapport, l'un qui fait fonction de dividende, est nommé *terme antécédent;* l'autre qui fait fonction de diviseur, est appellé *terme conséquent.*

121. La grandeur du rapport est naturellement estimée d'après le quotient de cette division. L'égalité ou l'inégalité des deux rapports dépend de celle de leurs quotiens. De plus, dans chaque rapport, l'antécédent est égal au conséquent, multiplié par le quotient.

122. Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise les deux termes d'un rapport par un meme nombre quelconque, il en résulte un rapport égal au premier. Car dans ce cas la division du nouvel antécédent par le nouveau conséquent donnera le meme quotient qu'auparavant.

123. Deux rapports égaux entr'eux forment ce qu'on appelle une *proportion*. Une proportion-

por-

portion aura donc quatre termes, dont deux seront antécédents, et deux conséquents, De ces memes termes, deux seront nécessairement *extremes*, deux seront *moyens*.

124. Dans une proportion quelconque, le produit des extremes est égal au produit des moyens. Car d'après ce qui a été dit en 121, chacun des deux produits sera celui des deux conséquents, multipliés par le quotient.

Des deux rapports 15 : 5 et 21 : 7, qui sont ègaux entr'eux, parce que le quotient de l'un et de l'autre est trois, composons la proportion 15 : 5 = 21 : 7. Le produit des extremes, de meme que le produit des moyens, est 105. Cela doit être; car ayant 15 = 5 × 3; et 21 = 7 × 3; le produit des extremes sera 5 × 3 × 7; celui des moyens 5 × 7 × 3; ils seront donc égaux entr'eux.

125. Réciproquement, toutes les fois que deux nombres quelconques donnent un produit que l'on peut encore décomposer en deux autres facteurs différens des premiers, ces quatre facteurs formeront toujours une proportion, pourvu qu'on les dispose tellement, que les uns deviennent termes extrêmes, les autres termes moyens de la proportion.

Car, supposons que sur trois nombres proposés, il faille chercher un quatrième qui forme avec les trois autres une Proportion géométrique. Il est clair d'abord, qu'il n'y a qu'un seul nombre qui puisse satisfaire à cette condition: ensuite, ce nombre doit être nécessairement celui, dont le produit avec le premier terme, sera égal à celui du second et du troisième. Comme il n'y a non plus qu'un seul nombre qui puisse remplir cette derniere condition, il s'ensuit qne les deux conditions sont absolument inséparables, et qu'aucune des deux ne peut exister sans l'autre.

126.

126. Il suit delà, que les quatre termes d'une proportion peuvent être disposés de plusieurs manieres différentes, pourvu que l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens soit maintenu.

C'est ainsi qu'ayant $12 : 32 = 15 : 40$

On en tirera $12 : 15 = 32 : 40$

$32 : 12 = 40 : 15$

$32 : 40 = 12 : 15$

$15 : 40 = 12 : 32$

$15 : 12 = 40 : 32$

$40 : 15 = 32 : 12$

$40 : 32 = 15 : 12$

127. Lorsqu'on a un nombre quelconque de rapports égaux entr'eux, la somme de tous les antécedents sera à la somme de tous les conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

Car supposons, par ex. que le quotient de tous ces rapports soit 5, il est clair que, chaque antécédent étant égal à cinq fois son conséquent, la somme de tous les antécédents sera égale à celle de tous les conséquents, prise cinq fois. On prouve de la meme maniere la proposition suivante :

128. Dans une proportion quelconque, la différence des antécédents est à la différence des conséquents, comme un antécédent est à son conséquent.

129. On réduit un rapport, lorsqu'on trouve à l'exprimer par des nombres entiers et plus petits, sans rien changer à sa valeur. La réduction sera donc possible dans les cas, ou les deux termes d'un rapport sont divisibles par un même nombre entier. Il faut donc avoir des règles pour trouver ce nombre, si

toutes

toutes fois il en est un, pour réduire un rapport proposé. Voici en général quelques règles et principes, qui peuvent y conduire.

130. Tout nombre quelconque est divisible par l'unité et par lui-même.

131. On reconnoit qu'un nombre est divisible par 2, s'il est terminé par un chiffre pair.

132. On reconnoit qu'un nombre est divisible par 3, lorsque la somme des chiffres qui le composent, est elle-même divisible par 3.

C'est ainsi que le nombre 1782 est divisible par 3, parce que la somme de ses chiffres fait 18, qui est divisible par 3.

133. On reconnoit de meme qu'un nombre est divisible par 9, lorsque la somme des chiffres qui le composent, est divisible par 9.

C'est ainsi qu'ajoutant les chiffres du nombre 80244, on trouve 18, nombre divisible par 9. On en conclurra que 80244 est divisible par 9: et en effet on en obtient le quotient 8916, sans reste. Comme la somme des chiffres de ce dernier nombre est 24, ce qui est multiple de 3, et que de plus il est terminé par un chiffre pair, on en conclurra qu'il est au moins divisible par 6; en effet, on aura pour quotient 1486. Ce dernier nombre est encore divisible par 2; il aura pour quotient 743. Ainsi par ces deux règles seules, le nombre proposé a été décomposé dans les facteurs 9, 4, 3, 743.

134. Un nombre est divisible par 10, et par conséquent aussi par 5, s'il est terminé par un zéro: cela est clair. Et ce qui ne l'est pas moins, c'est que tous les nombres terminés par un 5, sont divisibles par 5.

135. Une règle assez remarquable nous apprend à discerner si un nombre est divisible par 11. Ajoutez ensemble le premier, le troisième, le cinquième, le septième etc. de ses chiffres. Ajoutez de meme le second, le quatrième, le sixième de ses chiffres. Si la différence entre ces deux sommes est *zéro*, ou 11, ou 22 etc. vous pouvez être certain que le nombre proposé sera divisible par 11.

Examinant d'après cette règle le nombre 90728, on trouvera 24 pour la première, et 2 pour la seconde des deux sommes: et comme leur différence 22 est divisible par 11, le nombre 90728 lui-même aura 11 pour diviseur. Le quotient 8248 étant encore divisible par 8, et laissant pour quotient 1031, les facteurs seront 11, 8, 1031.

136. Après avoir épuisé ces règles particulieres, la recherche des diviseurs d'un nombre, surtout lorsqu'il est composé de beaucoup de chiffres, est un Problême très difficile. C'est ainsi qu'aucune règle, ni d'Arithmétique ni d'Analyse, ne nous fera découvrir directement les facteurs du nombre 186611, lequel cependant est réellement décomposable en 1031 et 181. Pour découvrir ces deux facteurs, il faudroit essayer la division du nombre proposé par tous les nombres premiers, depuis 1 jusqu'à 431.

137. Au défaut d'une règle pour trouver les diviseurs d'un nombre, nous en avons une au moins pour déterminer le plus grand commun diviseur de deux nombres quelconques proposés. Cette règle consiste dans une suite de divisions, qui dépendent tellement l'une de l'autre, que le diviseur et le reste de chaque division, font dans celle qui suit immédiate-

diatement, fonction de dividende; et de diviseur. La premiere de ces divisions se fait en divisant le plus grand des deux termes des rapports proposés, par le plus petit. La derniere est celle qui ne laisse point de reste. Le nombre qui a servi de diviseur dans cette derniere, est le plus grand commun diviseur des deux termes de la raison proposée.

Prenons les deux nombres 6713 et 7196, dont il faille chercher le plus grand commun diviseur. En voici le calcul :

```
6713)7196 | 1
     6713
     ----
      483)6713 | 13
          483
          ----
          1883
          1449
          ----
           434)483 | 1
               434
               ---
                49)434 | 8
                   392
                   ---
                    42)49 | 1
                       42
                       --
                        7)42 | 6
                          42
                          --
                           0
```

La première division se fera en divisant 7196 par 6713; elle laissera 483. Dans la seconde on divisera 6713 par 483; on aura 434 de reste. On divisera en troisième lieu 483 par 434; on aura 49 de reste. Divisant ensuite 434 par 49, le reste sera 42. Dans la cinquième division enfin on divisera

42 par 7; et comme il n'y aura point de reste, cette division sera la derniere. Le plus grand commun diviseur sera donc 7, et le rapport proposé 6713: 7196 se trouvera réduit à 959: 1028.

138. La démonstration de cette règle repose sur un principe bien simple: c'est que dans toute division qui laisse un reste après elle, le dividende se retrouve, en multipliant le diviseur par le quotient, et en ajoutant au produit le reste qu'on a obtenu. Il s'ensuivra naturellement que tout nombre, par lequel on a pu diviser le reste et le diviseur d'une division, sera également facteur de son dividende; d'où l'on peut aisément conclure, que tous les dividendes dans cette opération doivent être divisibles par le nombre qui exerçant les fonctions de diviseur dans la derniere division, n'y a point laissé de reste.

Ayant trouvé dans l'exemple précédent, que 7 est le facteur de 42, on conclura qu'il le sera aussi de 49, qui est 1 *fois* 42, *plus* 7. Donc, il le sera aussi de 434, égal à 8 *fois* 49, *plus* 42. Par la même raison il doit l'être de 483, égal à 1 *fois* 434, *plus* 49. Il le sera encore de 6713, qui est 13 *fois* 483, *plus* 434. Il le sera enfin de 7196, égal à 1 *fois* 6713, *plus* 483. Donc il sera diviseur ou facteur commun des deux nombres proposés.

On voit aussi qu'il doit être leur plus grand facteur commun. Car s'il existoit un facteur commun de 6713 et de 7196, plus grand que 7, il faudroit qu'il fut aussi facteur des deux nombres 7 et 42, qui font fonction de diviseur et de dividende dans la derniere division. Or il est impossible que 7 soit divisible par un nombre plus grand que lui-meme. Donc etc.

139. Dans les cas où le dernier diviseur est l'unité même, on conclura que le rapport proposé est déjà réduit aux moindres termes,

et

et qu'il n'admet point de réduction ultérieure. Mais dans ces cas mêmes, l'opération que nous venons d'enseigner, n'est nullement inutile. Elle servira à réduire le rapport proposé à des termes beaucoup plus petits, et tels, que sans en égaler la valeur rigoureuse, elles en approchent si près, que la petite différence de la valeur véritable, est insensible pour les procédés pratiques des sciences et des arts.

140. Cette règle fait trouver deux colonnes de nombres, qui comprennent les termes antécédents et les termes conséquents des rapports approchés qu'on cherche. On y employe les quotiens qu'on a successivement obtenu dans l'opération de 137, de la manière suivante. Ayant trouvé, par ex: moyennant un certain nombre de ces quotients, un nombre égal d'antécédents et de conséquents, on multipliera par le quotient qui vient immédiatement après, le dernier des antécédents qu'on a trouvés, et on y ajoutera l'antécédent qui précède celui-ci. Faisant de même pour l'autre colonne, on aura un nouvel antécédent et un nouveau conséquent, dont le rapport mutuel approchera encore plus du rapport donné, que celui qui l'avoit précédé immédiatement. A la tête des colonnes on mettra 0 et 1. Après eux viendront 1 et le quotient de la premiere division. Après ceux-ci on continuera l'opération comme on vient de le dire. Il faut éclaircir ceci par un exemple.

Prenons le rapport de 137, savoir 6713:7196. Par le moyen de six divisions consécutives, qui nous ont fourni les quotiens 1, 13, 1, 8, 1, 6 ; ces divisions nous ont donné pour commun diviseur 7 ; ensuite de quoi le rapport a été réduit à 959:1028. Pour trouver les valeurs approchées de ce dernier rapport, voici la marche qu'on suivra :

Mettez au-dessus des deux séries . . o . . . 1.

Le premier antécédent sera 1 dans tous les cas. Le premier conséquent sera le quotient résulté de la premiere division : dans le cas présent il sera donc 1.

Prenant le quotient de la seconde division, 13, vous direz,

13 fois 1, plus 0 font 13.., second antécédent.
13 fois 1, plus 1 font 14... second conséquent.

Le quotient de la troisieme division est 1. Donc

1 fois 13, plus 1 font 14... troisieme antécédent.
1 fois 14, plus 1 font 15... troisieme conséquent.

Le quotient de la quatrieme division est 8. Donc

8 fois 14, plus 13 font 125... quatrieme antécédent.
8 fois 15, plus 14 font 134... quatrième conséquent.

Le quotient de la cinquième division est 1. Donc

1 fois 125, plus 14 font 139... cinquieme antécédent.
1 fois 134, plus 15 font 149 ... cinquieme conséquent.

Le quotient de la sixieme division est 6. Donc

6 fois 139, plus 125 font 959... sixieme antécédent.
6 fois 149, plus 134 font 1028... sixieme conséquent.

Voici à présent les deux colonnes, calculées d'après cette règle.

Antécédents.		*Conséquents.*
0	. . . .	1
1	. . . .	1
13	. . . .	14
14	. . . .	15
125	. . . .	134
139	. . . .	149
959	. . . .	1028

Un

Un examen plus attentif de ces deux colonnes nous fera faire les observations suivantes, que l'on peut donner comme générales.

Premièrement. Si dans ces deux colonnes, on prend un antécedent quelconque avec son conséquent, et qu'on leur joigne l'antécédent et le conséquent qui viennent immédiatement après, il se trouvera constamment, que le produit des extremes et le produit des moyens ne sont pas absolument égaux entr'eux, mais cependant, qu'ils ne diffèrent jamais que d'une seule unité.

C'est ainsi qu'en mettant ensemble les quatre termes 14, 15, 125, 134, le produit des extremes sera 1876; celui des moyens 1875. D'où il suit qu'en mettant ces quatre nombres en forme de proportion geométrique, on aura commis une erreur d'*un* sur 1876.

De meme, mettant ensemble les quatre termes 139, 149, 959, 1028, le produit des extremes sera 142892, celui des moyens 142891. Ainsi donc, en mettant ces quatre nombres en forme de proportion géométrique, on commet une erreur d'*un* sur 142892.

La première erreur est très petite; la seconde est tout-à-fait insensible.

Secondement. Les différences égales à *un*, que nous avons remarqué entre le produit des extremes et celui des moyens, sont alternativement en faveur de l'un, et en faveur de l'autre. Dans les nombres 14, 15, 125, 134, le produit des extremes 1876 l'avoit emporté sur celui des moyens 1875. Prenant les nombres immédiatement suivans 125, 134, 139, 149, nous verrons le produit des extremes 18625 inferieur à celui des moyens 18626.

Il suit delà, que si l'on prend pour premier rapport, un certain terme de la première colonne, suivi de son conséquent; et pour second rapport, un terme quelconque de la premiere colonne, mais plus éloigné, avec son conséquent respectif; l'erreur qui résulte de ce qu'on regarde ces quatre nombres comme étant en proportion géométrique, sera toujours

jours moindre que si à la place de ces derniers on avoit pris ceux qui viennent immédiatement après les deux premiers.

C'est ainsi que voulant mettre en proportion géométrique les quatre nombres 14, 15, 959, 1028, on aura pour produit des extremes 14392 ; pour celui des moyens 14385 ; la différence 7 est celle de 1 sur 2056. Si l'on avoit mis 14, 15, 125, 134, le produit des extremes étant alors 1876, celui des moyens 1875 ; la différence auroit été de 1 sur 1876. Or la première est la moindre des deux.

Troisièmement. Les derniers termes des deux colonnes seront ceux memes du rapport proposé. Dans cet exemple, on a trouvé pour dernier antécédent 959, pour dernier conséquent 1028 ; or 958 : 1028 est précisément le rapport proposé.

Comparant ensemble ces différentes propositions partielles, on est conduit au théoreme général qui suit, et que nous donnons pour un des plus importans de l'Arithmétique.

141. Les termes correspondans des deux colonnes dont la construction a été enseignée en 140, font connoitre en des nombres bien plus petits, les valeurs approchées du rapport proposé. Ces valeurs en approchent d'autant plus, que les termes qu'on a choisis sont plus éloignés du commencement. L'erreur qu'elles laissent subsister, est toujours moindre que celle de l'unité sur le produit qu'on obtiendroit, en multipliant l'antécédent qu'on a employé, avec le conséquent qui vient immédiatement après.

Prenons toujours pour exemple le rapport proposé 959 : 1028. La table suivante nous fait connoitre la suite des valeurs approchées que la règle qu'on vient de donner, nous fait découvrir ; de meme que les limites des erreurs qu'on commet, en mettant ces valeurs approchées à la place du rapport proposé.

Valeurs.

Valeurs approchées.	*L'erreur est moindre que celle de 1 sur les produits qui suivent :*
1 : 1 . . .	1 fois 14, ou 14
13 : 14 . . .	13 fois 15, ou 195
14 : 15 . . .	14 fois 134, ou 1876
125 : 134 . . .	125 fois 149, ou 18625
139 : 149 . . .	139 fois 1028, ou 152892
959 : 1028 . . .	Valeur rigoureuse.

Donnons encore quelques exemples.

Exemple I. *Le pied de Cologne étant à celui de Paris comme* 122 : 144, *ou comme* 61 : 72, *on demande les valeurs approchées de ce rapport.* On aura les quotiens qui suivent : 1, 5, 1, 1, 5.

De cette série de quotiens on retirera sur le champ les rapports approchés qui suivent :

1	:	1
5	:	6
6	:	7
11	:	13
61	:	72

Prenant 6 : 7, l'erreur sera moindre que celle de 1 sur 78; en effet elle ne sera que de 1 sur 86.

Exemple II. Multipliant chacun des deux nombres 61 et 72 par lui-meme, on trouvera que le pied quarré de Cologne est à celui de Paris, comme 3721 : 5184. Ce rapport pouvant paroitre trop compliqué, on demande à le réduire. Les quotiens successifs qu'on obtient, savoir 1, 2, 1, 1, 5, 3, 1, etc. nous en font connoitre les valeurs qui suivent, savoir :

1	:	1
2	:	3
3	:	4
5	:	7
28	:	39
89	:	124
117	:	163
674	:	939

etc. etc.

Avec

Avec 5 : 7 l'erreur est au-dessous d'un deux-centieme. Celle que laissera 117 : 163 sera moindre que celle de 1 sur 120000.

Exemple III. Multipliant le rapport de l'exemple précédent 3721 : 5184 par 61 : 72, on trouvera le rapport du pied cubique de Cologne à celui de Paris, savoir 226981 : 373248. Ce rapport étant beaucoup trop compliqué pour l'usage journalier qu'on pourra être obligé d'en faire, on demande à le réduire. Les quotiens successifs deviennent ici 1, 1, 1, 1, 4, 3, 11 etc. Ils nous donneront les rapports approchés qui suivent, savoir :

1	:	1
1	:	2
2	:	3
3	:	5
14	:	23
45	:	74
509	:	837

etc. etc. Le pied cubique de Cologne est donc à un 70ème près, égal aux trois cinquièmes de celui de Paris. Supposant le premier au second comme 45 : 74, l'erreur ne sera pas seulement d'un sur quarante mille.

Exemple IV. Le diametre du cercle est à la circonférence comme 100000000 : 314159265. On veut simplifier ce rapport. On trouvera les quotiens 3, 7, 15, 1, 292 etc. On en tire les rapports approchés qui suivent, savoir :

1	:	3
7	:	22
106	:	333
113	:	355

etc. Le rapport 7 : 22, trouvé par *Archimède*, sera donc dejà très rapproché ; il ne laissera qu'une erreur de 1 sur 2400 à peu près. Le rapport 113 : 355 est celui d'Adrien Metius : l'erreur qu'il laisse sub-

subsister, est moindre que celle de 1 sur 355 fois 33102, ou de 1 sur douze millions, en parties de la circonférence.

Exemple V, L'année tropique étant de 365 jours 5 h. 48′ 45″, cherchons le rapport de ces 5 heures 48′ 45″ à une journée entiere. Réduisant l'un et l'autre en secondes, on trouvera 20925 secondes pour l'un et 86400 pour l'autre. Les deux termes de ce rapport étant divisibles par 25, 9, 3 ou par 675, il se réduira par une simple division à 31 : 128. Ainsi donc, au bout de 128 années, les 5 heur. 48′ 45″ qui constituent l'excès d'une année sur 365 jours, auront fait très exactement 31 journées entieres. Et c'est là ce qu'il faudroit ajouter au bout de 128 ans, afin de ramener l'année civile à la véritable epoque des mouvemens célestes.

En donnant à chaque quatrième année 366 jours au lieu de 365, on aura donc dans l'espace de 128 années, 32 jours complémentaires; ce qui fera dans le cours de 128 ans un jour de trop. On pouvoit corriger très facilement l'erreur, en supprimant ce jour au bout de chaque période de 128 ans. Le Calendrier Grégorien y a pourvu d'une autre maniere; il a excepté de la règle générale des bissextiles les années séculaires, en ordonnant que trois de ces années soient communes, et la quatrième bissextile. La règle que nous avons trouvée, eut été plus simple et plus exacte.

Exemple VI. Le mois synodique, ou le tems qui s'écoule d'une nouvelle lune à l'autre, est de 29 jours 12 heur. 44′ ou 42524 minutes. La durée de l'année tropique est de 365 jours 5 heur. 49′ ou de 525949 minutes. Le rapport de l'une à l'autre étant de 42524 : 525949, on demande à le réduire à une plus grande simplicité.

Les quotiens successifs seront ici 12, 2, 1, 2, 2, 21. Il en résultera les rapports approchés qui suivent:

suivent :

1	12
2	25
3	37
8	99
19	235

etc. L'erreur que laissera ce dernier rapport, est à peu près de 1 sur cent mille. Ainsi donc 235 mois synodiques sont à très peu près égaux à 19 années solaires ; desorte que le commencement de la 20ème année sera aussi celui du 236ème mois. Telle est la période au bout de laquelle les nouvelles lunes et les pleines lunes reviennent précisément aux memes jours de l'année.

Cette période, appellée vulgairement Cycle lunaire, a été trouvée par *Meton*, Astronome d'Athenes, 430 années avant J. C. Il est intéressant de remarquer, qu'après la connoissance exacte de la durée du mois, le calcul de cette grande période ne suppose qu'une règle très facile de l'Arithmétique élémentaire.

142. La solution que nous venons de donner de cet important probleme, est donc d'un très grand usage, non seulement dans les sciences mathématiques et physiques, mais aussi dans les arts et dans la société en général. Nous ne prétendons pas au reste d'en donner la démonstration ici ; elle excèderoit les bornes de l'arithmétique élémentaire. C'est à l'analyse d'en donner raison : aussi nous y reviendrons en son lieu.

CHA-

CHAPITRE CINQUIEME.

Les Fractions.

143. Lorsqu'on ne veut pas effectuer une division proposée, on peut l'indiquer par une forme fractionnaire, en écrivant le dividende en haut, le diviseur en bas, et en les séparant par un trait. Le signe de la division est en même tems celui de la fraction. Dans ce cas, le dividende prend le nom de Numérateur; le diviseur devient Dénominateur; la fraction elle meme réprésente le quotient.

La fraction $\frac{3}{4}$, qui s'énonce trois quarts, n'est autre chose que trois, divisé par quatre. Ici le dividende 3 est numérateur; le diviseur 4 est dénominateur de la fraction, laquelle représente elle meme le quotient.

144. On peut donc réaliser sur le champ toute fraction proposée, en divisant son numérateur par son dénominateur.

La fraction $\frac{3}{4}$, par ex. deviendra par cette division 0,75.

145. Une fraction dont le numérateur est égal à son dénominateur, est égale à l'unité. C'est le cas d'une quantité divisée par elle-meme. Si le numérateur est plus grand que le dénominateur, la fraction est plus grande que l'unité. Si le nnmérateur est moindre que le dénominateur, la fraction est moindre que l'unité.

La

La fraction $\frac{5}{5}$ est égale à un entier. La fraction $\frac{6}{5}$ est plus grande qu'un entier. La fraction $\frac{4}{5}$ est moindre qu'un entier.

146. Une fraction dont le dénominateur est 1, est égale à son numérateur.

$\frac{3}{1}$ sont la meme chose que trois entiers.

147. Lorsqu'on veut multiplier une fraction par son dénominateur, il n'y a qu'à écrire simplement le numérateur. Cela est fondé sur ce que dans toute division, le dividende est égal au produit du quotient, multiplié par le diviseur.

$\frac{4}{5}$ *multipliés par* 5, *donnent* 4 *entiers.*

148. Un nombre entier quelconque peut-être mis sous une forme fractionnaire quelconque, en le multipliant par tel nombre entier proposé, et en donnant à ce nouveau numérateur le meme nombre pour dénominateur.

Pour convertir 7 entiers en cinquiemes, on dira 7 fois 5 font 35, et on écrira $\frac{35}{5}$. Cette fraction n'étant autre chose que 35 divisés par 5, sera égale à 7.

149. Lorsqu'on veut ajouter ensemble un nombre entier et une fraction, on multiplie ce nombre par le dénominateur de la fraction, on ajoute au produit le numérateur, et donnant à cette somme le dénominateur de la fraction proposée, on aura résolu le probleme.

On propose d'ajouter ensemble 3 entiers et $\frac{4}{7}$. On dira 3 fois 7 font 21, et 4 font 25. On aura $\frac{25}{7}$ pour la somme de 3 et de $\frac{4}{7}$. Car ces $\frac{25}{7}$ sont composés de $\frac{21}{7}$, qui équivalent à 3 entiers; et de $\frac{4}{7}$.

150. Réciproquement si une fraction comprend sous elle un ou plusieurs entiers, ce qui

qui arrive lorsque son numérateur est plus grand que le dénominateur, on en retirera d'abord les entiers, en divisant le numérateur par le dénominateur; on y joindra ensuite le reste de la division, sous la forme d'une fraction ayant le meme dénominateur.

Étant proposée la fraction $\frac{41}{9}$, on divisera 41 par 9; on aura pour quotient 4, et 5 de reste. Cette fraction sera donc égale à $4\frac{5}{9}$. La démonstration est la meme qu'auparavant.

151. Une fraction quelconque ne change pas de valeur, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise son numérateur et son dénominateur par un meme nombre entier quelconque. Par la raison qu'en multipliant ou en divisant le dividende et le diviseur dans une division quelconque par un meme nombre, cela ne doit nullement affecter la valeur du quotient.

152. La réduction d'une fraction à une moindre dénomination est fondée sur le dernier principe. Pour faire cette réduction, il n'y a qu'à voir par quel nombre on pourra diviser en meme tems les deux termes d'une fraction proposée. C'est un probleme que nous avons déjà traité dans le chapitre précédent. On verra d'abord si les deux termes sont divisibles en même tems par 2, 3, 9, 5, 11. Si on ne peut réussir avec aucun de ces nombres, on aura recours à la méthode générale, et on cherchera le plus grand commun diviseur des deux termes. Et quand meme il se trouveroit que les deux termes n'ont point d'autre diviseur commun que l'unité meme, l'opération cependant n'aura pas été inutile, parce que

dans

dans tous les cas elle fera au moins trouver, sous une dénomination bien plus simple, des valeurs très rapprochées de la fraction proposée.

Soit proposé la fraction $\frac{20925}{86400}$. Les deux termes étant divisibles par 5, on aura $\frac{4185}{17280}$. Les deux termes de celle-ci sont encore divisibles par 5; ce qui donne $\frac{837}{3456}$. La somme des chiffres dans les deux termes étant multiple de 9, on fera la division par ce nombre; on aura $\frac{93}{384}$. Par une raison pareille on pourra encore diviser par 3; on aura $\frac{31}{128}$ au lieu de la fraction proposée, qui n'est pas réductible ultérieurement à la rigueur.

Mais si on vouloit se contententer des valeurs rapprochées, on trouvera d'abord $\frac{7}{29}$, ensuite $\frac{8}{33}$, qui ne differe de $\frac{31}{128}$ que d'un seul 4224ème.

153, On est obligé de multiplier les deux termes d'une fraction par un meme nombre, lorsqu'il s'agit d'en réduire deux ou plusieurs à une même dénomination, dans la vue de les ajouter ensemble, ou d'en ôter une de l'autre.

154. Le probleme est très facile, si on se borne à réduire les fractions à une meme dénomination. Alors, dans le cas de deux fractions, on multiplie les deux termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre. Et si on a plus de deux fractions, on multiplie les deux termes de chaque fraction par le produit de tous les dénominateurs des autres. Il est évident que par ce moyen, le dénominateur commun de toutes ces fractions sera le produit de tous les dénominateurs primitifs; et qu'ainsi les fractions seront réduites à une meme dénomination.

Par

Par ce moyen, étant données les deux fractions $\frac{4}{5}$ et $\frac{3}{8}$, l'une deviendra $\frac{32}{40}$, l'autre $\frac{15}{40}$: leur somme $\frac{47}{40}$ ou 1 $\frac{7}{40}$; leur différence $\frac{17}{40}$.

Étant données les fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{8}$, la premiere deviendra $\frac{144}{192}$, la seconde $\frac{160}{192}$, la troisième $\frac{24}{192}$; leur somme sera donc $\frac{328}{192}$, que l'on pourra réduire à $\frac{41}{24}$, ou 1 $\frac{17}{24}$.

155. Cette méthode a le défaut essentiel, dans le cas de plusieurs fractions surtout, de mener à un dénominateur très compliqué, quelque fois immense, ce qui exige ensuite de longues et d'inutiles réductions. Cependant l'on ne demande pas seulement que les fractions soient réduites à la même dénomination; on entend aussi que ce soit à la moindre dénomination. Nous avons une méthode qui conduit très directement à ce dernier but, et que nous allons exposer en peu de mots.

156. On entend généralement par *puissance*, un produit de plusieurs facteurs qui sont tous égaux entr'eux, et qui conséquemment résulte de la multiplication d'un nombre plusieurs fois par lui meme. Ce nombre alors est appellé *base de la puissance*; le nombre des facteurs porte le nom d'*exposant*.

Les puissances consécutives de 2 seront donc 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 etc..

Les puissances consécutives de 3 sont 3, 9, 27, 81, 243, 729 etc.

Les puissances de 5 seront 5, 25, 125, 625, 3125 etc.

Les puissances de 7 seront 7, 49, 343 etc.

Ce que nous allons dire, regardera principalement les puissances de 2, 3, 5, 7; et surtout celles de 2, 3, 5, comme étant les plus simples et les plus fréquens parmi les nombres premiers.

157.

157. Cela étant, l'on conviendra que pour trouver le plus petit dénominateur commun d'un certain nombre de fractions proposées, on n'aura qu'à multiplier ensemble les plus hautes puissances des nombres premiers, par lesquelles les dénominateurs de ces fractions sont séparément divisibles. Ayant une fois le dénominateur commun, on le divisera par chaque dénominateur en particulier, et multipliant le numérateur par le quotient qu'on vient de trouver, on aura celui de la fraction réduite.

Exemple I. *On propose de réduire à la meme dénomination les fractions suivantes :* $\frac{13}{48}$, $\frac{23}{72}$, $\frac{19}{75}$, $\frac{79}{120}$, $\frac{83}{144}$, $\frac{121}{180}$, $\frac{143}{216}$. On trouvera

$$\begin{aligned}
48 &= 16 \times 3 \\
72 &= 8 \times 9 \\
75 &= 3 \times 25 \\
120 &= 8 \times 5 \times 3 \\
144 &= 16 \times 9 \\
180 &= 4 \times 9 \times 5 \\
216 &= 8 \times 27
\end{aligned}$$

Le dénominateur commun sera donc $16 \times 27 \times 25$ ou 10800. Il faudra donc multiplier le numérateur de la premiere fraction par 225; celui de la seconde par 150; celui de la troisieme par 144; celui de la quatrième par 90; celui de la cinquième par 75; celui de la sixième par 60; celui de la septième par 50. Les sept fractions proposées, ayant pour déno, minateur commun 10800, auront pour numérateurs 2925, 3450, 2736, 7110, 6225, 7260, 7150. Leur somme sera donc égale à $\frac{36855}{10800}$, ce qui fait 3 entiers, et $\frac{4456}{1800}$ ou $\frac{597}{1350}$; ce qui se réduira à $\frac{5}{12}$, à un centième de près.

Exemple II. *On propose de réduire à la meme dénomination les fractions suivantes :* $\frac{19}{32}$, $\frac{21}{49}$, $\frac{41}{54}$, $\frac{9}{56}$, $\frac{21}{63}$, $\frac{17}{72}$, $\frac{31}{81}$.

On

On trouvera

32	=	cinquieme puissance de 2.
40	=	8 × 5
54	=	2 × 27
56	=	8 × 7
63	=	9 × 7
72	=	8 × 9
81	=	quatrieme puissance de 3.

Le dénominateur commun sera donc 32 × 81 × 5 × 7 ou 90720. Il faudra multiplier la premiere fraction par 2835; la seconde par 2268; la troisième par 1680; la quatrième par 1620; la cinquieme par 1440; la sixieme par 1260; la septieme par 1120. Les sept fractions auront pour numérateurs 53865; 47628; 68880; 14580; 15840; 21420; 34720. Leur somme deviendra $\frac{256933}{90720}$ ou 2 $\frac{75493}{90720}$. Cette derniere fraction revient à $\frac{5}{6}$, à un millieme de près.

158. Dans le cas de deux fractions, on pourra aussi faire usage de la règle suivante. Cherchez la plus grande mesure commune des deux dénominateurs. Cette recherche est communément facile. Souvent l'un des deux dénominateurs est lui-meme divisible par l'autre, et dans ce cas le dernier est la plus grande mesure commune des deux. Alors, ayant divisé par cette mesure commune chacun des deux dénominateurs, multipliez les deux termes de chaque fraction par le quotient qu'aura donné le dénominateur de l'autre. Par ce moyen les deux fractions seront encore réduites à une dénomination commune, qui sera la moindre possible.

Prénons pour exemple les deux fractions $\frac{19}{216}$, $\frac{343}{384}$. La plus grande mesure commune des deux dénominateurs est 24; elle donne pour les deux quotiens 9 et 16. Multipliant les deux termes de la premiere fraction par 16, elle deviendra $\frac{304}{3456}$. Multipliant les deux termes de l'autre par 9, elle deviendra $\frac{3087}{3456}$; et les deux fractions seront réduites à une meme dénomination, qui est aussi la moindre possible.

159. Il y a peu à dire sur l'addition et la soustraction des fractions. Si elles ont la meme dénomination, on ajoute simplement les numérateurs ensemble, on donne à cette somme le dénominateur commun de ces fractions. Dans le cas de soustraction, on retranche l'un des deux numérateurs de l'autre. Et si elles n'ont pas la meme dénomination, il faut toujours commencer par les y réduire.

Les deux fractions de l'exemple précédent $\frac{19}{216}$, $\frac{343}{384}$ ont d'abord été réduites à $\frac{304}{3456}$ et $\frac{3087}{3456}$. Leur somme sera donc $\frac{3391}{3456}$, qui revient à très peu près à $\frac{52}{53}$. Leur différence sera $\frac{2783}{3456}$, qui se réduit de meme à $\frac{29}{36}$.

160. S'il faut multiplier une fraction par un nombre entier, on peut y parvenir de deux manieres; on lui conserve le numérateur qu'elle avoit, mais on divise le dénominateur; ou bien on lui conserve le dénominateur qu'elle avoit, et on multiplie le numérateur. La derniere methode est générale, mais souvent le produit qu'elle donne a besoin de réduction. L'autre donne ce produit réduit à la moindre dénomination, mais elle ne peut être employée que dans le cas, ou le dénominateur est divisible par le nombre proposé.

$\frac{5}{12}$ multipliés par 6, donnent $\frac{5}{2}$ ou $2\frac{1}{2}$. Ici on pouvoit diviser le dénominateur 12 par 6.

Au lieu de diviser 12 par 6, on pourra aussi multiplier 5 par 6; on aura $\frac{30}{12}$. Cette maniere est générale; mais il faut ensuite réduire le produit, pour trouver $\frac{5}{2}$.

Étant

Etant proposés $\frac{7}{15}$ à multiplier par 4, la division de 15 par 4 ne pourra pas avoir lieu. Il faut donc recourir à la multiplication du numérateur : on trouvera $\frac{28}{15}$ ou 1 $\frac{13}{15}$.

Enfin, ayant $\frac{17}{24}$ à multiplier par 16, le produit dans tous les cas sera $\frac{17 \times 16}{24}$. Divisant des deux parts par 8, cette fraction deviendra $\frac{17 \times 2}{3}$ ou $\frac{34}{3}$; ce qui donne 11 $\frac{1}{3}$.

161. S'il faut diviser une fraction par un nombre entier, on essaye d'abord de diviser le numérateur, en conservant le dénominateur. Dans le cas ou le premier n'admettroit pas cette division, on multiplieroit le dénominateur, en conservant au numérateur la valeur qu'il a.

Voulant diviser $\frac{15}{16}$ par 5, on aura pour quotient $\frac{3}{16}$.

La fraction $\frac{13}{4}$ devant être divisée par 5, donnera $\frac{13}{20}$.

La fraction $\frac{15}{4}$ devant être divisée par 25, donnera dans tous les cas $\frac{15}{4 \times 25}$ ou $\frac{15}{100}$; ce qui se réduit à $\frac{3}{20}$. Mais on peut réduire avant que de multiplier. On aura, en divisant des deux parts par 5, $\frac{3}{4 \times 5}$ ou $\frac{3}{20}$.

162. Pour multiplier ensemble deux fractions, on multiplie les deux numérateurs ; et on en fait de meme aux dénominateurs. Les deux produits qu'on obtient, formeront la fraction qu'on demandoit.

S'il faut multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$, on dira 3 fois 5 font 15; ensuite 4 fois 7 font 28; ce qui donnera $\frac{15}{28}$. En voici la raison. La fraction $\frac{3}{4}$, multipliée par 5 entiers, deviendra $\frac{15}{4}$, envertu de 160. Ce produit sera 7 fois trop grand, parce que c'étoit par la septième partie de 5, et non par 5 entiers, qu'il falloit multiplier. Il faudra le diviser par 7 pour le réduire à sa juste valeur, ce qui donnera, en vertu de 161. $\frac{15}{28}$, ou $\frac{3 \text{ fois } 5}{4 \text{ fois } 7}$.

163. Pour diviser une fraction par une autre, on renverse cette derniere, après quoi on multiplie les deux fractions ensemble.

Proposons la fraction $\frac{3}{4}$ à diviser par $\frac{7}{9}$. Divisons d'abord par 7 entiers. Nous aurons $\frac{3}{4 \times 7}$ en vertu de 160. Mais ce quotient doit être 9 fois trop petit, parce qu'on a supposé le diviseur 9 fois plus grand qu'il n'étoit. Pour le réduire à sa juste valeur, il faut donc le multiplier par 9; ce qui donnera $\frac{3 \times 9}{4 \times 7}$ au $\frac{27}{28}$; ce qui est la même chose que le produit de $\frac{3}{4}$ par $\frac{9}{7}$, fraction renversée de $\frac{7}{9}$.

164. Lorsque le dividende, ou le diviseur, ou l'un et l'autre en meme tems, sont composés d'entiers et de fractions, il faut d'abord réduire l'un et l'autre à la forme fractionnaire: après quoi la règle précédente sera applicable.

Proposons nous de diviser $3\frac{4}{7}$ par $4\frac{1}{6}$. Le dividende se réduit à $\frac{25}{7}$; le diviseur à $\frac{25}{6}$. Renversant cette derniere fraction, elle donne $\frac{6}{25}$; ce qui multiplié par $\frac{25}{7}$, donne $\frac{6}{7}$ pour quotient.

165. Prendre une certaine fraction d'une quantité quelconque, c'est multiplier cette quantité par le numérateur de cette fraction, et diviser le produit par le dénominateur. C'est précisement ce qu'on auroit fait, si on avoit demandé à multiplier ensemble la quantité en question, et la fraction proposée.

On

On demande les trois quarts de cinq sixiemes. Il faut multiplier ensemble $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{6}$, ce qui donne $\frac{15}{24}$; et après la réduction $\frac{5}{8}$.

On demande les $7\frac{2}{3}$ pour cent de 284 fr. 76 cent.

Multipliez d'abord	284,76	
par	7	
	1993,32.	Ajoutès y les $\frac{2}{3}$ de
284,76; qui sont	189,84	
ce qui donne	2183,16	

Divisez par 100; Vous aurez 21,8316, ou 21 fr. 83 cent. pour la somme demandée.

CHAPITRE SIXIEME.

EXTRACTION DE LA RACINE QUARRÉE.

166. Le quarré d'un nombre est le produit qui résulte de la multiplication de ce nombre par lui-meme.

D'après cette définition, voici les quarrés des nombres depuis 1 jusqu'à 12.

Nombres.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quarrés.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

167. La *racine quarrée* d'un nombre proposé est celui dont le quarré est égal au nombre proposé.

Ainsi, comme 144 est le quarré de 12, réciproquement 12 sera la racine quarrée de 144. Par la meme raison 6 sera la racine quarrée de 36; 7 sera celle de 49, et si l'on demandoit la racine quarrée de 40, on répondroit qu'elle doit tomber entre 6 et 7. Reste à trouver les décimales qu'il faudra ajouter à 6, pour qu'il en résulte la racine exacte de 40.

168.

168. On appelle *extraction de la racine quarrée*, la méthode de trouver la racine quarrée d'un nombre proposé, exprimée en entiers et en décimales.

169. La racine quarrée d'un nombre quelconque, qui n'est pas lui meme un quarré parfait, ne peut être exprimée arithmétiquement, que moyennant une suite infinie de décimales. Ces suites infinies, il est vrai, ne sont pas nouvelles pour nous; la simple division en fait naître également, toutes les fois que le diviseur contient des facteurs autres que *deux* et *cinq*. Mais dans ces cas au moins on remarque dans le quotient une suite de retours périodiques, dont on n'apperçoit absolument rien dans les racines dont nous parlons; lesquelles d'ailleurs ne sont susceptibles dans aucun cas d'être mises sous la forme fractionnaire.

170. Par rapport à cette derniere qualité, les anciens géomètres ont donné à toute racine quarrée d'un nombre, qui n'est pas lui même un quarré parfait, le nom d'*incommensurable*. Parmi les modernes, le nom d'*irrationnel* paroit avoir prévalu. Dans ce cas, ces quantités n'auroient rien d'irrationnel que le nom qu'on a voulu leur donner, étant très raisonnables d'ailleurs sous tous les rapports possibles.

171. Si l'on prend un nombre quelconque, composé de dixaines et d'unités, et qu'on le multiplie par lui meme pour en faire le quarré, il est clair qu'en suivant la règle ordinaire de la multiplication, on multiplie l'un après l'autre: 1. les unités par les unités: 2. les

dixaines

dixaines par les unités: 3. les unités par les dixaines: 4. les dixaines par les dixaines.

172. Le premier produit sera donc le quarré des unités. Le second et le troisieme seront absolument identiques; ils formeront ensemble le double produit des dixaines par les unités. Le quatrieme sera le quarré des dixaines.

173. Le quarré des unités n'aura point de zéros à sa suite. Le double produit des dixaines par les unités en aura un; il se terminera donc à la place des dixaines. Le quarré des dixaines en aura deux: il se terminera à la place des centaines.

C'est ainsi que le quarré de 47, nombre composé de 7 unités et de 4 dixaines, se trouvera comme il suit:

Quarré des dixaines . . .	16
Double produit	56
Quarré des unités	49
Quarré de 47	2209

Servons nous de ce quarré, pour trouver celui de 478, nombre composé de 47 dixaines, et de 8 unités.

Quarré des dixaines	2209
Produit des dixaines par les unités	376
Le meme	376
Quarré des unités	64
Quarré de 478	228484.

Employons de meme ce quarré pour avoir celui de 4786, composé de 478 dixaines, et de 6 unités.

Quarré

Quarré des dixaines	228484
Produit des dixaines par les unités	2868
Le même	2868
Quarré des unités	36
Quarré de 4786.	22905796.

174. L'extraction de la racine quarrée exige une marche entierement rétrograde. Supposons qu'on demande celle de 22905796.

La racine de ce nombre sera composée de dixaines et d'unités. Nous ne connoissons ni les unes ni les autres : mais nous savons que le quarré des dixaines aura deux zéros à sa suite ; et qu'ainsi, en retranchant les deux derniers chiffres du nombre proposé, il faudra, pour trouver ces dixaines, extraire la racine quarrée de 229057.

La racine de ce nombre sera elle-meme composée de dixaines et d'unités. Le quarré de ces nouvelles ou secondes dixaines aura encore deux zéros à sa suite : ainsi, dans aucun cas, il ne pourra excéder le nombre 2290. Pour trouver les dixaines elles-memes, il faudra encore extraire la racine quarrée de 2290.

La racine de ce dernier nombre sera encore composée de dixaines et d'unités. Le quarré de ces troisiemes dixaines ayant encore deux zéros à sa suite, pourra être recherchée dans ce qui reste de ce nombre à gauche, après qu'on en aura retranché les deux derniers chiffres. Il ne pourra donc pas être 25, ce qui excèderoit 22 ; mais rien n'empèche au moins que ce quarré des dixaines ne soit 16 ; et qu'ainsi les troisiemes dixaines de la racine que nous cherchons, ne soient 4.

Otant de 2290 le quarré des dixaines de sa racine, qui est 16 suivi de deux zéros, il restera 690. Ce reste comprendra encore le produit des doubles dixaines par les unités, et le quarré des unités. Comme le premier doit dans tous les cas, l'emporter de beaucoup sur le second, il s'ensuit qu'en divisant ce reste par les doubles dixaines, on aura

aura, à la révision de près, les unités qu'on vouloit connoître.

Dans cette fin, on met sous le reste 690 les doubles dixaines, qui sont ici 8, suivies d'un point en remplacement du zéro. Ensuite, disant 8 en 69, combien de fois? la division fera connoître 8, qui seront en attendant les unités de la racine quarrée de 2290. Mais il faut voir, si ce nombre 8, qui n'a été trouvé que par un raisonnement approximatif, n'est pas peut-être trop grand d'une unité.

Pour cet effet, mettez ce nombre 8 à la place vuide que les doubles dixaines 8 ont laissé après elles; et multipliez 88 par les unités 8. En disant 8 fois 8, vous ferez le quarré des unités, et en disant 8 fois 8, vous ferez le produit des doubles dixaines par les unités. Il résultera de cette multiplication le produit total 704, qui étant plus grand que 690, indique que le nombre des unités 8 est effectivement trop fort.

Ainsi mettant 7 à la place de 8, et multipliant 87 par 7, afin d'avoir, tant le quarré des unités, que le produit des doubles dixaines par les unités, on trouvera 629; qui étant ôtés de 690, laisseront 81 de reste. Le nombre 2290 n'est donc pas un quarré parfait; le nombre entier dont le quarré en approche le plus est 47; mais le quarré de ce nombre, ôté de 2290, laissera 81 de reste.

Ce nombre 47, racine approchée de 2290, est celui des dixaines de la racine quarrée de 229057; reste à en trouver les unités. Le quarré de 470, ôté de 229057, laissera 8157 de reste; nombre qu'il faut regarder comme composé du produit des doubles dixaines par les unités, et du quarré des unités. Et comme nous sommes au troisieme chiffre, le quarré des unités sera déja très petit en comparaison du double produit des dixaines par les unités. Ainsi donc, pour trouver les unités, il faut diviser

diviser ce reste 8157 par les doubles dixaines, qui font 940 ou 94 suivis d'un point.

La division donne 8; telles sont en attendant les unités de la racine de 229057. En effet, mettant ces 8 à la place restée vacante après les 94, et multipliant 948 par 8, le produit 7584 sera moindre que 8157; d'où l'on pourra conclure que le nombre des unités 8 devra être conservé, tel que la division l'avoit donné.

La soustraction fera connoitre qu'il y a 573 de reste. Le nombre 229057 n'est donc pas un quarré parfait. Celui de 478 en approchera le plus; et si l'on faisoit le quarré de 478, ce quarré, ôté de 229057, laisseroit 573 de reste.

La racine de 229057 est en meme tems le nombre des dixaines, contenues dans celle du nombre proposé 22905796. Le quarré de ces dixaines, ôté de ce nombre, laissera 57396 de reste; et ce reste sera composé encore du produit des doubles dixaines par les unités, et du quarré des unités: ce dernier cependant ne pouvant être tout ou plus que la deux-centieme partie de l'autre.

Pour trouver les unités, il faudra donc dire: les doubles dixaines ou 956 suivis d'un zéro, en 57396, ou 95 en 573 combien de fois? ils y seront contenus 6 fois, et tel sera le nombre des unités.

Pour achever l'opération, mettons ces 6 à la place qui est restée vacante après les 956, et multiplians 9566 par 6. Le produit nous fera connoître à la fois le produit des doubles dixaines par les unités, et le quarré des unités. Et comme il sera exactement égal au reste 57396, on en conclura que le nombre proposé 22905796 est un quarré parfait, ayant pour racine 4786.

Voilà

Voici le calcul qu'on aura à faire :

```
Nombre proposé   22|90|57|96 { 4786 racine.
                 16
                  690
                   87
                    7
                  ---
                  609
                   8157
                    948
                      8
                   ----
                   7584
                    57396
                     9566
                        6
                    -----
                    57396
                      000
```

175. Reflêchissant avec attention sur la marche qu'on a suivie dans l'exemple précédent, on conviendra sans peine des différens articles de la méthode générale que nous allons exposer.

176. *Premierement.* De quelque nombre de chiffres que soit composé le nombre dont il faut extraire la racine quarrée, on le partagera en tranches, de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche. De cette maniere, la derniere tranche à gauche sera nécessairement multiple ou de 100, ou de 10000 ou d'un million etc. et la racine quarrée de cette derniere tranche, suivie d'un zéro, de deux zéros, de trois zéros, exprimera approximativement la racine quarrée du nombre pro-

proposé; il aura autant de chiffres, qu'on aura obtenu de tranches.

177. *Secondement.* Cherchez dans votre petite table des quarrés (166) la derniere tranche qui reste à gauche, et si vous ne l'y trouvez pas, prenez le quarré immédiatement inférieur. Ce quarré sera celui des dixaines; vous l'ôterez de la derniere tranche, et vous ferez descendre la seconde tranche, en la mettant à côté du reste que le quarré des dixaines avoit laissé.

178.. Le nombre qui en résulte, ne renfermera plus que deux parties du quarré; savoir le produit des doubles dixaines par les unités, et le quarré des unités. La premiere de ces deux parties doit, dans tous les cas considérablement excéder la seconde. Ainsi, divisant le reste entier par les doubles dixaines, on aura dans tous les cas, meme dans ceux qui se rencontrent le moins fréquemment, à une, ou tout au plus à deux unités de près, les unités qu'on demandoit.

Supposons les dixaines égaux à 10, les unités à 9, le quarré des unités 81, qui sera alors dans le plus grand rapport possible avec le reste susdit, qui est 261, sera cependant moindre que son tiers.

Supposons les dixaines égales à 20, les unités à 9; le quarré des unités 81 se trouvera entre la cinquieme et la sixieme partie du reste que le quarré des dixaines aura laissé, et qui sera alors 441.

Supposons les dixaines égales à 30, les unités à 9; le quarré des unités 81 sera à peu près la huitieme partie du reste 621, que le quarré des dixaines aura laissé.

Plus l'opération sera avancée, et plus on sera fondé de regarder le reste après le quarré des dixaines,

nes, comme le produit seul des doubles dixaines par les unités, le quarré des unités alors devenant toujours plus petit en comparaison du double produit.

179. *Troisièmement.* Ecrivez les doubles dixaines immédiatement sous le reste, de maniere qu'elles se terminent sous le penultieme des chiffres qui le composent. Voyez combien de fois ces doubles dixaines sont contenues dans le nombre qui se trouve immédiatement au-dessus: le quotient sera le nombre des unités que vous demandez.

180. *Quatrièmement.* Mettez ces memes unités à la place vacante qui doit se trouver à la suite des dixaines. Multipliez le nombre entier qui en résulte, composé des doubles dixaines et des unités, par ces memes unités, et essayez d'ôter le produit, du nombre qui est resté après la soustraction du quarré des dixaines.

181. *Cinquièmement.* Si ce produit étoit trop grand pour pouvoir être ôté, il faudra en conclure que le nombre des unités, tel qu'il étoit résulté de la division, étoit trop grand pour faire partie de la racine; on y remédiera en diminuant ce nombre d'un ou meme de deux unités s'il le faut. Il faut observer de plus que dans aucun cas ce nombre ne pourra être plus grand que neuf.

182. *Sixièmement.* La soustraction enfin ayant été faite, faites descendre à côté du reste la tranche qui suit, et continuez l'opération, qui se réduit toujours à prendre le double des dixaines, à le placer de maniere qu'il laisse une place vacante après lui; à voir combien de fois il est contenu dans le nombre

qui

qui se trouve au-dessus ; à placer ce quotient d'abord dans la racine, ensuite dans la place vacante à la suite du double des dixaines ; à multiplier par le quotient, et à faire la soustraction.

183. Les exemples suivants montreront comment il faudra surmonter quelques difficultés qu'on pourra rencontrer dans quelques cas particuliers.

Exemple I. On demande la racine quarrée de 39204. Voici le calcul :

```
3'92|04   { 198
1
-----
292
 29
  9
-----
261
  3104
   388
     8
-----
  3104
    00
```

Au second chiffre de la racine il faudra dire : 2 en 29 combien de fois? Cela seroit 14 ; mais comme il est évidemment impossible qu'un simple chiffre de la racine soit composé de deux chiffres, on mettra simplement 9, et on continuera l'opération. Au troisieme chiffre cette difficulté ne reviendra plus ; et généralement elle ne peut avoir lieu qu'au second chiffre.

Exem-

Exemple II. On demande la racine de 34969?

3|49|69 187
1
249
28
8
224
2569
367
7
2569
00

Au second chiffre de la racine il faudra encore dire, 2 en 24 combien de fois? On pourroit répondre 9, tout au plus. Mais 9 fois 29 font 261, produit plus grand que 249. Il faudra donc écrire 8 au lieu de 9. On aura 25 de reste; ce qui permettra d'achever l'extraction.

Exemple III. On demande la racine de 30976?

3|09|76 176
1
209
27
7
189
2076
346
6
2076
00

Au second chiffre l'on ne pourra pas dire 2 en 20 sont contenus 9 fois, parce que 9 fois 29 font

261, produit plus grand que 209. On ne pourra pas non plus mettre 8, parce que 8 fois 28 font 224, produit encore plus grand que 209. On écrira donc 7, ce qui laissera 20 de reste.

184. Il arrive souvent qu'ayant pris le double des dixaines, et l'ayant placé dans son lieu, ce double se trouve plus grand que le nombre qui est au-dessus. Dans ce cas, le chiffre de la racine qu'on cherche, est *zéro*. On mettra donc un zéro dans la racine ; et pour pouvoir continuer, n'ayant pas eu assez d'une tranche, on en fera descendre encore une, et meme deux, s'il le faut.

Exemple. On demande la racine de 1461681 ?

```
1|46|16|81  { 1209
 144
 -----
   21681
    2409
       9
  -------
   21681
     000
```

Ici prenant le double de 12, qui est 24, ce nombre se trouvera plus grand que 21, qui y répond. On mettra donc un zéro dans la racine, et faisant descendre, la quatrieme tranche à la suite de 216, rien n'empêchera de dire 240 en 2168 sont contenus 9 fois.

Dans l'exemple suivant, où l'on doit extraire la racine de 1849774081, il faut mettre deux zéros de suite dans la racine, et faire descendre trois tranches à la fois.

```
18|49|77|40|81 } 43009
16
 ---
  249
   83
    3
 ---
  249
   0774081
    86009
        9
   ------
   774081
     0000
```

185. La racine quarrée du produit de deux quarrés parfaits, est égale au produit de leurs racines. Car en faisant le quarré de ce produit, on doit retrouver le produit des quarrés.

186. L'unité suivie d'un certain nombre de zéros, forme un quarré parfait, lorsque ces zéros se trouvent en nombre pair. La racine alors est égale à *un*, suivi de la moitié autant de zéros, qu'il y en avoit dans le quarré.

C'est ainsi que la racine de 100 est 10. Celle de 10000 est 100. Celle de 1000000 est 1000.

187. On voit donc ce qu'il faut faire, lorsqu'on demande la racine d'un nombre quarré, suivi de deux, de quatre, de six zéros etc. On prend la racine de ce nombre, et on la fait suivre d'un, de deux, de trois zéros etc.

La racine quarrée de 144 étant 12, celle de 14400 sera 120; celle de 1440000 sera 1200 etc. Mais on n'en pourra rien conclure pour la racine quarrée de 1440, parce que 10, qui est le nombre par lequel 144 se trouve multiplié dans 1440, n'est pas un quarré parfait.

188. On voit également ce qu'il faut faire, quand on demande la racine quarrée d'un nombre, suivi de deux, de quatre, de six décimales. Supprimez la virgule; faites l'extraction de la racine d'après la méthode précédente; et après l'avoir trouvée, retranchez-en une, deux, trois, et en général la moitié autant de décimales, qu'il y en avoit dans le nombre proposé.

On demande la racine de 1346,89? Supprimant la virgule, on trouvera la racine de 134689, qui est un quarré parfait, égale à 367. Celle de 1346,89 sera donc 36,7. On aura de meme la racine de 13,4689 égale à 3,67. Celle de 0,134689 sera égale à 0,367. Celle de 0,00134689 sera pareillement égale à 0,0367.

189. La nature du calcul décimal, qui nous permet d'ajouter à la fin d'un nombre autant de zéros que nous voulons, sans rien changer à sa valeur, pourvu que ce soit au delà de la virgule; nous donne aussi la facilité de pousser dans tous les cas, l'extraction de la racine quarrée à tel dégré de précision, que les circonstances du problême nous semblent exiger. On ajoute à la fin du nombre autant de zéros qu'il en faut, pour porter le nombre de ses décimales au double de celui des décimales que doit avoir la racine demandée; après quoi on fait l'extraction de la racine, en observant ce qui a été dit dans le paragraphe précédent.

On demande la racine quarrée de 376,591 jusqu'à six décimales. Ajoutant neuf zéros à la fin de ce nombre, et supprimant la virgule, le nombre entier dont il faudra extraire la racine, sera 376591000000000. Cette racine deviendra 19405929; et retranchant six décimales, on aura 19,408929 pour racine quarrée du nombre proposé 376,591.

376591000000000 { 19405953
276
29
9
261
1559
384
4
1536
231000
38805
5
194025
3697500
388109
9
3492981
20451900
3881185
5
19405925
104597500
38811903
9
116435709
11838209 *Reste en moins.*

190. Le reste de cette opération peut très bien être plus grand que la racine ; il peut meme être égal au double de la racine ; ce n'est que lorsqu'il seroit égal au double de

la racine, plus un, ou plus grand que le double de la racine, plus un, qu'il faudroit augmenter d'une unité le dernier chiffre de cette racine.

Car le quarré d'un nombre quelconque *plus* un, sera egal au quarré de ce nombre, plus le double de ce nombre, *plus* un. Cette proposition très simple se prouve comme celle de 172. La meme démonstration est applicable à toutes les deux.

191. Enfin, comme il est très indifférent, que les zéros dont nous avons besoin pour continuer l'opération , soient écrits tous ensemble au commencement, ou les uns après les autres pendant l'opération, on fera encore mieux de suivre à cet égard la règle générale qui suit. Partagez le nombre donné, soit entier, soit composé d'entiers et de décimales, en tranches de deux chiffres chacune; observez seulement que les unités occupent le côté droit dans la tranche qui leur appartient, de sorte que la virgule elle meme serve à séparer deux tranches voisines. Ensuite, faites l'extraction comme on vient de le dire; et quand vous en serez venu à la virgule, ayez soin d'en mettre également une dans la racine. Si le nombre proposé est précédé de plusieurs zéros, partagés de même en tranches, il faudra que la racine soit aussi précédée d'autant de zéros, qu'il y aura de tranches ne renfermant que des zéros; la véritable opération ne devant commencer qu'à la tranche qui contiendra les premiers chiffres significatifs. Enfin, lorsque tous les chiffres significatifs du nombre seront épuisés, on y suppléera en ajoutant autant de tranches, de deux zéros chacune, que la nature du probleme pourra exiger.

Exem-

Exemple I. *On demande la racine de* 1,987 *à quatre décimales.*

1,9870 } 1,4096 *racine,*
98
24
4
———
96
27000
2809
9
———
25281
171900
28186
6
———
169116
2784 *reste.*

Exemple II. *On demande la racine de* 0,4617 *à quatre décimales.*

0,4617 } 0,6795 *racine.*
36
———
1017
127
7
———
889
12800
1349
9
———
12141
65900
13585
5
———
67925
2025 *reste en moins.*

Si

Si on avoit posé 4 pour dernier chiffre significatif de la racine, on auroit eu un reste *en plus*, égal à 11564. Or, s'il faut choisir entre deux restes, l'un 11564, l'autre 2025, le plus petit, en plus ou en moins, doit toujours être preféré. On mettra donc 0,6795 si toutefois l'on veut se borner à quatre décimales.

Exemple III. *On demande la racine de* 0,0007923 *à cinq décimales.*

```
0,00079230 } 0,02815 racine.
     4
    ----
     392
      48
       8
    -----
     384
       830
       561
    -------
       26900
        5625
           5
      -------
       28125
        1225 Reste en moins.
```

Exemple IV. *On demande la racine de* 3 *à neuf décimales.*

3 { 1,732050807 *racine*

200
27
7
189
1100
343
3
1029
7100
3462
2
6924
1760000
346405
5
1732025
279750000
34641008
8
277128064
26219360000.
3464101607
7
24248711249
1970648751 *Reste en plus.*

Exemple V. *On demande la racine de* 0,3 *à cinq décimales.*

0,30

0,30 { 0,54772 *racine*

25

500
104
4

416
8400
1087
7

7609
79100
10947
7

76629
247100
109542
2

219084
28016 *Reste en plus.*

192. Pour tirer la racine quarrée d'une fraction, il faut extraire celle du numérateur et celle du dénominateur séparément, et diviser ensuite l'une par l'autre. Car, faisant la multiplication de cette nouvelle fraction par elle meme, on voit qu'il en résultera la fraction proposée.

La racine de $\frac{9}{16}$ est égale à $\frac{3}{4}$.

Celle de $\frac{49}{100}$ ou 0,49 est égale à $\frac{7}{10}$ ou 0,7.

193. Cela n'a aucune difficulté, tant que le numérateur et le dénominateur sont tous

les

les deux des quarrés parfaits. Dans les autres cas, ceux surtout où le dénominateur n'est pas un quarré parfait, on le convertiroit en quarré parfait, en multipliant les deux termes de la fraction par le dénominateur. Par ce moyen les deux extractions de racine quarrée seront réduites en une seule.

On demande la racine de $\frac{2}{3}$ à quatre décimales. Multipliant les deux termes par 3, on aura $\frac{6}{9}$, dont la racine est égale à celle de 6, divisée par 3. La première se trouve 2,4495; on aura donc celle de $\frac{2}{3}$ égale à 0,8165.

194. On parvient avec encore plus de facilité à la racine quarrée d'une fraction, en réduisant d'abord cette fraction en décimales, et procédant ensuite à l'extraction.

La fraction $\frac{2}{3}$ se convertit en 0,666666. Faisant l'extraction de la racine quarrée, on trouvera comme auparavant 0,8165.

Racine de 6.

```
6      } 2,4495
4
200
 44
  4
176
 2400
  484
    4
 1936
  46400
   4889
      9
  44001
   239900
    48985
        5
   244925
     5025 Reste en moins.
```

Racine de deux tiers.

```
0,6666 } 0,8165
 64
  266
  161
  10566
   1626
      6
   9756
    81066
    16325
        5
    81625
      559
Reste en moins.
```

La

La seconde racine 0,8165 est exactement le tiers de la premiere 2,4495. La méthode que nous avons enseignée en dernier lieu, est plus expéditive que l'autre, qui cependant est conservée pour les calculs littéraux, où elle est nécessaire.

195. Enfin, s'il faut tirer la racine quarrée d'un entier, suivi d'une fraction, on commence par donner à cette quantité la forme fractionnaire, après quoi on procède à l'extraction.

On demande la racine quarrée de $1\frac{2}{3}$ à trois décimales. A la place de $1\frac{2}{3}$ on trouve $\frac{5}{3}$, ce qui se réduit à 1,6666.... dont la racine est 1,291 à moins d'un cent-millieme de près.

$$
\begin{array}{r l}
1,6666\ldots.. & \Big\}\ 1,291\ \textit{racine} \\
66 & \\
22 & \\
2 & \\
\hline
44 & \\
2266 & \\
249 & \\
9 & \\
\hline
2241 & \\
2566 & \\
2581 & \\
\hline
15 & \textit{Reste en moins.}
\end{array}
$$

CHAPITRE SEPTIEME.

EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE.

196. On nomme en Arithmétique *cube d'un nombre* le produit du quarré de ce nombre par le nombre lui meme, lequel par rapport à son cube prend le nom de *racine cubique*.

D'après

D'après cette définition, voici la liste des cubes des nombres depuis 1 jusqu'à 12.

Nombres.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cubes.	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728

Les nombres de la premiere ligne sont les racines cubiques de ceux de la seconde.

197. En faisant l'analyse du quarré d'un nombre de deux chiffres, nous avons trouvé que ce quarré devoit être composé de trois parties: le quarré des dixaines, le double produit des dixaines par les unités, et le quarré des unités.

198. En multipliant chacune de ces trois parties, d'abord par les dixaines, ensuite par les unités, on trouvera que le cube d'un nombre de deux chiffres sera composé des quatre parties suivantes. *Premierement*, le cube des dixaines, suivi de trois zéros. *Secondement*, le triple produit du quarré des dixaines par les unités, suivi de deux zéros. *Troisiemement*, le triple produit des dixaines par le quarré des unités, ayant un zéro à sa suite. *Quatrièmement*, le cube des unités.

Proposons nous de former le cube de 74. Ici les dixaines sont 7, leur quarré 49, leur cube 343. Les unités sont 4, leur quarré 16, leur cube 64. Donc:

Cube des dixaines	343
Triple produit du quarré des dixaines par les unités . .	588
Triple produit des dixaines par le quarré des unités .	336
Cube des unités	64
Cube de 74	405224

199.

199. L'on voit que pour extraire la racine cubique d'un nombre proposé, il faut suivre une marche absolument retrograde. Voici la méthode qu'on pourra employer.

200. *Premièrement.* Partagez le nombre proposé en tranches, de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche.

201 .*Secondement.* Cherchez dans la petite table des cubes (196) le nombre qui constitue la derniere tranche qui reste à gauche; et si vous ne l'y trouvez pas, prenez le cube immédiatement inférieur. Ce dernier cube sera celui des dixaines; vous l'ôterez du premier, et à côté du reste que vous obtiendrez, vous ferez descendre la seconde tranche.

202. *Troisièmement.* Au dessous du nombre total qui en résulte, placez le triple quarré des dixaines, suivi de deux points; et voyez combien de fois il est contenu dans le nombre qui est au dessus de lui. Par ce moyen vous connoitrez les unités, sauf à une revision ultérieure.

203. *Quatrièmement.* A la place des deux points, écrivéz le quarré des unités, de maniere qu'il se trouve immédiatement à la suite du triple quarré des dixaines, et sur la meme ligne que lui.

204. *Cinquièmement.* Mettez au dessous, le triple produit des dixaines par les unités, suivi d'un point.

205. *Sixièmement.* Ajoutez ensemble les deux dernieres lignes, et multipliez la somme par les unités.

206.

206. *Septièmement.* Essayez de retrancher le produit du reste entier que vous aurez obtenu, après avoir fait descendre la seconde tranche. Si ce produit se trouve plus grand que le reste en question, vous conclurez que le quotient de 202 est encore trop grand ; il faudra donc le rabaisser d'un, et quelque fois de deux. Dans aucun cas ce quotient ne pourra surpasser 9.

207. *Huitièmement.* Lorsqu'au contraire cette soustraction sera possible, alors, sans rien changer aux unités, vous ferez simplement descendre la troisième tranche à côté du reste, et vous continuerez l'opération de la meme maniere. Au moment que des nombres entiers vous passerez aux décimales, ne manquez pas de mettre une virgule dans la racine. Enfin, lorsque toutes les décimales seront épuisées, et que la nature du probleme exige pour la précision de la racine quelques décimales de plus, alors des zéros, que vous ajouterez successivement à vos restes, vous mettront dans le cas de continuer l'opération.

Essayons de tirer la racine cubique de 405224, nombre que nous savons être un cube parfait, ayant pour racine 74, d'après le calcul fait en 198.

Ayant retranché les trois derniers chiffres, il restera à gauche 405. Le cube immédiatement inférieur à 405 est celui de 7, savoir 343. Otez 343 de 405, il restera 62, à côté desquels vous ferez descendre 224, ce qui donnera en tout 62224. Les dixaines sont donc 7.

Prenez le triple quarré des dixaines 147 ; et mettez le, suivi de deux points, au dessous de 62224. Dites : 147 en 622 combien de fois ? Réponse, 4 ; voilà vos unités.

Mettez

Mettez le quarré des unités 16 à côté de 147. Ecrivez au dessous de lui le triple produit des dixaines par les unités, qui est ici 84, suivi d'un point. Ajoutez ces deux nombres, savoir:

$$\begin{array}{r} 14716 \\ 84. \end{array}$$

et multipliez la somme 15556 par les unités 4. Le produit 62224 se trouvera exactement égal au reste que vous avez obtenu, après avoir fait descendre la seconde tranche.

Le nombre proposé 405224 est donc un cube parfait, ayant pour racine 74, ce qu'on savoit d'avance.

$$\begin{array}{r} 405224 \\ 343 \\ \hline 62224 \\ 14716 \\ 84. \\ \hline 15556 \\ 4 \\ \hline 62224 \end{array} \Big\} \; 74$$

208. Lorsqu'on a trouvé les quatre, cinq ou six premiers chiffres de la racine cubique, on trouvera de meme les trois, quatre ou cinq chiffres qui suivent immédiatement ceux-ci, en continuant à autant de chiffres de plus la division par le triple quarré. Les chiffres qui résultent de cette division, appartiendront également à la racine cubique qu'on demande.

Proposons nous d'extraire la racine cubique de $5\frac{3}{4}$ ou 5, 75 jusqu'à huit ou neuf décimales. Voici le calcul, qui, après ce que nous en avons dit, n'a pas besoin de commentaire.

5,750

```
5,750 { 1,7921
1
-----
4 750
  349
  21.
-----
  559
    7
-----
3 913
  837000
   86781
     399.
--------
   90771
       9
--------
  816939
   20061000
   9492304
      1074.
----------
   19503044
          2
----------
   19006088
    1054912000
     951379201
         5376.
-------------
     951432961
     103479039000
      951486723
```

```
1034790 { 951487
 951487 { 10875
-------
8330300
7611896
-------
 7184040
 6660409
--------
  5236310
  4757435
---------
   478875
```

Ayant calculé les cinq premiers chiffres de la racine, savoir 17921, on aura le sixième, en disant, 951487 en 1034790 combien de fois? Mais il est facile de prévoir, que quelque loin qu'on voulut continuer l'opéral'opération, les diviseurs suivans commenceront tous par 9515; et qu'ainsi la différence entre la véritable extraction de la racine cubique continuée, et la simple division de 10348 par 9515, ne pourra être sensible qu'au cinquième ou sixième chiffre. Cette division donne 10875; et joignant ces chiffres à ceux qu'on a déja trouvés, on aura 1,7921108,75 pour racine cubique du nombre proposé.

209. L'on voit par cet exemple, que l'extraction de la racine cubique n'est ni longue, ni difficile. La seule chose qui pourroit paroître sujette à des difficultés, c'est cette formation continuelle du quarré de cette partie de la racine, qu'on a déja calculée. Mais cette partie est toujours composée d'anciennes dixaines et de nouvelles unités; et comme, tant le quarré des dixaines, que le produit des dixaines par les unités peut être supposé connu, parce que réellement on en a eu besoin dans le calcul du chiffre précédent, il s'ensuit que la formation de ce quarré ne sera jamais que l'ouvrage d'une simple addition. De plus, la remarque que nous venons de faire dans le paragraphe précédent, sert à abreger le travail de beaucoup; parce que, pour trouver par exemple, les sept premiers chiffres de la racine, il suffira d'en avoir calculé quatre, moyennant cette opération qu'on nomme extraction de la racine cubique; la connoissance de ceux qui restent, n'exigera qu'une simple division.

210. Mais quelque peu difficile que puisse être l'extraction de la racine cubique en ellememe, et quels que soient d'ailleurs les soulagemens, qu'un calculateur un peu exercé saura y apporter toujours, elle n'est cependant guères en usage parmi les géomètres. L'Arithmétique

métique nous offre dans les logarithmes, dont nous aurons à parler bientôt, un moyen infaillible, de déterminer presque par un trait de plume, et pour un nombre quelconque proposé, non seulement les racines quarrées et cubiques, mais aussi celles des ordres supérieurs, quels que soient d'ailleurs leurs exposants. Le seul cas qui obligeroit le calculateur, d'employer l'extraction de la racine cubique, seroit celui, où pour le moment il n'auroit pas ses tables de logarithmes sous la main. Mais ce cas n'arrivera guères; les géomètres connoissent trop le besoin qu'ils ont de ces tables à chaque instant, pour s'engager sans elles dans une opération quelconque.

CHAPITRE HUITIEME.

La Règle de trois simple.

211. Dans le quatrième chapitre nous avons examiné les rapports des nombres en général, considérés comme abstraits, et ne désignant aucune espèce déterminée. Reste donc à enseigner l'application qu'il faut faire de ces principes généraux, aux quantités dont l'espèce est déterminée.

212. On dit qu'en général une chose est en rapport avec une autre, lorsqu'elle en dépend d'une maniere quelconque; lorsque l'une des deux venant à changer, l'autre ne sauroit conserver non plus la valeur qu'elle avoit; lorsqu'enfin, pour déterminer l'une avec telle précision que ce soit, il faut connoître l'autre.

Trois voyageurs marchant ensemble, ont employé sept jours pour faire un certain voyage; on demande le tems qu'ils y mettront, étant au nombre de treize?

Cette question n'a aucun sens raisonnable, parce que le tems qu'on demande, est absolument indépendant du nombre des voyageurs, et qu'il n'y a aucun rapport entre ces deux choses.

Mais trois voyageurs allant ensemble, ont dépensé la somme de sept-cent francs pour faire un certain voyage: on demande la dépense qu'ils feront, étant au nombre de treize?

Cette question est très raisonnable, parce que la dépense journaliere de chaque voyageur étant connue, la dépense totale dépend naturellement du nombre des voyageurs, et que par conséquent il existe un rapport entre ce nombre et la dépense totale.

213. On dit qu'une chose est en *rapport direct* avec une autre, lorsque la liaison qui existe entr'elles est telle, que l'une venant à augmenter, l'autre en est augmentée de meme; ou bien, lorsque l'une étant diminuée, il faut pareillement diminuer l'autre.

214. Lorsqu'au contraire cette liaison est telle, que l'une des deux venant à augmenter, l'autre en est diminuée; ou que, l'une étant diminuée, il faut augmenter l'autre, tellement que l'une des deux est d'autant plus grande, que l'autre est plus petite, elles se trouvent alors en *rapport inverse* l'une avec l'autre.

Deux hommes marchant avec une vitesse égale, l'un pendant trois heures, l'autre pendant cinq heures, on demande lequel des deux aura fait le plus de chemin.

Il est évident que ce sera le dernier, ou en général celui, qui aura été le plus longtems en route.

Donc,

Donc, toutes choses étant d'ailleurs égales, l'espace parcouru sera en rapport direct avec le tems.

Mais deux hommes ayant fait le voyage de Cologne à Paris, l'un en sept jours, l'autre en quinze jours, on demande lequel des deux doit y avoir mis le plus de vitesse.

Ce sera celui des deux, qui aura été le moins de jours en route.

Donc, toutes choses étant d'ailleurs égales, la vitesse est en rapport inverse avec le tems.

Ayant employé, durant un certain nombre de jours, une fois trente ouvriers, une autre fois quarante ouvriers, on demande laquelle de ces deux fois il y aura eu le plus d'ouvrage de fait.

Les quarante en auront naturellement fait plus que les trente, en proportion de leur plus grand nombre.

Ainsi, toutes choses étant d'ailleurs égales, le nombre des ouvriers sera en proportion directe de l'ouvrage qu'ils auront fourni.

Mais ayant employé à un certain ouvrage, une fois trente ouvriers, une autre fois quarante ouvriers, on demande laquelle de ces deux fois cet ouvrage aura été le plutôt achevé.

Il est clair que les quarante ouvriers l'auront plutôt fini que les trente.

Donc, toutes choses étant d'ailleurs égales, le tems est en rapport inverse du nombre des ouvriers qu'on a employés.

Deux jardins étant inégaux en superficie, tandis que la nature du sol est absolument la même pour les deux, on demande lequel des deux pourra rapporter le plus.

Ce sera le plus spacieux des deux.

Donc, toutes choses étant égales d'ailleurs, la superficie d'un jardin est en rapport direct avec la quantité des denrées, qu'il pourra rapporter.

Mais deux jardins de forme rectangulaire étant absolument égaux en superficie, l'un des deux a quarante toises de long, tandis que la longueur de l'autre est de soixante toises, on demande lequel des deux aura le plus de largeur?

Ce sera naturellement celui, qui aura le moins de longueur.

Donc, la surface du jardin restant la meme, sa longueur et sa largeur doivent être en raison inverse l'une de l'autre.

Ces exemples seront plus que suffisants pour expliquer ce qu'on entend par rapport direct, et par rapport inverse.

215. On dit qu'une quantité est en *rapport géometrique* avec une autre quantité de différente espèce, lorsque les nombres par lesquels elles sont désignées toutes les deux, constituent dans tous les cas une véritable proportion géométrique.

216. Donc, pour qu'une quantité soit en rapport géométrique direct avec une autre quantité de différente espece, il faut que l'une des deux étant augmentée dans un rapport numérique quelconque, l'autre soit augmentée dans le meme rapport.

217. Ici les anciens employoient un terme particulier, et très propre pour désigner la chose : c'étoit celui d'*équimultiple*. Une quantité ne sauroit être en rapport géométrique direct avec une autre de différente espèce, à moins que les nombres qui désignent successivement l'une, ne soient équimultiples de ceux qui dans les memes cas expriment l'autre.

218. Lorsque deux quantités sont en rapport géométrique direct entr'elles, elles s'évanouissent en meme tems; de maniere que l'une des deux étant supposée égale à zéro, l'autre devient zéro de meme.

219. Pareillement, si l'une des deux étoit supposée infiniment grande, l'autre en devient droit infiniment grande aussi; de maniere que s'il étoit possible de les poursuivre jusque dans l'infini, on verroit règner entr'elles le meme rapport, qui avoit lieu dans le fini.

Ayant deux quantités différentes d'une meme marchandise, et connoissant ce qu'a couté l'une, on demande ce que coutera l'autre.

Le prix total de la marchandise croit naturellement avec sa quantité; il existe donc un rapport direct entre la quantité, et le prix total qu'elle coutera.

De plus, ce rapport est géométrique; étant évident qu'une double quantité coutera deux fois autant; une triple quantité, trois fois etc. Prenant de cette meme marchandise une quantité égale à zero, il est clair que cela ne coutera rien, quelque précieuse qu'elle soit d'ailleurs.

Mettons à côté de cet exemple, celui d'un autre rapport, qui est tout aussi direct, mais qui n'est rien moins que géométrique.

Un jeune homme de 20 ans ayant été pesé à la balance, son poids s'est trouvé de 120 livres. On demande ce qu'il pesera à l'age de trente ans.

Il est incontestable qu'au moins jusqu'à un certain terme, le poids de l'homme augmente avec le nombre des années; il existe donc un rapport direct entr'eux. Reste à examiner, si ce rapport est géométrique.

Dans ce cas, cet homme ayant pesé 120 livres à l'age de 20 ans, en aura pesé 60 à l'age de dix; à cinq ans il aura pesé 30 livres; à un an il aura pesé 6 livres; à deux mois il n'auroit pesé qu'une seule

livre;

livre; enfin au moment de sa naissance, son age étant zéro alors, il n'auroit donc rien pesé du tout.

Cette conséquence mene à l'absurde. Le rapport n'est donc pas géométrique; et l'on se tromperoit grossierement, si l'on mettoit le probleme en forme de règle de trois.

220. De meme, pour qu'une quantité soit dans un rapport géométrique inverse avec une autre, il faut que l'une étant augmentée dans un rapport numérique quelconque, l'autre soit diminuée précisément dans le meme rapport.

221. Ici les nombres qui désignent dans deux cas différens l'une des deux quantités, étant comparés à ceux qui dans ces memes cas expriment l'autre, il se trouvera que les unes sont encore équimultiples des autres, seulement il faut observer de disposer les uns ou les autres dans un ordre renversé, tellement que le conséquent soit à la place de l'antécédent, et que l'antécédent prenne la place du conséquent.

222. On pourroit énoncer cela plus généralement, et l'appliquer à plusieurs termes à la fois, en disant, que dans le rapport inverse d'une quantité à une autre de différente espèce, les nombres qui expriment successivement l'une, sont encore équimultiples de ceux qui dans les memes cas expriment l'autre, mais mis en forme de dénominateur, auxquels on donnera pour numérateur commun l'unité. On pourroit désigner cette propriété par le terme d'*équisousmultiples*.

Supposons qu'une certaine distance ait été parcourue par quatre couriers dans des tems différens, savoir: par le premier en douze jours, par le second en six jours, par le troisieme en quatre jours, par le quatrieme en trois jours; il est évident que la

la

vitesse du second doit avoir éte le double, la vitesse du troisieme le triple, la vitesse du quatrieme le quadruple de celle du premier. Mettant ces quatre nombres en forme de dénominateurs, de sorte qu'il y ait 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; et comparant leur les tems respectifs qui leur répondent, savoir 12, 6, 4, 3; et l'on verra ces derniers nombres, qui expriment les tems, équimultiples des fractions 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, dont les dénominateurs expriment les vitesses.

223. Lorsque deux quantités de différente espèce sont en rapport géométrique inverse entr'elles, il faut que l'une des deux étant supposée égale à zéro, l'autre en devienne infiniment grande; et réciproquement, que l'une étant supposée infiniment grande, l'autre s'évanouisse entièrement.

La grande pyramide d'Egypte, ayant été achevée, comme on dit, en 20 ans par 40000 hommes qu'on y employoit, on demande en combien d'années elle auroit été achevée, en y mettant un seul ouvrier? il auroit fallu 40000 fois plus de tems que dans le premier cas, ce qui fait huit cent mille ans. Ici le nombre des ouvriers doit être regardé comme nul en comparaison de l'ouvrage immense dont il est question; aussi le tems est-il, pour ainsi dire, bien près de devenir infiniment grand.

224. On appelle règle de trois simple, celle, par laquelle trois termes d'une progression géométrique quelconque étant donnés, on apprend à trouver le quatrieme.

225. Ce quatrieme terme sera, ou un des deux extrêmes, ou un des deux moyens. On sait que généralement le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Donc, pour trouver le terme inconnu dans le premier cas, on divisera le produit des moyens par l'autre extrême qui est connu, et dans le second, on divisera le produit des extrêmes par le moyen qui est connu.

226.

226. On est convenu de désigner par la lettre x le terme inconnu, en attendant qu'on l'ait trouvé. La place qu'on veut assigner à cette inconnue x, dans la proportion, est indifférente en elle-meme. Dans la plupart des livres élémentaires on en fait le quatrieme terme de la proportion. Le troisieme terme sera celui des trois donnés, qui est de meme espece avec x. On reservera les deux premieres places pour les deux termes, dont l'espece est différente de celle de l'inconnue x. De cette maniere, les deux termes qui constituent chacun des deux rapports, seront toujours de meme espèce entr'eux.

227. Dans le cas du rapport direct, on placera les termes du premier rapport de maniere, que le troisieme regarde le premier, et que le quatrieme réponde au second. Dans celui du rapport inverse, on renversera les deux termes du premier rapport : alors le premier terme sera celui qui dans l'énoncé de la question appartenoit au quatrieme : et le second sera celui qui dans le meme énoncé regardoit le troisième.

228. Les quatre termes étant ainsi disposés, on multipliera le second terme par le troisième et on divisera le produit par le premier. Si les termes du premier rapport sont des nombres complexes, on ne fera pas mal de les réduire d'abord à la moindre espèce : la multiplication alors pourra très bien se faire par parties aliquotes. Quant à la nature complexe du troisième terme, elle ne fera jamais de difficulté, étant de meme espèce que l'inconnue meme.

Exem-

Exemple I. 42 lb. 13 onc. 5 gr. d'une certaine marchandise ont couté 782 fr. 18 cent.; on demande ce que couteront 19 lb. 7 onc. 3 gr. de la meme marchandise.

On aura donc 42 lb. 13 onc. 5 gr. : 19 lb. 7 onc. 3 gr.
ou 5485 : 2491
comme 782, 18 fr. : x.

Le rapport de la quantité au prix étant évidemment direct, les termes du premier rapport pourront subsister aux places qu'ils occupent. Il faudra multiplier 782, 18 fr. par 2491, et diviser le produit par 5485.

```
     782, 18
       2491
    --------
      78218
    703962
   312872
  156436
  -----------
  1948410;38    { 5485
  16455         { ------
  ------        { 355, 22
   30291
   27425
   ------
    28660
    27425
    ------
     12353
     10970
     ------
      13838
      10970
      ------
       2868
```

On aura x = 355 fr. 22 cent.

Exem-

Exemple II. On demande combien de livres, onces etc. d'une certaine marchandise on pourra acheter pour la somme de 355 fr. 22 cent.; ayant acheté une fois 42 lb. 13 onc. 5 gros pour la somme de 782 fr. 18 cent.?

On aura donc 782,18 : 355,22
Comme 42 lb. 13 onc. 5 gros : x.

Le rapport de la quantité au prix étant encore direct, l'ordre des termes pourra subsister. Il faudra multiplier 42 lb. 13 onc. 5 gros par 35522, et diviser le produit par 78218.

42 lb. 13 onc. 5 gros.
35522
71044
142088.
par 8 onc. 17761
par 4 onc. 8880 . . . 8
par 1 onc. 2220 . . . 2
par 4 gros 1110 . . . 1
par 1 gros 277 . . . 8 . . 2

1522173 . . . 3 . . 2 | 78218
78218. | 19 . . 7 . . 3

739993
703962

360313
216186

576499
547526

28973
8

231786
234654

2868 *Reste en moins.*

On trouvera 19 lb. 7 onc. 3 gros.

Exemple III. Un certain ouvrage ayant été achevé en 17 jours, par 213 ouvriers, on demande combien il faudra d'ouvriers pour le finir en 11 jours?

Ici on dira 17 jours : 11 jours

comme 213 ouvriers : x.

Mais le nombre des ouvriers étant en raison inverse de celui des jours, il faudra renverser le premier rapport; d'où il résultera la proportion suivante:

$$11 : 17 = 213 : x.$$

Multipliant 213 par 17, et divisant par 11, l'on trouvera 329; tel sera le nombre des ouvriers qu'on demandoit.

Exemple IV. Un fossé de 219 toises de long ayant été creusé dans un certain terrein, on voudroit en creuser un tout-à-fait pareil dans un autre terrein, en y employant les memes ouvriers; on demande de plus qu'il soit achevé dans le même tems. Il n'y a que la nature du terrein qui met de la différence dans les deux cas; on a reconnu par plusieurs experiences, que le terrein du second fossé est beaucoup plus difficile à travailler, dans le rapport à-peu-près de 11 à 19. On demande quelle sera la longueur de ce second fossé.

On aura la proportion $11 : 19 = 219 : x$. Mais la longueur du fossé, toutes choses d'ailleurs égales, étant évidemment en raison inverse de la dureté du terrein, il faudra renverser les deux termes du premier rapport; la proportion deviendra ainsi $19 : 11 = 219 : x$; ce qui donnera $x = 126$ toises, et un peu moins que cinq pieds.

CHA-

CHAPITRE NEUVIEME.

REGLE DE TROIS COMPOSÉE.

229. Dans les nombres abstraits, le rapport *composé* est celui qui résulte de la multiplication de deux ou de plusieurs rapports simples. Le produit de tous les antécédens dans ces derniers, de meme que le produit de tous leurs conséquens, formeront l'antécédent et le conséquent du rapport composé.

Soient proposés les rapports simples :

$$\begin{array}{rcl} 3 & : & 11 \\ 10 & : & 7 \\ 9 & : & 8 \end{array}$$

il en résultera le rapport composé $270 : 616$ ou $135 : 308$; qui se réduit à très peu près à $7 : 16$.

230. Lorsqu'on multiplie un rapport par lui meme, il en résulte le rapport des quarrés; on lui a donné le nom de *rapport doublé* (*ratio duplicata*). Le rapport doublé multiplié encore une fois par le rapport simple, reçoit le nom de *rapport triplé* (*ratio triplicata*); c'est le rapport des cubes. Après lui vient le *rapport quadruplé* (*ratio quadruplicata*); c'est celui des quatrièmes puissances. Tous ces rapports ne sont que des cas particuliers du rapport composé.

Le rapport simple ayant été, par ex. celui de $2 : 3$
son rapport doublé sera . . . . $4 : 9$
son rapport triplé sera . . . . $8 : 27$
etc. etc.

231. Prenant les racines quarrées des deux termes d'un rapport, il en résulte le *rapport sous-doublé (ratio subduplicata)*. Pareillement, le rapport des racines cubiques reçoit le nom de *rapport sous-triplé (ratio subtriplicata)*.

Le rapport 2 : 3 est le rapport sous-doublé de 4 : 9. Le meme rapport 2 : 3 est le rapport sous-triplé de 8 : 27.

Etant donné le rapport 2 : 5, on en trouve le rapport sous-doublé égal à 1 : 1,58114; ce qui revient à très près à celui-ci 7 : 11, ou plus exactement 12 : 19.

Etant donné le rapport 4 : 23 ou 1 : 5,75 on en trouve le rapport sous-triplé, en tirant la racine cubique de 5,75; on aura 1 : 1,79211; ce qui revient à 5 : 9 ou plus exactement 24 : 43.

232. On dit qu'une chose est en rapport composé avec plusieurs autres choses de différentes espèces, lorsqu'elle en dépend tellement, qu'un changement quelconque survenu à une seule de ces dernieres, produit un changement dans la premiere, et que pour déterminer celle-ci, il faut avoir égard à la fois à toutes les autres.

Il faut donc bien se garder d'employer le rapport simple lorsque la nature de la question exige qu'on fasse usage du rapport composé.

La hauteur et la grosseur d'un arbre étant données, on demande le nombre des fruits. ?

Ce probleme est ridicule. Le nombre des fruits dépend sans doute de la hauteur et de la grosseur de l'arbre; mais il dépend encore d'une infinité d'autres circonstances, sur lesquelles il faudroit des informations très exactes, avant que l'on puisse entreprendre de le déterminer. Le ridicule du probleme consiste donc, en ce qu'on vouloit traiter comme simple, un rapport infiniment composé.

206.

233. La solution des problemes de ce genre suppose d'abord la connoissance de tous les rapports simples, dont l'ensemble constitue le rapport composé. Le nombre de ces rapports simples doit être déterminé. S'il ne l'étoit pas, le probleme ne seroit plus du ressort de l'arithmétique ; peut-être meme n'admettroit-il aucune solution quelconque.

234. De plus, il faut être bien certain que tous les rapports simples dont l'autre est composé, sont des rapports géométriques. Il est très rare, et peut-être n'arrivera-t-il jamais dans des questions un peu compliquées, qu'ils puissent être rigoureusement considérés comme tels ; ordinairement ce n'est que par approximation que nous les considérons ainsi ; mais alors la solution du probleme ne sera ellememe qu'une approximation.

235. Cela étant, ayant fait de l'inconnue x le quatrième terme de la proportion, on donnera la troisieme place à celle des quantités données du probleme, qui est de la meme espèce avec l'inconnue x. Le premier et le second terme seront ceux du rapport composé, qu'il s'agit donc de déterminer.

236. Pour y parvenir, examinez l'un après l'autre tous les rapports simples, qui font partie de l'énoncé de la question. Ecrivez les de maniere, que dans tous, les conséquents soient ceux, qui se rapportent immédiatement à l'inconnue. Laissez subsister cet ordre dans les rapports directs : tandis que dans les inverses, vous aurez soin de renverser les termes. Ayant ainsi écrit tous les rapports, l'un au-

dessous

dessous de l'autre, vous direz: le produit de tous les antécédents est au produit de tous les conséquents, comme le troisieme terme est à l'inconnue x. De cette maniere, la regle de trois composée étant réduite à une regle de trois simple, le problème sera résolu.

237. La multiplication des antécédents, de meme que celle des conséquents, peut être rendue bien plus facile, en supprimant préalablement, par la division, tous les facteurs identiques, que l'on aura rémarqués à la fois parmi les uns et parmi les autres: de maniere, que lorsqu'on procede à la multiplication des facteurs qui seront restés, le rapport composé qui en résulte, n'admette aucune réduction ultérieure. Peut être trouvera-t-on encore quelque facteur que le premier terme aura de commun avec le troisieme; alors, divisant l'un et l'autre par ce facteur commun, c'est avec d'autant plus de facilité, qu'on achevera le calcul de l'inconuue.

238. Si quelques uns des termes des différents rapports simples, étoient impliqués de fractions, on les feroit disparoître, en multipliant à la fois les deux termes d'un tel rapport par le dénominateur de la fraction. S'il y avoit parmi ces termes des quantités complexes, on les convertiroit de part et d'autre dans leurs moindres espèces. Cela étant, donnons un exemple d'un pareil calcul, tel que par sa nature il renferme tous les cas particuliers, et présente toutes les difficultés, dont la question peut être susceptible,

Une

Une digue, de 216 toises de longueur, ayant 1 toise 4 pieds de hauteur, et 3 toises 2 pieds de largeur moyenne, a été achevée en 546 jours par 140 ouvriers, qui y travailloient régulièrement 7 heures et demie par jour.

Une autre digue, ayant 2 toises 3 pieds de hauteur, et 4 toises 1 pied de largeur moyenne, doit être achevée en 975 jours, en y employant 192 ouvriers; lesquels on peut faire travailler régulierement 8 heures et un tiers par jour; on demande quelle sera au bout des 975 jours, la longueur de cette digue.

Il faut observer que le terrein n'est pas le meme dans les deux cas. La seconde digue doit être construite dans un sol bien plus difficile à travailler, et d'après quelques expériences qu'on a faites, on peut estimer que la dureté du premier terrein est à celle du second, comme 7 : 11.

De plus, la force des ouvriers qu'on a pu employer dans les deux cas, n'est pas la meme non plus; et d'après plusieurs observations on peut évaluer ce rapport à-peu-près comme 9 : 11.

Tel est donc l'énoncé de la question.

L'inconnue x est la longueur que pourra avoir la seconde digue: elle fera le quatrième terme de la proportion.

Le troisieme terme sera la longueur qu'a eu la premiere digue dans le tems désigné, savoir 216 toises.

Cela étant, comparons toutes les espèces des différens termes à celle du dernier, savoir à la longueur de la digue.

La largeur. Vingt pieds à la premiere digue, vingt-cinq pieds à la seconde. Plus la digue doit avoir de largeur, et moins on pourra lui donner de longueur, s'il faut l'achever dans un tems prescrit, et toutes choses étant égales d'ailleurs. *Raison inverse.*
Donc . . . . 25 : 20. .

La

La hauteur. Dix pieds à la premiere digue, quinze pieds à la seconde. Plus la digue aura de hauteur, et moins on pourra lui donner de longueur, s'il faut la terminer dans un tems prescrit. *Raison inverse;* Donc . . . . 15 : 10.

Nombre des jours. 546 jours à la premiere digue, 975 jours à la seconde. Il y aura d'autant plus d'ouvrage de fait, qu'on y mettra plus de tems. *Raison directe;* donc . . . . . 546 : 975.

Nombre des ouvriers. 140 à la premiere digue, 192 à la seconde. Il y aura d'autant plus d'ouvrage de fait, qu'on y mettra plus d'ouvriers. *Raison directe;* donc . . . . 140 : 192.

Nombre des heures de travail par jour. $7\frac{1}{2}$ à la premiere digue; $8\frac{1}{3}$ à la seconde. *Raison directe.* Multipliant de part et d'autre par 6, ce rapport sera . . . . 45 : 50.

Dureté du terrein. Ce rapport est estimé comme 7 : 11 pour les deux digues. Plus le terrein est dur, et moins la digue aura de longueur, s'il faut la terminer dans un tems prescrit. *Raison inverse* . . 11 : 7.

Force des ouvriers. Comme 9 : 11 pour les deux digues. Plus les ouvriers sont forts, et plus ils feront d'ouvrage dans un tems donné. *Raison directe* . . . . 9 : 11.

Voilà donc par ordre les sept différens rapports dont il faut composer celui des longueurs.

Largeur	25	:	20	ou	5	:	4
Hauteur	15	:	10	ou	3	:	2
Nombre des jours	546	:	975	ou	14	:	25
Nombre des ouvriers	140	:	192	ou	35	:	48
Heures par jour	45	:	50	ou	9	:	10
Dureté du terrein	11	:	7	ou	11	:	7
Force des ouvriers	9	:	11	ou	9	:	11

Avant de faire la multiplication, il ne sera pas inutile de décomposer tous ces termes en nombres premiers, afin de pouvoir supprimer avec d'autant

 plus

plus de facilité les facteurs qui se rencontrent de part et d'autre. On trouvera

$$\begin{array}{rcl} 5 & : & 2.2 \\ 3 & : & 2 \\ 2.7 & : & 5.5 \\ 5.7 & : & 2.2.2.2.3. \\ 3.3 & : & 2.5. \\ 11 & : & 7 \\ 3.3 & : & 11 \end{array}$$

On pourra donc supprimer de part et d'autre les facteurs qui suivent : 2. 3. 5. 5. 7. 11. Multipliant ceux qui restent, on aura le rapport composé $567 : 640$. Ce rapport étant celui des largeurs, la question sera réduite à une règle de trois simple, savoir $567 : 640 = 216 : x$, ou $21 : 640 = 8 : x$; ce qui donnera x égal à un peu moins que 244 toises. Telle sera la longueur de la seconde digue, dans le tems prescrit.

CHAPITRE DIXIEME.

RÈGLE DE SOCIÉTÉ.

239. L'objet de cette règle est en général de partager un nombre quelconque proposé en un certain nombre de parties, qui sont entr'elles dans des rapports donnés. L'emploi continuel qu'on en fait dans le commerce, lui a fait donner le nom de *Règle de Compagnie*, ou *de Société*.

240. Nous avons vu plus haut, en 127, que lorsqu'on a un nombre quelconque de rapports égaux entr'eux, la somme de tous les antécédents est à la somme de tous les conséquents, comme un antécédent est à son conséquent.

241. La solution de la regle de société n'est qu'une application de ce principe. Proposons-nous de partager le nombre 437 en quatre parties, qui soient entr'elles comme les nombres *deux*, *trois*, *sept* et *onze*. Les quatre parties doivent donc être telles, que les quatre rapports suivants soient égaux entr'eux :

celui de 2 à *la premiere partie.*
celui de 3 à *la seconde partie.*
celui de 7 à *la troisieme partie.*
celui de 11 à *la quatrième partie.*

242. La somme des antécédents est *vingt-trois*. Celle des conséquents est le nombre proposé 437. Cela fournit les quatre règles de trois qui suivent:

23 : 437 = 2 : *la premiere partie.*
23 : 437 = 3 : *la seconde partie.*
23 : 437 = 7 : *la troisième partie.*
23 : 437 = 11 : *la quatrieme partie.*

243. Divisant 437 par 23, on trouve 19. Tel est donc le multiplicateur commun, par lequel il faut multiplier les quatre nombres donnés 2, 3, 7, 11, pour avoir les quatre parties du nombre proposé. On trouvera

38	. . .	*premiere partie.*
57	. . .	*seconde partie.*
133	. . .	*troisieme partie.*
209	. . .	*quatrieme partie.*
437	. . .	*Nombre proposé.*

Ces quatre parties sont évidemment entr'elles dans le rapport des nombres 2, 3, 7, 11; il n'y a qu'à les diviser tous par 19, pour s'en assurer.

244. La règle est donc facile. Ajoutez ensemble ces antécédents qui sont donnés par l'énoncé meme de la question; divisez le nombre proposé par leur somme; le quotient sera le multiplicateur par lequel il faudra multiplier successivement tous les antécédents, pour avoir les parties demandées.

245. Les antécédents ne sont pas toujours donnés immédiatement. Souvent ils exigent la réduction d'autres rapports à une meme dénomination. D'autrefois, ils sont le résultat de certains rapports composés, qui exigent des multiplications préalables. Les exemples suivants répandront du jour sur ces particularités, qu'il ne seroit guères possible de soumettre à des règles générales.

Exemple I. *Trois marchands de bled se sont associés; le premier pour 242 sacs; le second pour 296 sacs, le troisième pour 413 sacs de bled. Au bout d'un certain tems la totalité des grains a été vendue 16880 francs. On demande ce qui revient à chacun.*

Il faut donc diviser 16880 dans la proportion des nombres 242, 296, 413: qui font ensemble la somme 951. Ces nombres sont ceux là memes, que dans l'exposé général nous avons nommé les antécédents; et comme on voit, ils sont ici immédiatement donnés par l'énoncé de la question.

Divisant 16880 par 951, on a pour quotient 17,75 ou 17 et trois quarts. Tel est le nombre par lequel il faut multiplier tous les antécédents, l'un l'un après l'autre, pour avoir les parties demandées. On en trouvera

la premiere	$4295 \frac{1}{2}$
la second	5254
la troisieme	$7330 \frac{1}{2}$
ce qui reproduit le nombre proposé	$16880.$

Exemple II. *Trois négociants se sont associez. Le premier a mis 2436 francs pour une année et trois mois ; le second a mis 3542 francs pour deux années et un mois ; le troisième a mis 4848 francs pour sept mois. Ils ont gagné tous ensemble la somme de 5642 francs. On demande la part qui en revient à chacun.*

Cette règle a dans le commerce le nom de *Règle de compagnie à tems.* Sa solution mathématiquement rigoureuse exigeroit qu'on eut égard aux intérêts des intérêts : cela supposeroit la connoissance exacte des progressions géométriques, et par conséquent l'usage des logarithmes.

Mais dans le commerce on se borne aux intérêts simples du capital. Les conditions de la société sont ordinairement, que chacun ait part au profit à raison de sa mise, et du tems qu'elle sera restée dans le commerce.

Il faudra donc prendre le rapport simple et direct des mises, ainsi que celui des tems; et en former par la multiplication le rapport composé. Les termes de ce dernier seront les antécédents qu'on demandoit. On trouvera, en réduisant les tems en mois,

le premier produit égal à 36540
le second produit égal à 88550
le troisième produit égal à 33936.

Tels seront les antécédents, en proportion desquels il faudra partager le gain total de 5642 francs, pour avoir la part qui en revient à chacun.

Leur somme est égale à 159026. Divisant 5642 par 159026, on trouve le quotient 0,03548. Il ne ne restera plus, qu'à multiplier par ce facteur commun, chacun des trois antécédents. On aura

pour la part du premier	1296
pour la part du second	3142
pour la part du troisième	1204

ce qui reproduit le nombre proposé 5642.

Exemple III. *Un négociant à mis 100000 francs dans le commerce. Au bout de six mois, un second négociant s'associe avec lui pour 25000 francs dans les 100000. Et au bout de deux autres mois, le premier négociant a cédé à un troisième négociant une part de 30000 francs, dans la portion qui lui restoit des 100000. Enfin au bout de six autres mois, les 100000 francs ont gagné 18000 francs. On demande la part qui en revient à chacun, en proportion de sa mise, et du tems qu'elle sera restée dans le commerce.*

Multiplions partout la mise par le nombre respectif des mois.

Le premier négociant y a eu d'abord 100000 pendant 6 mois: produit 600000. Pendant les deux mois suivans il n'en a eu que 75000; produit 150000. Enfin pendant les six derniers mois il n'en a laissé que 45000; produit 270000. Somme des trois produits 1020000; tel est l'antécédent qui regarde le premier.

Le second négociant y a eu 25000 francs pendant huit mois; produit 200000. Voila l'antécédent qui lui appartient.

Le troisième y a eu 30000 francs pendant six mois. Produit 180000; c'est l'antécédent de celui-ci.

Il faut donc partager la somme de 18000 francs en trois parties, qui soient entr'elles dans le rapport des nombres 102, 20 et 18; ou bien 51, 10, 9.

La somme de ces nombres est 70. Divisant 18000 par 70, il en résulte $257\frac{1}{7}$; tel est le facteur commun, par lequel il faudra multiplier chacun des trois nombres 51, 10, 9. On trouvera

pour la part du premier	13114 fr.	28 cent.
pour la part du second	2571 ..	43 ..
pour la part du troisième	2314 ..	29 ..
Total . . .	18000 francs.	

CHAPITRE ONZIEME.

RÈGLE CONJOINTE.

246. Etant donné dans une série quelconque de termes qui ordinairement sont tous de la meme espece, le rapport du premier au second; celui du second au troisieme; celui du troisieme au quatrieme; et ainsi de suite jusqu'au dernier, on demande immédiatement le rapport du premier au dernier. Tel est l'objet de la règle conjointe, autrement dite *Règle de chaine*, (*Kettenregel*).

Ainsi, supposons que ces termes soient au nombre de quatre, que nous désignerons par les lettres A, B, C, D, et que l'on ait

$$A : B = 24 : 11;$$
$$B : C = 22 : 15;$$
$$C : D = 25 : 39;$$

on demande le rapport de A : D. Voila un exemple de la règle conjointe.

247. Il y a donc dans toute règle conjointe une suite de termes qui ne sont exprimés par aucun nombre, et qui désignent de certaines choses, de la meme espèce ordinairement. Il y a ensuite une pareille suite de rapports, dont

dont le nombre est égal à celui des termes moins un: chacun de ces rapports ayant son antécédent et son conséquent, qui sont tous des nombres connus. Cela étant, voici en très peu de mots la solution du probleme:

248. *Le premier terme est au dernier, comme le produit de tous les antécédents est au produit de tous les conséquents.*

249. Ce theoreme est fondé sur une propriété générale des proportions géométriques. Si l'on a deux ou plusieurs proportions géométriques, qu'on les mette l'une au dessous de l'autre, les premiers termes se trouvant tous dans la premiere colonne, les seconds dans la seconde, et ainsi de suite, et qu'on les multiplie par colonnes, il résulte de ces quatre produits une nouvelle proportion géométrique. Car on ne fait réellement autre chose alors que de multiplier des rapports égaux entr'eux, par d'autres rapports égaux entr'eux; d'où il résultera dans tous les cas de nouveaux rapports pareillement égaux, et conséquemment une nouvelle proportion géométrique.

250. Faisant l'application au cas de la règle conjointe, le produit des premiers termes dans l'exemple précédent sera A. B. C., celui des seconds sera B. C. D. Le rapport de l'un à l'autre est A : D, les autres facteurs, communs aux deux produits, devant naturellement se détruire. On aura donc A : D, ou généralement le premier terme au dernier, comme le produit des antécédents est au produit des conséquents.

251. Cette multiplication deviendra beaucoup plus facile par la suppression des facteurs égaux qui se trouveront en meme tems parmi les antécédents et parmi les conséquents, après les avoir décomposés en nombres premiers, comme il a été dit dans la règle de trois composée.

Dans l'exemple précédent on aura

$$A : B = 2.\,2.\,2.\;3 : 11$$
$$B : C = 2.\,11 : 3.\;5$$
$$C : D = 5.\;5 : 3.\;13$$

Les facteurs 3. 5. 11. se trouvant de part et d'autre, il en résultera $A : D = 2.\,2.\,2.\,2.\,5 : 3.\,13$; ou bien $A : D = 80 : 39$. Ainsi donc A sera un peu plus que le double de D.

252. Les négocians font un emploi journalier de la règle conjointe, surtout dans leurs opérations de change. Mais ils en disposent autrement les termes. Au lieu de mettre les différens rapports en forme de proportion, ils marquent simplement les produits égaux des moyens et des extrêmes. Multipliant par ordre tous les produits de part et d'autre, il est clair que des termes A, B, C, D. etc. tous les intermédiaires se détruiront réciproquement; et qu'il n'en restera que le premier et le dernier dont le rapport sera donné par l'égalité qui est le résultat de la multiplication.

L'exemple précédent prendra alors la forme suivante :

$$11\,A = 24\,B;$$
$$15\,B = 22\,C;$$
$$39\,C = 25\,D;$$

d'où l'on obtient $11 \times 15 \times 39\,A = 24 \times 22 \times 25\,D$; et par la suppression des facteurs égaux,

$$39\,A = 80\,D.$$

Le

Le rapport du premier A au dernier D est donc tel, que 39 A font autant que 80 D. Ainsi si l'on vouloit savoir combien feront un autre nombre quelconque de ces A, s'il falloit les exprimer en D, par ex. combien feront 17 A, on fera simplement la proportion

$$39 : 80 = 17 : x$$

ce qui obligera de multiplier 17 par 80 et de diviser le produit par 39. On aura $34 \frac{7}{8}$.

253. Ainsi donc, les termes que nous avions mis dans la colonne des antécédents, sont régardés comme conséquents dans les bureaux de commerce; et réciproquement ceux dont nous avions fait les conséquens, y sont traités comme antécédents. Et comme le but de la règle conjointe est de savoir, combien *un certain nombre* des quantités de la premiere espèce feront en quantités de la derniere espèce, on a coutume d'assigner à ce nombre la premiere place parmi les conséquens. Après quoi, faisant les réductions nécessaires, et supprimant les facteurs identiques qui se rencontrent de part et d'autre, on aura le nombre qu'on cherche, en divisant le produit des conséquénts par le produit des antécédents.

Exemple I. *Un négociant de Cologne est débiteur à Paris, de la somme de* 1000 *francs, et ne trouvant pas dans la place meme du papier sur Paris à un cours convenable, il veut l'acheter à Francfort. Le change de Francfort sur Paris est à* 76; *et le papier sur Francfort perd à Cologne un demi pour cent. On sait de plus, que le Rixdaler à Francfort est partagé en* 90 *Kreuzers; que* 138 *Kreuzers, argent de change, équivalent à* 115 *Stuvers de Cologne; què dans cette ville,* 60 *Stuvers font un Rixdaler; à quoi il faut encore ajouter que* 80 *francs équivalent à* 81 *livres tournois. Cela étant,* on *on demande combien le negociant doit envoyer de rixdalers à Francfort, pour payer les 1000 francs.*

La somme de 1000 francs devant se trouver à la tête des conséquents, posez . . . . . . 1000.

Des francs nous passerons aux livres tournois. Or, 80 francs font 81 livres tournois, rapport constant. Donc . . . . 80 : 81.

Passant des livres tournois aux Rixdalers, argent de change, il faut considérer, que le change de Francfort avec Paris étant à 76, trois cent livres équivaudront à 76 Rixdalers, argent de change de Francfort. Donc . . . . 300 : 76.

Ces memes Rixdalers devant être envoyés de Cologne à Francfort, il faut considérer que le papier sur Francfort perd à Cologne un demi pour cent, et qu'ainsi 100 Rixdalers, argent de change de Francfort, ne valent à Cologne que $99\frac{1}{2}$. Donc 100 : $99\frac{1}{2}$; rapport que l'évanouissement de la fraction réduira à . . . . 200 : 199.

Le Rixdaler à Francfort fait 90 kreuzer; donc 1 : 90.

Mais 138 kreuzer, argent de change de Francfort, font à Cologne 115 stuvers; rapport constant. Donc . . . . 138 : 115.

Enfin 60 stuvers font un Rixdaler à Cologne. Donc . . . . , ... 60 : 1.

Ainsi donc, pour trouver le nombre des rixdalers demandé, il faut diviser le produit de tous les conséquents, savoir 1000 *fois* 81 *fois* 76 *fois* 199 *fois* 90 *fois* 115 par celui de tous les antécédents, qui est 80 *fois* 300 *fois* 200 *fois* 138 *fois* 60.

Examinant plus attentivement les deux produits, on y trouvera de part et d'autre les facteurs communs qui suivent, savoir 10000, 9, 27, 4, 23, 5. Il ne restera que 3 *fois* 19 *fois* 199 *fois* 9 ou 102087, à diviser par 8 *fois* 10 *fois* 4 ou 320; ce qui donne 319 Rixdalers, et $1\frac{1}{3}$ stuvers. Tel est le nombre de Rixdalers, pour lequel le dit négociant aura à Francfort la somme de 1000 francs sur Paris.

Exemple

Exemple II. *Ce meme négociant veut examiner s'il n'y aura pas du profit à négocier cette meme somme de 1000 francs à Amsterdam. A cet effet il consulte le cours du change, tant de Cologne avec Amsterdam, que d'Amsterdam avec Paris ; il trouve que le premier est à 171 ½, c'est-à-dire, que pour 250 florins, argent courant d'Amsterdam, on paye à Cologne 171 ½ Rixdalers ; que le dernier est à 60, et qu'ainsi l'écu de 3 livres vaut à Amsterdam 60 deniers argent de banque. On sait de plus que l'argent de banque perd 7 pour cent contre l'argent courant, et qu'ainsi 100 florins de banque ne font que 93 florins courants. Enfin, 40 deniers font un florin, à Amsterdam. Cela étant :*

La somme de 1000 francs sera encore à la tête des conséquents ; posez . . . . 1000.

Le rapport du franc à la livre est constant ; 80 francs font 81 livres. Posez . . . . 80 : 81

L'écu de trois livres vaut 60 deniers de banque à Amsterdam ; posez . . . . 1 : 60.

Quarante deniers font un florin ; posez 40 : 1,

Cent florins de banque font 93 florins, argent courant . . . . 100 : 93.

Enfin, 250 florins de Hollande, argent courant, font à Cologne 171 ½ Rixdalers ; posez 500 : 343.

Le produit des conséquents est donc 1000 *fois* 81 *fois* 60 *fois* 93 *fois* 343 ; celui des antécédents est 80 *fois* 40 *fois* 100 *fois* 500. On trouve le facteur commun 20000 ; il restera à diviser 81 *fois* 3 *fois* 31 *fois* 343 ou 2583819 par 8000.

Cette division donne 322 Rixdalers, 58 ¾ stuvers. Il coute donc plus cher de 3 Rixdalers, de négocier les 1000 francs à Amsterdam. que de les acheter à Francfort.

Exemple III. *Un négociant de Cologne a une lettre de change de 1000 ducats sur Cadix ; et ne pouvant la vendre chez lui, il veut l'envoyer à Paris. Consultant à cet effet les cours du change, il trouve que le change de Cadix sur Paris est à 14 ½ ; que*

celui

celui de Paris sur Amsterdam est à 57 $\frac{1}{4}$; enfin que celui d'Amsterdam sur Cologne est à 171 $\frac{1}{2}$. Ainsi le doblon de Cadix est égal à 14 $\frac{1}{2}$ livres; l'écu de trois livres vaut à Amsterdam 57 $\frac{1}{4}$ deniers courants; enfin 250 florins, argent courant d'Amsterdam, valent à Cologne 171 $\frac{1}{2}$ rixdalers. On sait de plus que le ducat de cambio est égal à 375 maravedis de plata, dont 1088 font un doblon. Enfin, le florin courant de Hollande fait 40 deniers courants. Cela étant, on demande à combien de Rixdalers la dite lettre de change pourra être évaluée.

Mettons à la tête des conséquents . . . 1000

Ensuite de quoi, nous aurons, l'un après l'autre, les rapports qui suivent, délivrés de toute forme fractionnaire:

Du ducat de cambio au maravedi de plata 1 : 375.

Du maravedi de plata au doblon . . . . 1088 : 1.

Du doblon à la livre de France . . 2 : 29.

De la livre de France au denier courant de Hollande . . . . 12 : 229.

Du denier courant au florin . . . . 40 : 1.

Du florin au rixdaler de Cologne . . 500 : 343.

Le nombre de rixdalers qu'on demande, se trouvera donc en divisant le produit de 1000 *fois* 375 *fois* 29 *fois* 229 *fois* 343 par celui de 1088 *fois* 2 *fois* 12 *fois* 40 *fois* 500.

Le résultat du calcul sera 1635 Rixdalers, 28 $\frac{7}{8}$ stuvers.

Exemple IV. *Consultons à présent pour cette meme lettre de change les cours d'Amsterdam et de Cologne sur Hambourg. Le premier est à 39; c'est-à dire, que deux marcs de banque de Hambourg valent 39 stuvers d'Amsterdam. L'autre est à 185; ainsi 300 marcs de banque de Hambourg sont équivalents à 185 Rixdalers de Cologne. Il faut encore connoitre le cours d'Amsterdam sur Cadix, qui est à 103; de sorte qu'un ducat de Cambio vaut 103 deniers banco d'Amsterdam. On sait de plus que deux deniers d'Amsterdam font un stuver. Cela étant,*

on

on demande ce que cette lettre de change vaudra en Rixdalers, en la faisant négocier à Amsterdam.

Passant successivement de l'un à l'autre, on aura les rapports qui suivent:

Du ducat de cambio au denier banco d'Amsterdam . . . . , ... 1 : 103.

Du denier banco au stuver banco d'Amsterdam 2 : 1.

Du stuver banco au marc banco de Hambourg 39 : 2.

Du marc banco de Hambourg au Rixdaler de Cologne . . . . , ... 300 : 185.

Le nombre qu'on cherche se trouvera, en divisant le produit 1000 *fois* 103 *fois* 2 *fois* 185 par le produit 2 *fois* 39 *fois* 300.

Le résultat du calcul donne 1628 Rixdalers, 38 stuvers. Il y a donc un bénéfice de 7 écus, si l'on négocie les mille ducats à Amsterdam.

Exemple V. *Un négociant de Cologne veut faire passer à Hambourg la somme de 3000 marcs de banque, en les achetant à Amsterdam; on demande à combien de rixdalers cela lui reviendra. Le cours d'Amsterdam sur Hambourg est à 39; ainsi pour deux marcs de banque on donne à Amsterdam 39 stuvers. L'argent de banque perd en Hollande sept pour cent contre l'argent courant; ainsi cent florins de banque ne valent que 93 florins courants. Enfin le cours de Cologne sur Amsterdam est à 171 $\frac{1}{2}$; de maniere que 250 florins courants de Hollande sont payés à Cologne 171 $\frac{1}{2}$ rixdalers.*

Voici les différens rapports qu'on obtiendra d'après ces données.

Du marc de banque au stuver d'Amsterdam 2 : 39.

Du stuver au florin de banque . . . 20 : 1.

Du florin de banque au florin courant . . 100 : 93.

Du florin courant de Hollande au Rixdaler de Cologne . . . . 500 : 343.

Il faudra donc diviser le produit 3000 *fois* 39 *fois* 93 *fois* 343 par celui de 2 *fois* 20 *fois* 100 *fois* 500.

Le

Le calcul donne 1866 Rixdalers, $5\frac{1}{2}$ stuvers.

Exemple VI. *Essayons de négocier cette même somme à Francfort. Le change de Francfort sur Hambourg est à 148 $\frac{1}{2}$; ainsi 300 marcs de banque sont payés à Francfort 148 $\frac{1}{2}$ Rixdalers, argent de change. Le papier de Francfort perd à Cologne un demi pour cent; ainsi 200 Rixdalers, argent de change de Francfort, n'en valent à Cologne que 199. Quatre-vingt dix kreuzers, argent de change de Francfort, y font un Rixdaler; de plus, 138 de ces kreuzers équivalent à 115 stuvers de Cologne, dont 60 y font un Rixdaler. On demande, combien de Rixdalers ce négociant doit envoyer de Cologne à Francfort, pour payer les 3000 marcs.*

Voici les rapports que ces données nous fournissent.

Du marc de banque au rixdaler, argent de change de Francfort . . . . 600 : 297.

De ce dernier au rixdaler, argent de change de Francfort à Cologne . . . . 200 : 199.

De ce dernier au kreuzer, argent de change de Francfort . . . . 1 : 90.

De ce dernier au stuver de Cologne 138 : 115.

De ce dernier au Rixdaler de Cologne 60 : 1.

Il faudra diviser le produit de 3000 *fois* 297 *fois* 199 *fois* 90 *fois* 115 par celui de 600 *fois* 200 *fois* 138 *fois* 60.

Le résultat donne 1847 Rixdalers. Telle est la somme qu'il faudra envoyer à Francfort, pour payer les 3000 marcs. Il en coutera 20 écus de moins, que si on en avoit fait la négociation à Amsterdam.

CHA-

CHAPITRE DOUZIEME.

RÈGLE D'ALLIAGE.

254. Le mot d'*Alliage*, comme terme de l'art, est particulierement consacré aux métaux. Le chapitre de l'arithmétique que nous traitons lui donne un sens plus étendu, en l'appliquant indistinctement au mêlange des matieres de différentes espèces, supposé toutes fois qu'elles soient susceptibles d'ètre mêlées ensemble.

255. Les qualités que chacune de ces matieres avoit séparément, avant qu'on les eut mêlées ensemble, sont supposées connues. La nouvelle matiere qui résulte de ce mêlange, tiendra à cet égard un juste milieu entre les matieres mêmes, considérées séparément. Or, le but de la règle d'alliage est, ou de déterminer ce résultat, la proportion des ingrédients étant donnée, ou de supposer le résultat donné, et de s'en servir ensuite, pour déterminer la proportion, dans laquelle ces matieres doivent avoir été mêlées ensemble.

256. Il existe donc réellement deux règles d'alliage. Dans la *règle d'alliage directe* la proportion des ingrédiens est supposée connue, et on demande le prix, le titre, la pésanteur spécifique etc. qui doit en résulter pour le mêlange. Dans la *règle d'alliage inverse* on demande quelle doit avoir été la proportion mutuelle des ingrédients, pour que de leur mêlange il puisse résulter un prix, un titre, une pésanteur spécifique donnée.

RÈGLE D'ALLIAGE DIRECTE.

257. Le cas le plus simple est celui qui a pour objet, de déterminer le prix du mêlange. Ici il faut nous entendre sur l'idée que nous attachons aux deux termes très différens de *prix* et de *valeur*.

258. En exprimant la quantité d'une marchandise quelconque par un certain nombre, l'unité de ce nombre désigne toujours une certaine quantité déterminée, dont on est convenu d'avance. La valeur de cette unité est ce que nous nommons *prix* de la chose. Ce prix, multiplié par le nombre des unités que cette quantité renferme, fait connoitre ensuite la *valeur* de la marchandise.

Douze sacs de bled, à quinze francs le sac, couteront ensemble 180 francs. Ici le sac est l'unité. Les 15 francs, valeur d'un sac, constituent le prix de la marchandise. Le nombre 12 en exprime la quantité, comptée par sacs. Enfin les 180 francs en déterminent la valeur, qui n'est donc autre chose que le produit du prix et de la quantité.

259. Le prix est donc la *valeur specifique* d'une chose; et réciproquement la valeur en exprime le *prix total* ou *absolu*. La valeur dans tous les cas est égale, ou plutôt proportionelle, au produit du prix multiplié par la quantité.

260. *Connoissant le prix et la quantité des ingrédiens, on demande le prix du mêlange.* Multipliez le prix de chaque espèce par sa quantité respective, et divisez la somme des produits par celle des quantités, ou par la quantité totale du mêlange.

Exemple I. *On a mêlé ensemble trois sortes de grains de différens prix, savoir*

13 sacs de bled à 14 fr.
16 sacs de bled à 11 fr.
8 sacs de seigle à 10 fr.

On demande le prix du mêlange.

Multipliant chaque nombre de sacs par son prix, on trouve

Valeur des premiers	13 sacs,	égale à 182 francs.
Valeur des seconds	16 sacs,	égale à 176 francs.
Valeur des troisièmes	8 sacs,	égale à 80 francs.
Valeur totale des	37 sacs,	égale à 438 francs.

Par conséquent, valeur de chacun des 37 sacs, ou prix du mêlange, égale à 438 francs, divisés par 37; ce qui fait 11 francs 84 centimes.

261. Le second exemple sera tiré du mêlange des métaux précieux; tels que l'or et l'argent. Le marc d'argent est supposé divisé en 12 parties égales, qu'on nomme deniers; et le denier en 24 grains.

262. Si l'argent est pur, et sans mêlange d'aucun autre métal, on dit qu'il est à douze deniers. S'il est composé de neuf deniers et dix-huit grains d'argent pur, et de deux deniers six grains de quelque autre métal non précieux, on le dit à 9 deniers, 18 grains; et ainsi du reste. Cette portion d'argent pur que contient un marc de l'argent proposé, exprimée en deniers et en grains, est ce qu'on nomme *le titre de l'argent.*

263. Le titre de l'argent indique donc en meme tems le prix qu'il a dans le commerce; et à cet égard il n'y a aucune différence entre

ce probleme, et le probleme précédent. Le nombre des marcs que pese une masse donnée, est sa quantité. Et pour obtenir la véritable valeur de cette masse, il faut en multiplier le titre par le nombre des marcs.

264. *Voulant fondre ensemble un certain nombre de marcs d'argent à différens titres, on demande le titre du mélange.* Multipliez pour chacune de ces masses le titre par le nombre des marcs, et divisez la somme des produits par celle des marcs.

Exemple. *Ayant fondu ensemble*

41 *marcs d'argent à* 10 $\frac{1}{2}$ *deniers de fin.*
62 *marcs d'argent à* 9 $\frac{3}{4}$ *deniers de fin.*
25 *marcs d'argent à* 11 $\frac{1}{4}$ *deniers de fin.*

On demande le titre du mêlange.

Multipliant chaque titre par le nombre des marcs qui lui appartient, on trouve:

valeur des 41 marcs, égale à 430,5 deniers.
valeur des 62 marcs, égale à 604,5 deniers.
valeur des 25 marcs, égale à 281,25 deniers.

donc

valeur des 128 marcs, égale à 1316,25 deniers. Divisant le nombre de ces deniers par celui des marcs, qui est 128, on trouve le titre du mêlange demandé, égal à 10,283 deniers; ce qui fait 10 deniers et 7 grains.

265. Nous ferons la troisième application de cette règle à la pésanteur spécifique des corps. On sait ce qu'on appelle le volume, ainsi que le poids d'un corps. L'unité de capacité dont on se sert pour déterminer le volume, est le centimetre ou le *doigt* cubique. L'unité de poids qui sert à exprimer tous les poids

quelconques, est le gramme ou *denier* ; c'est le poids d'un doigt cubique d'eau.

266. De meme que le rapport de la valeur d'une marchandise à sa quantité est ce qu'on peut nommer son *prix*, de meme aussi le rapport du poids d'un corps au volume qu'il occupe, est ce qu'on nomme sa *pésanteur spécifique*.

267. La pésanteur spécifique d'une matiere est donc le poids d'un volume déterminé et connu de cette matiere. Ce volume, dans le systeme adopté par la république, est le doigt cubiqne Le doigt cubique d'eau pese un denier. Le doigt cubique de cuivre pese huit deniers ; et celui de mercure en pese quatorze ; la pésanteur spécifique du cuivre est donc huit fois, et la pésanteur du mercure est quatorze fois celle de l'eau.

268. Comme de plus on est généralement convenu de désigner dans la table des pésanteurs spécifiques des corps, celle de l'eau commune par 1, on voit que la pésanteur spécifique d'une matiere quelconque est simplement le nombre des deniers, que pese un doigt cubique de cette meme matiere.

269. Divisant le poids d'un corps, toujours exprimé en deniers, par sa pesanteur spécifique, on doit en trouver le volume, exprimé en doigts cubiques.

Ayant un morceau de cuivre jaune du poids de 4562 deniers, tandis que la pésanteur specifique de ce cuivre est 8, on aura son volume en divisant

4568 par 8. On le trouvera égal à 571 doigts cubiques.

270. Pareillement, si l'on divise le poids d'un corps par le volume qu'il occupe, l'un étant exprimé en deniers, l'autre en doigts cubiques, cette division fait connoitre sa pésanteur spécifique.

Ayant 571 centimetres cubiques de cuivre jaune qui pèsent ensemble 4568 grammes, il est clair que chaque doigt cubique en pesera huit deniers; or, c'est précisément ce qu'on appelle la pésanteur spécifique de ce cuivre.

271. *Connoissant les poids et les pésanteurs spécifiques de différentes masses métalliques qu'on veut fondre ensemble, on demande la pésanteur spécifique du mêlange.* Divisez le poids de chaque masse, exprimé en deniers, par sa pésanteur spécifique; les quotiens vous en feront connoitre les volumes en doigts cubiques. Ensuite de quoi, vous n'aurez qu'à diviser la somme des poids par celle des volumes, pour avoir la pésanteur spécifique du mêlange.

On veut fondre ensemble 483 *deniers d'or fin, et* 296 *deniers d'argent fin; la pésanteur spécifique de l'or est* 19,64, *celle de l'argent* 11,09; *on demande la pésanteur spécifique du mêlange.*

Divisant 483 par 19,64, vous aurez le volume de l'or, égal à 24,59 doigts cubiques.

Divisant de meme 296 par 11,09, vous aurez le volume de l'argent égal à 26,69 doigts cubiques.

Le volume du mêlange sera donc de 51,28 doigts cubiques, tandis qu'il aura le poids de 779 deniers.

Il n'y aura plus qu'à diviser 779 par 51,28 pour avoir la pésanteur spécifique du mêlange ; elle se trouvera égale à 15,19.

272. Telle est la solution de la regle d'alliage directe, par laquelle connoissant les prix des ingrédients, et la quantité de chacun, on détermine quel doit être le prix du mêlange. La regle comme on voit, est facile, et dans tous les cas elle n'admet qu'une seule solution. Ce que nous disons ici du prix, regarde également le titre, la pésanteur spécifique, et généralement toute autre qualité quelconque, pourvû qu'elle soit exprimable en nombres.

273. En réflêchissant sur la nature de la question, et en examinant avec attention les résultats auxquels cette solution nous conduit dans les cas, où les ingrédients ne sont que de deux espèces, on découvre un théoreme très remarquable. C'est qu'en prenant les différences, du prix moyen qu'on a trouvé, au prix de chacun des deux ingrédients avant le mêlange, ces différences sont exactement entr'elles dans la raison inverse des quantités memes. Quelques exemples éclairciront ceci.

Exemple I. On a mêlé ensemble trois pintes de vin à 45 sous la pinte, et deux pintes de vin à 30 sous la pinte. La regle donne 39 sous pour le prix de la pinte du mêlange. Donc

différence de 39 à 45, égale à 6.
différence de 30 à 39, égale à 9.

Le rapport de 6 : 9 est celui de 2 : 3. Le rapport des quantités a été de 3 : 2. L'un est donc inverse de l'autre.

Exemple II. On a mêlé ensemble quatre sacs d'une certaine marchandise, à 42 fr. le sac ; et trois

sacs

sacs d'une autre à 28 fr. le sac. La regle donne 36 francs pour le prix de chaque sac du mêlange. Or

différence de 36 à 42, égale à 6.
différence de 28 à 36, égale à 8.

Le rapport des différences est 6 : 8 ou 3 : 4. Celui des quantités étoit de 4 : 3. L'un est inverse de l'autre.

Exemple III. Ayant fondu ensemble 7 marcs d'argent à 10 deniers et 16 grains, ou à 256 grains, avec 9 marcs d'argent à 8 deniers, ou à 192 grains; la regle donne pour le titre du mêlange 9 deniers et 4 grains, ou 220 grains. Or

différence de 220 à 256, égale à 36.
différence de 192 à 220, égale à 28.

Le rapport des différences est donc 36 : 28 ou 9 : 7. Celui des quantités a été 7 : 9. L'un est encore inverse de l'autre.

Exemple IV. Ayant fondu ensemble 216 deniers d'un certain métal, et 162 deniers d'un autre métal; la pésanteur spécifique du premier étant 12; et celle du second 18; on trouve d'abord 18 doigts cubiques pour le volume de la premiere masse, et 9 doigts cubiques pour celui de la seconde. Ensuite, divisant la somme des poids ou 378 deniers par la somme des volumes, qui est de 27 doigts cubiques, on obtient 14 pour la pésanteur spécifique du mêlange. Or

différence de 14 à 18, égale à 4;
différence de 12 à 14, égale à 2.

Le rapport des différences est donc 4 : 2 ou 2 : 1. Celui des volumes étoit 9 : 18 ou 1 : 2. L'un est donc encore inverse de l'autre.

274. Il est clair d'abord qu'en mêlant ensemble à portions égales, deux ingrédients de différens prix, le prix du mêlange doit être exactement au milieu entre les deux prix

inégaux, à égale distance de l'un et de l'autre; ainsi, dans le cas de quantités égales, les différences en question sont égales de meme.

275. Il n'est pas moins évident qu'en mêlant ensemble des portions inégales de ces memes ingrédients, le prix du mêlange doit approcher d'autant plus de l'un des deux, que celui-ci y est entré pour la plus grande partie en comparaison de l'autre : ainsi la plus petite différence sera toujours du côté de la plus grande quantité.

276. Il est clair enfin que si l'un des deux ingrédients n'entroit pour rien du tout dans le mêlange, alors ce qu'on pourroit appeller prix du mêlange, seroit exactement le prix de l'autre des deux ingrédiens; la différence alors s'évanouissant entierement pour celui-ci.

277. Or, voilà à peu près ce qu'il faut pour prouver, que les quantités des deux ingrédiens sont dans un rapport inverse, et exactement géométrique, avec les deux différences en question. Une démonstration plus rigoureuse supposeroit l'emploi du calcul littéral, que nous avons cependant résolu d'éviter dans des leçons de pure Arithmétique. La suite de ce cours nous permettra d'y revenir.

REGLE D'ALLIAGE INVERSE.

278. Dans la regle d'alliage inverse le prix de chacun des deux ingrédiens, ainsi que celui du mêlange, sont supposés connus; on demande le rapport dans lequel ces deux quantités doivent avoir été mêlées.

279. Après ce que nous venons de dire, la solution de cette question est facile. Otez le moindre des deux prix de celui du mêlange. Otez de meme le prix du mêlange du plus grand des deux prix. Le rapport inverse des deux différences que vous aurez trouvées, sera celui des quantités que vous cherchez.

Exemple I. *On veut faire un sac de bled à 17 francs, en mêlant ensemble du bled à 19 francs le sac, et du bled à $14 \frac{1}{2}$ francs le sac.*

Prix du premier bled	19
Prix du mêlange.	17
Prix du second bled.	$14 \frac{1}{2}$
Premiere différence. . . .	2
Seconde différence	$2 \frac{1}{2}$

Le rapport des deux différences étant celui de 4 : 5, les quantités doivent être entr'elles dans celui de 5 : 4; ainsi sur *neuf* parties du mêlange, il faudra prendre *cinq* parties du premier bled, et *quatre* du second.

Exemple II. *On veut faire un marc d'argent à $10 \frac{1}{2}$ deniers de fin, en mêlant ensemble de l'argent à $11 \frac{3}{4}$, et de l'argent à $8 \frac{1}{4}$.*

Multipliant généralement par 4, pour faire évanouir les fractions, on aura

Titre du plus haut	47
Titre du mêlange	42
Titre du plus bas	33
Premiere différence. . .	5
Seconde différence . . .	9

Le rapport des deux quantités devant donc être celui de 9 : 5. Il faudra prendre sur *quatorze* marcs du mêlange, *neuf* marcs du premier, et *cinq* marcs du second.

Exemple III. *On demande la proportion entre l'or et l'argent, dans un alliage du poids de 779 gram-*

deniers, composé de ces deux métaux, et dont la pésanteur spécifique a été trouvée 15,19; tandis que la pésanteur spécifique de l'or pur est 19,64 et celle de l'argent pur 11,09.

Pésanteur spécifique de l'or	1964
Pésanteur spécifique de l'alliage . . .	1519
Pésanteur spécifique de l'argent . . .	1109
Premiere différence	445
Seconde différence	410

Le rapport de l'or à l'argent sera donc celui de 410 : 445 ou 82 : 89. Mais ce rapport sera celui des volumes, et comme c'est celui des poids qu'on veut savoir, il faudra multiplier ce rapport 82 : 89, par celui des pésanteurs spécifiques 1964 : 1109. Le rapport des produits sera donc celui de 161048 : 98701; ce qui revient à très-peu-près à celui de 31 : 19.

Il y aura donc sur 50 deniers du mélange, 31 d'or et 19 d'argent; et comme le mélange a été de 779 deniers en tout, on n'aura qu'à faire les deux proportions suivantes:

50 : 31 = 779 au poids de l'or.

50 : 19 = 779 au poids de l'argent.

Il y aura donc 483 deniers d'or, et 296 déniers d'argent, ce qui est parfaitement conforme au calcul de 271.

280. Dans les alliages de plus de deux choses différentes, le probleme de la regle d'alliage inverse est indéterminé, à moins que par des conditions particulieres qui doivent y être énoncées, ces différentes choses ne soient réductibles à deux especes seulement. Nous croyons inutile d'en donner des exemples; attendu que ces sortes de questions ne se rencontrent pas fréquemment, et que d'ailleurs il est toujours facile de les ramener aux principes généraux que nous avons établis.

CHA-

CHAPITRE TREIZIEME.

Les Progressions Arithmétiques.

281. Toute série de nombres, qui croissent ou qui décroissent par différences égales, est appellée *Progression Arithmétique.* Elle est *croissante* dans le premier cas; *décroissante* dans le second cas.

La progression 15, 17, 21, 25, 29 etc. est une progression, arithmétique, ayant 4 pour différence constante.

Si on la lit de gauche à droite, elle est croissante, jusques dans l'infini; n'y ayant rien dans sa définition qui doive la borner à un certain terme. On est libre de regarder comme dernier terme celui qu'on voudra; mais on est également libre de calculer encore un nombre quelconque de termes après celui-ci, par de nouvelles additions de la même différence.

Si on la lit de droite à gauche, dans l'ordre suivant: 29, 25, 21, 17, 13 etc. alors cette même progression prend le nom de décroissante.

Pour trouver les termes de cette progression qui viennent après 13, il faut en ôter la différence 4; on aura 13, 9, 5, 1.

Pour continuer la progression au delà de 1, il faudra d'abord en ôter 4. Cette soustraction sera-t-elle possible? Sans doute. Il restera 3; mais il faut observer que ces 3 doivent être pris dans un sens absolument opposé. Si tous les termes précédens de la progression désignoient de certaines sommes en argent comptant, ces 3 seroient alors ce qui resteroit à un homme, qui n'ayant qu'un seul franc dont il pourroit disposer, feroit une dépense de quatre francs. Cela seroit très possible; et il resteroit alors à cet homme trois francs de dettes.

Pour distinguer ces trois francs de ce qu'ils seroient, s'ils étoient pris dans le sens ordinaire, on on mettra au devant d'eux une petite barre horisontale. Le terme de la progression susdite qui suivra immédiatement l'unité sera donc — 3 ou *moins trois ;* parce qu'en effet ces *moins trois* font une quantité moindre que zéro ; il faudroit lui ajouter *plus trois*, pour la réduire à zéro.

Les termes subséquens de la progression susdite seront par la même raison — 7, — 11, — 15 et ainsi de suite, jusques dans l'infini.

Ces termes sont appellés *négatifs* par rapport aux autres, qu'alors on regarde comme *positifs.*

Ce n'est pas ici le lieu de nous étendre sur le calcul des quantités négatives, qui proprement est un objet d'analyse. On remarquera simplement, qu'ajouter une quantité négative, c'est comme si on ôtoit une quantité positive ; et réciproquement, qu'ôter une quantité négative, c'est comme si on faisoit l'addition d'une quantite positive.

282. Une progression arithmétique est donc composée de deux branches infinies, et parfaitement égales entr'elles, sur l'une desquelles se trouvent les termes positifs, tandisque les négatifs sont placés sur l'autre.

283. Par cette meme raison il y aura toujours un endroit de la progression où se fait le passage du positif au négatif, et pour lequel le terme correspondant de la progression est égal à zéro. Mais on n'est pas obligé de regarder ce terme comme le premier de la progression ; la définition nous laisse un entiere liberté, de prendre pour premier terme celui qu'on voudra.

284. Un terme quelconque d'une progression arithmétique croissante, est égal à celui qu'on veut regarder comme premier, *plus*

la

la différence, multipliée par le nombre des termes *moins* un.

285. Un terme quelconque d'une progression arithmétique décroissante est égal à celui qu'on veut regarder comme premier, *moins* la différence, multipliée par le nombre des termes *moins* un.

On demande le treizieme terme de la progression 5, 12, 19, 26 etc.; ayant 5 pour son premier terme, et 7 pour différence. Il sera égal à 5 *plus* 12 fois 7, ou 89.

On demande le douzieme terme de la progression décroissante 159, 148, 137, 126 etc. dont le premier terme est 159, la différence 11. On aura 159 *moins* 11 fois 11; ou 159 moins 121; ce qui fait 38.

On demande le dix-neuvieme terme de cette meme progression? On aura pour ce terme 159, *moins* 18 fois 11; ou 159 *moins* 198. Ce terme sera donc négatif, savoir — 39.

286. Il y a de l'avantage quelque fois, à donner au terme qu'on veut regarder comme premier, le numéro ou l'index *zéro;* aux autres par ordre 1, 2, 3, 4 etc. Les termes qui précèdent le premier, auront alors des numéros ou des index négatifs.

287. En adoptant cette dénomination, un terme quelconque de la progression sera égal au premier, plus ou moins la différence multipliée par l'index, suivant que la progression est croissante ou décroissante.

288. L'index qui répond à un terme quelconque de la progression, se trouve en ôtant de ce terme le premier de la progression, et

en

en divisant le reste par la différence de la progression.

Toutes les fois donc que la différence entre les deux termes n'est pas divisible par la différence de la progression, l'index qui en résulte pour l'un des deux termes, est un nombre fractionnaire.

Soit le premier terme d'une progression arithmétique 7; la différence 3; on demande l'index au quel répond le terme 30? la règle donne 23 divisés par 3, ou $7\frac{2}{3}$. Le terme 30 trouvera donc sa place aux deux tiers de la distance du huitième terme 28 au neuvieme 31.

289. *Connoissant deux termes quelconques de la progression, avec leurs index respectifs, on demande la différence de la progression?* Comme les termes doivent croître et décroître également, on n'aura qu'à diviser la différence des termes par celle des index.

Soient 67 et 32 les termes d'une progression arithmétique qui répondent aux index 11 et 18. La différence des termes est ici 35; celle des index est 7; divisant 35 par 7, on aura 5; telle est la différence qu'on cherchoit.

290. Si le premier terme de la progression est zéro, on trouvera chacun des autres, en multipliant la différence par l'index qui répond à ce terme. Les termes alors croîtront et decroîtront dans la meme proportion que les index eux-mêmes. Cette proposition très simple mene naturellement au problême suivant, auquel se réduit la règle des fausses positions.

291. *Etant donnés deux termes quelconques d'une progression arithmétique avec leurs index respectifs, trouver à quel index répond le terme zéro de la progression?* Multipliez

chacun

chacun des deux termes par l'index de l'autre, et divisez la différence des deux produits par celle des deux termes: le quotient de la division sera l'index auquel repond le terme zéro.

292. L'application de cette règle suppose que les deux termes, ainsi que les deux index sont affectés du meme signe; et qu'ainsi on peut les regarder comme positifs tous les deux. Celà étant, il est clair que dans le cas d'une progression décroissante, l'index qu'on a trouvé devra être pris dans le sens des deux index donnés; tandis qu'il faudra le prendre dans le sens opposé, si la progression est croissante, parce qu'alors le commencement de la progression doit avoir lieu avant le terme qu'on considère comme premier.

Exemple. La progression étant telle qu'aux index 5 et 14 repondent les termes 65 et 20, de maniere que 65 en soit le sixieme terme, et que 20 en soit le quinzieme, on demande l'index auquel répond le terme *zéro*. Vous aurez

5 fois 20 égal à 100;
14 fois 55 égal à 910;
différence des produits 810;
différence des termes 45.

Divisant 810 par 45, vous aurez 18; tel est l'index que vous cherchez. Le terme *zéro* sera donc le dix-neuvieme de la progression.

293. La démonstration de cette règle supposeroit dans sa généralité l'emploi du calcul littéral: ce qui nous empêche de la donner ici. Au défaut de ce calcul le procédé suivant peut nous faire connoitre, que la regle qu'on vient de donner, contient effectivement la solution du probleme.

Prenons

Prenons l'exemple précédent. Supposons que les termes de la progression, qui répondent aux index 5 et 14, soient 65 et 20; et cherchons, sans employer la règle précédente, à quel index répond le terme de la progression, que l'on trouveroit égal à *zéro*, si elle étoit continuée. Divisant la différence des deux termes donnés 65 et 20, qui est 45, par celle des index 5 et 14, qui est 9, on aura la différence de la progression, en vertu de 289. Dans le cas présent, cette différence sera donc 5.

Le terme qui répond à l'index 14, étant 20, la question proposée sera donc réduite à la suivante: *combien de fois pourra-t-on ôter encore* 5 *de* 20, *pour qu'il reste* 0? On n'aura qu'à diviser 20 par 5; ce qui donne 4 pour quotient.

Le terme *zéro* de la progression sera donc le quatrième après celui qui est 20; et comme celui-ci avoit pour index 14, l'autre aura pour index 18; ce qui revient au résultat obtenu par la règle.

294. Souvent, et meme dans la plupart des cas, la règle donnera pour l'index qu'on cherche, une valeur fractionnaire. Dans ces cas, le terme *zéro* ne se trouvera pas parmi ceux de la progression; le passage du positif au négatif ayant immédiatement lieu alors, sans qu'aucun terme de la progression, qui ait pour index un nombre entier, soit dans le cas de s'évanouir.

Exemple. La progression étant telle qu'aux index 9 et 16 répondent les termes 47 et 19, on demande à quel index la progression s'évanouit?

On aura 9 fois 19 = 171;
16 fois 47 = 752;
différence des produits = 581;
différence des termes = 28;

Divisant 581 par 28, ou 83 par 4, on trouvera que le terme de la progression *zero* répond à l'index $20\frac{3}{4}$.

La

La différence de cette progression est 4; elle se trouve en divisant la différence des termes 47 et 19, qui est 28, par celle des index 9 et 16, qui est 7. On voit donc qu'aux index 16, 17, 18, 19, 20 doivent répondre les termes successifs 19, 15, 11, 7, 3. Continuant à ôter cette même différence 4 du dernier terme 3, qui répond à l'index 20, on aura pour reste — 1; tel est le terme qui aura pour index 21. Le terme *zéro* aura lieu aux trois quarts de la distance entre 20 et 21; son index sera donc $20\frac{3}{4}$; et c'est là que la progression s'évanouit.

295. En donnant la règle pour trouver l'index de la progression auquel répond le terme *zéro*, nous avons supposé aux deux termes donnés de la progression, des valeurs positives. Si au contraire le premier de ces deux termes étoit positif, et l'autre négatif, ce qui dans l'application de la règle changeroit la soustraction en addition, il faudroit encore multiplier chacun des deux termes par l'index de l'autre, mais diviser ensuite la somme des deux produits par la somme des deux termes. La règle alors donnera pour l'index qu'on cherchoit, un nombre moyen entre les deux index donnés. Et en effet, les deux termes donnés étant l'un positif, l'autre négatif, il faudra bien que le terme *zéro* tombe entre les deux.

Exemple I. Soient les deux termes de la progression 35 et *moins* 30; répondant aux index 26 et 78. On aura

35 fois 78 égal à 2730;
30 fois 26 égal à 780;
Somme des produits 3510;
Somme des termes 65.

La division donne 54, pour l'index demandé. La différence de cette progression se trouve, en divisant la somme des deux termes, 65, par la différence

L des

des index, qui est 52; ce qui donne pour la différence de la progression 1 $\frac{1}{4}$.

Exemple II. Soient les deux termes de la progression 41 et *moins* 59; répondant aux index 13 et 27. On aura

41 fois 27 égal à 1107
59 fois 13 égal à 767
Somme des produits 1874
Somme des termes 100

La division donne 18,74 pour l'index demandé; dont la valeur très approchée est 18 $\frac{3}{4}$.

En effet, la différence de la progression se trouve en divisant la somme des termes 100, par la différence des index qui est 14; ce qui donne 7 $\frac{1}{7}$ pour la différence demandée.

Le terme qui répond à l'index 18, sera donc 5 $\frac{2}{7}$; le terme immédiatement suivant sera *moins* 1 $\frac{6}{7}$; ce qui est à très peu près le tiers de l'autre. Le terme zéro de la progression doit donc se trouver aux trois quarts de la distance de l'index 18 à l'index 19.

296. Nous reservons pour l'analyse ce qui nous reste à dire sur les progressions arithmétiques d'un ordre quelconque, ainsi que sur la manière de trouver les sommes de leurs termes. L'arithmétique ne nous en donneroit que des connoissances très imparfaites.

CHAPITRE QUATORZIEME.

REGLE DE FAUSSE POSITION.

297. La règle de fausse position est une méthode ingénieuse, de résoudre généralement, à l'aide des nombres seuls, et sans le secours du calcul littéral, tous les problemes déterminés d'arithmétique, à une seule inconnue.

298. Le but qu'on se propose dans la solution d'un probleme quelconque, c'est de trouver un nombre qui satisfasse à une certaine condition clairement énoncée dans le probleme. Ce nombre est appellé l'ineonnue du probleme; on la désigne ordinairement par x. Trouver cette inconnue, c'est résoudre le probleme.

299. On fait une fausse position, lorsque sans avoir égard à aucune circonstance quelconque, on met à la place de l'inconnue x, le premier nombre pris absolument au hazard. Examinant ensuite ce que devient par cette supposition, la condition énoncée dans le probleme, on trouvera ordinairement qu'elle n'en sera pas satisfaite; on verra en meme tems combien il s'en faut qu'elle le soit, et on marquera à part l'erreur exprimée en nombres, que cette fausse position aura produite.

300. La règle de fausse position ne donne des solutions rigoureuses que dans les cas où la question proposée est du premier dégré. Dans tous les autres cas, l'application de cette règle suppose que par des moyens quelconques on se soit procuré une connoissance approchée de l'inconnue. Mais alors elle est d'un secours infiniment précieux, auquel le calculateur le plus exercé est obligé d'avoir recours, d'autant plus qu'elle surpasse en facilité et en généralité toutes les méthodes d'analyse connues.

301. On reconnoit que le probleme est du premier dégré, lorsqu'après avoir supposé à l'inconnue x les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 etc.

dans la série naturelle des nombres, les erreurs qui résultent de cette suite de fausses positions, constituent entr'elles une progression arithmétique. L'on voit bien que les trois premieres positions, savoir 0, 1, 2, etc. qu'il faut toujours préférer aux autres, comme étant les plus simples et les plus faciles, suffiront pour cet examen.

302. Lorsque donc la différence de la premiere erreur à la seconde, aura été égale à celle qui se trouve entre la seconde et la troisième, le probleme sera du premier dégré; et il pourra être résolu, en y employant la règle de fausse position.

303. Mais dans tous les cas où les deux différences en question n'auront pas été égales entr'elles, le probleme sera d'un dégré supérieur au premier, et il exigera pour sa solution rigoureuse le secours du calcul littéral; ce que nous verrons en son lieu.

Exemple I. *On demande deux nombres qui fassent ensemble la somme de 30, et dont le produit soit 221.*

Premiere position. Soit l'un des deux 0; l'autre sera donc 30; leur produit 0; erreur 221.

Seconde position. Soit l'un des deux 1; l'autre sera donc 29; leur produit 29; erreur 192.

Troisième position. Soit l'un des deux 2; l'autre sera donc 28; leur produit 56; erreur 165.

La différence de la premiere erreur a la seconde est 29; celle de la seconde à la troisième est 27. Ces deux différences ne sont pas égales. Il n'en faut pas davantage pour s'assurer, que la progression n'est pas arithmétique, que le probleme passe le premier dégré, et qu'ainsi il n'est pas du ressort de la règle de fausse position.

Exemple

Exemple II. *On demande deux nombres dont la somme est 13; tandis que la différence de leurs quarrés est égale à 39.*

Premiere position. Soit l'un deux 0; l'autre sera 13; quarré de l'un 0; quarré l'autre 169; différence des quarrés 169; erreur 130.

Seconde position. Soit l'un des deux 1; l'autre sera 12; quarré de l'un 1; quarré de l'autre 144; différence des quarrés 143; erreur 104.

Troisieme position. Soit l'un des deux 2; l'autre sera 11; quarré de l'un 4; quarré de l'autre 121; différence des quarrés 117; erreur 78.

Les trois erreurs 130,104,78 sont le commencement d'une progression arithmétique ; car la différence du premier nombre au second est 26 ; et telle est aussi la différence du second au troisieme.

Ce probleme est donc du premier degré ; et on pourra le résoudre, en y appliquant la règle de fausse position.

On le résoudra sur le champ, en divisant la premiere erreur 130, par la différence 26: ce qui donne 5. L'un des deux nombres sera donc 5; l'autre sera 8; quarré de l'un 25; quarré de l'autre 64: différence des deux quarrés 39. Telle est la condition, à laquelle il falloit satisfaire.

Nous allons procéder à la démonstration de cette règle.

304. Nous avons dit que la règle de fausse position n'est applicable qu'aux problemes du premier dégré; c'est-à-dire, à ceux, dans lesquels, mettant à la place de l'inconnue x les nombres de la progression naturelle 0, 1, 2, 3 etc. les erreurs qui résultent de cette série de fausses positions, constituent entr'elles une progression arithmétique. Ces erreurs alors seront les termes de cette progression; ces termes auront pour leurs index respectifs les

les nombres memes o, 1, 2, 3 etc. qu'on avoit substitués à l'inconnue x. La véritable valeur de l'inconnue sera le nombre, qui dans les memes circonstances fera disparoître l'erreur. L'inconnue x n'est donc autre chose que l'index, auquel répond le terme *zéro* de la progression.

305. Ce probleme a été résolu. Faites deux fausses positions, c'est-à-dire, supposez à l'inconnue x deux valeurs quelconques, choisies au hasard; et voyez quelles erreurs résultent de ces deux fausses positions. Multipliez chacune des deux positions par l'erreur que l'autre aura produite. Alors, si les deux erreurs sont affectées du meme signe, divisez la différence des produits par la différence des erreurs. Si elles sont affectées de différens signes, divisez la somme des produits par celle des erreurs. Le quotient dans les deux cas sera la véritable valeur de l'inconnue.

306. Toutes les fois que le probleme en question est du premier dégré, l'inconnue déterminée d'après cette règle, remplira la condition énoncée dans le probleme. Si elle ne la remplit pas, il faut en conclure que le probleme en question passe le premier dégré; et qu'ainsi sa solution rigoureuse n'est plus du ressort de la règle de fausse positiou.

307. Les valeurs qu'on voudra supposer à l'inconnue x, sont absolument arbitraires. Tous les nombres possibles, entiers ou fractionnaires, conduisent également au but. Mais pour cette raison même, les nombres les plus simples mériteront dans tous les cas d'être préférés aux autres. Or, il n'en est

pas

pas de plus simples que *zéro* et *un*. Donc, en prenant *zéro* pour la premiere, et *un* pour la seconde position, la regle deviendra extrêmement simple. Divisez la premiere erreur par la différence des deux erreurs, si elles sont affectées du meme signe, ce qui arrivera presque toujours. Si toutes fois dans quelque cas particulier elles étoient affectées de différens signes, il faudroit diviser la premiere erreur par la somme des deux erreurs. Le quotient dans les deux cas sera la valeur de l'inconnue.

Exemple I. *Un père à* 50 *ans; son fils en a* 12. *Dans combien d'années, à compter d'aujourd'hui, l'age du pere sera-t-il le triple de celui du fils?*

Dans *ce moment* meme, le triple de l'age du fils est 36, tandis que le pere en a 50; erreur 14.

Dans *un* an d'ici, le fils aura 13 ans; le pere en aura 51; le triple de l'age du fils sera 39, ce qui n'est pas égal à 51; erreur 12.

Différence des deux erreurs 2. Divisant 14 par 2, on aura 7 pour le nombre d'années demandé.

En effet, dans 7 ans, le fils aura 19 ans; le pere en aura 57; l'age du pere sera donc triple de celui du fils.

Exemple II. *On propose de partager* 47 *en deux parties, tellement, qu'en divisant la moindre par* 3, *et la plus grande par* 5, *les deux quotients fassent ensemble* 11.

Prenant o pour la moindre des deux, la plus grande sera 47. Il en résultera les deux fractions o et $\frac{47}{5}$. La somme des deux ne fait pas 11; il s'en faut de $\frac{8}{5}$ ou $\frac{24}{15}$.

Prenons 1 pour la moindre des deux. La plus grande sera 46. Il en résultera les deux quotiens $\frac{1}{3}$ et $\frac{46}{5}$; dont la somme $\frac{143}{15}$ ne fait pas 11 non plus; il s'en faut de $\frac{22}{15}$.

Diffé-

Différence des deux erreurs $\frac{2}{15}$. Divisant 24 par 2, on aura 12 pour la moindre, et par conséquent 35 pour la plus grande des deux. Il en résultera les deux quotiens 4 et 7, qui font 11.

Exemple III. *Deux coupes d'argent, inégales en poids, ont un couvercle commun, du poids de 11 marcs. Le poids des deux coupes est tel, que la premiere avec le couvercle pése trois fois plus que l'autre ; tandis que celle-ci avec le couvercle pese quatre fois autant que la premiere. On demande quel étoit le poids des deux coupes.*

Supposons à la premiere le poids *zéro*. Avec le couvercle elle pesera donc 11 ; et d'après ceci le poids de la seconde coupe auroit été $\frac{11}{3}$. Celle-ci avec le couvercle auroit donc pesé 11 *plus* $\frac{11}{3}$ ou $\frac{44}{3}$; et comme alors elle devoit peser quatre fois plus que la premiere, le poids de celle-ci auroit été $\frac{11}{3}$, et non *zéro*. Erreur $\frac{11}{3}$.

Supposons à la premiere le poids 1. Avec le couvercle elle auroit donc pesé 12; ce qui donneroit 4 pour le poids de la seconde coupe. Cette derniere auroit donc pesé avec le couvercle 11 *plus* 4, ou 15; et comme alors elle doit peser quatre fois plus que la premiere, le poids de celle-ci auroit donc été $\frac{15}{4}$. Mais ce poids a été supposé 1 ; erreur $\frac{11}{4}$.

Différence des deux erreurs $\frac{11}{3}$ moins $\frac{11}{4}$; ce qui fait $\frac{11}{12}$. Divisant la premiere erreur $\frac{11}{3}$ par cette différence $\frac{11}{12}$, on aura 4 pour le poids de la premiere coupe : ce qui donne 5 pour le poids de la seconde coupe.

En effet, la premiere coupe alors pesera avec le couvercle 15; ce qui est trois fois le poids de la seconde coupe. Celle-ci avec le couvercle pesera 16, ce qui est quatre fois le poids de la premiere coupe. Le probleme est donc résolu.

308. Souvent, en adoptant les deux fausses positions *zéro* et *un*, il faudroit, pour continuer le calcul, employer les quantités négatives, qu'il est convenable d'éviter. Cela sera tou-

toujours possible, en prenant des nombres plus grands. Il faudra donc prendre pour la premiere position un nombre tel, que toutes les soustractions, exigées par l'application de la règle, laissent à la fin un reste positif.

309. Quoique la seconde position soit encore aussi arbitraire que l'autre, on facilitera cependant beaucoup l'opération, en prenant pour la seconde valeur de l'inconnue, celle qu'on avoit supposée en premier lieu, augmentée d'une unité. La règle alors deviendra très facile. Divisez la premiere erreur par la différence des deux erreurs, et ajoutez au quotient la premiere valeur qu'on avoit supposée à l'inconnue.

Exemple I. *On a loué un ouvrier paresseux à raison de 45 sous pour les jours qu'il travailleroit; mais à condition de lui retenir sur ce qu'il lui seroit dû 12 sous, pour chaque jour qu'il ne travailleroit pas. On lui fait son compte au bout de 30 jours; il se trouve qu'il ne lui est dû que 39 sous. On demande combien de jours il a travaillé?*

Supposons qu'il eut travaillé 12 jours: et qu'ainsi il n'eut rien fait pendant 18 jours. Il lui reviendroit donc 540 sous pour les premiers, sur lesquels il faudroit rembourser 216 sous pour les seconds. Il lui seroit donc dû 324 sous. Mais il lui est effectivement dû 39 sous; erreur 285 sous.

Supposons qu'il eut travaillé 13 jours; et qu'ainsi il n'eut rien fait pendant 17 jours. Il lui reviendroit donc 585 sous pour les uns; sur lesquels il faudroit rembourser 204 sous pour les autres. Il lui seroit donc dû 381 sous. Mais il ne lui est réellement dû que 39 sous. Erreur 342 sous.

Différence des deux erreurs 57 sous. Divisant la premiere erreur 285 par 57, on a pour quotient 5. Mais comme la seconde erreur est plus grande que la premiere, ce qui indique une progression crois-

croissante, ces 5 doivent être pris négativement; et au lieu de les ajouter à la premiere fausse position 12, il faut les en ôter.

Restera donc 7 pour le nombre des jours qu'il a travaillé; et 23 pour les autres. Il lui reviendra pour les premiers 315 sous, sur lesquels il faudra rembourser 276 sous. Il lui est donc dû en effet 39 sous.

Exemple II. *Voulant faire l'aumone à plusieurs pauvres à la fois, et donner trois sous à chacun, il faudroit avoir neuf sous de plus qu'on n'a réellement. On ne leur en donne donc que deux; et alors on a deux sous de reste. On demande combien on doit avoir eu de sous; et combien il y avoit de pauvres.*

Le nombre des sous doit être égal, d'un côté, à trois fois le nombre des pauvres, *moins* neuf. Il doit être en meme tems égal à deux fois le nombre des pauvres, *plus* deux.

Supposons d'abord, qu'il y eut eu *quatre* pauvres. On auroit donc eu en même tems 3 sous et 10 sous. Il s'en faut de 7 que ces deux nombres soient égaux entr'eux. Erreur : 7.

Supposons qu'il y eut eu *cinq* pauvres. On auroit donc eu en meme tems 6 sous et 12 sous. Il s'en faut de 6 que ces deux nombres soient égaux entr'eux. Erreur : 6.

Différence des erreurs 1. On aura 7 pour quotient. Ajoutant à ce nombre la premiere de nos deux fausses positions, qui est 4, il en résultera le nombre des pauvres, 11. Le nombre des sous a été, d'un côté, 3 fois 11 *moins* 9; de l'autre, 2 fois 11, *plus* 2. L'un et l'autre donne 24.

310. Souvent, pour éviter les fractions, il est convenable de supposer à l'inconnue des valeurs exactement divisibles par de certains nombres; et deslors on ne pourra plus les prendre de matiere qu'elles différent entr'elles d'une unité. Il faudra employer alors la regle géné-

générale ; on multipliera donc chacune des deux valeurs par l'erreur que l'autre aura produite ; et on divisera la différence des produits par celle des erreurs.

Exemple. *Les trois héritiers d'une succession la partagent entr'euxde la manière suivante. Le premier en prend la moitié, moins* 1000. *Le second en prend le tiers, moins* 800. *Le troisième en prend le quart, moins* 600. *On demande quelle doit avoir été cette succession.*

Comme il est convenable de choisir un nombre, divisible par 2, 3 et 4, prenons d'abord 3600, pour valeur supposée de la succession. Dans cette supposition,

le premier auroit eu 1800 moins 1000 ou 800;
le second auroit eu 1200 moins 800 ou 400;
le troisième auroit eu 900 moins 600 ou 300.

La somme de ces trois nombres n'est que 1500; erreur 2100.

Prenons 4800. Dans cette supposition

le premier auroit eu 2400 moins 1000 ou 1400;
le second auroit eu 1600 moins 800 ou 800;
le troisième auroit eu 1200 moins 600 ou 600.

La somme des trois nombres n'est que 2800; erreur 2000.

Différence des deux erreurs 100.
le premier produit 3600 fois 2000 ou 7200000.
le second produit 4800 fois 2100 ou 10080000.

Différence des produits 2880000. Cela donne pour valeur de la succession 28800. Les portions des trois héritiers seront alors 13400, 8800, 6600, qui font effectivement ensemble 28800.

311. La regle de fausse position seroit bien inférieure au moindre chapitre de l'algebre, si elle se bornoit simplement aux problemes

du

du premier dégré. Mais lorsque par des moyens quelconques on s'est procuré une connoissance approchée de l'inconnue, cette règle devient applicable à tous les problemes déterminés, quels qu'ils puissent être, sans en excepter un seul. Elle surpasse alors en facilité et en généralité, non seulement toutes les méthodes rigoureuses de haute analyse qui ont été inventées jusqu'ici, mais encore toutes celles qui pourront être inventées par la suite.

312. Nous avons vu que la regle de fausse position n'est rigoureusement applicable qu'aux problemes du premier dégré; c'est-à-dire, à ceux, où supposant à l'inconnue une suite de valeurs en progression arithmétique, la série des erreurs qui en résultent, constitue pareillement une progression arithmétique.

313. Mais quelque puisse être la loi d'après laquelle une quantité quelconque procède, il faut observer que dans des intervalles très petits, les accroissemens et les décroissemens de cette quantité se font toujours par différences sensiblement égales. Une ligne courbe quelconque diffère sans doute de la ligne droite; mais une portion de cette courbe en differe moins que la courbe entiere ; plus cette portion devient petite, et moins elle différera de la ligne droite; enfin, considérant la courbe entiere comme composée d'un grand nombre d'élémens fort petits, chacun de ces élemens à part pourra être confondu sensiblement avec la ligne droite, quelle que soit d'ailleurs la loi à laquelle cette courbure est assujettie.

314.

314. Quelle que soit le probleme proposé, on ne sera jamais embarrassé de trouver une valeur plus ou moins approchée de l'inconnue; et au défaut d'une règle générale, on sera sur d'y parvenir toujours en tatonnant. Ce tatonnement ne causera jamais de peine au calculateur le moins exercé; et toujours on en aura beaucoup plutôt fini, que si on avoit suivi les préceptes rigoureux de l'algebre, dans le petit nombre de problemes supérieurs au second dégré, qu'elle est en état de résoudre.

315. Ayant une valeur approchée de l'inconnue, on lui en joindra une seconde, prise à volonté, pourvu qu'elle diffère peu de l'autre; et on appliquera à ces deux valeurs la règle de fausse position. Le résultat qu'elle donnera, sera déja beaucoup plus approchant de la véritable valeur de l'inconnue, que les deux nombres qn'on avoit supposés. Cette seconde valeur approchée en fera trouver une troisième, en y appliquant de nouveau la règle de fausse position. Dans la plupart des cas cette troisième valeur, résultat d'un tatonnement et de deux règles de fausse position, sera exacte jusqu'à la sixième, et meme jusqu'à la septième décimale. On n'aura besoin d'une troisieme application de la règle, qne lorsqu'on voudra connoître la valeur de l'inconnue jusqu'à douze ou quinze décimales.

Exemple I. *On demande un nombre tel, que si on l'ôte de son cube, il reste* 1.

Ce probleme est du troisième dégré. En suivant les préceptes rigoureux de l'algèbre, il faudroit, pour parvenir à l'inconnue, faire une extraction de racine quarrée, et deux extractions de racine cubique.

La

La règle de fausse position nous dispensera de l'un et de l'autre.

Un tatonnement assez facile nous fait voir, que le nombre demandé doit être compris entre 1, 3 et 1, 4. En effet:

Premiere position: $x = 1, 3$. Le cube de $x = 2,197$. Il restera $0,897$. On aura donc une erreur *en moins*, égale à $0,103$.

Seconde position : $x = 1,4$. Le cube de $x = 2,744$. Il restera $1,344$. On aura donc une erreur *en plus*, égale à $0,344$.

Somme des produits $0,5914$.
Somme des erreurs $0,447$.

Divisant la première par la seconde, on aura pour quotient $1,323\ldots$ valeur déja fort approchée de l'inconnue. En effet:

Premiere position : $x = 1,323$. Le cube de x se trouve $2,315685267$. Otant $1,323$ il restera $0,992685267$. L'erreur ne sera donc que de $0,007314733$. Essayons donc une

Seconde position : $x = 1,324$. Le cube de x sera alors $2,320940224$. Otant $1,324$ il restera $0,996940224$. L'erreur ne sera donc que de $0,003059776$.

Différence des produits $0,005636623$.
Différence des erreurs $0,004254957$.

La division donne $1,324719$ pour seconde valeur approchée de l'inconnue. Elle est exacte jusqu'à la sixième décimale ; l'erreur ne commenceroit à se montrer qu'à la septième. Une troisième opération en feroit trouver les douze premieres décimales.

Exemple II. *On demande un nombre tel, que si de son cube on ôte son quarré, il reste 1.*

Ce probleme est encore du troisième dégré. Sa solution rigoureuse exigeroit d'abord qu'on fit évanouir le second terme par une réduction préalable ; après

après quoi il faudroit encore faire une extraction de racine quarrée, et deux extractions de racine cubique. La regle de fausse position y conduit bien plus directement.

En formant les quarrés et les cubes de 13, 14, 15, on voit sur le champ que le nombre en question doit être compris entre 1,4 et 1,5. Donc

Premiere position : $x = 1,4$. Quarré de $x = 1,96$; son cube 2,744; excès du cube sur le quarré 0,784; erreur *en moins* 0,216.

Seconde position : $x = 1,5$. Quarré de $x = 2,25$; son cube 3,375; excès du cube sur le quarré 1,125; erreur *en plus* 0,125.

Somme des produits 0,499.
Somme des erreurs 0,341.

La division donne 1,463 . . . . valeur deja très approchée de l'inconnue. Pour continuer l'opération, nous ferons les deux fausses positions 1,463 et 1,465.

Premiere position : $x = 1,463$. Quarré de x 2,140369; son cube 3,011659847; excès du cube sur le quarré 0,871290847; erreur 0,990990847.

Seconde position : $x = 1,465$. Quarré de x 2,146225; son cube 3.144219625; excès du cube sur le quarré 0,997994625; erreur 0,002005375.

Différence des produits 0,010264545.
Différence des erreurs 0,007003778.

Divisant la premiere différence par la seconde, on trouve 1,465572 pour valeur de l'inconnue qu'on demandoit. Cette valeur est exacte jusques dans la sixième décimale.

Exemple III. *On demande un nombre tel que si de son cube, on ôte sa racine quarrée, il reste* 1.

Sans la règle de fausse position, l'analyse le plus exercé seroit encore bien embarrassé de résoudre ce probleme. Il conduit à une équation du sixième dégré, et malheureusement tont ce qui est au-dessus du quatrième, se trouve hors de la portée de l'analyse.

La

La règle de fausse position nous en donnera la solution sur le champ. On voit d'abord que le nombre demandé, certainement plus grand que 1,2 doit être un peu moindre que 1,3. En effet, faisant la

Premiere position $x = 1,3$; on trouve le quarré de $x = 1,69$; son cube $2,197$; sa racine quarrée $1,140175$; il reste $1,056825$; il y a donc une erreur *en plus*, égale à $0,056825$. Donc, essayant la

Seconde position $x = 1,29$; on trouve le quarré de $x = 1,6641$; son cube $2,146689$; sa racine quarrée $1,135782$. Elle laisse un reste égal à $1,010907$. Il y a donc une erreur *en plus*, égale à $0,010907$.

Différence des produits $0,059125$.
Différence des erreurs $0,045918$.

La division donne $1,2876$ pour valeur approchée de l'inconnue. En effet le quarré de ce nombre est $1,65791376$; son cube $2,13472976$; sa racine quarrée $1,13472464$. Il y a donc un reste égal à $1,00000512$ qui ne diffère de l'unité que d'un seul deux-cent-millième. On peut donc être certain que l'erreur que cette règle peut avoir laissée, est certainement au-dessous d'un deux-cent-millième; peut-être elle n'excède guères un millionième. Une seconde opération feroit trouver la valeur de l'inconnue jusqu'à douze décimales.

CHAPITRE QUINZIEME.

LES PUISSANCES EN GÉNÉRAL.

316. Les *Puissances* d'un nombre sont les produits qui résultent de la multiplication de ce nombre plusieurs fois par lui-meme. Ce nombre alors est appellé *base de la puissance*; le nombre total des facteurs égaux qui entrent

dans

dans le produit, ou le nombre qui indique combien de fois la base y fait fonction de facteur, est appellé *exposant de la puissance*. On marque cet exposant par un petit chiffre qu'on place sur la droite, et un peu au-dessus de la base.

Les puissances consécutives de 2 seront 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 etc. On les marquera $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7$ etc.

Les puissances consécutives de 3 seront 3, 9, 27, 81, 243, 729 etc. On les désignera par $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ etc.

Les puissances de 5 seront 5, 25, 125, 625, 3125 etc. Elles seront désignées par $5^1, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5$ etc.

Les puissances de 7 seront 7, 49, 343 etc. Elles seront écrites $7^1, 7^2, 7^3$ etc.

On saura donc ce qu'on entend par *puissance d'un nombre tel à un exposant tel*. La puissance de 6 à exposant 4, n'est autre chose que 6^4 ou bien 6 fois 6 fois 6 fois 6, c'est-à-dire, 1296.

Très souvent aussi, pour désigner les différentes puissances d'un nombre, on dit *premiere puissance*, *seconde puissance*, *troisieme puissance* etc. d'après le nombre des unités que contient l'exposant. Ces expressions paroissent bien plus simples que les précédentes; mais elles ne sont applicables que dans les cas où l'exposant est un nombre entier. Ce n'est qu'alors non plus qu'elles sont en usage.

Le *quarré* d'un nombre n'est donc autre chose que la *seconde puissance* de ce nombre. De meme la dénomination de *cube* est absolument identique avec celle de *troisieme puissance*.

Chaque nombre au reste est la premiere puissance de soi-meme. La formation des puissances d'un nombre commence toujours par lui. C'est ainsi que 5^1 ne dit ni plus ni moins que 5. Et ainsi des autres.

Au lieu de dire: *former une certaine puissance d'un nombre*, on dit aussi: *élever ce nombre à un exposant donné*. L'élévation d'un nombre à un exposant donné est donc, dans le cas d'un exposant entier, un acte de multiplication répetée, de meme que la multiplication d'un nombre n'étoit autre chose que l'addition de ce nombre plusieurs fois à lui-meme.

317. Une puissance quelconque étant proposée, on trouve la puissance immédiatement supérieure, en multipliant la premiere par sa base.

C'est ainsi que, multipliant la troisième puissance d'un nombre quelconque par ce nombre, on aura pour produit la quatrième puissance du meme nombre.

Par ex. 6 fois 6^3 donne 6^4
4 fois 4^5 donne 4^6
5 fois 5^8 donne 5^9.

318. Divisant la puissance d'un nombre par ce nombre, ou par sa base, on trouve la puissance immédiatement inférieure du meme nombre.

Divisant la sixième puissance d'un nombre par ce meme nombre, on aura pour quotient la cinquième puissance de ce nombre. Et ainsi des autres. C'est ainsi que

5^4 divisé par 5, donne 5^3
4^9 divisé par 4, donne 4^8
3^5 divisé par 3, donne 3^4.

319. La puissance d'un nombre quelconque à exposant *zéro*, est égale à l'unité.

Car la puissance à exposant *zéro* est immédiatement inférieure à celle, qui a 1 pour exposant; elle doit donc résulter, en divisant cette dernière puissance

sance par sa base. Or, cette derniere puissance n'est autre chose que la base elle-meme, dont la division par elle-meme doit donner pour quotient l'*unité*.

C'est ainsi que

5^4 est égal à 1 fois 5 fois 5 fois 5 fois 5.

5^3 est égal à 1 fois 5 fois 5 fois 5.

5^2 est égal à 1 fois 5 fois 5.

5^1 est égal à 1 fois 5.

Enfin 5^0 est égal à 1.

Supprimant par des divisions successives tous les facteurs d'une puissance, l'un après l'autre, il restera à la fin l'unité, qui est naturellement, quoique tacitement entendue sous toutes les puissances, et meme sous tous les nombres possibles.

320. Plusieurs puissances d'un meme nombre, mais à différens exposants, étant proposées, il est clair qu'en ajoutant ensemble leurs exposants, on formera une nouvelle puissance du meme nombre, qui sera égale au produit des puissances proposées. Ainsi donc, la multiplication de plusieurs puissances d'une meme base entr'elles, ne suppose que la simple addition de leurs exposants.

Multipliant ensemble la troisième, la quatrième, et la sixième puissance d'un nombre quelconque, il doit en résulter la treizieme puissance du meme nombre. Il y avoit trois facteurs dans l'une, quatre dans l'autre, six dans la troisième; il y en aura donc en tout treize dans le produit, et c'est là ce qui constitue la treizieme puissance. Le produit des puissances 5^3, 5^4, 5^6, sera donc 5^{13}. Et ainsi des autres.

321. Réciproquement, faut-il diviser une puissance quelconque par une autre puissance du meme nombre? On ôtera simplement l'exposant de cette derniere de celui de la pre-

miere. La puissance de meme base, à qui on donnera pour exposant le reste qu'on aura obtenu, sera le quotient demandé. La division d'une puissance par une autre puissance de la meme base, reviendra donc à une simple soustraction de leurs exposants respectifs.

On propose de diviser la septième puissance d'un nombre par la quatrième puissance du meme nombre? Il est clair que sur les sept facteurs de la premiere, il y en aura quatre de supprimés par la division qu'on exige; il n'en subsistera donc que trois, qui formeront la troisieme puissance du meme nombre.

Ainsi 8^7, divisé par 8^4, donnera pour quotient 8^3.

322. L'exposant d'une puissance peut fort bien être une quantité négative. Une puissance à exposant négatif est égale à l'unité, divisée par la meme puissance à exposant positif.

La puissance 5^{-3} est égale à 1, divisé par 5^3.

La puissance 7^{-2} est égale à 1, divisé par 7^2.

Et ainsi des autres.

323. Voici la démonstration très simple de ce théoreme. Soit proposé de diviser l'unité par une certaine puissance d'un nombre quelconque. L'unité peut être considérée comme puissance du même nombre, à exposant zéro. La division des puissances revient à une simple soustraction de leurs exposants respectifs. Il faudra donc ôter l'exposant de la puissance donnée, de *zéro*. Cette soustraction se fait en prenant simplement cet exposant dans le sens négatif. Il en résultera une puissance à exposant négatif, équivalente au quotient qui résulte en divisant l'unité par cette meme puissance à exposant positif.

324. D'apres ce principe, une fraction quelconque peut être mise sur le champ sous la forme de puissance, en écrivant simplement le dénominateur, et en lui donnant pour exposant — 1.

Un tiers est équivalent à 3^{-1}.
Un quart est la meme chose que 4^{-1}.
Et ainsi des autres.

325. Si le dénominateur de la fraction est un quarré, on mettra simplement la racine de ce quarré, et on lui donnera pour exposant — 2.

Un neuvieme est équivalent à 3^{-2}.
Un centième est la meme chose que 10^{-2}.
Et ainsi des autres.

326. De meme si le dénominateur de la fraction est un cube, on écrira la racine cubique du dénominateur, et on lui donnera —3 pour exposant.

$\frac{1}{8}$ est la meme chose que 2^{-3}.
$\frac{1}{125}$ est l'équivalent de 5^{-3}.
$\frac{1}{1000}$ est équivalent de 10^{-3}.
Et ainsi des autres.

327. Une puissance quelconque peut aussi bien qu'un simple nombre, être élevé à un exposant donné. Il en résultera, ce qu'on peut appeller *puissance de puissance.* Il y aura deux exposants alors, savoir : l'ancien exposant de la puissance, et le nouvel exposant auquel cette puissance entière doit être élevée.

328. Le résultat de cette opération sera évidemment une nouvelle puissance de la meme base, ayant pour exposant le produit des deux exposants dont on vient de parler.

329. Car pour faire le quarré d'une puissance, il faudra multiplier cette puissance par elle meme ; ce qui exigera qu'on double son exposant.

Le quarré de 2^3 sera 2^6.
Le quarré de 5^7 sera 5^{14} etc.

330. Pour passer du quarré au cube, il faudra multiplier le quarré de la puissance par la puissance elle-meme ; ce qui en triplera l'exposant.

Le cube de 5^2 sera 5^6.
Le cube de 7^3 sera 7^9 etc.

331. Il en sera de meme lorsque du cube il faudra passer à la quatrième puissance et de celle-ci aux puissances d'un ordre supérieur. L'exposant que doit avoir la puissance d'une puissance proposée, sera le produit des deux exposants donnés.

Ainsi la troisieme puissance de la quatrieme sera la douzieme. La cinquieme puissance de la septieme sera la trente-cinquieme. Et ainsi des autres.

332. Il n'est pas difficile de prévoir comment d'une puissance quelconque on tirera la racine d'un ordre donné. Il faudra diviser l'exposant de cette puissance par le nombre qui désigne l'ordre de la racine qu'on en doit tirer.

333. Ainsi, pour tirer la racine quarrée d'une puissance, il faudra prendre simplement la moitié de son exposant. Car pour élever au quarré la nouvelle puissance qui en résulte, il faudra en doubler l'exposant, ce qui reproduira la puissance primitive.

La racine quarrée de 3^4 sera 3^2. Car le quarré de 3^2 est 3^4. De meme la racine quarrée de 5^6 sera 5^3 ; car le quarré de 5^3 est 5^6.

La racine quarrée de 4^3, d'après cette règle, sera $4^{3:2}$. Il seroit difficile sans doute de comprendre une puissance à exposant fractionnaire sous la définition générale que nous avons donnée de la puissance, et qui pour être intelligible, suppose nécessairement que l'exposant soit un nombre entier. Mais cela n'est pas nécessaire non plus. Il suffit que le quarré de $4^{3:2}$ soit 4^3, d'où il suit que $4^{3:2}$ est la racine quarrée de 4^3. Cela remplit entièrement l'idée qu'on se fait de la racine quarrée, d'un nombre quelconque; c'est le nombre dont il faudroit faire le quarré, pour retrouver le nombre proposé.

Par cette meme raison, la racine quarrée de 2^5 sera $2^{5:2}$. Celle de 3^7 sera $3^{7:2}$. Et ainsi des autres.

334. La racine quarrée d'un nombre quelconque peut donc être immédiatement mise sous la forme de puissance, en lui donnant *un demi* pour exposant.

Celle de 3 sera $3^{1:2}$. Celle de 5 sera $5^{1:2}$.

335. Pour tirer la racine cubique d'une puissance, il suffira de prendre le tiers de son exposant. Car pour faire le cube de la nouvelle puissance qui en résulte, il faudra, d'après la règle précédente, prendre le triple de l'exposant fractionnaire qu'on lui aura donné;

donné; ce qui reproduira la puissance primitive.

La racine cubique de 5^6 sera 5^2 ; car le cube de 5^2 est 5^6 . Celle de 7^{12} sera 7^4 ; car le cube de 7^4 est 7^{12}.

En suivant à la rigueur cette règle, dont rien certainement n'empêche la généralité, la racine cubique de 6^2 sera $6^{2:3}$; celle de 5^4 sera $5^{4:3}$; celle de 2^5 sera $2^{5:3}$; et ainsi des autres.

336. La racine cubique d'un nombre quelconque peut être immédiatement mise sous la forme de puissance, en lui donnant *un tiers* pour exposant.

Celle de 49 sera $49^{1:3}$ ou $7^{2:3}$. Et ainsi des autres.

337. Il en est de meme des racines d'un ordre quelconque. Il faudra diviser l'exposant de la puissance donnée par le nombre qui indique l'ordre de la racine. Divisant cet exposant par *deux*, par *trois*, par *quatre*, par *cinq*, on aura tiré la racine quarrée, la racine cubique, la racine quatrième, la racine cinquième de la puissance proposée.

338. Le calcul de la puissance, dont la base et l'exposant sont donnés, est donc très facile tant que cet exposant est un nombre entier. Si ce nombre est positif, l'élévation à la puissance ne suppose que la règle ordinaire de multiplication. S'il est négatif, il faudra faire une ou quelques divisions. Mais ce n'est plus la meme chose, lorsque cet exposant est un nombre fractionnaire.

339. Tant que le dénominateur de cette fraction est ou *deux*, ou *trois*, ou bien un produit quelconque de ces nombres, soit

entr'eux,

entr'eux, soit entre leurs puissances, tels que sont les nombres 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18 etc. le calcul de la puissance reviendra à des extractions de racine quarrée, ou de racine cubique. Au défaut d'une méthode semblable pour les racines des ordres supérieurs, tels que sont la racine *cinquieme*, *septieme*, *onzieme* etc. on viendra toujours à bout de son probleme, en y appliquant la règle de fausse position : le chapitre suivant nous en fournira des exemples. Dans le cas enfin qui est le plus fréquent de tous, où cet exposant seroit quelque nombre entier, ou bien *zéro*, suivi d'un certain nombre de décimales, il faudroit, sans le secours des logarithmes, renoncer absolument au calcul des puissances.

CHAPITRE SEIZIEME.

LES PUISSANCES DE DIX.

340. Les puissances de dix à exposant entier ne sont sujettes à aucune difficulté. Elevant successivement ce nombre aux exposants 0, 1, 2, 3, 4 etc. il en résulte les produits très connus 1, 10, 100, 1000, 10000 etc. qui forment la progression naturelle de l'arithmétique décimale. Mais on rencontre des difficultés d'un genre entièrement nouveau, lorsque cet exposant est composé d'entiers et de décimales.

341. Commençons par nous occuper de la puissance de 10 à exposant 0,1 ou *un dixième*. Cette puissance n'est autre chose que la racine dixième de 10; ou bien, la racine quarrée de la cinquième. On tirera donc la racine cinquième de *dix*, en appliquant à ce probleme la règle

de

de fausse position ; on la trouvera égale à 1,584893 192465. La racine quarrée de celle-ci sera la racine dixième de *dix*, savoir 1,258925 411794.

La racine cinquième de *dix* devant nécessairement tomber entre *un* et *deux*, calculons au hasard les cinquiemes puissances de 13, 14, 15, 16. On les trouvera égales à 371293, 537824, 759375, 1048576. La racine demandée se trouvera donc comprise entre 1, 5 et 1, 6; et comme 1048576 diffère bien moins *d'un million* que de 759375, ce qui indique que la racine en question doit approcher bien plus de 1, 6 que de 1, 5 on essayera les deux fausses positions 1, 6 et 1, 58.

Première position: $x = 1, 6$; cinquième puissance 10, 48576; erreur *en plus* 0, 48576.

Seconde position: $x = 1, 58$; cinquième puissance 9, 8465804768, erreur *en moins* 0, 1534195232.

Somme des deux produits 1, 01297.

Somme des deux erreurs 0, 63918.

La division donne 1, 58479 pour *premiére valeur approchée* de l'inconnue. Mais comme on ne pourra guères compter sur le dernier chiffre 9, on se contentera de prendre pour

Première position: $x = 1, 5848$. La cinquième puissance de ce nombre est 9, 997060322339. Il y a donc une erreur *en moins*, égale à 0, 002939 677661. On pourra donc prendre pour

Seconde position: $x = 1, 5849$. La cinquième puissance de ce nombre est 10, 000214 765178. Il y aura une erreur *en plus*, égale à 0, 000214 765178.

Somme des produits 0, 004999 45497.

Somme des erreurs 0, 003154 44284.

La division donne 1, 584893188.... pour seconde valeur approchée de l'inconnue. Elle en approche si près, qu'elle n'en diffère que de *quatre* dans la *neuvième* décimale. Une opération de plus

nous

nous la feroit connoître jusqu'à *dix-sept*, et peut-être jusqu'à *dix-huit* décimales. Nous nous contenterons d'en mettre ici les *douze* premières, qui sont 1, 584893 192465; telle est la racine *cinquième* de *dix*. Sa racine *dixième* sera donc 1, 258925 411794.

342. Il faut déterminer ensuite la puissance de *dix* à exposant *un centième* ou 0, 01. C'est la racine centième de *dix*, ou bien la racine dixième de la précédente. On tirera donc la racine cinquième de 1, 258925 411794 en y appliquant la règle de fausse position. La racine quarrée de cette dernière, ou 1, 023292 992281 sera la racine centième de *dix*.

Un peu de tatonnement nous fait connoitre que la racine cinquieme en question doit être comprise entre 1, 04 et 1, 05. Donc

Première position: $x = 1, 04$. Cinquième puissance 1, 2166529024. Erreur *en moins* 0, 0422725094.

Seconde position: $x = 1, 05$. Cinquième puissance 1, 2762815625. Erreur *en plus* 0, 0173561507.

Somme des produits 0, 062436531.

Somme des erreurs 0, 059628660.

La division donne 1, 04709 pour première valeur approchée de l'inconnue. On prendra pour la seconde opération:

Première position: $x = 1, 047$; cinquième puissance 1, 258152 857750. Erreur *en moins* 0, 000772 554044.

Seconde position: $x = 1, 0471$. Cinquieme puissance 1, 258753 809619. Erreur *en moins* 0, 000171 602184.

Différence des produits 0, 000629 2738527.

Différence des erreurs 0, 000600 9518599.

La

La division donne 1, 047128555. Elle ne diffère de la véritable que de *sept* dans la *neuvieme* décimale. Une opération de plus nous auroit fait connoitre l'inconnue en question jusqu'à *dix-sept* décimales, dont les *douze* premières auroient été 1, 047128 548091. Telle est la racine *cinquantième* de *dix*; ce qui donne pour la *centième* 1, 023292 992281.

343. Il faut passer delà à la puissance de *dix* à exposant *un millième* ou 0, 001. Employant encore cette même règle de fausse position, on la trouvera égale à 1, 002305 238073. On en fera de même pour avoir successivement les puissances de *dix* à exposant *un dix-millième*, *un cent-millième* etc. etc.

344. J'ai rassemblé les différens résultats de ce travail dans la petite table qui suit; elle fait connoître les puissances de dix, qui ont pour exposant *l'unité*, placée à la premiere, à la seconde, à la troisieme etc. jusqu'à la douzieme décimale.

Ordre de la décimale, où l'unité est placée.	*Puissance de dix, qui en résulte.*
1	1, 258925 411794
2	1, 023292 992281
3	1, 002305 238078
4	1, 000230 285021
5	1, 000023 026116
6	1, 000002 302589
7	1, 000000 230259
8	1, 000000 023026
9	1, 000000 002303
10	1, 000000 000230
11	1, 000000 000023
12	1, 000000 000002

345. Cette table ne suffit pas encore pour élever la base *dix* à tel exposant qu'on veut, composé d'entiers et de décimales. Pour cet effet, il faut connoitre toutes les puissances de *dix*, qui ont pour exposant les nombres 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, à telle décimale que ces nombres se trouvent placés, depuis la première jusqu'à la douzième. Il est vrai qu'à la rigueur le quart de cette table suffiroit pour tous les besoins du calcul, parce que ce n'est tout au plus que dans les problêmes les plus difficiles de haute analyse et d'astronomie, qu'on est dans le cas d'employer plus de cinq ou de six décimales. Mais enfin, le calcul de la table étant une fois commencé, il n'en coute pas beaucoup moins de se borner à six décimales, que d'en mettre jusqu'à douze : j'ai donc volontiers fait ce sacrifice de mon tems, pour donner à la table dont il s'agit, toute la perfection qu'on en peut désirer, se trouveroit elle meme au delà de la plupart de nos besoins.

346. Ayant une fois achevé la table précédente, il ne faut qu'une simple suite de divisions, pour calculer la seconde. Il est évident que si on prend *l'unité*, et qu'on en ôte *un dixième* plusieurs fois de suite, on parviendra successivement, d'abord à *neuf dixièmes*, ensuite à *huit dixièmes*, puis à *sept dixièmes* etc. enfin la neuvième soustraction laissera pour reste *un dixième*. Et comme toute soustraction qu'on aura fait subir à l'exposant, équivaut à une division dans la puissance, on voit ce qui faut faire, lorsque, connoissant la puissance de *dix* à exposant *un dixième*, que

nous

nous avons trouvée 1, 258925 411794, on cherche les autres puissances de *dix* à exposant *neuf dixièmes*, *huit dixièmes*, *sept dixièmes* etc. On prendra le nombre *dix* qui est la puissance de *dix* à exposant *un*. On le divisera par $10^{0,1}$; on aura pour quotient $10^{0,9}$ ou la puissance de dix à exposant *neuf dixièmes*. On divisera de nouveau ce quotient par $10^{0,1}$; on aura pour quotient $10^{0,8}$ ou la puissance de *dix* à exposant *huit dixièmes*. On divisera encore celui-ci par $10^{0,1}$; on aura pour quotient $10^{0,7}$ ou la puissance de *dix* à exposant *sept dixièmes*. Continuant de même pour les autres, la neuvième division laissera pour quotient 1, 258925 411794; c'est exactement la valeur de $10^{0,1}$ ou la puissance de *dix* à exposant *un dixième*, qui neuf fois de suite avoit servi de diviseur. Encore une division de plus nous rameneroit à l'unité. On voit donc que ce nombre est effectivement la racine *dixième* de *dix*, ou bien $10^{0,1}$.

347. Delà, on passera aux puissances de *dix* qui ont pour exposant un certain nombre de *centièmes*. On a trouvé la puissance de de *dix* à exposant *un centieme* ou $10^{0,01}$ égale à 1, 023292 992281. Donc, si l'on prend $10^{0,1}$ ou la puissance de *dix* à exposant *un dixième*, et qu'on la divise par $10^{0,01}$, on aura pour quotient $10^{0,09}$ ou la puissance de *dix* à exposant *neuf centièmes*. Divisant de nouveau ce quotient par $10^{0,01}$, on aura pour quotient $10^{0,08}$ ou la puissance de *dix* à exposant *huit dixièmes*. Les divisions qui suivent nous feront successivement connoître

les

les puissances de *dix* à exposant *sept dixièmes*, *six dixièmes* etc. Enfin la neuvième division laissera pour quotient le nombre même 1, 023292 992281 qui avoit fait fonction de diviseur.

348. Viennent ensuite les puissances de *dix*, qui ont pour exposant un certain nombre de *millièmes*. L'opération commencera par $10^{0,01}$ qui est lui-même la puissance de *dix* à exposant *un centième* ou *dix millièmes*. Le diviseur commun sera $10^{0,001}$ ou la puissance de *dix* à exposant *un millième*, que nous avons trouvée 1, 002305 238078. Les divisions successives qu'on fera par ce nombre, feront connoitre, d'abord la puissance de *dix* à exposant *neuf milliemes*; ensuite celles à exposant *huit millièmes*, *sept millièmes* etc. La neuvième division laissera encore pour quotient 1, 002305 238078 ou $10^{0,001}$; c'est le nombre même qui neuf fois de suite avoit fait fonction de diviseur.

349. On en fera de même pour trouver les puissances de dix qui ont pour exposant un certain nombre de dix-millièmes, de cent-millièmes etc. Les résultats de ces calculs sont tous compris dans la table suivante, que nous recommandons à nos lecteurs à cause de l'usage continuel que nous en ferons dans la suite; elle est en effet pour tout le calcul exponentiel et logarithmique, ce que le livret d'arithmétique est pour la multiplication et la division ordinaire.

TABLE

TABLE
DES PUISSANCES DE DIX
A EXPOSANT FRACTIONNAIRE.

A la premiere décimale.

Exposant.	*Puissance correspondante de dix.*
9 . . .	7, 943282 347244
8 . . .	6, 309573 444804
7 . . .	5, 011872 336275
6 . . .	3, 981071 705537
5 . . .	3, 162277 660174
4 . . .	2, 511886 431514
3 . . .	1, 995262 314973
2 . . .	1, 584893 192465
1 . . .	1, 258925 411794

A la seconde décimale.

9 . . .	1, 230268 770812
8 . . .	1, 202264 434617
7 . . .	1, 174897 554939
6 . . .	1, 148153 621496
5 . . .	1, 122018 454301
4 . . .	1, 096478 196142
3 . . .	1, 071519 305236
2 . . .	1, 047128 548091
1 . . .	1, 023292 992281

A la troisieme décimale.

9 . . .	1, 020939 483708
8 . . .	1, 018591 388054
7 . . .	1, 016248 692870
6 . . .	1, 013911 385736
5 . . .	1, 011579 454259
4 . . .	1, 009252 886076
3 . . .	1, 006931 668851
2 . . .	1, 004615 790277
1 . . .	1, 002305 238078

A LA

Exposant.	*Puissance correspondante de dix.*
	A la quatrieme décimale.
9 . . .	1, 002074 475336
8 . . .	1, 001843 765724
7 . . .	1, 001613 109228
6 . . .	1, 001382 505837
5 . . .	1, 001151 955538
4 . . .	1, 000921 458319
3 . . .	1, 000691 014168
2 . . .	1, 000460 623073
1 . . .	1, 000230 285021
	A la cinquieme décimale.
9 . . .	1, 000207 254133
8 . . .	1- 000184 223775
7 . . .	1, 000161 193947
6 . . .	1, 000138 164649
5 . . .	1, 000115 135882
4 . . .	1, 000092 107645
3 . . .	1, 000069 079939
2 . . .	1, 000046 052762
1 . . .	1, 000023 026116
	A la sixieme décimale.
9 . . .	1, 000020 723480
8 . . .	1, 000018 420850
7 . . .	1, 000016 118225
6 . . .	1, 000013 815605
5 . . .	1, 000011 512991
4 . . .	1, 000009 210386
3 . . .	1, 000006 907782
2 . . .	1, 000004 605183
1 . . .	1, 000002 302589

350. Il est inutile d'aller plus loin; chacune des sections suivantes de la table se derive

faci-

facilement de celle qui la précède, en faisant reculer d'une place de plus, vers la droite, les chiffres significatifs de chacune des puissances de *dix*, dont elle est composée.

351. L'usage de cette table est de trouver une puissance quelconque de *dix*, dont l'exposant est donné en entiers et en décimales: et réciproquement, de déterminer l'exposant, qui appartient à une puissance quelconque de *dix*. Nous allons donner la solution du premier de ces deux problemes ; et nous réserverons l'autre pour le chapitre suivant.

352. L'exposant étant composé d'entiers et de décimales, il sera donc la somme d'un certain nombre d'entiers, d'un autre nombre de dixièmes, d'un nombre de centièmes, viendront ensuite les millièmes, les dix-millièmes etc. La puissance de *dix* que l'on cherche, sera donc le produit d'autant de puissances particulières, que l'exposant donné aura de chiffres; toutes ces puissances auront *dix* pour base commune, mais leurs exposants seront différents; l'une aura ponr son exposant les entiers, l'autre les dixiemes, la troisieme les centiemes, la quatrieme les milliemes etc. de l'exposant donné. Or, toutes ces puissances particulières se trouvent dans la table générale des puissances de dix; le calculateur aura donc simplement la peine de prendre dans cette table toutes les puissances qui appartiennent séparément à chaque chiffre de l'exposant, et de les multiplier ensemble. Leur produit sera la puissance de *dix* qu'on demandoit.

Exemple I. *On demande, à cinq décimales, la puissance de dix à exposant* 0, 376.

Comme cet exposant n'a que trois chiffres, qui en indiquent les dixiemes, les centiemes et les milliemes, on cherchera simplement dans les trois premières sections de la table, les puissances de dix qui répondent aux trois chiffres *trois, sept* et *six*. Et comme le probleme n'exige que cinq décimales, on pourra borner son opération à six décimales; on fera toujours bien d'en prendre une de plus, pour prévenir les erreurs qui pourroient résulter de la multiplication des derniers chiffres. Il faudra donc multiplier ensemble les trois nombres qui suivent, savoir:

Pour 3 *dixiemes* 1, 995262
Pour 7 *centiemes* . . . 1, 174898
Pour 6 *milliemes* . . . 1, 013911

Les deux premiers facteurs donnent le produit 1, 174898; et multipliant ce produit par le troisieme, on a 2, 37684 pour la valeur de la puissance demandée. La dernière décimale de ce produit est encore exacte.

Exemple II. *On demande à sept décimales, la puissance de dix à exposant* 0, 72156.

Il faudra multiplier ensemble les cinq puissances particulieres qui suivent; et dont on aura soin de prendre huit à neuf décimales dans la table, parce que le résultat du probleme doit en avoir sept, savoir:

Pour 7 *dixiemes* 5, 011872336
Pour 2 *centiemes* 1, 047128548
Pour 1 *milliemes* 1, 002305238
Pour 5 *dix-milliemes* . . . 1, 001151956
Pour 5 *cent-milliemes* . . . 1, 000138165

Les deux premiers facteurs donnent le produit 5, 248074602. Ce produit multiplié par le troisieme, donne 5, 260172663. Ce produit multiplié par le quatrieme donne 5, 266232150; et ce

 der-

dernier produit, multiplié par le cinquième, donne 5, 266959759 ou en s'arrêtant à sept décimales 5, 2669598. Ici la dernière décimale est encore exacte.

Exemple III. *On demande à huit décimales la puissance de dix à exposant* 0, 30103.

Il faudra multiplier ensemble les trois puissances qui suivent, prises à neuf décimales, au moins :

Pour 3 *dixiemes* 1, 995262315
Pour 1 *millieme* 1, 002305238
Pour 3 *cent-milliemes* . . 1, 000069080.

Les deux premières puissances donnent le produit 1, 999861869 5; lequel, multiplié par la troisiemè fait connoitre celle qu'on demandoit. On la trouvera 2, 00000002; ou bien, *deux* entiers.

353. D'après la règle qu'on vient de donner, le nombre des multiplications à faire, pour trouver la puissance de *dix* qui répond à un exposant donné, est égal à celui des figures décimales de cet exposant, moins une. Toutes ces multiplications cependant se réduisent sensiblement à une seule, lorsque l'exposant donné est tel, que les deux ou trois premières de ses figures décimales sont occupées par des zéros; et que son premier chiffre significatif se trouve après la seconde ou la troisième place, à compter de la virgule.

354. Comme l'exposant alors est moindre qu'un centieme ou un millieme, il est évident que la puissance en question sera égale à l'unité, plus un certain nombre de centiemes ou de milliemes, proportionné à ceux de l'exposant. La règle alors, pour trouver cet excès de la puissance sur l'unité, est extremement simple. Cherchez dans la table générale des puis-

puissances de *dix*, celle qui répond au premier chiffre significatif de l'exposant donné. Multipliez les décimales de cette puissance par l'exposant donné, dans lequel vous placerez la virgule de manière qu'elle se trouve immédiatement après son premier chiffre significatif, et divisez le produit par ce meme chiffre. Le quotient qui en résulte, sera le surplus dont la puissance demandée excèdera l'unité. Ainsi, il ne coutera plus que de mettre l'unité avant la virgule, pour avoir la puissance demandée.

355. La puissance calculée d'après cette règle, sera toujours un peu au-dessous de sa valeur rigoureuse; de sorte qu'à la rigueur il faudroit y ajouter encore 2, 652 *fois le produit qui résulte en multipliant l'exposant donné, par ce meme exposant, privé de son premier chiffre significatif.* La démonstration de cette règle n'est pas du ressort de l'Arithmétique; elle suppose des principes de haute Analyse, aussi nous y reviendrons en son lieu.

Exemple. I. *On demande la puissance de dix, à exposant* o, 00844627.

On trouve la puissance de *dix* à exposant o, 008 égale à 1, 018591388. Il faudra multiplier o, 018591388 par 8, 44627 ce qui donnera le produit o, 15702788. Divisant ce produit par 8, il résulte le quotient o, 01962848. La puissance sera donc à très peu près 1, 019628. L'erreur en effet n'est que de *un* dans la *cinquième* décimale.

Exemple II. *On demande la puissance de dix, à exposant* o, 00098629.

On trouve la puissance de *dix* à exposant o, 0009 égale à 1, 002074475. Multipliant o, 002074475 par 9, 8629 et divisant le produit par 9, on trouve, d'abord le produit o, 020460395; ensuite

ensuite le quotient 0, 00227337. La puissance en question est donc très sensiblement 1, 0022734; l'erreur en effet n'est que de *deux* dans la *septième* décimale.

Exemple III. *On demande la puissance de dix à exposant* 0, 00014655.

Comme la puissance de *dix* à exposant 0, 0001 est 0, 000230285 il faudra multiplier 0, 000230285 par 1, 4655. On aura pour produit 0, 0003374826. La puissance demandée sera donc 1, 0003374826. L'erreur est de *deux* dans la *huitième* décimale.

356. Cette règle enfin sert à faciliter dans tous les cas, la recherche de la puissance qui appartient à un exposant donné, en réduisant à la moitié le nombre des multiplications qu'il y auroit à faire. On se contentera de prendre dans la table générale des puissances de *dix*, celles qui appartiennent à la premiere, à la seconde et à la troisieme figure de l'exposant; et quant à tout ce qui restera encore de cet exposant, on se servira de la règle précédente pour déterminer la puissance qui y répond. On aura donc tout au plus *quatre* facteurs, dont le produit, résultat de trois multiplications successives, sera fort exactement la puissance demandée.

Exemple. *On demande la puissance de dix à exposant* 0, 83612444.

On trouvera dans la table générale les puissances de *dix* qui répondent à l'exposant

8 *dixiemes*, égale à 6, 309573445.

5 *centiemes*, égale à 1, 122018454.

6 *milliemes*, égale à 1, 013911386.

Ayant de plus la puissance de dix à exposant 0, 0001 égale à 1, 000230285 on en déduira facilement celle qui répond à l'exposant 0, 00012444

égale

égale à 1, 000286566. Le produit de ces quatre facteurs 7, 17999987 est la puissance demandée. La valeur rigoureuse auroit été 7, 18; l'erreur est donc de *treize* à la *huitieme* décimale.

357. Dans les exemples que nous venons de proposer, l'exposant ne consistoit qu'en décimales, la place des entiers étant occupée par un zéro : ce qui nous avoit permis d'assigner à la virgule du produit la place qu'elle devoit occuper, conformément aux règles ordinaires de la multiplication. Reste donc à dire ce qu'il faut faire, lorsque dans l'exposant donné, la place des unités est occupée par quelque chiffre significatif.

358. Une puissance quelconque de *dix* étant proposée, on donne le nom de *caracteristique* aux entiers qui font partie de l'exposant, et qui se trouvent avant la virgule. On lui a donné ce nom, parce que réellement, par le nombre des unités qu'elles contient, elle indique sur le champ la place où il faut mettre la virgule, après avoir trouvé l'un après l'autre tous les chiffres qui composent la puissance.

Prenons l'exemple de 352. La puissance de *dix* à exposant 0,72156 a été trouvée 5,2669598. Ici la caracteristique de l'exposant étoit *zéro*; et la virgule de la puissance étoit précédée *d'un chiffre*.

Donnons à l'exposant *un* pour caracteristique. Ayant alors *dix* à élever à 1, 72156; la puissance précédente se trouvera simplement multipliée par 10^1 ou par 10. Elle sera donc 52, 660598. La virgule aura *deux* chiffres devant elle.

Donnons à l'exposant *deux* pour caracteristique. L'exposant devenant alors 2, 72156; la puissance qu'on avoit eu en premier lieu, se trouvera multipliée

pliée par 10^2 ou par 100. Elle sera donc 526,69598. La virgule sera précédée de *trois* chiffres significatifs.

Ce meme exposant ayant *trois* pour caracteristique, et devenant alors 3, 72156; la puissance obtenue au commencement, sera multipliée par 10^3 ou par 1000. Elle deviendra 5266, 9598; ainsi sa virgule sera précédée de *quatre* chiffres.

359. Ainsi donc, généralement, la caracteristique de l'exposant, augmentée *d'un*, indiquera le nombre des chiffres qui dans la puissance doivent précéder la virgule, et désignera l'endroit où cette virgule doit être placée. Cela est clair. Car la caracteristique étant *zéro*, la puissance doit se trouver entre *un* et *dix*. Cette meme caracteristique devenant *un*, la puissance doit être entre *dix* et *cent*. La caracteristique devenant *deux*, il faut que la puissance soit comprise entre *cent* et *mille*. Et ainsi des autres.

360. La caracteristique n'affecte jamais les chiffres memes de la puissance; sa fonction se borne à désigner la place que la virgule doit occuper. D'un changement quelconque, fait à la caracteristique, il ne résulte qu'un simple déplacement de la virgule; mais les chiffres de la puissance restent les memes. Aussi, lorsqu'il faut élever *dix* à un exposant donné, on commencera par supposer la caractéristique de l'exposant égale à zéro; on fera l'opération, et lorsqu'elle sera terminée, on consultera la caractéristique, pour connoitre la place où il faut mettre la virgule.

361. Il nous reste à parler des puissances de *dix* à exposant négatif. La puissance d'un nombre quelconque à exposant négatif, n'est

autre

autre chose que le quotient qui résulte en divisant l'unité par cette même puissance, mais à exposant positif. On élevera donc le nombre de *dix* à ce meme exposant, pris positivement; et regardant la puissance qui en résulte comme le dénominateur d'une fraction dont le numérateur est l'unité, on divisera l'unité par ce dénominateur.

361. Mais le nombre *dix* nous présente l'avantage précieux, de pouvoir nous dispenser entièrement de cette division. Il faudra donner à l'exposant une forme telle, que ses décimales deviennent positives, et que le signe *moins* n'affecte que la caracteristique. On ôtera les décimales de *un*, suivi d'une virgule et d'un nombre suffisant de zéros; et après avoir fait la soustraction, on ajoutera *un* à la caractéristique de l'exposant négatif. Le nouvel exposant qui en résulte, sera composé d'une caracteristique négative, et de décimales positives; et comme de cette manière on n'en retranche d'un côté, que ce qu'on y ajoute de l'autre, il est évident qu'il anra conservé la valeur qu'il avoit.

Exemple I. Soit donné l'exposant entièrement négatif — 0, 462357. Otant les décimales de 1, 000000 il restera 0, 537643. Au lieu de la caracteristique 0 on mettra *un*. Il en résultera un nouvel exposant, composé de la caracteristique négative — 1 et des décimales positives 0, 537643. On l'écrira simplement — 1, 537643; en observant toutes fois que le signe *moins* ne regarde que la caracteristique seule.

Exemple II. Soit donné l'exposant entièrement négatif — 3, 9162634. On otera les décimales de 1,0000000; il restera 0,0837366. Au lieu de — 3 on écrira — 4. Par ce moyen, cet exposant sera décom-

décomposé en deux parties ; une caracteristique négative — 4 ; et des décimales positives o, 0837366. On l'écrira simplement — 4, o837366. Mais il faut encore observer que le signe *moins* ne regarde point les décimales, qui sont toujours censées positives.

363. L'exposant négatif ayant reçu cette nouvelle forme, il est clair que pour y élever la base *dix*, il faudra multiplier ensemble les deux puissances de *dix*, ayant pour exposants l'une, la caracteristique négative, l'autre, les décimales positives. Cette derniere opération ne causera aucune difficulté; elle se fera conformément à la règle générale, donnée en 352. Quant à l'autre, nous savons ce que sont les puissances de *dix* à exposant *moins* un, *moins* deux, *moins* trois; c'est l'unité, divisée par ces memes puissances à exposant positif, c'est-à-dire, par *dix*, par *cent*, par *mille*. On voit donc encore, de meme que dans le cas précédent, que la caracteristique négative ne changera rien aux chiffres de la puissance, mais elle y occasionnera un déplacement de la virgule : il faudra la placer de maniere, que le nombre des *zéros* qui précèdent le premier chiffre significatif de la puissance, y compris celui qui occupe la place des unités, soit égal à la caracteristique négative de l'exposant, après qu'on lui aura fait subir la transformation enseignée en 361.

364. A cette occasion nous prévenons nos lecteurs, que dans toute la suite de cet ouvrage, tout exposant de *dix*, précédé du signe *moins*, devra être entendu de maniere, que ce signe regarde la caracteristique seule, sans affecter les décimales, qui toujours sont censées positives. Si toutes fois dans quelque

cas

cas particulier, le signe *moins* devra embrasser à la fois la caracteristique et les décimales, nous renfermerons l'une et l'autre dans une parenthèse, que nous ferons précéder du signe *moins*.

Nous réservons pour le chapitre suivant ce que nous avons à dire sur les *complemens arithmétiques*, moyennant lesquels tout le calcul exponentiel et logarithmique, sans en excepter les nombres moindres que l'unité, a été réduit à un simple calcul de quantités positives.

Exemple I. *On demande la puissance de dix à exposant* — (0, 641232).

Faisons subir d'abord à l'exposant la transformation nécessaire pour qu'on puisse prendre ses décimales dans le sens positif. Nous aurons à élever *dix* à l'exposant — 1, 358768. Il faudra donc multiplier ensemble les puissances suivantes de *dix*, transcrites a *huit* décimales ; savoir :

Pour 3 *dixiemes*	1, 99526231
Pour 5 *centiemes*	1, 12201845
Pour 8 *milliemes* , ...	1, 01859139
Pour 7 *dix-milliemes*	1, 00161311
Pour 6 *cent-milliemes*	1, 00013816
Pour 8 *millioniemes*	1, 00001842

Leur produit est 2, 28437814. Mais la caractéristique étant *moins un*, ce produit doit être précédé d'un zéro. Il deviendra donc 0, 228437814 ; et telle est la puissance demandée.

Exemple II. *On demande la puissance de dix à exposant* — (2, 327698) *ou* — 3, 672302.

Il faudra multiplier ensemble les puissances suivantes de *dix*, savoir :

Pour 6 *dixiemes*	3, 98107171
Pour 7 *centiemes*	1, 17489755
Pour 2 *milliemes*	1, 00461579
Pour 3 *dix-milliemes*	1, 00069101
Pour 2 *millioniemes*	1, 00000461.

Leur

Leur produit est 4, 7022077. Comme la caracteristique est *moins trois*, le premier chiffre significatif doit être précédée de trois zéros. On aura donc la puissance demandée égale à 0, 0047022077.

CHAPITRE DIX-SEPTIEME.

LES LOGARITHMES.

365. Le logarithme d'un nombre est l'exposant auquel il faudroit élever *dix*, pour qu'il en résultat une puissance, égale au nombre proposé. Ainsi, quand on parle du logarithme d'un nombre, ce nombre est toujours regardé comme une certaine puissance de *dix*, dont ce logarithme est l'exposant. Le logarithme est donc à l'égard du nombre, ce que l'exposant est à l'égard de la puissance.

366. Le logarithme de l'unité est donc *zéro*. Les logarithmes de 10, 100, 1000, 10000 etc. sont 1, 2, 3, 4 etc. d'après le nombre des zéros qui suivent l'unité. Les logarithmes des fractions décimales *un dixieme* ou 0, 1; *un centieme* ou 0, 01; *un millieme* ou 0, 001; un *dix-millieme* ou 0, 0001 etc. sont *moins* 1, *moins* 2, *moins* 3, *moins* 4 etc. d'après le nombre des zéros, qui précèdent l'unité.

367. Le logarithme de tout nombre qui n'est pas précisement une certaine puissance de *dix*, est composé d'nne caracteristique, et de décimales. Le nombre des décimales est arbitraire. Plus on aura pris de décimales,

et plus on approchera de la véritable valeur du logarithme, à laquelle cependant on n'atteindra jamais, parce que sa valeur rigoureuse est proprement une suite infinie, que l'on ne peut réduire, ni à la forme fractionnaire, ni ni à la forme radicale. Le nombre des décimales qu'on en prend, dépend ici, comme partout ailleurs, de la précision qu'on veut mettre dans son calcul. Dans les problemes ordinaires de l'arithmétique et de la géometrie on peut tres bien se contenter de quatre, ou tout au plus de cinq décimales. Dans les problemes de haute analyse, de méchanique ou d'astronomie, on en met jusqu'à six, sept, neuf, douze et plus encore.

368. Tant que le nombre est plus grand que l'unité, la charactéristique de son logarithme est positive, de meme que ses décimales. Elle est égale alors au nombre des chiffres qui précèdent la virgule, moins un; et si c'est un nombre entier, la caractéristique du logarithme est égale au nombre total des chiffres dont il est composé, moins un.

369. Si le nombre est moindre que l'unité, il a pour logarithme une quantité entièrement négative; mais qu'il est toujours possible de transformer de manière, que ses décimales soient positives, et que le signe *moins* ne regarde que la caractéristique. On otera simplement les décimales de *un*, suivi d'un nombre suffisant de zéros; et en même tems on augmentera de *un* la carastéristique du logarithme. Faisant précéder alors cette nouvelle carastéristique du signe *moins*, les décimales pourront être prises positivement, sans que la

valeur

valeur du logarithme ait été changée. Aussi, toutes les fois que dans la suite de cet ouvrage, on verra un logarithme précédé du signe *moins*, on n'en prendra pas moins les décimales positivement, ce signe étant réservé pour la caractéristique seule, qui est égale alors au nombre des zéros qui précèdent le premier chiffre significatif, y compris celui qui occupe la place de la virgule.

370. Deux problemes, également importans, se présentent ici. L'un : *le logarithme étant donné, trouver le nombre*. L'autre : *le nombre étant donné, trouver son logarithme* Le premier est identiquement le même avec celui de trouver la puissance de *dix*, qui répond à un exposant donné : il a été résolu dans le chapitre précédent. L'autre probleme est l'inverse du premier ; pour le résoudre, nous n'aurons qu'à suivre une marche rétrograde ; aussi la solution très générale qne nous en allons donner, est en meme tems si simple qu'elle n'aura guères besoin de démonstration.

371. Donc, un nombre qnelconque étant proposé dont on demande le logarithme, on transposera d'abord la virgule de ce nombre de maniere, qu'il n'ait plus à sa gauche qu'un seul chiffre significatif. Après l'avoir ainsi préparé, vous consulterez la *premiere section* de la table générale des puissances de *dix*, que nous avons donnée dans le chapitre précédent. Là, vous prendrez la puissance de dix qui lui est immédiatement inférieure. L'exposant de cette puissance sera la *premiere décimale* de votre logarithme.

372. Divisez le nombre proposé par cette puissance, et cherchez dans la *seconde section* de la meme table, la puissance de *dix* qui se trouve immédiatement inférieure au quotient que vous aurez obtenu. L'exposant de cette puissance sera la *seconde décimale* du logarithme.

373. Divisez de nouveau le quotient précédent par cette puissance, et cherchez dans la *troisieme section* de la table, la puissance de *dix* immédiatement inférieure, au quotient que cette division vous aura donné. L'exposant de cette puissance sera la *troisieme décimale* du logarithme.

374. Divisez encore le dernier quotient par cette puissance, et cherchez dans la *quatrieme section* de la table, la puissance de *dix*, immédiatement inférieure au quotient qui sera résulté de cette division. L'exposant de cette puissance sera la *quatrieme décimale* du logarithme.

375. On trouvera de cette meme maniere autant de décimales qu'on voudra. La règle que nous venons d'enseigner est à l'égard de la division, ce que la division est à l'égard de la soustraction; et comme elle est absolument l'inverse de l'opération, enseignée dans le chapitre précédent, nous ne croyons pas qu'elle ait besoin d'être démontrée.

Exemple. *On demande le logarithme de 3 à huit décimales.*

La puissance de *dix*, immédiatement inférieure à *trois* dans la premiere section de la table, est 2, 51188643. L'exposant 4 qui lui appartient, est la *premiere décimale*.

Divi-

Divisant 3 par 2, 51188643 on obtient le quotient 1, 19432151; la puissance qui en approche le plus dans la seconde section, est 1, 17489755. L'exposant de cette puissance est 7; *seconde décimale.*

Divisant 1, 19432151 par 1, 17489755 on a le quotient 1, 01653247, la puissance qui en approche le plus dans la troisieme section, est 1, 01624869. L'exposant de cette puissance est 7; *troisieme décimale.*

Divisant 1, 01653247 par 1, 01624869, on a le quotient 1, 00027924; la puissance qui en approche le plus dans la quatrieme section, est 1, 00023028 5. L'exposant de cette puissance est 1; *quatrieme décimale.*

Divisant 1, 00027924 par 1, 00023028 5 on a le quotient 1, 00004894; la puissance qui en approche le plus dans la cinquieme section, est 1, 00004605. L'exposant de cette puissance est 2; *cinquieme décimale.*

Divisant 1, 00004894 par 1, 00004605 on a le quotient 1, 00000289; la puissance qui en approche le plus dans la sixieme section, est 1, 00000230. L'exposant de cette puissance est 1; *sixieme décimale.*

Divisant 1, 00000289 par 1, 00000230 on a le quotient 1, 00000059; la puissance qui en approche le plus dans la septieme section, est 1, 00000046. L'exposant de cette puissance est 2; *septieme décimale.*

Divisant 1, 00000059 par 1, 00000046 on a pour quotient 1, 00000013; la puissance qui en approche le plus dans la huitieme section est 1, 00000012. L'exposant de cette puissance est 5; *huitieme décimale.*

Le logarithme de 3 est donc 0, 47712125; précisement tel qu'il se trouve dans les tables. Et comme dans ce cas particulier, le nombre proposé a été un entier d'un seul chiffre, il n'y aura pas de changement à faire pour la caracteristique.

376.

376. Voilà donc le logarithme d'un nombre, calculé jusqu'à huit décimales, moyennant huit divisions, dont les cinq dernieres au moins ont été très faciles. Mais ce n'est pas tout. Ces cinq divisions peuvent très bien être remplacées par une seule.

377. En examinant avec attention la table des puissances fractionnaires de dix, on verra du premier coup d'œil, que plus l'exposant devient petit, plus aussi la puissance de dix qui y répond, se rapproche de l'unité. Elle l'excède toujours, mais elle l'excède d'une quantité qui va toujours en diminuant, et qui, l'exposant étant une fois réduit à des milliemes, à des dix-milliemes, n'est plus elle-meme qu'un certain nombre de milliemes et de dix-milliemes. Cela est naturel. On sait que la puissance d'un nombre quelconque à exposant *zéro* est égale à l'unité; on pouvoit donc prévoir, que si ce meme nombre étoit élevé à une fraction, qui sans être absolument zéro, est au moins très petite, la puissance qui en résulte, sans être entièrement réduite à l'unité, ne pourra non plus l'excéder que d'une quantité fort petite, d'après la grandeur de l'exposant auquel cette base aura été élevée.

378. Cela étant, comparons ensemble, d'un coté les exposants au-dessous d'un millieme, auxquels le nombre *dix* a été élevé successivement; de l'autre, les petites différences fractionnaires qui indiquent, de combien les puissances successives qui en résultent, excèdent l'unité. Nous aurons la table suivante, qui est immédiatement extraite de celle de 344.

Exposant.	*Excès de la puissance sur l'unite.*
Un dix-millieme	0,000230 285021
Un cent-millieme	0,000023 026116
Un millionieme	0,000002 302589
Un dix-millionieme . .	0,000000 230259
Un cent-millionieme . .	0,000000 023026
Un billionieme	0,000000 002303

379. Cette table nous apprend, que plus l'exposant de la puissance de dix devient petit, plus aussi il se trouvera dans un rapport constant avec l'excès de la puissance elle-meme sur l'unité. Ce rapport est celui de 1 à un nombre égal à *deux* et trois dixiemes à peu près; et dont les six premiers chiffres sont très certainement 2, 30259. Pour connoitre ce nombre plus exactement, il faudroit employer des secours que la haute analyse est seule en état de nous fournir; alors on le trouveroit égal à 2, 302585092994.

380. Ainsi donc, lorsque dans la suite il sera question d'élever *dix* à un exposant qui déja se trouve au-dessous d'un millieme, et qui approche d'un dix-millieme, on multipliera simplement cet exposant par le nombre constant 2, 302585; de cette multiplication il résultera une fraction décimale fort petite, dans laquelle la place des unités, celle des dixiemes, celle des centiemes, et peut-être celle des milliemes, seront occupées par des zéros. Alors, mettant 1 à la place des unités, il en résultera la puissance de *dix* que l'on cherchoit, exprimée par 1, qui sera suivi d'abord de quelques zéros, ensuite de plusieurs chiffres significatifs; et si l'on veut se borner

à

à autant de ces chiffres, qu'il y aura eu de zéros dans l'exposant, y compris celui qui occupe la place des unités, on sera certain, que tous ces chiffres, jusqu'à la derniere inclusivement, appartiennent réellement à la puissance que l'on demandoit.

Cherchons d'après ce principe, la puissance de *dix* à exposant 0, 0007. Multipliant 2, 302585 par 0, 0007 et mettant 1 à la place des unités, il en résulte 1, 0016118. Il faut se borner à quatre chiffres significatifs, ce qui donne 1, 001612 pour la puissance en question; et telle est aussi sa valeur rigoureuse, conformément à la table générale des puissances de dix.

Voyons encore la puissance de *dix* à exposant 0, 00006. Multipliant 2, 302585 par 0, 00006 et mettant 1 à la place des unités, on aura, en se bornant à cinq chiffres significatifs, la puissance demandée égale à 1, 00013816. Telle est aussi la valeur rigoureuse de cette puissance, d'après la table générale.

381. Réciproquement, étant proposé un nombre un peu plus grand que l'unité, mais dont l'excès sur elle est au-dessous d'un millieme ou d'un dix-millieme; si, considérant ce nombre comme une certaine puissance de dix, on demande l'exposant de cette puissance; ou, ce qui est absolument la meme chose, si l'on demande le logarithme de ce nombre; on y supprimera simplement l'unité, et l'on divisera les décimales qui restent alors, par 2, 302585. Le quotient, qui ne pourra être qu'une très petite fraction, précédée de plusieurs *zéros*, sera le logarithme demandé. On pourra en prendre autant de chiffres significatifs, qu'il y a de zéros, y compris celui qui occupe la place de la virgule, plus

un. Souvent on pourra en prendre encore un de plus.

On demande le logarithme de 1, 000184224. La valeur rigoureuse de ce logarithme doit être 8 cent-milliemes, d'après la table générale. Divisant 0, 000184224 par 2, 302585 on obtient 0, 000080007 qui ne commence à en différer qu'à la neuvieme décimale.

382. Il nous reste à faire l'application de ce théoreme, pour réduire à la moitié, les opérations enseignées en 375, ayant pour but de trouver le logarithme d'un nombre proposé. Supposons qu'ayant trouvé les quatre premieres décimales, moyennant trois divisions successives, dont la derniere nous ait procuré la connoissance du quotient, à l'aide duquel il s'agit de trouver ce qui reste du logarithme. Il est évident que tout ce reste ne sera simplement que le logarithme de ce meme quotient; et comme ce quotient ne diffère plus de l'unité que de quelques dix-milliemes, on en trouvera le logarithme d'après la règle précédente, en divisant ses décimales par 2, 302585. Joignant les chiffres qui résultent de cette division, à ceux qu'on a déja trouvés, on aura le logarithme demandé à sept ou huit décimales de près.

383. On aura un résultat encore plus exact, en divisant ce quotient par la puissance de *dix* immédiatement inférieure, qu'on aura trouvée dans la quatrieme section de la table, après en avoir ôté l'unité de part et d'autre, et multiplié le reste qu'aura laissé le quotient, par l'exposant de la puissance.

Exemple I. Ayant trouvé les trois premiers chiffres du logarithme de *trois*, savoir 0, 477; on a en le quotient 1, 00027924. La puissance de *dix* immediatement inférieure dans la quatrième section, est 1, 000230285. Divisant 279240 par 230285, on trouve 12125. Le logarithme entier est donc 0, 47712125; et exactement ce que les cinq dernieres divisions auroient donné aussi.

Exemple II. *Cherchons le logarithme de 73 à huit décimales.* La puissance de *dix*, immédiatement inférieure à 7, 3 dans la premiere section de la table, est 6, 30957344. L'exposant de cette puissance est 8; *premiere décimale.*

Divisant 7, 3 par 6, 30957344 on a pour quotient 1, 15697203. La puissance de *dix*, immédiatement inférieure dans la seconde section est 1, 14815362. L'exposant de cette puissance est 6; *seconde décimale.*

Divisant 1, 15697203 par 1, 14815362 on a pour quotient 1, 00768051. La puissance de *dix*, immédiatement inférieure dans la troisieme section de la table, est 1, 00693167. L'exposant de cette puissance est 3; *troisieme décimale.*

Divisant 1, 00768051 par 1, 00693167 on a pour quotient 1, 00074369. La puissance de *dix*, immédiatement inférieure dans la quatrieme section, est 1, 000691014: l'exposant de cette puissance est 3. Multipliant 743690 par 3, et divisant le produit par 691014, on trouve les chiffres 32286; lesquels, joints à ceux qu'on a déjà trouvés, donnent 1, 86332286 pour le logarithme de 73; en observant que la caracteristique en doit être *un*, parce que le nombre est entre 10 et 100.

Exemple III. *On demande le logarithme de 2, 718281828 à neuf décimales; ce qui exigera une division de plus.*

La puissance immédiatement inférieure dans la premiere section est 2, 511886432. Son exposant est 4; *premiere décimale.*

La division de 2, 718281828 par 2, 511886432 donne 1, 082167487. La puissance immédiatement infé-

inférieure dans la seconde section est 1, 071519305. Elle a pour exposant 3; *seconde décimale.*

La division de 1, 082167487 par 1, 071519305 donne pour quotient 1, 009937462. La puissance immédiatement inférieure dans la troisieme section est 1, 009252886. Elle a pour exposant 4; *troisieme décimale.*

La division de 1, 009937462 par 1, 009252886 donne pour quotient 1, 000678300. La puissance immédiatement inférieure dans la quatrieme section est 1, 000460623. Elle a pour exposant 2; *quatrieme décimale.*

La division de 1, 000678300 par 1, 000460623 donne pour quotient 1, 000217577. La puissance immédiatement inférieure dans la cinquieme section est 1, 000207254; son exposant est 9.

Alors, multipliant 217577 par 9, et divisant le produit par 207254, on trouve les chiffres 94482. Le logarithme demandé est donc 0, 434294482.

Le nombre proposé 2, 718281828 joue un très grand rôle dans la haute Analyse: il est la base du systeme des logarithmes naturels, ce que nous verrons en son lieu. Il n'est pas moins important de connoitre son logarithme 0, 434294482. Il faut observer à l'égard de celui-ci, qu'il résulte aussi en divisant 1 par le nombre 2, 302585o9 dont il a été parlé en 379.

Exemple IV. *Le diamètre étant à la circonférence, comme l'unité est au nombre* 3, 141592654 *on demande le logarithme de ce nombre, à neuf décimales.*

La puissance de *dix* immédiatement inférieure au nombre en question dans la premiere section de la table est 2, 511886432. L'exposant de cette puissance est 4; *premiere décimale.*

Divisant 3, 141592654 par 2, 511886432 on trouve le quotient 1, 250690562. La puissance immédiatement inférieure à ce quotient dans la seconde section est 1, 230268771. L'exposant en est 9; *seconde décimale.*

Divi-

Divisant 1, 250690562 par 1, 230268771 on a le quotient 1, 016599455. La puissance immédiatement inférieure à ce quotient dans la troisieme section est 1, 016248693. L'exposant en est 7; *troisieme décimale.*

Divisant 1, 016599455 par 1, 016248693 on a pour quotient 1, 000345154. La puissance immédiatement inférieure dans la quatrieme section est 1, 000230285. L'exposant en est 1; *quatrieme décimale.*

Divisant 1, 000345154 par 1, 000230285 on a le quotient 1, 000114843. La puissance immédiatement inférieure dans la cinquieme est 1, 000092108. L'exposant de cette derniere est 4.

Multipliant 114843 par 4 et divisant le produit par 92108, on trouve les chiffres 49873. Le logarithme demandé est donc 0, 49714987 3.

Exemple V. *On demande le logarithme du nombre* 583573, *à sept décimales.*

La puissance de *dix* immédiatement inférieure à 5, 83573 est 5, 01187234. L'exposant de cette puissance est 7; *premiere décimale.*

Divisant 5, 83573 par 5, 01187234 on trouve le quotient 1, 16438121 qui a pour puissance immédiatement inférieure dans la seconde section 1, 14815362. L'exposant en est 6; *seconde décimale.*

Divisant 1, 16438121 par 1, 14815362 on a le quotient 1, 01413364 qui a pour puissance immédiatement inférieure dans la troisieme section 1, 01391139. L'exposant en est 6; *troisieme décimale.*

Divisant 1, 01413364 par 1, 01391139 on a le quotient 1, 00021920. Ce nombre est plus petit que la plus basse puissance de la quatrieme section; on aura donc 0 pour *quatrieme décimale.*

Recherchant ce meme quotient parmi les puissances de la cinquieme section, il aura 1, 00020725 immédiatement au-dessous de lui. L'exposant de cette

cette puissance est 9. Donc, multipliant 21920 par 9; et divisant le produit par 20725, on aura les chiffres 95190, lesquels avec ceux déjà trouvés, font connoitre le logarithme de 5, 83573 égal à 0, 766095190. Celui du nombre proposé sera donc 5, 766095190. Et quoiqu'on n'ait demandé que sept décimales de ce logarithme, cependant il se trouve exact jusqu'à la neuvieme.

384. Le nombre des divisions qu'il faut faire pour trouver le logarithme d'un nombre proposé, dépend donc du nombre des décimales que ce logarithme doit avoir, c'est-à-dire, du dégré de précision qu'on veut y mettre. En général, le nombre des divisions sera égal, *tout au plus* à la moitié de celui des décimales. Si on veut se borner à cinq décimales, toute l'opération se réduit à trois petites divisions comme on voit par les exemples suivans.

Exemple I. *On demande à cinq décimales le logarithme du nombre* 0, 0192376.

La puissance immédiatement inférieure à 1, 92376 dans la premiere section est 1, 584893. Son exposant 2 sera la *premiere décimale.*

Divisant 1, 92376 par 1, 584893 on a le quotient 1, 213811 qui a pour puissance immédiatement inférieure dans la seconde section 1, 202264. Son exposant 8 sera la *seconde décimale.*

Divisant 1, 213811 par 1, 202264 on a le quotient 1, 009604 qui a pour puissance immédiatement inférieure dans la troisieme section 1, 009253. L'exposant de celli-ci est 4.

Multipliant 9604 par 4, et divisant le produit par 9253, on trouve les chiffres 415. Le logarithme de 1, 92376 sera donc 0, 28415; et celui de 0, 0192376 deviendra — 2, 28415.

Exem-

Exemple II. *On demande le logarithme de* 0, 00097317 *à cinq décimales.*

La puissance de *dix*, immédiatement inférieure à 9, 7317 est 7, 943282. Elle a pour exposant 9; *premiere décimale.*

Divisant 9, 7317 par 7, 943282 on trouve le quotient 1, 225148 qui a immédiatement au-dessous de lui dans la seconde section 1, 202264. L'exposant de cette puissance est 8 ; *seconde décimale.*

Divisant 1, 225148 par 1, 202264 on a le quotient 1, 019034. La puissance immédiatement inférieure dans la troisieme section est 1, 018591 ; son exposant est 8.

Donc, multipliant 19034 par 8, et divisant le produit par 18591, on a les chiffres 819. Le logarithme de 9, 7317 sera donc 0, 98819; et celui de 0, 00097317 deviendra — 4, 98819.

385. Les logarithmes calculés d'après la règle précédente, pêchent toujours un peu par excès, de sorte que pour les réduire à leur juste valeur, il faudroit en ôter une certaine partie correctionnelle, que l'on déterminera d'après la règle suivante : *Prenez les décimales du quotient que votre derniere division aura laissée : ôtez-en les décimales de la puissance de dix qui lui est immédiatement inférieure, et divisez le produit de ces deux nombres par* 4, 6. Restera donc à ôter la partie qui sera résultée de cette division, du logarithme obtenu en vertu de la règle de 383. Et si on veut faire usage de cette derniere règle, on trouvera les huit premieres décimales du logarithme de tout nombre proposé, moyennant trois simples divisions, et une petite multiplication.

Exem-

Exemple I. *On demande le logarithme de 3, à huit décimales.*

La puissance de *dix*, immédiatement inférieure est 2, 51188643; son exposant 4; *premiere décimale.*

Divisant 3 par 2, 51188643 on obtient le quotient 1, 19432151; la puissance qui en approche le plus est 1, 17489755; son exposant 7; *seconde décimale.*

Divisant 1, 19432151 par 1, 17489755 on on obtient le quotient 1, 01653247; la puissance qui en approche le plus est 1, 01624869; son exposant 7.

Multipliant 1653247 par 7, et divisant le produit 11572729 par 1624869, on trouve les chiffres 712225. Le logarithme demandé est donc 0, 47712225; sauf à la partie soustractionnelle qu'il faudra en oter.

Pour la trouver, on multipliera les décimales 0, 01653247 par l'excès de ces décimales sur celles de la puissance immédiatement inférieure, qui sont 0. 01624869; c'est-à-dire par 0, 00028378; et on divisera le produit par 4, 6. Comme il faut s'attendre à un quotient très petit, et qui sera précédé de plusieurs zéros, on se bornera à multiplier les trois premiers chiffres significatifs des deux facteurs.

Ainsi, multipliant 0, 0165 par 0, 000284 et divisant le produit par 4, 605 ou simplement par 4, 6 on obtient pour partie correctionnelle 0, 00000102. Le logarithme qu'on vient de trouver, sera réduit alors à 0, 47712123; tel est en effet le logarithme de 3. L'erreur n'est que de *deux* dans la *huitieme décimale.*

Exemple II, *On demande, à huit décimales, le logarithme du nombre 2, 718281828; base du systeme hyperbolique.*

La puissance immédiatement inférieure est 2, 511886432; son exposant 4, *premiere décimale.*

Divi-

Divisant le nombre proposé 2, 718281828 par 2, 511886432 on obtient le quotient 1, 082167487. La puissance immédiatement inférieure est 1, 071519305; son exposant 3; *seconde décimale.*

Divisant 1, 082167487 par 1, 071519305 on obtient le quotient 1, 009937462. La puissance immédiatement inférieure est 1, 009252886; son exposant est 4.

Restera donc à multiplier 9937462 par 4, et à diviser le produit par 9252886. Il en résultera les chiffres 429594; lesquels joints aux deux premiers, donneront 0, 43429594 pour logarithme demandé.

Quant à la partie correctionnelle, otant 0,009252886 de 0, 009937462 il reste 0, 000684576. Ainsi, multipliant 0, 00994 par 0, 000684 et divisant le produit 0, 0000068 par 4, 6 on a pour quotient 0, 00000148; telle est la partie soustractionnelle.

On aura donc 0, 43429446 pour logarithme demandé. L'erreur en effet n'est que de *deux* dans la *huitieme* décimale.

Exemple III. *On demande, à huit décimales, le logarithme du nombre 3, 141592654 qui exprime le rapport du diamètre à la circonférence.*

La puissance immédiatement inférieure est 2, 511886432; son exposant 4; *premiere décimale.*

Divisant 3, 141592654 par 2, 511886432 on trouve le quotient 1, 250690562. La puissance immédiatement inférieure est 1, 230268771; son exposant 9; *seconde décimale.*

Divisant 1, 1250690562 par 1, 230268771 on a le quotient 1, 016599455. La puissance de dix immédiatement inférieure est 1, 016248693; son exposant est 7.

Multipliant 16599455 par 7, et divisant le produit 116196185 par 16248693, on aura pour décimales suivantes du logarithme, 715111. Le logarithme demandé sera donc 0, 49715111.

Otant

Otant 0, 01624869 de 0, 01659946 il reste 0, 00035076. Donc, multipliant 0, 0166 par 0, 000351; et divisant le produit 0, 0000058266 par 4, 6 on aura pour quotient 0, 00000126; c'est la partie soustractionnelle.

Elle réduit le logarithme demandé à 0,49714985. L'erreur n'est encore que de *deux* à la *huitieme* décimale.

386. La méthode que nous venons d'enseigner, pour trouver le logarithme de tout nombre proposé, l'emporte infiniment sur toutes celles qui ont été connues jusqu'ici, par la simplicité de ses principes, qui sont ceux de l'arithmétique élémentaire ; par la très grande facilité du calcul qu'elle exige ; enfin par cette généralité qui la rend également applicable à tous les nombres possibles. Mais l'usage des logarithmes est journalier ; et ce seroit se priver entierement des avantages qu'ils nous présentent, que de vouloir calculer chaque fois le logarithme dont on a besoin. Il faut donc avoir des tables toutes calculées.

387. L'ouvrage que nous recommandons à cet égard préférablement à tous les autres, et qui par les avantages qu'il présente, a mérité d'être généralement répandu dans la République, a pour titre : *Tables portatives de logarithmes, par François Callet ; édition stéreotype, gravée, fondue et imprimée par Firmin Didot* (1795) *an* 3. Il comprend huit cent pages in octavo, grand format.

388. Les 224 premieres de ces pages renferment tout ce qui concerne les logarithmes des nombres. On ne sera pas surpris de n'en

trouver

trouver que les décimales, sans caracteristique. La caracteristique est donnée par la place qu'occupe la virgule dans le nombre proposé; de sorte que l'inspection seule du nombre fait connoître sur le champ, quelle est la caracteristique de son logarithme.

389. Les cinq premieres pages font connoitre les logarithmes des nombres depuis *un* jusqu'à *mille deux-cent*. Les logarithmes se trouvent immédiatement à la droite du nombre, à *huit* décimales.

Cette table nous apprend par ex. que

$$\text{Log. } 79 = 1,89762709$$
$$\text{Log. } 83 = 1,91907809$$
$$\text{Log. } 89 = 1,94939001$$

Ajoutant ensemble ces trois logarithmes, on doit avoir celui du produit des trois nombres proposés, qui est 583573. Le logarithme de 583573 sera donc 5, 76609519; c'est exactement ce que nous avons trouvé dans le cinquieme exemple.

390. Viennent ensuite les logarithmes des nombres depuis 1020 jusqu'à 108000. Ils sont disposés de maniere, que chaque page en comprend *six-cent*; d'après la disposition suivante.

391. Etant donné un nombre quelconque composé de *cinq* chiffres (s'il n'en a que quatre, le cinquieme pourra toujours être remplacé par un *zèro*) on en cherchera les quatre premiers dans la colonne intitulée N, et en suivant de l'œil la ligne sur laquelle on l'aura trouvé, on la parcourra de gauche à droite, jusqu'à ce qu'on soit dans la colonne au haut de laquelle est écrit le cinquieme chiffre du

nom-

nombre proposé. Les quatre figures qui sont à la fois dans l'alignement des quatre premiers chiffres du nombre donné, et dans la colonne qui répond au cinquieme, exprimeront les quatre dernieres décimales du logarithme de ce nombre. Quant aux trois premieres, on les trouvera en remontant le long de la marge de la colonne intitulée *o*.

On demande le logarithme du nombre 47162? On trouvera les quatre premiers chiffres 4716 à la page qui est marquée L. 670; et en remontant le long de la colonne intitulée *o*, on découvre les trois chiffres 672, ce sont les trois premieres décimales. Ensuite, parcourant de la gauche vers la droite la ligne où se trouve 4716 jusqu'à la colonne au haut de laquelle on voit 2, on y trouve les quatre dernieres décimales 5922. Ainsi les chiffres 6725922 seront les sept premieres décimales du logarithme qu'on demandoit.

392. La derniere colonne de chaque page, intitulée diff. contient de certaines petites tables, moyennant lesquelles on trouve le petit supplement qu'il faut ajouter au logarithme trouvé pour les cinq premiers chiffres, lorsqu'outre ceux-ci, le nombre a encore un sixieme, un septieme, et quelquefois un huitieme chiffre.

393. Le nombre qui se trouve à la tête de chacune de ces petites tables, exprime la différence de chacun des logarithmes qui sont vis-à-vis d'elle, au logarithme immédiatement suivant; ce qui nous épargne la peine d'en faire chaque fois la soustraction. Les autres petits nombres de la table expriment, dans l'ordre où ils sont placés, le dixieme, les

deux

deux dixiemes, les trois dixiemes etc. jusqu'aux neuf dixiemes de cette différence.

394. L'usage de cette table est facile. Soit proposé un nombre, consistant en sept chiffres, et ayant sa virgule, je suppose, entre son cinquieme et son sixieme chiffre, de maniere que celui-là en indique les dixiemes, de meme que le dernier les centiemes, On cherchera d'abord le logarithme du nombre entier, qui résulte des cinq premiers chiffres seuls. Restent ensuite les deux derniers, qui indiquent les dixiemes et les centiemes. Il est clair que si on ajoutoit au logarithme qu'on vient de trouver, la différence entiere, telle qu'elle se trouve dans la derniere colonne, il en résulteroit le logarithme du nombre immédiatement suivant, plus grand que le nombre entier dont il s'agit, non pas de dixiemes et de centiemes, mais d'une unité entiere. Il ne faut donc pas ajouter cette différence entiere, mais il faut en ajouter une partie, proportionnelle aux dixiemes et aux centiemes qu'on a, c'est-à-dire, que de cette différence il faut prendre les dixiemes et les centiemes qui sont indiqués par les deux derniers chiffres. Or, ces dixiemes se trouvent toutes calculées dans la table des différences; et pour avoir les centiemes, on n'a qu'à supprimer le dernier chiffre des dixiemes. Ainsi un seul coup d'œil sur la petite table fera voir tout de suite, ce qu'il faut ajouter au logarithme des cinq premiers chiffres. pour tenir compte du sixieme, du septieme et du huitieme, s'il y en a.

Exem-

Exemple I. *On demande le logarithme du nombre* 23627, 86; vis-à-vis du quel on trouve dans les tables la différence 184. Or, voici le calcul.

Pour 23627 *entiers* . . .	4, 3734086
Pour 8 *dixiemes*	147
Pour 6 *centiemes*	11
Logarithme de 23627, 86 .	4, 3734244

Il est évident que pour les 86, il faudra prendre, non la différence entiere 184, mais d'abord les 8 dixiemes, ensuite les 6 centièmes de cette différence. La petite table donne pour les uns 147, et 11 pour les autres.

Exemple II. *On demande le logarithme de* 13, 406586. La différence placée vis-à-vis de 13406 est 324. Le logarithme de ce nombre est celui de 13406, 586 à la caractéristique de prés.

Or, voici le calcul pour celui de 13406,586.

Pour 13406 *entiers*	4,1272992
Pour 5 *dixiemes*	162
Pour 8 *centièmes*	26
Pour 6 *milliemes*	2
Logarithme de 13406,586 .	4,1273182.

Il ne restera plus qu'à mettre la véritable caractéristique, on aura 1, 1273182 pour le logarithme du nombre proposé.

395. Les dernieres quatorze pages de cette grande table comprennent les logarithmes des nombres depuis 100000 jusqu'à 108000, calculés, non à sept, mais à huit décimales. Il est important sans doute dans une infinité de cas, qu'au lieu d'être borné à sept décimales, on puisse encore se procurer la connoissance de la huitieme. Cependant nous ne serions guères avancés, si les nombres seuls, depuis

100000

100000 jusqu'à 108000 jouissoient de cet avantage. Mais ce qu'il y a d'essentiel, c'est qu'en combinant cette derniere partie de la grande table, avec la premiere, qui comprend les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 1200 aussi jusqu'à huit décimales, on peut acquerir la connoissance de la huitieme décimale pour les logarithmes de tous les nombres possibles.

396. Il est clair d'abord qu'en divisant un nombre quelconque par ses deux premiers chiffres, les deux premiers chiffres du quotient qui en résulte, seront toujours 10. Ainsi donc, tant que ces mêmes chiffres seront aussi inférieurs à 108, on voit que pour avoir à huit décimales le logarithme du nombre proposé, on n'aura qu'à ajouter le logarithme de ce quotient, à celui des deux premiers chiffres du nombre proposé, et qu'on trouvera tous les deux, exprimés à huit décimales, l'un au commencement, l'autre vers la fin de la table.

397. Il faut excepter de cette règle les cas où les premiers chiffres des dits quotiens seroient compris entre 108 et 110. Mais alors les trois premiers chiffres du nombre seront nécessairement au-dessous de 110, et à plus forte raison, au-dessous de 120; et on en trouvera encore les logarithmes à huit décimales aux premieres pages de la table. Divisant le nombre proposé par ses trois premiers chiffres, on aura un quotient dont les trois premiers chiffres seront toujours inférieurs à 101; ainsi on en trouvera le logarithme parmi les derniers de la table. La somme des deux logarithmes sera celui du nombre proposé.

Exemple I. *On demande le logarithme du nombre 754, 64308 à huit décimales.*

Divisant ce nombre par 75, on a pour quotient 10, 0619077. Voici le reste du calcul.

Log. de 75	1, 87506126
Log. de 10, 06199 . . .	1, 00268000
Pour 77	34
Log. de 754,64308 . .	2, 87774160.

Exemple II. *On demande le logarithme du nombre 1096, 28743 à huit décimales.*

Divisant ce nombre par 109, on a pour quotient 10, 0576828. Voici le reste du calcul.

Log. de 109	2, 03742650
Log. de 10,0576 . . .	1, 00249436
Pour 83	357
Log. de 1096,28743 . .	3, 03992443.

398. Tels sont les différens cas dans lesquels peut se trouver un nombre dont on veut connoitre le logarithme, soit à sept, soit à huit décimales. Reste à résoudre le probleme inverse, et de trouver le nombre qui appartient à un logarithme quelconque proposé.

399. Supposant d'abord ce logarithme à sept décimales, ce qui obligera de le chercher dans la grande table des logarithmes des nombres, depuis 1020 jusqu'à 100000. Alors, sans se mettre en peine de sa caracteristique, on en cherchera les trois premieres décimales parmi les nombres isolés que l'on voit dans la colonne marquée *o*; et les ayant trouvées, on cherchera les quatre dernieres figures du logarithme parmi les nombres de quatre chiffres

à qui

à qui les trois premiers chiffres, trouvés dans la colonne *o*, appartiennent en commun. On descendra donc le long de la colonne marquée *o*, et on s'arrêtera aux chiffres qui approcheront le plus *en moins* des quatre dernieres décimales du logarithme proposé; on suivra la ligne, sur laquelle on se sera arrêté, en la parcourant de gauche à droite, et si l'on trouve dans cette ligne les quatre dernieres figures du logarithme donné, ce qui cependant n'arrivera que très rarement, on suivra en montant ou en descendant la colonne où on les aura trouvées; le chiffre qu'on verra à la tête ou au pied de cette colonne, sera la *cinquieme figure* du nombre cherché, dont les *quatre premieres* se trouveront, sur la meme ligne, dans la colonne marquée N.

400. Si au contraire, ce qui arrivera presque toujours, les quatre dernieres figures du logarithme donné ne se trouvent pas parmi celles des tables, on cherchera celles qui en approchent le plus *en moins*; elles feront connoitre, comme ci-dessus, les cinq premiers figures du nombre qu'on cherche. Pour avoir les autres, on retranchera les quatre dernieres figures qu'on aura trouvées dans la table, de celles du logarithme donné; et l'on aura un reste que l'on cherchera parmi les parties des différences de la petite table la plus prochaine; et si parmi ces parties on trouve le reste en question, le chiffre qui sera à la gauche de ce nombre, sera la *sixieme figure* du nombre cherché; le septieme étant *zéro* alors.

401. Si ce reste ne se trouve pas parmi les parties des différences, on s'arrêtera à la partie qui approche le plus *en moins* du reste en question; on la soustraira de ce reste, ce qui donnera un second reste, à la droite duquel on mettra un *zéro*; on cherchera de meme le décuple du second reste dans la table des parties, en s'arrêtant à celle qui en approche le plus en moins; le chiffre qu'on verra à la gauche de cette partie, sera la *septieme figure* du nombre cherché.

402. On pourroit de meme, en cherchant un troisieme reste, déterminer moyennant cette meme table le huitieme chiffre du nombre qu'on demande. Mais ce chiffre sera rarement exact; il ne pourra généralement l'être, que lorsque le logarithme lui-meme est exprimé en huit décimales.

403. Connoissant les figures du nombre, il restera à placer convenablement la virgule. Cette place dépendra de la caracteristique du logarithme, d'après les règles qui ont été données ci-dessus.

Exemple I. *Soit donné le logarithme 2,8164327; on demande le nombre.*

Logarithme donné	8164327
Log. des tables immédiatement inférieur	8164269
Reste	58
Dixiemes de la table . . .	53
Reste	50
Centiemes de la table . . .	53.

Le logarithme immédiatement inférieur 8164269 donne 65528 pour les cinq premieres chiffres du nombre. Le premier reste 58 donne 8 pour le sixieme;

sixieme; le second reste 50 donne 8 pour le septieme chiffre. La caractéristique est 2; il faut donc faire précéder la virgule de trois chiffres; le nombre demandé sera donc 655, 2888.

Exemple II. *On demande le nombre du logarithme* 1, 5062371.

Logarithme donné	5062371
Log. des tables immediatement inférieur	5062344
Reste	27
Dixiemes de la table . . .	27.

Le logarithme 5062344 fait connoitre les cinq premieres figures du nombre, savoir 32080. Le premier reste donne 2 pour la sixieme, et comme il n'y a pas de second reste, la septieme sera *zéro*. La virgule du nombre doit être précédée de deux chiffres: il sera donc 32, 0802.

Exemple III. *Le logarithme proposé est* 0, 2268307; *on demande le nombre.*

Log. proposé	2268307
Log. immédiatement inférieur	2268060
Reste . . .	247
Dixiemes de la table . .	232
Reste . . .	150
Centiemes de la table . .	129
Reste . . .	210
Milliemes de la table . .	206

On tire de 2268060 les cinq premieres figures: elles sont 16858; le premier produit 232 y ajoutera la sixieme 9; le second 129 fournira la septieme 5; le troisieme 206 fera connoitre la huitieme 8. La virgule dans le nombre doit être précédée d'un chiffre. Le nombre demandé sera donc 1, 6858958.

Exemple IV. *Le logarithme proposé est* — 1, 1527813.

Log.

Log. proposé		1527813
Log. immédiatement inférieur		1527774
	Reste . . .	39
	Dixiemes de la table . .	31
	Reste . . .	80
	Centiemes de la table . .	61
	Reste . . .	190
	Milliemes de la table . .	184.

On tire de 1527774 les cinq premieres figures du nombre 14216; de 31 la sixieme 1; de 61 la septieme 2; de 184 la huitieme 6. La virgule doit être précédée d'un zéro; le nombre sera donc 0, 14216126.

404. Lorsque le logarithme proposé a huit décimales, et qu'il importe de tenir compte de la huitieme décimale dans la détermination du nombre qui lui répond, on cherchera dans la table des logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 1200, intitulée *premiere chiliade*, le logarithme immédiatement inférieur; on le retranchera du logarithme proposé; on cherchera le logarithme qui résulte de cette soustraction, dans la table des logarithmes des nombres depuis 100000 jusqu'à 108000; on multipliera ensemble les nombres qui répondent à ces deux logarithmes; leur produit sera le nombre qu'on cherchoit. Nous ne croyons pas que cela ait besoin de démonstration; c'est la marche rétrograde de celle qu'on avoit suivie, en cherchant à huit décimales le logarithme d'un nombre quelconque proposé. Seulement il faudra retrancher les deux ou trois dernieres figures décimales du produit, parce qu'elles pourroient bien ne pas être exactes.

Exem-

Exemple I. *On demande le nombre du logarithme* 2, 68269592.

On trouvera d'abord dans la premiere chiliade, le logarithme immédiatement inférieur 68214508; c'est celui de 481. Otant ce logarithme du logarithme proposé 68269592, il restera 00055084. Cherchant ce logarithme dans la table des logarithmes depuis 100000 jusqu'à 108000, on trouvera qu'il lui répond le nombre 1, 00125914. Multipliant ce nombre par 481, on aura le produit 481,60564634. Il faudra en retrancher les deux dernieres décimales. Quant à la virgule, elle pourra rester, parceque la caractéristique est 2. On aura 481, 605646 pour le nombre demandé.

Exemple II. *On demande le nombre du logarithme* 0, 08326084.

Le logarithme immédiatement inférieur dans la premiere chiliade est 08278537; c'est celui de 121; lequel étant retranché du logarithme proposé, laissera pour reste 00047547. C'est le logarithme du nombre 1, 00109541; comme on voit en le cherchant dans la table des logarithmes depuis 100000 jusqu'à 108000. Le produit des deux nombres est 121, 13254461. On en retranchera les deux dernieres décimales; on mettra la virgule après la premiere figure, parceque la caractéristique est *zéro*. On aura 1, 21132545; c'est le nombre demandé.

Exemple III. *On demande le nombre du logarithme* — 2, 06235491.

Le logarithme immédiatement inférieur dans la premiere chiliade est 06220581; c'est celui de 1154. Retranché de l'autre, il laisse pour reste le logarithme 00014910; c'est celui de 1, 00034337. Multipliant ce nombre par 1154, on a le produit 11543962489 8. On supprimera les deux dernieres décimales; et comme la caractéristique est *moins* 2, on mettra deux zéros en avant du nombre, en observant de mettre la virgule après le premier des deux zéros. On aura 0, 0115439624 9 ou plus surement 0, 011543962 5 pour le nombre demandé.

405. Les logarithmes des nombres moindres que l'unité, sont tous négatifs. En les ôtant de 1, suivi d'un nombre suffisant de *zéros*, et en ajoutant 1 à leur caracteristique, on peut toujours leur donner une forme telle, que leurs décimales soient positives dans tous les cas, et que le négatif ne tombe que sur la caracteristique seule. Mais pour exercer sur les caracteristiques négatives, les différentes opérations de l'arithmétique, il faut être bien au fait du calcul des quantités négatives. Les principes de ce calcul, il est vrai, ne sont nullement difficiles. Cependant on a jugé qu'on feroit encore mieux, de s'en passer entièrement; et on a cru en trouver le moyen, en mettant à la place de ces caracteristiques négatives, leurs *complemens arithmétiques*.

406. Le complement arithmétique d'un nombre quelconque, est ce qu'il faut ajouter à ce nombre, jusqu'à dix. Les complemens de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Un nombre quelconque positif est donc égal à 10, *moins* son complement arithmétique. Un nombre quelconque négatif est égal à *moins* 10, *plus* son complement arithmétique.

Moins 1 est égal à *moins* 10 *plus* 9.
Moins 2 est égal à *moins* 10 *plus* 8.
Moins 3 est égal à *moins* 10 *plus* 7.
Et ainsi des autres.

407. On pourra donc mettre à la place de la caracteristique négative, son complement positif, bien entendu qu'on ne perde pas de vue les *moins* 10, soit qu'on les écrive en effet, ou qu'on les garde dans la mémoire.

On

On pourra négliger alors la caracteristique *moins* 10 dans la plupart des cas, parce qu'elle est commune à tous. Je dis *dans la plupart des cas ;* car il en est plusieurs où on est obligé de s'en tenir aux caracteristiques négatives, ce que nous verrons bientôt.

408. Mais à quel signe reconnoitrons nous le complément arithmétique[1], qui d'ailleurs a toute l'apparence d'une véritable characteristique? Le logarithme 6, 0000000 est celui *d'un million*, si le nombre 6 est regardé comme charactéristique; il est celui *d'un dix-millième*, si l'on prend ce meme nombre pour le complément arithmétique d'une charactéristique négative. Il est vrai qu'une telle erreur seroit trop grossière, pour que le calculateur ne s'apperçut pas d'où elle seroit venue; qu'il doit connoitre à peu près de quel ordre seront les nombres qui résulteront de ses opérations, et qu'il n'est guères possible qu'il se trompe de dix ordres à la fois. Comme il importe cependant d'éviter tout soupçon d'erreur à cet égard, nous suivrons l'exemple que nous a donné *Callet* dans le précis élémentaire qui se trouve à la tête de ses tables, en réservant *la virgule* pour les vraies caracteristiques, et en mettant *un point* au lieu de la virgule, lorsqu'il faut désigner le complément arithmétique d'une characteristique négative.

Le logarithme 6, 000000 sera donc celui d'un *million*. Mais le logarithme 6. 000000 sera celui d'un *dix-millième*.

409. Tels sont les principes du calcul logarithmique ; il reste à en faire l'application aux différentes opérations de l'arithmétique.

MULTIPLICATION.

410. Le logarithme du produit est égal à la somme des logarithmes de tous les facteurs : car les logarithmes ne sont autre chose que les exposants de leurs nombres, considérés comme puissances d'une meme base. La règle est donc facile. Prenez les logarithmes de tous les facteurs : ajoutez les ensemble ; cherchez dans les tables le nombre auquel appartient le nouveau logarithme qui en résulte ; ce nombre sera le produit demandé.

411. S'il y a des complémens arithmétiques parmi les caractéristiques des logarithmes, on les ajoutera avec les autres[1], seulement il faudra retrancher de la somme totale qui en résulte, autant de dixaines, qu'il y a eu de complemens arithmétiques. Tant que cette soustraction sera possible, l'excès qui en résulte devra être regardé comme une véritable caracteristique positive, à laquelle on reconnoitra que le produit des facteurs proposés est plus grand que l'unité. Si au contraire la somme de toutes les caracteristiques, y compris les complémens, se trouvoit moindre que la somme des dixaines qu'il faudroit en retrancher, ce qui indiqueroit un produit moindre que l'unité, on ajouteroit *une dixaine* à la somme des caracteristiques. La soustraction alors sera possible dans tous les cas ; mais l'excès qui en résultera ne sera plus une

véri-

véritable caracteristique, ce sera le complément d'une caracteristique négative, et au lieu de le faire suivre d'une virgule, il faudroit mettre un point.

Exemple I. *On demande le produit des nombres suivants:*

41, 69258
0, 007684329
6272, 982
51, 29783
0, 0009864328.

On trouvera dans les tables:

Log. 41,69258 . .	=	1,6200587
Log. 0,007684329	=	7.8856059
Log. 6272,982 . .	=	3,7974740
Log. 51,29783 . .	=	1,7100991
Log. 0,0009864328	=	6.9940676
Log. du produit .	=	22,0073053

De la somme des caractéristiques il faudra retrancher 20, à cause des deux logarithmes négatifs. Il restera 2, 0073053. C'est le logarithme du nombre 101, 69633; et ce nombre est le produit des nombres proposés.

Exemple II. *On demande le produit des nombres qui suivent:*

14, 72869
0, 02365462
0, 1652437
0, 001046823
0, 0001204682
68240, 24.

Un

On trouvera dans les tables:

Log.	14,72869 . . .	=	1,1681642
Log.	0,02365462 . .	=	8.3739160
Log.	0,1652437 . .	=	9.2181249
Log.	0,001046823 .	=	7.0198732
Log.	0,0001204682 .	=	6.0808724
Log.	68240,28 . . .	=	4,8340408
	Somme des logarithmes	=	36,6949915.

Il a eu quatre logarithmes négatifs; il faudra donc retrancher 40 de la somme des caractéristiques. Donc, ôtant 40 de 46, le logarithme du produit séra 6.6949915; bien entendu que la caractéristique 6 n'est que le complément arithmétique de la véritable caractéristique *moins* 4. Donc, ayant trouvé le nombre, il faut y placer la virgule de maniere qu'elle soit suivie de trois zéros. Le produit sera donc 0, 0004954404.

DIVISION.

412. Le logarithme d'un quotient quelconque est égal au logarithme du dividende, moins celui du diviseur. On prendra donc les logarithmes de l'un et de l'autre; on ôtera du logarithme du dividende, celui du diviseur; on cherchera dans les tables le nombre auquel répond le nouveau logarithme qui en résulte; ce nombre sera le quotient qu'on demandoit. Les complémens arithmétiques ne feront aucune difficulté: ils seront traités comme de vraies caracteristiques.

413. Si le nombre entier inférieur, caracteristique ou complement, est plus grand que celui qui est au-dessus, on ajoutera *une dixaine* à ce dernier, et on achevera la soustraction. Le reste qu'on obtient dans les deux cas,

cas, doit être considéré comme une vraie caracteristique, toutes les fois que le dividende aura été plus grand que le diviseur. Si au contraire le diviseur proposé étoit plus grand que le dividende, ce qui donneroit au logarithme du quotient une caracteristique négative, il faudroit en conclure que celle que la soustraction a laissée, n'est que le complément de la vraie caracteristique ; et d'après cette conclusion on saura placer la virgule.

Exemple I. *On veut diviser* 5, 684362 *par* 19, 481437.

Log. de 5, 684362 = 0, 7546818
Log. de 19, 481437 = 1, 2896209
Log. du quotient . = 9. 4650609.

Au lieu d'ôter la caractéristique 1 de 0, on l'ôtera de 10 ; le reste 9 est le complément arithmétique de la véritable caractéristique *moins* 1. Il faut donc placer la virgule du quotient de maniere qu'elle soit précédée d'un *zéro*. On aura le quotient 0, 2917836.

Exemple II. *Il faut diviser* 4, 916863 *par* 0, 0287984.

Log. de 4,916863 = 0, 6916881
Log. de 0,0287984 = 8. 4593683

Log. du quotient . = 2. 2323198.

Au lieu d'oter 8 de 0, on l'otera de 10. Le reste 2 qu'on obtient, sera la caractéristique véritable, parceque le dividende se trouve plus grand que le diviseur. On aura pour quotient 170, 7339.

Exemple III. *Prenons l'inverse de l'exemple proposé, et divisons* 0, 0287984 *par* 4, 916863. Les logarithmes étant les memes qu'auparavant, on aura

Log. de 0, 0287984 = 8. 4593683;
Log. de 4, 916863 = 0, 6916881

Log. du quotient . = 7. 7676802.

Comme

Comme le diviseur a été plus grand que le dividende, la caractéristique 7 doit être considérée comme le complément arithmétique de la véritable caractéristique *moins* 3. Ainsi, plaçant la virgule de maniere qu'elle soit suivie de deux zéros, on aura pour quotient 0, 0058570068.

FORMATION DES PUISSANCES.

414. La puissance est ce que devient le produit dans le cas où tous les facteurs sont égaux entr'eux. Le nombre de ces facteurs est indiqué par l'exposant. Le logarithme de la puissance est donc égal à celui de la base, multiplié par l'exposant.

415. Ainsi, la base et l'exposant étant donnés, on prendra simplement le logarithme de la base, et en le multipliant par l'exposant, on aura le logarithme de la puissance. Ainsi, pour avoir la puissance, on n'aura qu'à chercher dans les tables le nombre, auquel répond le logarithme que la multiplication aura donné.

416. Cette multiplication n'a pas la moindre difficulté, tant que la caracteristique du logarithme de la base est positive, et que l'exposant est aussi un nombre positif, entier ou fractionnaire, comme on verra par les exemples suivans :

Exemple I. *On demande la trente-sixieme puissance du nombre* 1, 047.

Log. de 1, 047 . . =	0, 01994668
Multipliez par . .	36
	11968008
	5984004
Log. de la puissance =	0, 71808048

La

La puissance demandée sera 5, 22493. Le logarithme de la base a été pris à huit décimales, pour diminuer l'erreur qui doit nécessairement résulter en multipliant par un nombre aussi grand que 36, la septieme décimale du logarithme, et en supprimant celle qui devoit suivre immédiatement après.

Exemple II. *On demande la centieme puissance du nombre* 1, 014. Ici on n'aura pas trop de neuf décimales pour le logarithme de la base. On le cherchera donc dans la premiere table des logarithmes à 20 décimales, on aura

$$Log.\ de\ 1,014 = 0,006037955.$$

Multipliant ce logarithme par 100, il deviendra 0, 6037955. C'est le logarithme de la puissance, qui sera donc 4, 0160165.

Exemple III. *On demande la millieme puissance de* 1, 001. Ayant besoin ici de *dix* décimales, on trouvera le logarithme de la base proposée, égal à 0, 0004340775. Multiplié par *mille*, il deviendra 0, 4340775. La puissance demandée sera donc 2, 7169238. On peut remarquer en passant, que ce nombre est déja fort approchant de 2, 718281828 que nous avons donné plus haut, en 383. pour la base des logarithmes naturels. La haute analyse nous en dira la raison.

217. Si la base est un nombre fractionnaire, ce qui donnera une valeur négative à la caracteristique du logarithme, et ce qui obligera d'y substituer son complement arithmétique, alors, ayant multiplié le logarithme entier de la base, y compris ce complement, par l'exposant donné; on rejettera simplement les dixaines du produit. Le reste sera le complement arithmétique du logarithme de la puissance.

Exemple I.er *On demande la septieme puissance du nombre* 0, 81276.

Le logarithme de 0, 81276 est 9. 9099623; et en multipliant par 7, on aura le produit 69. 3697361. Ce qui donnera 9. 3697361 pour logarithme de la puissance, qui deviendra égale à 0, 2342805; la véritable caractéristique sera donc *moins* 1, ayant 9 pour complément arithmétique.

Exemple II. *On demande la centieme puissance du nombre* 0, 879.

Le logarithme de 0, 879 est 9. 943988875, et multipliant par 100, on aura 994. 3988875; ce qui donne en supprimant les dixaines 4. 3988875. On aura pour puissance démandée 0, 00000250546.

Exemple III. *On demande d'élever la base* 0, 38246 *à l'exposant* 13, 4178. Cet exposant est composé lui-meme d'entiers et de décimales.

Le logarithme de la base est 9. 582586. Multipliant ce logarithme, tel qu'il est, par l'exposant 13, 4178 on obtient le produit 128. 5772024. Il faut oter de ce produit l'exposant pris dix fois, c'est-à-dire, 134, 178. On augmentera donc de 10 la la caractéristique du premier produit: alors, ayant 134, 178 à retrancher de 138. 5772224 il restera 4. 3992224 pour logarithme de la puissance demandée, qui sera 0, 00000250793.

Exemple IV. *Il faut élever la base* 0, 779 *à l'exposant* 23, 9465.

Le logarithme de la base est 9. 89153746. En le multipliant par 23, 9465 il en résulte le logarithme 236. 8677018 qui deviennent 246. 8677018 en ajoutant 10 à sa caractéristique. Il faudra en ôter alors l'exposant 23,9465 pris dix fois; ou 239,465. Il restera 7. 4027018.

Ainsi la virgule de la puissance devant être suivie de deux zéros, elle deviendra 0, 002527562.

EXTRACTION DES RACINES.

418. La racine d'un nombre, d'un ordre quelconque, est à ce nombre, ce que la base

est

est à la puissance. Si on excepte les deux seuls cas de la racine quarrée et de la racine cubique, l'extraction de toutes les autres racines est un probleme qui excède les limites de l'arithmétique ordinaire. En fait de logarithmes, rien de plus facile. Prenez le logarithme du nombre proposé; divisez ce logarithme par l'exposant de la racine qu'on vous demande, et vous aurez celui de la racine elle-meme.

Exemple. *Le nombre* 10 *étant proposé, on demande sa racine quarrée et cubique; ensuite sa racine quatrieme, cinquieme, sixieme etc. jusqu'à la douzieme.*

Le logarithme de dix est 1, 0000000. On divisera donc ce logarithme successivement par *deux*, *trois*, *quatre*, jusqu'à *douze*, et on aura sur le champ les logarithmes des racines. Il ne restera qu'à chercher dans les tables les nombres qui leur appartiennent. Voici les résultats de ce calcul.

Dénomination la de racine.	*Logarithme de la racine de dix.*	*La racine de dix elle-meme.*
Racine quarrée	0, 5000000	3, 162277
racine cubique	0, 3333333	2, 154434
racine quatrieme	0, 2500000	1, 778280
racine cinquieme	0, 2000000	1, 584893
racine sixieme	0, 1666667	1, 467800
racine septieme	0, 1428571	1, 389495
racine huitieme	0, 1250000	1, 333522
racine neuvieme	0, 1111111	1, 291550
racine dixieme	0, 1000000	1, 258925
racine onzieme	0, 0909091	1, 232840
racine douzieme	0, 0833333	1, 211528

419. Si la base est un nombre moindre que l'unité, ce qui obligera de mettre à la tête de son logarithme le complément de sa caracteristique, qui sera négative alors, on

ajoutera à ce complément autant de dixaines, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la racine, *moins une*, et on procèdera à la division, qui fera connoitre le logarithme de la racine, précédé d'un complément arithmétique.

Exemple. *On demande les racines successives, savoir la racine quarrée, cubique, quatrieme, cinquième etc. de la fraction* $\frac{1}{12}$. Le logarithme de cette fraction est 8. 92081875.

On divisera donc successivement

par	2	. . . le logarithme	18. 92081875.
par	3	. . . le logarithme	28. 92081875.
par	4	. . . le logarithme	38. 92081875.
par	5	. . . le logarithme	48. 92081875.
par	10	. . . le logarithme	98. 92081875.
par	50	. . . le logarithme	498. 92081875.
par	100	. . . le logarithme	998. 92081875.
par	1000	. . . le logarithme	9998. 92081875.

On aura pour les racines des différens ordres, les logarithmes qui suivent, précédés chacun de son complément arithmétique; leurs nombres respectifs, qu'on trouvera dans les tables, seront les racines qu'on demandoit.

	Log. de la racine.	*La racine.*
quarrée . . .	9. 46040937 . . .	0, 288675.
cubique . . .	9. 64027292 . . .	0, 436790.
quatrieme . .	9. 73020469 . . .	0, 537285.
cinquieme . .	9. 78416375 . . .	0, 608364.
dixieme . . .	9. 89208187 , . .	0, 779977.
cinquantieme	9. 97841637 . . .	0, 951516.
centieme . .	9. 98920819 . . .	0, 975457.
millieme . . .	9. 99892082 . . .	0, 997518.

420. Les memes principes apprendront enfin, à élever un nombre quelconque proposé à un exposant fractionnaire, d'un numérateur et d'un dénominateur donné. Il faudra multiplier le logarithme de la base par le numérateur de cette fraction et diviser le produit par son dénominateur. Cela n'aura pas la moindre difficulté, tant que la base est un nombre plus grand que 1. Si la base étoit moindre que l'unité, ce qui obligeroit de mettre à la tête du logarithme, le complément de sa caracteristique, on n'auroit qu'à suivre dans la multiplication, de même que dans la division, les principes qn'on vient d'enseigner.

Exemple I. *Il faut élever la fraction $\frac{5}{12}$ à l'exposant $\frac{4}{7}$.* Voici le calcul :

Log. de 5	=	0, 69897000
Log. de 12	=	1, 07918125
Log. de $\frac{5}{12}$	=	9. 61978875
Multipliez par 4 . . .		38. 47915500
Supprimez les dixaines		8. 47915500
Ajoutez 60		68. 47915500
Divisez par 7		9. 78273643.

C'est le logarithme de la puissance en question ; qui par conséquent se trouve égale à 0, 606368.

Exemple II. *Il faut élever la fraction $\frac{13}{98764}$ à l'exposant $\frac{2}{15}$.* Voici le calcul :

Log. de 13	=	1, 1139434
Log. de 98764	=	4, 9945987
Log. de la base	=	6. 1193447
Multipliez par 2		12. 2386894
Supprimez les dixaines . .		2. 2386894
Ajoutez 140		142. 2386894
Divisez par 15		9. 4825793.

C'est le logarithme de la puissance demandée, qui se trouvera égale à 0, 303794.

RECHERCHE DES EXPOSANTS.

421. Le logarithme de la puissance est le produit du logarithme de la base, multiplié par l'exposant. Donc, si la puissance et la base sont données, et qu'on demande l'exposant, on n'aura qu'à diviser le logarithme de la puissance par celui de la base.

Exemple I. *La base 1, 07 ayant été élevée à un exposant qu'on ne connoît pas, il en est résulté la puissance 5, 8643; on demande quel doit avoir été cet exposant.* Voici le calcul:

Log. de 1, 07 = 0, 0293838
Log. de 5, 8643 = 0, 7682162.

Divisant le dernier logarithme par le premier, on a le quotient 26, 144; c'est l'exposant qu'on demandoit.

Exemple II. *Soit la base* 1, 065; *la puissance* 1, 5273; *on demande l'exposant.*

Log. de 1, 065 = 0, 0273496;
Log. de 1, 5273 = 0, 1839244.

La division fait connoitre l'exposant demandé 6, 725.

Exemple III. *Soit la base* 45,369; *la puissance* 1, 01738; *on demande l'exposant.*

Log. de 45, 369 = 1, 6567592.
Log. de 1, 01783 = 0, 0074832.

On trouvera 0, 004517 pour l'exposant demandé.

422. La règle est absolument la même, lorsque tant la base que la puissance sont des nombres fractionnaires, moindres que l'unité.

Mais

Mais il faut remarquer que dans ce seul cas, il n'est point permis d'employer des décimales positives; il faut que les deux logarithmes soient entierement négatifs. Il faut donc déterminer les logarithmes de l'une et de l'autre, en ôtant pour chacune le logarithme du numérateur, du logarithme du dénominateur, ou bien de celui de la puissance de *dix*, qui lui sert de dénominateur.

Exemple I. *Soit la base* 0,27943; *la puissance* 0, 056842; *on demande l'exposant.*

	Log. 27943	=	4, 4462730
	Log. 100000	=	5, 0000000
	Log. de la base	=	—(0, 5537270)
Ensuite	*Log.* 56842	=	4, 7546694
	Log. 1000000	=	6, 0000000
	Log. de la puissance	=	—(1, 2453306).

Divisant 1245330 par 553727, on aura 2, 249 pour l'exposant demandé.

Exemple II. *Soit la base* 0, 106432; *la puissance* 0, 98794; *on demande l'exposant.*

	Log. de 106432	=	5, 02707222
	Log. de 1000000	=	6, 00000000
	Log. de la base	=	—(0, 97292778)
Ensuite	*Log. de* 98794	=	4, 9947306
	Log. de 100000	=	5, 0000000
	Log. de la puissance	=	—(0, 0052694).

Divisant 52694 par 9729278, on aura 0, 005416 pour l'exposant qu'on demandoit.

423. Le probleme de la recherche des exposants trouve une application naturelle dans le calcul de l'intérêt composé. Dans ce calcul on suppose que les intérêts de chaque année restent entre les mains du débiteur, pour être joints

joints au capital, lequel par cet accroissement annuel doit nécessairement augmenter d'année en année.

Choisissons l'unité pour exprimer le capital en question, que nous supposerons placé à raison de *six pour cent* d'intérêts annuels: et désignons par A, B, C, D etc. ce que sera devenu ce capital à la fin de chacune des années suivantes, par l'addition successive des intérêts de l'année précédente.

D'après le taux d'intérêts qui a été supposé, il doit augmenter d'une année à l'autre dans le rapport de 100 : 106 ou de 1 : 1, 06. On aura donc

$$A = 1,06;$$
$$B = 1,06\,A;$$
$$C = 1,06\,B;$$
$$D = 1,06\,C;$$

etc. etc. Ce qui donne

A égal à 1, 06.

B égal au quarré de 1, 06;

C égal au cube de 1. 06;

D égal à la quatrieme puissance de 1, 06;

etc. etc.

Ainsi donc, au bout d'un nombre quelconque d'années, le capital sera égal à la puissance de 1, 06 qui a ce nombre pour exposant.

Le logarithme du capital sera donc égal à celui de 1, 06 multiplié par le nombre des années. Et réciproquement, si l'on veut savoir le nombre des années, au bout duquel le capital sera devenu *le double*, *le triple*, *le quadruple* etc. de ce qu'il avoit été au commencement, il faudra diviser les logarithmes de *deux*, de *trois*, de *quatre* par celui de 1, 06 qui est 0, 025306. Donc, ayant

$$Log.\ 2 = 0,301030$$
$$Log.\ 3 = 0,477121$$
$$Log.\ 4 = 0,602060$$

on

on trouvera que le capital sera devenu

le *double*, au bout de 11, 895 ans
ls *triple*, au bout de 18, 854 ans
le *quadruple*, au bout de 23, 791 ans.
Et ainsi des autres.

ERRATA.

Page.	*Ligne.*	*Au lieu de*	*Lisez*
50	21	0, 2, 4, 8	0, 2, 4, 6, 8
50	33	41, 43	41, 43, 47
52	*derniere*	$15^{\text{to}}\ 6^{\text{pi}}$	$13^{\text{to}}\ 5^{\text{pi}}$
80	32	$\frac{597}{1350}$	$\frac{557}{1350}$
83	*avant-derniere*	$\frac{19}{8}$	$\frac{15}{18}$
140	32	3 Rixdalers	4 Rixdalers
148	*avant-derniere*	4562	4568.

De plus, nous avertissons que la racine cubique de 5, 75 (page 111) n'est pas 1, 792110875 mais 1, 7915239355. Il s'est glissé une faute dans le calcul meme, que nous laissons aux élèves à découvrir.