DÉMONSTRATIONS
DES FORMULES DE CALCUL

EMPLOYÉES DANS CE CHAPITRE.

Formule de calcul employée page 41 pour la détermination de l'heure.

Soit P (*fig.* 1) le pole élevé sur l'horizon ; Z le zénith ; S le lieu de l'astre observé. On sait que, dans tout triangle sphérique, on a en général le cosinus d'un des angles du triangle égal au cosinus du côté opposé, moins le produit des cosinus des côtés adjacents, divisé par le produit des sinus de ces côtés adjacents : ainsi, dans le triangle ZPS, on a

$$\cos. ZPS = \frac{\cos. ZS - \cos. PZ. \cos. PS}{\sin. PZ. \sin. PS}.$$

Cela posé, si on appelle A l'angle horaire ZPS ; E la hauteur de l'astre, ou le complément de ZS ; L la latitude, ou le complément de PZ ; et enfin D la distance polaire PS, on aura

$$\cos. A = \frac{\sin. E - \sin. L \cos. D}{\cos. L \sin. D}.$$

Mais, par les regles ordinaires de trigonométrie,

$$\cos. A = 1 - 2 \sin. \tfrac{1}{2} A^2.$$
$$\sin. L \cos. D = \sin. \overline{L + D} - \sin. D \cos. L.$$

Mettant ces valeurs dans l'équation, elle deviendra celle-ci :

$$2 \sin. \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{\sin. (L + D) - \sin. E}{\cos. L \sin. D}.$$

Et comme $\sin. (L + D) - \sin. E = 2 \cos. \tfrac{1}{2} (L + D + E) \sin. \tfrac{1}{2} (L + D - E)$, on aura

$$\sin. \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{\cos. \tfrac{1}{2} (L + D + E) \sin. \tfrac{1}{2} (L + D - E)}{\cos. L \sin. D}.$$

D'où l'on voit qu'en ajoutant ensemble le complément du log. cosinus de la latitude, le complément du log. sinus de la distance polaire, le log. cosinus de la demi-somme, et le log. sinus de la demi-somme moins la hauteur, la somme de ces quatre logarithmes sera le double du log. sin. du demi-angle horaire; et c'est la formule dont nous avons fait usage.

Formule de la page 54 pour trouver l'angle azimutal.

On a, pour déterminer l'angle azimutal SZP (*fig.* 1), l'équation

$$\cos. SZP = \frac{\cos. ZP - \cos. PZ \cos. SZ}{\sin. PZ. \sin. SZ};$$

ce qui, en employant les dénominations ci-dessus, et appelant B l'angle SZP, donne

$$\cos. B = \frac{\cos. D - \sin. L \sin. E}{\cos. L \cos. E}.$$

Mais $\cos. B = 1 - 2 \sin. \tfrac{1}{2} B^2 = 1 - 2(1 - \cos. \tfrac{1}{2} B^2) = 2 \cos. \tfrac{1}{2} B^2 - 1$,

$$\sin. L \sin. E = \cos. L \cos. E - \cos. (L + E).$$

Mettant ces valeurs dans l'équation, on aura

$$2 \cos. \tfrac{1}{2} B^2 = \frac{\cos. D + \cos. (L + E)}{\cos. L \cos. E}.$$

Or $\cos. D + \cos. (L+E) = 2 \cos. \tfrac{1}{2}(L+E+D). \cos. \tfrac{1}{2}(L+E-D)$.

Donc $\cos. \tfrac{1}{2} B^2 = \dfrac{\cos. \tfrac{1}{2}(L+E+D). \cos. \tfrac{1}{2}(L+E-D)}{\cos. L. \cos. E}$;

ce qui donne la formule dont nous nous sommes servis pour calculer l'angle azimutal.

Formule de la page 51 pour trouver la latitude en connoissant l'angle horaire, la hauteur de l'astre, et sa distance au pole élevé sur l'horizon.

Employant les dénominations ci-dessus, on a

$$\cos. A = \frac{\sin. E - \sin. L \cos. D}{\cos. L \sin. D},$$

$$\text{ou } \cos. A \cos. L \sin. D + \sin. L \cos. D = \sin. E.$$

Soit $\cos. A \tan g. D = \tan g. M$: mettant cette valeur dans l'équation, on aura

$$\sin. M \cos. L + \sin. L \cos. M = \frac{\sin. E \sin. M}{\cos. A \sin. D}.$$

$$\text{Or } \sin. M \cos. L + \sin. L \cos. M = \sin. (M + L).$$

Donc $\frac{\sin. E \sin. M}{\cos. A \sin. D} = \sin. (M + L)$; ce qui donnera la latitude, toutes les autres quantités étant déja connues.

Mais je remarque que $\sin. (M + L)$ est la même chose que $\sin. 180° - (M + L)$: ainsi, en supposant $\frac{\sin. E \sin. M}{\cos. A \sin. D} =$ sinus d'un angle Q trouvé dans les tables, on aura également

$$Q = M + L, \text{ ou } L = Q - M,$$
$$\text{et } Q = 180° - (M + L), \text{ ou } L = 180° - (M + Q).$$

Pour savoir laquelle de ces deux équations il faut employer, je suppose (*fig.* 1) que, du point P et par le point S, on décrive l'arc ST perpendiculaire sur PZ ; il est clair que si l'angle SZP est plus grand que 90°, ou, ce qui est la même chose, si l'astre S a été observé entre les points est ou ouest, et le pole opposé au pole P, le point T tombera en dehors de Z : on verra aussi que l'arc PT est celui que nous avons appelé M. Donc $M + L = PT + (90° - PZ) = 90° + ZT$. Donc $M + L$ sera $> 90°$; d'où l'on voit qu'il faudra, dans ce cas, employer l'équation $Q = 180° - (M + L)$, dans laquelle $M + L$ est en effet plus grand que 90°, puisqu'il est égal à $90° + (90° - Q)$.

Dans le cas où l'astre S sera observé entre les points est ou ouest, et le pole P, alors ce sera l'équation $Q = M + L$, qui aura lieu, ainsi que nous l'avons dit page 50.

Formule de la page 71 pour trouver la hauteur d'un astre en connoissant l'angle horaire, la latitude, et la distance polaire.

On a d'abord l'équation

$$\cos. A = \frac{\sin. E - \sin. L \cos. D}{\cos. L. \sin. D},$$

$$\text{ou } \cos. A \sin. D \cos. L + \sin. L \cos. D = \sin. E.$$

Et mettant pour cos. A sa valeur $1 - 2 \sin. \frac{1}{2} A^2$,

$$\sin. D \cos. L + \sin. L \cos. D - 2 \sin. \tfrac{1}{2} A^2 \sin. D \cos. L = \sin. E.$$

$$\text{Mais } \sin. D \cos. L + \sin. L \cos. D = \sin. (L + D) = \cos. 90° - (L + D)$$
$$= 1 - 2 \sin. \tfrac{1}{2} [90° - (L + D)]^2,$$

$$\sin. E = \cos. (90° - E) = 1 - 2 \sin. \tfrac{1}{2} (90° - E)^2.$$

Mettant ces valeurs dans l'équation, elle deviendra celle-ci :

$$\sin.\tfrac{1}{2}[90^\circ-(L+D)]^2+\sin.\tfrac{1}{2}A^2\cos.L.\sin.D=\sin.\tfrac{1}{2}(90^\circ-E)^2.$$

Soit maintenant

$$\frac{\sin.\frac{1}{2}A.\sqrt{(\cos.L\sin.D)}}{\sin.\frac{1}{2}[90^\circ-(L+D)]}=\text{tang. M.}$$

Introduisant cette nouvelle valeur dans l'équation, on aura,

$$\sin.\tfrac{1}{2}(90^\circ-E)^2=\frac{\sin.\frac{1}{2}[90^\circ-(L+D)]^2}{\cos.M^2}.$$

Et extrayant la racine quarrée,

$$\sin.\tfrac{1}{2}(90^\circ-E)=\frac{\sin.\frac{1}{2}[90^\circ-(L+D)]}{\cos.M}.$$

Or je remarque qu'au lieu de supposer

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A\sqrt{(\cos.L\sin.D)}}{\sin.\frac{1}{2}[90^\circ-(L+D)]}=\text{tang. M,}$$

on auroit pu également supposer

$$\frac{\sin.\frac{1}{2}A\sqrt{(\cos.L\sin.D)}}{\sin.\frac{1}{2}[(L+D)-90^\circ]}=\text{tang. M.}$$

Et en effet on auroit trouvé la même valeur pour $90^\circ - E$. D'après cela, l'on voit que cette solution s'accorde avec la formule employée page 71, dans laquelle nous employons la différence entre 90°, et la somme de la latitude et de la distance polaire, sans examiner si cette somme est plus grande ou plus petite que 90°.

Formule employée page 61 *pour trouver la distance réduite de deux astres observés.*

Z (*fig.* 2) étant le zénith ; L la position apparente de la lune, et L′ sa position corrigée de l'effet de la parallaxe et de la réfraction ; S la position apparente de l'astre auquel on la compare, et S′ sa position vraie ; soient

La hauteur du point L	$= a$
Et celle du point L′	$= \alpha$
La hauteur du point S	$= b$
Et celle du point S′	$= \beta$
La distance apparente LS.	$= D$
Et la distance réduite cherchée L′S′.	$= x$

On aura par l'équation générale, en considérant l'angle Z comme appartenant au triangle LZS,

$$\cos. Z = \frac{\cos. D - \sin. a \sin. b}{\cos. a \cos. b};$$

et, en considérant cet angle comme appartenant au triangle L'ZS',

$$\cos. Z = \frac{\cos. x - \sin. \alpha \sin. \beta}{\cos. \alpha \cos. \beta}.$$

$$\text{Donc } \frac{\cos. D - \sin. a \sin. b}{\cos. a \cos. b} = \frac{\cos. x - \sin. \alpha \sin. \beta}{\cos. \alpha \cos. \beta}.$$

Mais $\sin. a \sin. b = \cos. a \cos. b - \cos. (a + b)$

$\sin. \alpha \sin. \beta = \cos. \alpha \cos. \beta - \cos. (\alpha + \beta)$.

Mettant ces valeurs dans l'équation, on aura

$$\frac{\cos. D + \cos. (a+b)}{\cos. a \cos. b} = \frac{\cos. x + \cos. (\alpha + \beta)}{\cos. \alpha \cos. \beta}.$$

Or $\cos. D + \cos. (a+b) = 2 \cos. \tfrac{1}{2}(a+b+D). \cos. \tfrac{1}{2}(a+b-D)$

$\cos. x = 1 - 2 \sin. \tfrac{1}{2} x^2$,

$\cos. (\alpha + \beta) = 1 - 2 \sin. \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 = 2 \cos. \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 - 1$.

Introduisant ces trois valeurs dans l'équation, et transposant, on aura

$$\sin. \tfrac{1}{2} x^2 = \cos. \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 - \frac{\cos. \frac{1}{2}(a+b+D) . \cos. \frac{1}{2}(a+b-D) . \cos. \alpha \cos. \beta}{\cos. a \cos. b}.$$

Soit maintenant

$$\frac{\sqrt{\dfrac{\cos. \frac{1}{2}(a+b+D) . \cos. \frac{1}{2}(a+b-D) . \cos. \alpha . \cos. \beta}{\cos. a \cos. b}}}{\cos. \frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \sin. A,$$

l'équation se transformera en celle-ci,

$$\sin. \tfrac{1}{2} x^2 = \cos. \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 . \cos. A^2;$$

et enfin, extrayant la racine quarrée, on aura

$$\sin. \tfrac{1}{2} x = \cos. \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) . \cos. A.$$

Il est aisé de voir que cette solution s'accorde avec la formule que nous avons employée page 61. En effet, dans cette formule, la moitié de la somme des six premiers logarithmes nous a donné la valeur de la quantité qui est ici sous le signe radical; nous en avons retranché le log. cosinus de la moitié de la somme des hauteurs vraies, c'est-à-dire le log. cosinus $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, et il nous est resté le log. sinus d'un angle subsidiaire A : enfin, au log. cosinus A, nous avons ajouté le log. cosinus $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, et nous avons eu le log. sinus de la demi-distance cherchée.

Formule pour trouver la distance réduite des deux astres, en ayant égard à l'aplatissement de la terre.

Soit (*fig.* 3) AE le rayon de l'équateur; AQ le demi-astre terrestre; O le lieu de l'observateur; OA le rayon terrestre, mené du point O au centre A de la terre; OZ la verticale menée par le point O, et passant au zénith Z; OZ′ le prolongement du rayon terrestre OA, qui rencontre le méridien au point Z′ voisin de Z; L le lieu de la lune corrigé de l'effet de la réfraction seulement; S le lieu vrai de l'astre auquel on la compare; R le lieu de la terre pour lequel la parallaxe horizontale de la lune est calculée dans les tables.

Si on suppose le rayon AE de l'équateur . . . . . $= 1$
L'axe terrestre AQ . . . . $= 1 - \alpha$
La latitude du point O . . . . $= L$
La latitude du point R . . . . $= \lambda$
La par. horiz. ☾ calculée pour le point R . $= p$

On trouvera d'abord que le rayon $OA = 1 - \alpha \sin. L^2$, et par conséquent aussi le rayon AR, mené au point R, $= 1 - \alpha \sin. \lambda^2$; d'où il suit que la parallaxe horizontale de la lune qui répond au point R étant égale à p, celle qui répondra au point O sera

$$= \frac{p \,.\, \lambda O}{AR} = p \,.\, \frac{1 - \alpha \sin. L^2}{1 - \alpha \sin. \lambda^2} = p\,(1 + \alpha \sin. \lambda^2 - \alpha \sin. L^2).$$

On trouvera aussi l'angle Z′OZ formé par le prolongement du rayon terrestre OA, et par la verticale OZ, menée par le point O, $= \alpha \sin. 2L$.

Cela posé, des points Z et Z′ soient menés les arcs ZL et ZS, Z′L et Z′S; si sur l'arc LZ′ on porte l'arc $Lp =$ la parallaxe horizontale calculée pour le point O, multipliée par le sinus de LZ′, et qu'on mene l'arc pS, cet arc sera la distance réduite des deux astres, en ayant égard à l'aplatissement de la terre : il s'agit donc de trouver l'arc pS.

Pour cela, du point L je porte sur LZ, l'arc $LL' = p\,(1 + \alpha \sin. \lambda^2 + \alpha \sin. L^2)$, multiplié par sin. LZ, et je mene l'arc L′S; ensuite du point S, et par les points L′ et p, je décris les arcs Lm et opn. Il est clair que si on calcule la distance réduite suivant la méthode expliquée page 61, en employant dans le calcul la parallaxe horizontale $p\,(1+\alpha \sin.\lambda^2+\alpha \sin.L^2)$, on trouvera pour cette distance réduite l'arc L'S. Il ne s'agira plus que de calculer la différence Lo entre cette distance trouvée L'S et la distance antérieurement corrigée o S ou p S. Soient

$$\begin{array}{lll} LZ = a & SZ = b & LS = D \\ LZ' = a' & SZ' = b' & L'S = D' \\ & & pS = D'', \end{array}$$

on aura $Lo = D' - D''$, ou $D'' = D' - Lo$; mais on peut prendre pour Lo la quantité mn qui en differe très peu. On aura donc

$$D'' = D' - mn = D' - Ln + Lm.$$

Maintenant on a $Ln = Lp\,.\cos.Z'LS$; or, par la supposition, $Lp = p\,(1+\alpha \sin.\lambda^2 - \alpha \sin.L^2) \sin.a'$; et on a $\cos.Z'LS = \frac{\cos.Z'S - \cos.LZ' \cos.LS}{\sin.LZ'\,.\sin.LS}$; ou, employant les dénominations ci-dessus, $\cos.Z'LS = \frac{\cos.b' - \cos.a' \cos.D}{\sin.a' \sin.D}$. D'où on tirera

$$Ln = p\,(1+\alpha \sin.\lambda^2 - \alpha \sin.L^2)\,.\frac{\cos.b' - \cos.a' \cos.D}{\sin.D}.$$

On trouvera de même $Lm = LL' \cos.ZLS$; et comme LL' est, par la supposition, $= p\,(1+\alpha \sin.\lambda^2+\alpha \sin.L^2)\,.\sin.a$, et $\cos.ZLS = \frac{\cos.b - \cos.a \cos.D}{\sin.a \sin.D}$, on aura

$$Lm = p\,(1+\alpha \sin.\lambda^2+\alpha \sin.L^2)\,\frac{\cos.b - \cos.a \cos.D}{\sin.D}.$$

Prenant la différence entre ces deux quantités, et mettant pour a', $a+da$, et pour b', $a+db$, on aura

$$Ln - Lm = -2p\alpha \sin.L^2.\left(\frac{\cos.b - \cos.a \cos.D}{\sin.D}\right) + p\left(\frac{da \sin.a \cos.D - db \sin.b}{\sin.D}\right).$$

Substituant cette expression dans l'équation ci-dessus, $D'' = D' - Ln + Lm$, on aura

$$D'' = D' + 2p\alpha \sin.L^2\left(\frac{\cos.b - \cos.a \cos.D}{\sin.D}\right) + p\left(\frac{db \sin.b - da \sin.a \cos.D}{\sin.D}\right).$$

Il reste à trouver les valeurs de da et de db.

Du point Z je mene la ligne Zq, il est clair que qZ' sera $= da$; mais qZ' est aussi $=$ ZZ' . cos. ZZ'q; donc $da =$ ZZ' . cos. ZZ'q. Or nous avons déja dit que l'angle ZOZ', et par conséquent l'arc ZZ' qui mesure cet angle $= \alpha \sin.2L$; donc $da = \alpha \sin.2L \cos.ZZ'q$. Pour trouver cos. ZZ'$q$, du pole P je mene l'arc PZ qui sera le complément de la latitude, et l'arc PL qui sera la distance de la lune au pole élevé sur l'horizon, que j'appellerai N. On aura $\cos. ZZ'q$ ou $\cos. PZL = \frac{\cos. PL - \cos. PZ \cos. ZL}{\sin. PZ . \sin. ZL}$.

Et puisque $PL = N$, $PZ = 90° - L$, et $ZL = a$,

$$\cos. PZL = \frac{\cos. N - \sin. L \cos. a}{\cos. L \sin. a}.$$

Mettant cette valeur dans l'expression de da, on aura

$$da = \alpha \sin. 2L \left(\frac{\cos. N - \sin. L \cos. a}{\cos. L \sin. a}\right).$$

On trouvera de la même maniere, en appelant M la distance PS du pole P à l'astre S,

$$db = \alpha \sin. 2L . \left(\frac{\cos. M - \sin. L \cos. b}{\cos. L \sin. b}\right).$$

Mettant enfin ces valeurs de da et db dans l'expression de D'' trouvée ci-dessus, on aura

$$D'' = D + 2p\alpha \sin. L^2 \left(\frac{\cos. b - \cos. a \cos. D}{\sin. D}\right) + p\alpha \sin. 2L \left(\frac{\cos. M - \sin. L \cos. b}{\cos. L \sin. D}\right)$$

$$- p\alpha \sin. 2L \cos. D \left(\frac{\cos. N - \sin. L \cos. a}{\cos. L \sin. D}\right);$$ et, réduisant;

$$D'' = D' + 2p\alpha \sin. L \left(\frac{\cos. N - \cos. D \cos. M}{\sin. D}\right).$$

On voit donc que, pour trouver la distance réduite corrigée de l'aplatissement de la terre, il faudra d'abord calculer la distance suivant la méthode de la page 61, en employant pour parallaxe horizontale la quantité $p . (1 + \alpha \sin. \lambda^2 + \alpha \sin. L^2)$, dans laquelle p est la parallaxe donnée par *la Connoissance des Temps*, λ est la latitude pour laquelle cette parallaxe est calculée, et L la latitude du lieu de l'observation; qu'ensuite il faudra ajouter à la distance trouvée la correction $2p\alpha \sin. L \left(\frac{\cos. N - \cos. D \cos. M}{\sin. D}\right)$, ou, ce qui est la même chose, $2p\alpha \sin. L \left(\frac{\cos. N}{\sin. D} + \text{tang.} (D - 90°) \cos. M\right)$.

Pour abréger la premiere partie de l'opération, j'ai construit la table VII, par laquelle, en connoissant la latitude du lieu de l'observation, on trouve tout de suite la correction $p\alpha (\sin. \lambda^2 + \sin. L^2)$. J'ai supposé, dans cette table, que la parallaxe donnée par *la Connoissance des Temps* étoit calculée pour la latitude de Paris, c'est-à-dire que $\lambda = 48° 50'$; j'ai supposé aussi $\alpha = \frac{1}{200}$; ce qui ne s'éloigne pas beaucoup de la vérité.

Quant à la seconde partie de l'opération, j'ai supposé la parallaxe moyenne de $57'$, et $\alpha = \frac{1}{200}$; ce qui m'a donné $2p\alpha =$ environ $34''$.