CHAPITRE III.

Du calcul des observations.

Je donnerai dans ce chapitre la maniere de calculer les différentes especes d'observations que l'on fait à la mer, avec des exemples de chaque calcul, et j'ajouterai à la fin du chapitre plusieurs tables qui serviront à faciliter les opérations.

Calculs des observations de la latitude par les hauteurs méridiennes des astres.

On trouvera d'abord, au moyen du livre de *la Connoissance des Temps*, la déclinaison de l'astre pour l'instant où il a passé par le méridien du vaisseau, et on en conclura la distance depuis l'astre jusqu'au pole vers lequel l'observateur étoit tourné lorsqu'il a observé la hauteur méridienne.

On cherchera ensuite la hauteur vraie de l'astre en corrigeant la hauteur observée, des effets de la dépression et de la réfraction, ainsi que du demi-diametre et de la parallaxe, si c'est le soleil ou la lune qu'on a observé.

La distance entre cette hauteur vraie et la distance au pole trouvée précédemment donnera la latitude cherchée.

Cette latitude sera de même dénomination que le pole vers lequel l'observateur étoit tourné, si la distance de l'astre à ce pole est plus petite que la hauteur vraie de l'astre, et dans le cas contraire elle sera de dénomination différente.

On remarquera que, si on observoit la hauteur méridienne de l'astre lorsqu'il est au-dessous du pole, c'est-à-dire lorsque sa hauteur est la plus petite possible, alors la latitude seroit égale à la somme et non à la différence de la hauteur vraie de l'astre et de sa distance au pole.

Exemple pour une hauteur méridienne du soleil.

Le 8 mars 1787, étant par une longitude estimée de 51° à l'ouest de Paris, on a observé, étant tourné du côté du pole sud, une hauteur du bord inférieur du soleil de 43° 37′ : l'œil de l'observateur étoit élevé de 22 pieds au-dessus du niveau de la mer. On demande la latitude. . . . .

On trouvera d'abord dans *la Connoissance des Temps*, que, le 8 mars, à l'instant de midi à Paris, la déclinaison du soleil étoit . . . . $4^{\circ} . 47' . 52''$ aust.

Et que le lendemain, 9 mars, à midi, elle étoit . . 4 . 24 . 23

Donc en 24 heures, qui répondent à 360°, la déclinaison avoit diminué de . . . . 23 . 29

Cela posé, on prendra par parties la diminution qui convient à 51° de longitude dont le vaisseau étoit, par la supposition, plus occidental que Paris ; et on aura

Pour 36°, ou la dixieme partie de 360° . . $2' . 21''$
Pour 12°, ou le tiers de 36° . . . . . . 0 . 47
Et pour 3°, ou le quart de 12 12

Donc, pour 51°, on aura . . . . 3 . 20

Retranchant cette quantité de la déclinaison du 8 mars à midi, trouvée ci-dessus, on aura la déclinaison du soleil lors de son passage au méridien du vaisseau . . . . 4 . 44 . 32

Par conséquent SA DISTANCE jusqu'au pole vers lequel on étoit tourné en observant, qui est ici le pole sud, étoit 85 . 15 . 28

Il faut maintenant chercher la hauteur vraie du centre de l'astre.

Hauteur observée du bord inférieur . . . . . . 43 . 37 . 0

Retranchant d'abord de cette hauteur l'effet de la dépression de l'horizon pour 22 pieds de hauteur de l'œil qu'on trouvera par la table III . . . . 4 . 45

Il restera . . . . . 43 . 32 . 15

Retranchant encore la réfraction moins la parallaxe du soleil pour $43^{\circ} 32'$ qu'on trouvera dans les premieres colonnes de la table I 54

Il restera . . . . . 43 . 31 . 21

Enfin, comme c'est la hauteur du bord inférieur de l'astre qui a été observée, on ajoutera le demi-diametre pris dans *la Connoissance des Temps*, pour le 8 mars, qu'on trouvera de . . . . 16 . 9

Et on aura LA HAUTEUR VRAIE du centre . . . . . 43 . 47 . 30

On avoit trouvé ci-dessus LA DISTANCE du soleil au pole austral vers lequel l'observateur étoit tourné . . . . . 85 . 15 . 28

Prenant la différence entre ces deux quantités, il restera pour la LATITUDE cherchée . . . . 41 . 27 . 58

Et comme la distance au pole est plus grande que la hauteur vraie de l'astre, la latitude aura une autre dénomination que ce pole : elle sera donc BORÉALE.

Exemple pour une hauteur méridienne d'étoile.

Le 8 octobre 1787 on a observé, en se tournant vers le nord, une hauteur méridienne de l'étoile SIRIUS, qu'on a trouvée de 54° 16′ : l'œil de l'observateur étoit à vingt pieds au-dessus du niveau de la mer. On demande la latitude.

Déclinaison de SIRIUS en 1787, suivant *la Connoissance des Temps*	16°. 25′. 48″ aust.
Donc DISTANCE depuis l'étoile jusqu'au pole nord vers lequel l'observateur étoit tourné	106 . 25 . 48
Hauteur observée de l'étoile	54 . 16 . 0
Retranchant la dépression pour 20 pieds de hauteur donnée par la table *III*	4 . 32
Il restera	54 . 11 . 28
Et retranchant encore la réfraction pour 54° donnée par les dernieres colonnes de la table I	41
On aura LA HAUTEUR VRAIE de l'étoile	54 . 10 . 47
Enfin prenant la différence entre cette hauteur et la distance au pole trouvée ci-dessus	106 . 25 . 48
Il restera pour la LATITUDE cherchée	52 . 15 . 1

Et comme la distance au pole est plus grande que la hauteur vraie de l'astre, la latitude aura une dénomination différente de celle du pole : elle sera donc AUSTRALE.

Exemple pour une hauteur méridienne de la lune.

Le 12 mars 1787, à 6 heures du matin à-peu-près, étant par 57° de longitude estimée à l'ouest de Paris, on a observé vers le sud une hauteur méridienne du bord inférieur de la lune de 64° 59′ : l'œil de l'observateur étoit élevé de 16 pieds au-dessus du niveau de la mer. On demande la latitude.

Il faut d'abord chercher l'heure de Paris au temps de l'observation pour en conclure la déclinaison de la lune, et ensuite la distance polaire.

Passage ☾ au méridien de Paris, le 12 mars	6^h. 3′ matin.
Passage le 13 mars	6 . 54
Différence en 24 heures	51

Mais le vaisseau étoit 57° à l'ouest de Paris ; ce qui, réduit en temps, donne 3^h 48′. Il faut donc chercher la différence pour 3^h 48′, et on trouvera

Pour 3 heures, ou la 8e partie de 24 heures. $6' . 22''$
Pour $45'$, ou le quart de 3 heures . . . . 1 . 35
Pour $3'$, ou la quinzieme partie de $45'$ . . o . 6

Donc, pour $3^h 48'$, on aura . . . . . . $0^h . 8' . 3''$

Donc passage de la lune au méridien du vaisseau . . 6 . 11 . o
Différence entre le vaisseau et Paris . . . . . . 3 . 48 . o

Donc heure de Paris . . . . . . 9 . 59 . o matin.

Maintenant on a la déclinaison de la lune le 12 mars à 6 heures du matin, ou le 11 mars à 18 heures . . . . $24° . 52' . 0''$ austr.
Et le 12 mars à midi . . . . 24 . 43

Donc différence en 6 heures 9

Prenant les parties proportionnelles pour $3^h 59'$, ou pour 4 heures, on trouvera 6

Ce qui donnera pour la déclinaison, à $9^h 59'$, temps de l'observation . . . . 24 . 46

Par conséquent LA DISTANCE jusqu'au pole sud vers lequel on étoit tourné en observant, sera . . . . . 65 . 14

Maintenant, pour trouver la hauteur vraie du centre, on cherchera d'abord le demi-diametre et la parallaxe horizontale de la lune au temps de l'observation.

Demi-diametre, le 11 à midi, suivant *la Connoissance des Temps* . . . . $14' . 50''$
Et le 12, à midi . . . . 14 . 53
Donc le 12, à 10 heures du matin. . . 14 . 53

Ajoutant l'augmentation du demi-diametre prise dans la table IV pour 65° de hauteur qu'on trouvera de 13

On aura le demi-diametre corrigé . . . . . . $15' . 6''$

La parallaxe horizontale étoit, suivant *la Connoissance des Temps*, le 11, à minuit, de . . $54' . 23''$
Et le 12, à midi, de . . . . 54 . 31

Donc, le 12, à 10 heures du matin, elle étoit de . . . 54 . 30

Cela posé, on trouvera, comme il suit, la hauteur vraie du centre de la lune.

Hauteur observée du bord inférieur . . . . . . $64° . 59' . 0''$
Retranchant la dépression pour 16 pieds . . . . . 4 . 3

Il restera . . . . 64 . 54 . 57
Ajoutant le demi-diametre corrigé . . . . 15 . 6

On aura . . . . . 65 . 10 . 3

A quoi il faut ajouter encore la parallaxe de hauteur moins la réfraction prise dans la table VIII pour la hauteur de 65° 10′, et pour la parallaxe, de 54′ 30″.

D'abord pour 65° 10′, et pour 54′ de parallaxe horizontale, on trouvera	0°. 22′. 14″
Ensuite, pour la même hauteur, et pour 24″ de parallaxe, on trouvera	12
Ajoutant ces quantités, on aura enfin LA HAUTEUR corrigée du centre de la lune	65 . 32 . 29
Prenant la différence entre cette quantité et la distance au pole austral trouvée ci-dessus	65 . 14 . 0
On aura LA LATITUDE cherchée	0 . 18 . 29

Et comme la distance au pole est plus petite que la hauteur de l'astre, la latitude sera de même dénomination que le pole : elle sera donc AUSTRALE.

Calcul des observations des hauteurs des astres pour trouver l'heure du vaisseau.

On suppose qu'on ait fait avec le cercle de réflexion plusieurs observations consécutives de la hauteur d'un astre sur l'horizon de la maniere que nous avons prescrite page 27. On demande d'en conclure l'heure du vaisseau, et en même temps l'avance ou le retard de la montre dont on s'est servi dans les observations.

Pour cela, on prendra d'abord la somme des heures des observations, et on la divisera par le nombre de ces observations.

On divisera aussi par le même nombre l'angle total donné par l'instrument qui représente la somme des hauteurs observées, et on aura une hauteur moyenne correspondante à l'heure moyenne des observations. On corrigera ensuite la hauteur moyenne des effets de la dépression, de la réfraction, ainsi que du demi-diametre moins la parallaxe, si c'est le soleil qu'on observe; enfin on cherchera la déclinaison de l'astre au temps de l'observation pour en conclure la distance au pole élevé sur l'horizon.

Cela posé, au moyen de la hauteur et de la distance polaire trouvée, et connoissant aussi la latitude du vaisseau, on calculera l'angle horaire de la maniere suivante.

On écrira les unes sous les autres, d'abord la hauteur vraie, ensuite la latitude, et après cela la distance polaire. On prendra la somme et la demi-somme de ces quantités, qu'on écrira audessous, ainsi que la différence entre cette demi-somme et la hauteur vraie. A côté de ces quantités on écrira les compléments arithmétiques du logarithme cosinus de la latitude, et du logarithme sinus de la distance polaire; le logarithme cosinus de la demi-somme, et le logarithme sinus de la demi-somme moins la hauteur : on additionnera ces quatre logarithmes, et la moitié de leur somme sera le logarithme sinus du demi-angle horaire; enfin, regardant les degrés de ce demi-angle horaire comme des minutes d'heure, les minutes comme des secondes d'heure, et les secondes comme des tierces d'heure, on les multipliera par 8, et on aura l'angle horaire réduit en heures; d'où il sera aisé de conclure l'avance ou le retard de la montre.

Premier exemple pour les hauteurs du soleil.

Le 5 février 1787, après midi, étant par une latitude estimée de 22° 40′ sud, et par une longitude pareillement estimée de 86° à l'est de Paris, on a observé, avec le cercle de réflexion, et par des observations croisées, six hauteurs consécutives du bord inférieur du soleil.

La premiere observation a été faite à	2^h.	47′.	1″	de la montre.
La seconde	2.	48.	31	
La troisieme	2.	49.	19	
La quatrieme	2.	50.	13	
La cinquieme	2.	51.	0	
La sixieme	2.	52.	32	

L'angle total marqué par l'instrument a été de 276° 27′ : l'œil de l'observateur étoit élevé de 20 pieds au-dessus du niveau de la mer. On demande l'heure du vaisseau au temps de l'observation, et la quantité dont la montre avance ou retarde.

On prendra d'abord la somme des heures des observations 16^h 58′ 36″, et on la divisera par 6, ce qui donnera 2^h 49′ 46″. On divisera pareillement par 6 l'angle total 276° 27′ marqué par l'instrument, et on aura pour la hauteur moyenne 46° 4′ 30″. D'après cela les six observations se trouveront réduites à l'observation moyenne suivante.

Heure de l'observation	2^h. 49′. 46″
Hauteur du bord inférieur du soleil	46°. 4′. 30″
Maintenant de cette hauteur on retranchera l'effet de la dépression pour 20 pieds de hauteur de l'œil, qu'on trouvera par la table III	4 . 32
Il restera	45 . 59 . 58
On retranchera encore la réfraction moins parallaxe du soleil pour 46° de hauteur donnée par la table I.	49
Il restera	45 . 59 . 9

On ajoutera ensuite le demi-diametre de l'astre pris dans *la Connoissance des Temps*, pour le 5 février . . . . 0°. 16′. 16″

Et on aura LA HAUTEUR VRAIE ou corrigée du centre de l'astre . . . . 46°. 15. 25

Pour trouver la distance de l'astre au pole élevé sur l'horizon, il faut d'abord chercher l'heure de Paris au temps de l'observation.

Heure approchée du vaisseau . . . . 2h. 50′ après midi.

Le vaisseau étoit, par la supposition, 86° plus oriental que Paris; ce qui, réduit en temps, donne 5. 44

Retranchant la seconde heure de la premiere, parceque le vaisseau est à l'est de Paris, et augmentant pour cela la premiere de 24 heures, parcequ'elle est plus petite que la seconde, on trouvera pour le temps de l'observation à Paris, le 4 février 21. 6

Nous chercherons donc la déclinaison pour le 4 février à 21h 6′.

Déclinaison le 4 février à midi . . .	16°.	9′.	5″	austr.
Et le 5 février à midi	15.	50.	55	
Diminution en 24 heures		18.	10	

Prenant par parties la diminution qui convient à 21h 6′, on aura

Pour 12 heures, ou la moitié de 24 heures . .	9′.	5″
Pour 6 heures, ou la moitié de 12 heures. . .	4.	33
Pour 3 heures, ou la moitié de 6 heures. . .	2.	16
Pour 6′, ou la 30e partie de 3 heures		5
Donc pour 21h 6′	15.	59

Retranchant cette quantité de la déclinaison du 4 février, il restera pour la déclinaison cherchée 15. 53. 6

Par conséquent la DISTANCE du soleil au pole élevé sur l'horizon, qui est ici le pole austral, sera 74. 6. 54

Connoissant ainsi la distance polaire et la hauteur vraie de l'astre, on fera le calcul de l'angle horaire comme il suit.

Hauteur vraie	46°. 15′. 20″		
Latitude	22. 40. 0	com. cos.	0. 0349101
Distance polaire . . .	74. 7. 0	com. sin.	0. 0169058
Somme	143. 2. 20		
Demi-somme	71. 31. 10	cos.	9. 5010357
Demi-somme — haut.	25. 15. 50	sin.	9. 6302122
		Somme	19. 1830638
		Demi-somme	9. 5915319
C'est le log. sin. du demi-ang. hor.			22°. 58′. 50″
		Multipliant par . .	8
On aura l'heure du vaisseau			3h. 3′. 50″. 40‴
Mais la montre marquoit			2. 49. 46
Donc la montre retadoit de. . . .			14. 5

On observera que, dans ce calcul, nous avons altéré deux des angles trouvés précédemment; savoir, la hauteur vraie, que nous avons diminuée de 5″, et la distance polaire, que nous avons augmentée de 6″. Ces petits changements, qui n'en produisent que d'insensibles dans les résultats, ont pour objet de simplifier les calculs en n'employant que des angles de dix en dix secondes qui se trouvent dans les tables de logarithmes dont on fait usage, et d'éviter par là les parties proportionnelles pour les secondes intermédiaires. Il faut observer que ces changements doivent être faits de maniere que la somme des secondes des trois angles employés dans le calcul soit un multiplié de 20, afin que la demi-somme donne toujours des angles qu'on trouve dans les tables.

Deuxieme exemple pour les observations des hauteurs d'étoile.

Le 6 mars 1787, étant par 33° de latitude nord, et par 43° 30′ de longitude à l'ouest de Paris, on a fait du côté de l'ouest plusieurs observations consécutives de la hauteur de l'étoile Aldebaran, qui ont donné pour hauteur moyenne corrigée de la dépression et de la réfraction, 29° 30′ 15″, et, pour l'heure moyenne marquée par la montre, 9ʰ 45′ 24″. On demande l'heure du vaisseau, ou l'erreur de la montre.

On cherchera d'abord, au moyen de *la Connoissance des Temps*, la distance de l'étoile au pole élevé sur l'horizon: son ascension droite en temps, et la distance de l'équinoxe au soleil pour le jour de l'observation et pour le suivant.

Déclinaison de l'étoile pour le mois de mars . . .	16°.	3′.	53″ bor.
Donc la distance au pole élevé sur l'horizon, qui est ici le pole nord, sera.	73 .	56 .	7
Ascension droite pour l'année 1787	65 .	55 .	36
Qui, étant réduite en temps, donne	4ʰ.	23′.	42″
Distance de l'équinoxe au ☉ le 6 mars	51′.	58″.	0
Et le 7 mars	48 .	16 .	0
Variation en 24 heures	3 .	42	

Cela posé, on calculera l'angle horaire comme dans l'exemple précédent; et on fera le reste du calcul comme il suit.

Hauteur de l'étoile . .	29°. 30′. 10″		
Latitude	33 . 0 . 0	com. cos.	0.0764086
Distance polaire . . .	73 . 56 . 10	com. sin.	0.0172975
Somme. . .	136 . 26 . 20		
Demi-somme. . .	68 . 13 . 10	cos.	9.5694356
Demi-somm. — haut.	38 . 43 . 0	sin.	9.7962062
		Somme . . .	19.4593479
		Demi-somme . . .	9.7296739
C'est le log. sin. du demi-ang. hor.			32°.27′. 16″
		Multipliant par . .	8

On aura l'angle horaire réduit en temps	4h. 19′. 38″
Ascension droite, réduite en temps, trouvée ci-dessus, qu'il faut ajouter, parceque l'observation a été faite vers l'ouest, et qu'il auroit fallu retrancher si elle avoit été faite vers l'est . .	4 . 23 . 42
Distance de l'équinoxe au soleil, le 6 mars, qu'il faut toujours ajouter	0 . 51 . 58
Donc heure approchée du vaisseau . . .	9 . 35 . 18

Mais il faut retrancher de cette heure la quantité dont la distance de l'équinoxe au soleil aura varié, depuis le 6 mars à midi, jusqu'au temps où l'observation a été faite.

Heure approchée du vaisseau	9h. 35′
Longitude du vaisseau à l'ouest de Paris. . 40° 30′, ou en temps	2 . 42
Donc heure approchée de Paris . .	12 . 17

Variation de la distance de l'équinoxe au soleil en vingt-quatre heures	0 . 3 . 42
Donc variation en 12h. 17′. . . .	0 . 1 . 53
Qui, étant retranchée de l'heure approchée du vaisseau, trouvée ci-dessus, donnera pour l'heure corrigée du vaisseau	9 . 33 . 25
Mais la montre marquoit . . .	9 . 45 . 24
Donc la montre avançoit de . . .	0 . 11 . 59

Calcul des observations des hauteurs du soleil faites à différents jours pour déterminer la marche d'une montre par rapport au temps moyen.

Le 24 mai 1787, à sept heures trois quarts du matin, étant par 28° 28′ de latitude nord, et par 18° 36′ de longitude à l'ouest de Paris, on a pris, avec le cercle de réflexion, plusieurs hauteurs du bord inférieur du soleil, qui ont donné pour la hauteur moyenne, toutes corrections faites, 31° 4′ 20″, la montre marquant alors 10h 35′ 17″.

Le 31 du même mois, à dix heures un quart du matin, étant par la même latitude et la même longitude, on a pris d'autres hauteurs du bord inférieur du soleil, qui ont donné pour hauteur vraie moyenne 65° 30′, la montre marquant 1h 8′ 1″ après midi.

On demande la marche de la montre par rapport au temps moyen.

On calculera d'abord les premieres observations de la maniere que nous venons de prescrire, et on en conclura l'avance ou le retard de la montre sur le temps moyen compté à Paris. On fera ensuite la même chose pour les secondes observations, et la différence des deux retards ou avances donnera la marche de la montre.

Premieres observations.

On trouvera, au moyen de la *Connoissance des Temps*, que la distance polaire du soleil, au temps de ces premieres observations, étoit 69°12′54″. Après cela, au moyen de cette distance polaire, de la latitude supposée 28°28′, et de la hauteur observée 31°4′20″, on calculera l'angle horaire, et on trouvera l'heure du vaisseau, temps vrai . . . . 7h 39′ . 53″

Ajoutant la différence de longitude en temps entre le vaisseau et Paris . . . . 1 . 14 . 24

On aura l'heure de Paris, temps vrai . . . 8 . 54 . 17

Maintenant *la Connoissance des Temps* donne le temps moyen au midi vrai pour le 23 mai. . . 11h . 56′ . 21″, 0

Et pour le 24 mai. . . 11 . 56 . 25, 9

D'où on verra que, le 24 mai, à 8h 54′ du matin, le temps moyen au midi vrai étoit . . . . 11 . 56 . 25, 3

Ajoutant cette quantité à l'heure de Paris, temps vrai, trouvée ci-dessus, et retranchant 12 heures, on aura l'heure de Paris, temps moyen . . . . 8 . 50 . 42, 3

Mais la montre marquoit . . . . 10 . 35 . 17

Donc la montre avançoit sur le temps moyen compté à Paris . . . . 1 . 44 . 34, 7

Secondes observations.

On cherchera également la distance polaire au temps de ces secondes observations, qu'on trouvera de 68° 3′ 4″; ensuite, connoissant la latitude 28° 28′, et la hauteur observée 65° 30′, on calculera l'angle horaire, et on aura l'heure du vaisseau, temps vrai . . . . $10^h . 9' . 56''$

Ajoutant la différence avec le méridien de Paris . . 1 . 14 . 24

On aura l'heure de Paris, temps vrai . . . . 11 . 24 . 20

Mais on a le temps moyen au midi vrai pour le 30 mai . . . . $11^h . 57' . 5'', 6$

Et pour le 31 mai . . . . . . 11 . 57 . 13, 8

Donc on aura pour le 31 mai, à $11^h 24'$ . . . 11 . 57 . 13, 6

Ajoutant cette quantité à l'heure de Paris, temps vrai, trouvée ci-dessus, et retranchant 12 heures, on aura l'heure de Paris, temps moyen . . . . 11 . 21 . 33, 6

Et puisque la montre marquoit alors . . . . . . 13 . 8 . 1

Elle avançoit sur le temps moyen à Paris . . . . . $1^h . 46' . 27'', 4$

Mais nous avions trouvé ci-dessus que, lors des premieres observations, elle n'avançoit que de . . . . 1 . 44 . 34, 6

Donc, dans l'intervalle des observations, c'est-à-dire depuis le 24 mai à $8^h 54'$ du matin, jusqu'au 31 mai à $11^h 24'$, ou en $170^h \frac{1}{2}$, elle s'est accélérée sur le temps moyen de . . . . 0 . 1 . 52, 8

D'où on trouvera son accélération pour 24 heures 0 . 0 . 15, 9

Remarque.

Toutes les circonstances ne sont pas également favorables pour faire les observations des hauteurs des astres qui servent à la détermination de l'heure. L'instant qu'il faut choisir de préférence est celui où l'astre passe par le premier vertical, parceque c'est le temps où il s'éleve le plus rapidement sur l'horizon, et qu'outre cela l'erreur dans l'estime de la latitude n'en produit alors qu'une incomparablement plus petite dans l'angle horaire : mais il peut arriver, par la position de l'astre relativement à l'observateur, qu'il passe en dehors du premier vertical ; et, dans ce cas, il faut choisir le temps où il est à sa plus grande proximité du premier vertical, parceque son mouvement ascensionnel est encore alors le plus grand possible, et que l'erreur dans la latitude supposée influe aussi le moins qu'il est possible sur l'angle horaire.

Il suit de là qu'on doit attendre, pour faire les observations, qu'on puisse relever l'astre à l'est, ou à l'ouest du monde, ou le plus près qu'il se peut de ces deux points. Dans le cas où l'astre ne parviendra à l'une ou l'autre de ces deux positions qu'étant sous l'horizon, le temps le plus convenable pour les observations sera celui du lever ou du coucher de l'astre : mais, comme les réfractions qui se font près de l'horizon éprouvent quelquefois des variations accidentelles considérables, il faut éviter d'observer des hauteurs moindres que trois ou quatre degrés; et encore alors faut-il avoir égard, dans le calcul, à l'état du thermometre et même du barometre, en appliquant aux hauteurs observées les corrections données par la table II.

On peut aussi déterminer par le calcul la position de l'astre la plus convenable pour les observations; et l'on trouve que c'est lorsque le cosinus de la distance polaire, divisé par le sinus de la latitude, est égal ou au sinus de la hauteur, ou à la cosécante de cette hauteur. Dans le premier cas, l'astre est dans le premier vertical; et, dans le second, il est le plus près possible du premier vertical. C'est d'après cela que nous avons calculé la table XII, au moyen de laquelle, en connoissant la latitude et la distance polaire, on trouve la hauteur à laquelle l'astre doit être observé.

Calcul des observations de la latitude par des hauteurs prises à une très petite distance du méridien.

Nous avons parlé, dans le chapitre II, de cette maniere de déterminer la latitude; nous en donnerons ici un exemple.

Le 8 mars 1787, au matin, étant par une latitude estimée de 20° nord, et par une longitude de 50° à l'ouest de Paris, on a fait des observations des hauteurs du soleil pour en conclure l'avance ou le retard d'une montre à secondes, et on a trouvé que le midi devoit arriver à $11^h\ 53'\ 25''$ de cette montre; ensuite, peu de minutes avant l'heure connue de midi, on a commencé à observer des hauteurs du soleil avec le cercle de réflexion, et on a mesuré, par des observations croisées, quatre de ces hauteurs aux heures suivantes marquées par la montre.

Premiere, à	$11^h . 50' . 5''$
Seconde, à	11 . 51 . 42
Troisieme, à	11 . 53 . 10
Quatrieme, à	11 . 57 . 29

Enfin les quatre hauteurs prises ensemble ont donné 299° 57′ : on demande la latitude.

On divisera d'abord par 4 l'angle total 299° 57′, et on aura une premiere hauteur méridienne approchée 74° 59′ 15″.

On prendra ensuite la différence entre l'heure de la montre à midi, c'est-à-dire $11^h\ 53'\ 25''$, et l'heure de la montre au temps de chaque observation, et on aura

Pour la premiere observation	$3'$. $20''$
Pour la seconde	1 . 43
Pour la troisieme	0 . 15
Et pour la quatrieme	4 . 4

Enfin on cherchera la distance du soleil au pole élevé sur l'horizon au temps de l'observation, et on la trouvera d'environ $94°\ 40'$.

Cela posé, au moyen de la table X on cherchera la correction qui convient à la distance polaire trouvée, à la latitude supposée de 20°, et à l'intervalle d'une minute écoulée entre l'heure de midi et l'heure de l'observation, et on trouvera $4''$, 4. Il s'agit maintenant d'en conclure les corrections qui conviennent aux intervalles trouvés ci-dessus. Or on sait qu'à de très petites distances du méridien les différences entre la hauteur méridienne et les hauteurs voisines sont, à très peu près, proportionnelles aux quarrés des temps écoulés depuis ou avant midi : on aura donc la correction qui convient à un intervalle donné, en multipliant la correction trouvée dans la table par le quarré du nombre de minutes compris dans cet intervalle. Ainsi la correction pour la premiere observation sera $4''$, 4 multiplié par le quarré de $3\frac{1}{3}$; celle de la seconde observation sera $4''$, 4 multiplié par le quarré de $1\frac{43}{60}$, et ainsi de suite.

Pour simplifier cette opération, j'ai formé la petite table XI, dans laquelle la premiere colonne exprimant les intervalles écoulés, la seconde colonne donne les quarrés des nombres de minutes qui composent ces intervalles. Voici la maniere de faire usage de cette table.

On cherchera d'abord dans la premiere colonne le premier intervalle $3'\ 20''$, et on trouvera à côté le nombre	11, 1
A côté du second intervalle $1'\ 43''$, on trouvera . . .	3, 0
A côté du troisieme intervalle $15''$	0, 1
Et à côté du quatrieme intervalle $4'\ 4''$	16, 5
Somme des nombres	30, 7
Dont le quart est	7, 7
Ce nombre 7, 7 sera le terme moyen par lequel il faut multiplier la correction $4''$, 4 pour avoir la correction moyenne des quatre observations : or $4''$, 4 multiplié par 7, 7 donne	$34''$
Ajoutant donc cette quantité à la hauteur moyenne approchée, trouvée ci-dessus	$74°$. $59'$. $15''$
On aura pour la HAUTEUR MÉRIDIENNE corrigée . . .	74 . 59 . 49

Il ne restera plus qu'à calculer la latitude d'après cette hauteur méridienne, de la maniere que nous l'avons expliqué précédemment.

Il est aisé de voir que cette maniere d'observer la latitude doit donner une grande précision, parceque la hauteur méridienne de l'astre se détermine par plusieurs observations croisées. Mais il est inutile de s'en servir dans les circonstances ordinaires de la navigation, parcequ'alors, ainsi que je l'ai déja dit ailleurs, une simple observation d'une hauteur méridienne de l'astre donne la latitude avec une exactitude suffisante.

Calcul des observations de la latitude par deux hauteurs du soleil, dont l'une est prise à une petite distance de midi, et l'autre quelques heures avant ou après midi.

Exemple premier.

Le 2 avril 1787, étant par 40° de longitude estimée à l'ouest de Paris, on a observé deux hauteurs du soleil.

La premiere observation a été faite à $0^h\ 22'\ 39''$ d'une montre à secondes, et a donné pour la hauteur vraie du centre de l'astre, toutes corrections faites, 61° 1'. La latitude estimée étoit alors 33° 13' nord, et le soleil avoit été observé du côté du pole abaissé sous l'horizon, c'est-à-dire du côté du pole sud.

La seconde observation a été faite à $3^h\ 10'\ 31''$ de la montre, et a donné pour hauteur moyenne du centre de l'astre 37° 6', la latitude estimée étant alors 33° 4'.

Enfin, dans l'intervalle des observations, le vaisseau a parcouru 7' de longitude à l'ouest. On demande la latitude au temps de chaque observation.

1°. On calculera l'angle horaire de l'observation éloignée du méridien pour deux suppositions de latitude, dont l'une sera la latitude estimée, et l'autre sera cette même latitude augmentée de 10'.

2°. On cherchera l'angle horaire que le soleil aura décrit relativement au vaisseau dans l'intervalle des deux observations; et, prenant la différence entre cet angle horaire et ceux qui auront été trouvés précédemment par le calcul de l'observation éloignée du méridien, on aura, pour les deux suppositions de latitude, l'angle horaire de l'observation voisine du méridien.

3°. Au moyen de ce second angle horaire, la hauteur de l'astre et sa distance polaire étant d'ailleurs connues, on calculera la latitude pour les deux suppositions.

4°. Enfin, des deux résultats ainsi trouvés, on conclura par interpollation la latitude cherchée.

Calcul de l'observation éloignée du méridien.

On cherchera la distance polaire au temps de l'observation éloignée du méridien, qu'on trouvera de 84° 54′; et ensuite, connoissant la hauteur observée 37° 6′, on calculera l'angle horaire pour les deux suppositions de latitude, dont l'une sera la latitude estimée 33° 4′, et l'autre sera 33° 4′ + 10′. Voici le type de ce premier calcul.

		1re supposition.		2me supposition.
Hauteur du soleil	37°. 6′. 0″			
Latitude.	33 . 4 . 0	com. cos. 0 . 0767372	. . + 10′. . .	0 . 0775623
Distance polaire	84 . 54 . 0	com. sin. 0 . 0017228		0 . 0017228
Somme	155 . 4 . 0			
Demi-somme	77 . 32 . 0	cos. 9 . 3341955	. . + 5 . . .	9 . 3313285
Demi-som. moins haut. .	40 . 26 . 0	sin. 9 . 8119521	. . + 5 . . .	9 . 8126923
Somme		19 . 2246076		19 . 2233059
Demi-somme		9 . 6123038		9 . 6116529
C'est le log. sin. du demi-ang. hor.		24°. 10′. 35″		24°. 8′. 16″
Ang. hor.		48 . 21 . 10		48 . 16 . 32

On voit que nous avons mis à côté l'un de l'autre les deux calculs de l'angle horaire pour les deux suppositions de latitude. Dans le second calcul, le premier logarithme est le complément cosinus de 33° 4′ + 10′, ou 33° 14′, parceque la latitude est supposée augmentée de 10′; le second logarithme est le même que dans le premier calcul, parceque la distance polaire est supposée n'avoir pas varié; le troisieme est le cosinus de la demi-somme augmentée de 5′, parceque, la latitude étant supposée plus forte de 10′, la demi-somme doit croître seulement de 5′; enfin le dernier logarithme est le sinus de 40° 26′ + 5′, ou 40° 31′, parceque, dans la même supposition, la demi-somme moins la hauteur a augmenté également de 5′.

Angle horaire de l'observation voisine du méridien.

On cherchera d'abord l'angle horaire que le soleil aura décrit relativement au vaisseau.

La premiere observation a été faite à	0h. 22′. 39″
La seconde a été faite à	3 . 10 . 31
Donc, intervalle des deux observations . . .	2 . 47 . 52
Ce qui, réduit en degrés, donne	41°. 58′

Cet angle 41° 58′ est l'angle horaire réel décrit par le soleil dans l'intervalle des observations ; mais, pendant ce temps-là, le vaisseau a parcouru, dans le même sens que le soleil, 7′ de longitude à l'ouest, ce qui diminue d'autant le mouvement du soleil par rapport au vaisseau. Ainsi, de l'angle horaire ci-dessus, on retranchera . . . . 7′

Et on aura l'angle horaire relatif du soleil . . . 41° . 51

	1ère supposition.	2me supposition.
Maintenant les angles horaires trouvés précédemment pour l'observation eloignée du méridien, sont	48° . 21′ . 10″	48° . 16′ . 32″
Prenant la différence entre ces angles et l'ang. horaire relatif qu'on vient de trouver.	41 . 51 . 0	41 . 51 . 0
On aura les angles horaires de l'observation voisine du méridien	6 . 30 . 10	6 . 25 . 32

Calcul de l'observation voisine du méridien.

On cherchera la distance polaire au temps de l'observation voisine du méridien, qu'on trouvera de 84° 56′ 45″ ; ensuite on calculera la latitude ainsi que je vais l'expliquer, en faisant toujours le calcul pour les deux suppositions à la fois.

On écrira l'un au-dessous de l'autre le log. cos. de l'angle horaire et le log. tangente de la distance polaire : on prendra leur somme, qu'on cherchera dans les log. tangentes des tables, et on aura pour chaque supposition un angle subsidiaire dont on se servira dans la suite du calcul. Il faut observer que si la distance polaire est plus grande que 90°, l'angle subsidiaire doit aussi être plus grand que 90°, et par conséquent il doit être alors le complément à 180° de l'angle donné par les tables.

Ensuite on écrira encore l'un au-dessous de l'autre, et toujours pour les deux suppositions, le log. sinus de l'angle subsidiaire, le log. sinus de la hauteur du soleil, le complément sinus de la distance polaire, et le complément cosinus du second angle horaire. La somme de ces quatre logarithmes sera le log. sinus d'un nouvel angle, qu'on cherchera dans les log. sinus des tables.

Maintenant si, lors de l'observation voisine du méridien, le soleil s'est trouvé du côté du pole abaissé sous l'horizon, on ajoutera le second angle trouvé à l'angle subsidiaire, et la somme sera le complément de la latitude à 180°. Mais si le soleil a été observé du côté du pole élevé sur l'horizon, on aura la latitude en prenant la différence des deux angles trouvés. Voici le type du calcul.

	1re supposition.	2me supposition.
Log. cosinus angles horaires	9 . 9971969	9 . 9972632
Log. tang. distance polaire 84° 56′ 45″	1 . 0533445	1 . 0533445
Somme	1 . 0505414	1 . 0506077
Ce sont les log. tang. des angles subsidiaires	84°. 54′. 47″	80°. 54′. 50″
Log. sinus des angles subsidiaires	9 . 9982862	9 . 9982866
Log. sinus de la hauteur 61° 1′	9 . 9418893	9 . 9418893
Comp. sin. distance polaire 84° 56′ 45″.	0 . 0016919	0 . 0016919
Comp. cos. des angles horaires.	0 . 0028031	0 . 0027368
Somme . . .	9 . 9446705	9 . 9446046
Ce sont les log. sinus de . . .	61°. 41′. 18″	61°. 40′. 20″
Ajoutant les angles subsidiaires, parceque le soleil a été observé du côté du pole abaissé	84 . 54 . 47	84 . 54 . 50
On aura les comp. de la latitude à 180°	146 . 36 . 5	146 . 35 . 10
Donc latitude au temps de l'observation voisine du méridien dans les deux suppositions	33 . 23 . 55	33 . 24 . 50

Conclusion du calcul.

Il s'agit maintenant, au moyen des deux résultats qu'on vient de trouver, de conclure la vraie latitude : pour cela, de la premiere latitude on retranchera la seconde diminuée de 10′, et on aura une premiere différence. On retranchera pareillement de la premiere la latitude estimée au temps de l'observation voisine du méridien, et on aura une seconde différence : ensuite on fera cette proportion. La premiere différence est à la seconde comme 10′ est à un quatrieme terme, qu'on ajoutera à la latitude estimée, si les différences sont toutes deux positives ou toutes deux négatives, ou qu'on en retranchera si une seule différence est négative ; ce qui donnera la latitude cherchée.

Premiere latitude corrigée	33°. 23′. 55″
Deuxieme latitude corrigée moins 10′ . .	33 . 14 . 50
Premiere différence . . .	9 . 5
Premiere latitude corrigée	33 . 23 . 55
Deuxieme latitude estimée	33 . 13 . 0
Deuxieme différence	10 . 55

On fera donc cette proportion 9′ 5″ : 10′ 55″ :: 10′ à un quatrieme terme. On trouvera ce quatrieme terme en se servant de la table IX des log. logist.

Log. 10′ 55″	1 . 2172
Log. 10′	1 . 2553
Com. log. 9′ 5″	8 . 7030
. . . .	1 . 1755
C'est le logarithme de.	0° . 12′ . 2″

Les deux différences étant positives l'une et l'autre, on ajoutera cette quantité à la latitude estimée	33 . 13 . 0
Et on aura la latitude cherchée	33 . 25 . 1

Deuxieme exemple.

Le 1er juillet 1787, étant par 49° à l'ouest de Paris, on a fait les deux observations suivantes de la hauteur du soleil.

	Heures des observations.	Hauteurs observées.	Latitudes estimées.
Premiere	$9^h . 23' . 15''$ . . .	$43° . 2' . 0''$	$2° . 59'$
Seconde	12 . 31 . 7 . . .	63 . 17 . 30	3 . 2

Dans l'observation voisine du méridien, le soleil avoit été observé du côté du pole élevé sur l'horizon, c'est-à-dire du côté du nord : enfin le vaisseau avoit parcouru 3′ de longitude à l'est dans l'intervalle des deux observations. On demande la latitude du vaisseau.

On trouve d'abord l'intervalle entre les deux observations. .	$3^h . 7' . 52''$
Ce qui, réduit en degrés, donne	$46° . 58 . 0$
Mouvement du vaisseau à l'est, qui augmente le mouvement relatif du soleil, et qu'il faut par conséquent ajouter.	3
Donc angle horaire relatif du soleil	$47° . 1' . 0$
Distance polaire au temps de la premiere observation . .	66 . 52 . 20
Et au temps de la deuxieme observation	66 . 52 . 40

Calcul de l'observation éloignée du méridien.

		1re supposition.		2me supposition.
Hauteur du soleil	$43° . 2' . 0''$			
Latitude	2 . 59 . 0	com. cos. 0 . 0005890 . .	+ 10′ . . .	0 . 0006567
Distance polaire	66 . 52 . 20	com. sin. 0 . 0363863		0 . 0363863
Somme	112 . 53 . 20			
Demi-somme. . .	56 . 26 . 40	cos. 9 . 7425250 . .	+ 5 . . .	9 . 7415712
Demi-som. moins la haut.	13 . 24 . 40	sin. 9 . 3653692 . .	+ 5 . . .	9 . 3680098
Sommes		19 . 1448695		19 . 1466240
Demi-sommes		9 . 5724347		9 . 5733120
C'est le sin. du demi-ang. horaire		$21° . 56' . 21''$		$21° . 59' . 9''$
Angle horaire		43 . 52 . 42		43 . 58 . 18
Ang. horaire relatif du soleil		47 . 1 . 0		47 . 1 . 0
Donc second angle horaire		3 . 8 . 18		3 . 2 . 42

Calcul de l'observation voisine du méridien.

	1re supposition.	2me supposition.
Log. cos. des seconds angles horaires trouvés	9 . 9993482	9 . 9993864
Tang. distance polaire 66° 52′ 40″	0 . 3695776	0 . 3695776
Sommes . . .	0 . 3689258	0 . 3689640
Ce sont les log. tang. des angles subsidiaires	66°. 50′ . 52″	66°. 50′ . 55″
Log. sinus des angles subsidiaires	9 . 9635345	9 . 9635372
Log. sinus hauteur du soleil 63° 17′ 30″	9 . 9510003	9 . 9510003
Com. sin. distance polaire 66° 52′ 40″	0 . 0363683	0 . 0363683
Com. cos. des angles horaires	0 . 0006518	0 . 0006136
Sommes . . .	9 . 9515549	9 . 9515194
Ce sont les log. sinus des angles	63°. 26′ . 15″	63°. 25′ . 42″
Angles subsidiaires	66 . 50 . 52	66 . 50 . 55
Prenant les différences de ces deux angles, parceque le soleil a été observé du côté du pole élevé, on aura les latitudes corrigées	3 . 24 . 37	3 . 25 . 13

Conclusion du calcul.

Premiere latitude corrigée	3°. 24′ . 37″		
Deuxieme latitude corrigée moins 10′	3 . 15 . 13		
Premiere différence	0 . 9 . 24	com. log.	8 . 7179
Premiere latitude corrigée	3 . 24 . 37		
Deuxieme latitude estimée	3 . 2 . 0		
Deuxieme différence	0 . 22 . 37	log.	9008
		log. 10′	1 . 2553
		Somme	0 . 8740
		C'est le log. de	0°. 24′ . 4″
		Ajoutant la la latitude estimée	3 . 2 . 0
		On aura la latitude cherchée	3 . 26 . 4

Nous remarquerons ici que, si l'observation éloignée du méridien étoit faite lorsque l'astre passe au premier vertical, on pourroit se dispenser de faire le calcul pour deux suppositions de latitude. En effet, l'erreur dans la latitude supposée n'en produiroit alors qu'une insensible dans la valeur du premier angle horaire, non plus que dans celle du second angle horaire qui est conclu du premier : ainsi la premiere latitude corrigée donneroit tout de suite, et sans autre correction, la latitude cherchée.

Calcul des observations de l'azimut du soleil.

Le 4 juillet 1787, étant par 30° 43′ de latitude estimée nord, et par une longitude de 48° à l'ouest de Paris, on a observé une hauteur du soleil qui, toutes corrections faites, a donné pour la hauteur du centre 7° 43′, et en même temps on a relevé le soleil au compas à l'ouest 28° nord, ou au nord 62° ouest. On demande la variation du compas.

On cherchera d'abord, au moyen de *la Connoissance des Temps*, la distance polaire du soleil lors de l'observation, et on trouvera 67° 8′.

Cela posé, on écrira, les unes au-dessous des autres, la distance polaire, la hauteur de l'astre, et la latitude : on prendra la somme et la demi-somme de ces quantités, ainsi que la différence entre la demi-somme et la distance polaire : ensuite on écrira à côté les compléments arithmétiques des logarithmes cosinus de la hauteur de l'astre et de la latitude; et les logarithmes cosinus de la demi-somme et de la différence; on additionnera ces quatre logarithmes, et la moitié de leur somme sera le cosinus de la moitié de l'angle azimutal pris depuis le méridien du côté du pole élevé. Prenant enfin le double de cet angle, et le retranchant du relèvement fait au compas, compté pareillement depuis le méridien, on aura la variation cherchée.

Distance polaire	67°. 8′. 0″		
Hauteur du centre	7 . 43 . 0	comp. cos.	0 . 0039508
Latitude	30 . 43 . 0	comp. cos.	0 . 0656512
Somme	105 . 34 . 0		
Demi-somme	52 . 47 . 0	cos.	9 . 7816339
Demi-somme moins la distance	14 . 21 . 0	cos.	9 . 9862340
Somme			19 . 8374699
Demi-somme, ou cos. du demi-angle azimutal			9 . 9187349
Demi-angle azimutal, à commencer du nord			33° . 58′ . 10″
Angle azimutal			67 . 56 . 20
Relèvement fait au compas, en comptant depuis le nord			62 . 0 . 0
Prenant la différence de ces deux quantités, on aura la déclinaison de l'aiguille, ou la variation de			5 . 56 . 20

Pour savoir maintenant dans quel sens est cette variation, on remarquera que, pour faire marquer au compas un relèvement égal à l'angle azimutal 67° 56′, il auroit fallu faire tourner la rose dans le sens de l'est à l'ouest; par conséquent la rose déclinoit à l'ouest.

On détermine plus ordinairement la variation du compas par l'observation du soleil à son lever ou à son coucher; et on se sert, pour calculer ces observations, des tables d'amplitude qu'on trouve dans la plupart des ouvrages nautiques, et que je donne ici (*voyez* table XIII) : mais il faut remarquer que ces tables sont calculées pour l'instant où le soleil est à l'horizon vrai, et l'on trouve qu'alors cet astre paroît élevé d'environ 18′ au-dessous de l'horizon visuel de la mer. D'après cela il faut faire le relèvement lorsque le bord inférieur du soleil est éloigné de l'horizon d'un peu plus que son demi-diametre. Voici un exemple du calcul de ces observations.

Le 23 avril 1787, étant par 50° de longitude à l'ouest de Paris, et par 30° de latitude nord, on a relevé au compas le soleil, à son coucher, de la maniere que nous l'avons dit, et le relèvement a donné l'ouest 19° 30′ nord. On demande la variation.

On cherchera d'abord, au moyen de *la Connoissance des Temps*, la déclinaison du soleil au temps de l'observation, et on la trouvera de 12° 44′ nord. Cela posé, dans la table XIII, on cherchera l'amplitude qui convient à 30° de latitude et à 12° 44′ de déclinaison, et on trouvera 14° 44′; ce qui indique que le vrai gisement du soleil, par rapport au vaisseau,

étoit	l'ouest	14°. 44′ nord.
Mais le compas donnoit	l'ouest	19 . 30
Donc le compas déclinoit de		4 . 46

Et on verra aisément que la variation étoit nord-ouest.

Calcul des observations faites pour déterminer astronomiquement l'azimut d'un objet quelconque, ou l'air de vent auquel on releve cet objet.

Le 25 avril 1787, à $7^{h}\frac{1}{2}$ du matin, étant par une latitude estimée de 28° 6′ nord, et par une longitude de $19^{\circ}\frac{1}{2}$ à l'ouest de Paris, on a pris une hauteur du bord inférieur du soleil de 11°42′; en même temps un second observateur a mesuré avec un cercle de réflexion, ou avec un octant, la distance apparente entre le sommet d'une montagne vue dans l'éloignement, et le bord le plus voisin du soleil; et cette distance s'est trouvée de 46° 19′. La hauteur apparente de la montagne a été observée de 4° 5′, et elle étoit du côté du nord par rapport au soleil. Enfin les observateurs étoient élevés de seize pieds au-dessus du niveau de la mer. On demande l'azimut de la montagne, ou l'air de vent auquel on la relevoit.

On cherchera d'abord la hauteur apparente et la hauteur vraie du centre du soleil, la distance apparente de cette montagne, et ensuite la distance du soleil au pole élevé sur l'horizon.

Hauteur observée du bord inférieur du soleil	11°.	42'.	0''
Dépression de l'horizon à retrancher	—	4.	3
Il reste	11.	37.	57
Demi-diametre à ajouter	+	15.	56
Donc HAUTEUR APPARENTE du centre du soleil	11.	53.	53
Réfraction à retrancher	—	4.	24
Donc HAUTEUR VRAIE du centre du soleil	11.	49.	29
Distance mesurée de la montagne au bord le plus voisin du soleil	16.	19.	0
Demi-diametre du soleil à ajouter	+	16.	0
Donc distance APPARENTE du centre du soleil à la montagne	46.	35.	0
Hauteur observée de la montagne	4.	5.	0
Dépression pour seize pieds	—.	4.	0
Donc HAUTEUR APPARENTE de la montagne	4.	1.	0
Enfin on trouvera pour LA DISTANCE du soleil au pole élevé sur l'horizon	103.	13.	0

Cela posé, on déterminera d'abord la distance azimutale entre le pole nord et le soleil, par la méthode donnée dans l'article précédent, et on trouvera cette distance de 112° 8'.

On cherchera ensuite la différence d'azimut entre le soleil et la montagne de la maniere suivante :

Distance apparente du soleil à la montagne	46°. 35'		
Hauteur apparente du soleil	11. 54	comp. cos.	0. 0094352
Hauteur apparente de la montagne	4. 1	comp. cos.	0. 0010681
Somme	62. 30		
Demi-somme	31. 15	cos.	9. 9319213
Demi-somme moins la distance . . .	15. 20	cos.	9. 9842589
		Somme. . . .	19. 9266835
		Demi-somme. . . .	9. 9633417
C'est le cosinus du demi-angle azimutal			23°. 13
Donc angle azimutal.			46. 26
Mais on a trouvé ci-dessus l'angle azimutal du soleil			112. 8
Retranchant l'un de l'autre, on aura l'azimut de la montagne			65. 42

Ainsi cette montagne étoit au nord 65° 42' est de l'observateur, ou à l'est 24° 16' nord.

Il est aisé de voir que cette maniere de déterminer le gisement de deux points donne une exactitude beaucoup plus grande que le compas; on pourra donc s'en servir avec avantage dans les opérations hydrographiques qui demandent beaucoup de précision.

Calcul des observations de longitude, par les distances de la lune au soleil, faites par trois observateurs.

Le 26 avril 1787, à cinq heures du soir, étant par 16° 10′ de latitude nord, et par 27° de longitude estimée à l'ouest de Paris, le thermometre de Réaumur marquant 20°, et le barometre étant à 28 pouces, trois observateurs ont fait les observations suivantes des distances de la lune au soleil, et des hauteurs de ces deux astres sur l'horizon.

Hauteurs du bord inf. ☉.	Hauteurs du bord inf. ☾	Angle total marqué par le cercle de réf.
19°. 14′. 30″	43°. 42′. 0″	
19 . 5 . 0	43 . 52 . 0	
18 . 51 . 0	44 . 5 . 0	
18 . 33 . 0	44 . 23 . 0	696°. 53′
18 . 17 . 30	44 . 39 . 0	
18 . 4 . 30	44 . 51 . 30	

Les observations des hauteurs ont été faites à 16 pieds au-dessus du niveau de la mer.

L'observateur qui mesuroit les distances des deux astres a eu l'attention de remarquer à chaque observation le point du champ de la lunette où il appercevoit le contact, et il en a conclu les déviations suivantes:

	Déviations.
Premiere observation	20
Deuxieme.	40
Troisieme.	0
Quatrieme	35
Cinquieme	15
Sixieme	25

Enfin il avoit été reconnu, par une vérification antécédente, pareille à celle qui est expliquée pag. 22, que le grand miroir n'avoit pas ses surfaces exactement paralleles, et que, dans la mesure d'un angle de 93°, il donnoit 12″ de trop. On demande de conclure de ces observations la longitude du vaisseau.

1°. On réduira toutes les observations à une seule observation de la distance, et à une observation de la hauteur de chaque astre, qui seront censées faites au même instant.

2°. On trouvera, au moyen de *la Connoissance des Temps*, la parallaxe horizontale et le demi-diametre de la lune, ainsi que le demi-diametre du soleil au temps de l'observation.

3°. Ces premiers éléments de calcul étant connus, on cherchera la distance apparente des centres, et les hauteurs apparentes et vraies de chaque astre.

4°. On calculera la distance réduite des centres telle qu'elle seroit vue du centre de la terre.

5°. De la distance réduite connue, on conclura l'heure de Paris au temps de l'observation.

6°. On calculera l'heure du vaisseau.

7°. Enfin prenant la différence entre l'heure de Paris et l'heure du vaisseau, et réduisant cette différence en degrés, on aura la longitude du vaisseau.

Réduction des observations à trois observations simultanées.

On divisera par 6 les sommes des hauteurs observées de chaque astre, ainsi que l'angle total des six distances donné par le cercle de réflexion, et on aura les trois observations simultanées suivantes :

Hauteur moyenne du bord inférieur ☉ . . .	18°. 40′. 55″
Hauteur moyenne du bord inférieur ☾ . . .	44 . 15 . 25
Distance moyenne observée ☉☾	116 . 8 . 50

Parallaxe horizontale ☾, *et demi-diametre pris dans* la Connoissance des Temps.

Pour trouver la parallaxe de la lune, je remarque qu'il étoit cinq heures du soir à bord du vaisseau lorsqu'on a fait l'observation, et que le vaisseau étoit 27°, ou en temps, 1ʰ 48′ à l'ouest de Paris; par conséquent il étoit 6ʰ 48′ à Paris.

On cherchera donc la parallaxe de la lune pour le 26 avril à $6^h\ 48'$, et on trouvera . . . . $56'.\ 55''$

On trouvera aussi pour la même heure le demi-diametre de la lune . . . . $15'.\ 32''$

Et ajoutant l'augmentation pour 44° de hauteur prise dans la table IV 11

On aura le demi-diametre ☾ corrigé . . . 15 . 43
Enfin on aura le demi-diametre du soleil pour le 26 avril . . 15 . 56

Distance apparente des centres et hauteurs apparentes et vraies de chaque astre.

Distance observée des deux bords des disques	$116^\circ.\ 8'.\ 50''$
Ajoutant le demi-diametre du ☉.	15 . 56
Et le demi-diametre corrigé de ☾	15 . 43
On aura une premiere distance apparente.	116 . 40 . 29

Mais il faut corriger cette distance des erreurs de la déviation et du défaut de parallélisme qu'on a supposé dans les surfaces du grand miroir.

D'abord la table V donnera les corrections des déviations comme il suit.

On y trouvera pour l'angle observé de 116°, et pour la premiere déviation supposée de $20'$	$11''$
Pour la deuxieme, de $40'$	45
Pour la troisieme.	0
Pour la quatrieme, de $25'$	35
Pour la cinquieme, de $20'$.	11
Et pour la sixieme, de $25'$.	18
Somme.	120
dont la sixieme partie est	20

Retranchant cette quantité de la distance apparente ci-dessus, parceque l'effet de la déviation est toujours de donner des angles trop grands, il restera . . . . 116 . 40 . 9

Pour avoir l'erreur du grand miroir, qui convient à l'angle mesuré de 116°, on se servira de la table VI. On a supposé que ce miroir donnoit $12''$ de trop pour l'angle mesuré de 93°; mais, dans la table VI, la correction pour 93° est $35''$, et pour 116° elle est 74″. On fera donc cette proportion 35″ : 74″ :: 12″ est à un quatrieme terme qu'on trouvera = 26″, et ce sera la correction qui convient à l'angle observé 116° ; ainsi, le miroir donnant les angles trop grands, il faudra retrancher de la distance apparente . . . . 26″

Et il restera la DISTANCE APPARENTE corrigée	116°. 39′. 43″
Hauteur observée du bord inférieur du soleil	18 . 40 . 55
Retranchant la dépression pour 16 pieds de hauteur . .	4 . 3
Il restera . . .	18 . 36 . 52
Ajoutant le demi-diametre	15 . 56
On aura LA HAUTEUR APPARENTE du centre du soleil . .	18 . 52 . 48
Ou plus simplement	18 . 52 . 50
Retranchant la réfraction moins la parallaxe pour 18° 50′ de hauteur	2 . 37
Il restera . . .	18 . 50 . 13
Ajoutant la correction de la table II pour 20° du thermometre et pour 19° de hauteur	6
Et, outre cela, pour 28 pouces de hauteur du barometre .	1
On aura LA HAUTEUR VRAIE du centre du soleil	18 . 50 . 20
Hauteur observée du bord inférieur de ☾	44 . 15 . 25
Dépression pour 16 pieds à retrancher	4 . 3
Il restera	44 . 11 . 22
Ajoutant le demi-diametre corrigé	15 . 43
On aura LA HAUTEUR apparente du centre ☾	44 . 27 . 5
Ou plus simplement	44 . 27 . 10
Ajoutant la parallaxe moins la réfraction prise dans la table VII, savoir,	
Pour 44° 27′ de hauteur, et 56′ de parallaxe horizontale	39 . 1
Et pour la même hauteur et 55″ de parallaxe	0 . 39
Enfin, pour la correction du therm. et du barometre.	2
On aura LA HAUTEUR VRAIE du centre ☾	45 . 6 . 52

Calcul de la distance réduite.

On écrira d'abord, les unes sous les autres, la distance apparente des centres, la hauteur apparente du centre du soleil, et la hauteur apparente du centre de la lune; on prendra la somme et la demi-somme de ces trois quantités, et la différence de la demi-somme à la distance apparente; on écrira encore au-dessous la hauteur vraie du centre du soleil, la hauteur vraie du centre de la lune, et la somme et demi-somme de ces deux hauteurs : après cela on mettra à côté des deux hauteurs apparentes les compléments arithmétiques des log. cosinus de ces hauteurs; et, à côté de la demi-somme, de la demi-somme moins la distance, de la hauteur vraie du soleil, et de la hauteur vraie de la lune, les log. cosinus de ces quantités. On fera une somme de ces six logarithmes dont on prendra la moitié qu'on retranchera du log. cosinus de la demi-somme des deux hauteurs vraies, et on cherchera ensuite la différence dans les log. sinus des tables, ce qui donnera un angle subsidiaire A : enfin on prendra le log. cos. de cet angle A, qu'on ajoutera au log. cosinus de la demi-somme des hauteurs vraies, et on aura le log. sinus de la demi-distance réduite des centres. Le type suivant expliquera davantage la méthode.

Nous remarquerons que, pour avoir moins de parties proportionnelles à prendre dans les logarithmes, nous avons d'abord supprimé 43″ dans la distance apparente, et que nous les avons ensuite restituées à la fin du calcul; ce qui ne change rien au résultat. Si la somme des secondes des hauteurs apparentes n'avoit pas été un multiplié de 20″, alors il n'auroit fallu supprimer que 33″ de la distance apparente, et la somme des trois premieres quantités seroit devenue un multiplié de 20″.

Distance appar. ☉ ☾	116° . 39′ . 0″			
Hauteur apparente ☉ . . .	18 . 52 . 50	com. cos.	0 . 0240192	
Hauteur apparente ☾ . . .	44 . 27 . 10	com. cos.	0 . 1464065	
Somme. . .	179 . 59 . 0			
Demi-somme . .	89 . 59 . 30	cos.	6 . 1626961	
Demi-som. moins dist. . .	26 . 39 . 30	cos.	9 . 9511907	
Hauteur vraie ☉	18 . 50 . 20	cos.	9 . 9760886	
Hauteur vraie ☾	45 . 6 . 52	cos.	9 . 8486158	
Somme. . .	63 . 57 . 12	Somme	36 . 1090169	
		Demi-som.	18 . 0545084	
				diff. 8 . 1259775
Demi-somme. . .	31 . 58 . 36	cos.	9 . 9285309	A = 0 . 45′ . 57″
		cos. A	9 . 9999611	
Somme			9 . 9284920	
C'est le log. sinus de la demi-distance			58° . 0′ . 54″	
Distance . . .			116 . 1 . 48	
Restituant la quantité supprimée			43	
On aura enfin la DISTANCE RÉDUITE			116 . 2 . 31	

Calcul de l'heure de Paris au temps de l'observation.

La distance réduite étant ainsi trouvée, il faut en conclure l'heure de Paris au temps de l'observation. Pour cela, dans les tables des distances de la lune aux astres, insérées dans *la Connoissance des Temps*, on cherchera, pour le 26 avril, les deux distances de la lune au soleil, entre lesquelles se trouve la distance observée; on les mettra au-dessous de la distance réduite qu'on vient de trouver, en écrivant la premiere celle qui a précédé l'observation; ensuite on prendra les différences entre la premiere quantité et la seconde, et entre la seconde et la troisieme. Enfin on fera cette proportion : La seconde différence est à la premiere, comme trois heures est à un quatrieme terme qu'on ajoutera à l'heure de la distance qui a précédé l'observation, et on aura l'heure de Paris cherchée.

Distance réduite trouvée ci-dessus . . .		$116^\circ . \; 2' . \; 31''$			
Distances prises dans les tables.	Premiere, à 6^h . .	$115 . \; 39 . \; 5$	diff.	$0^\circ . \; 23' . \; 26''$	
	Seconde, à 9 . .	$117 . \; 9 . \; 9$	diff.	$1 . \; 30 . \; 4$	

On fera donc cette proportion

$1^\circ \, 30' \, 4'' : 0^\circ \, 23' \, 26'' :: 3^h$ est à un quatrieme terme.

Pour trouver ce quatrieme terme, on se servira des log. logistiques de la table IX de la maniere suivante.

Du log. logistique du second terme	$0^\circ . \; 23' . \; 26''$	8854
On retranchera le log. du premier terme. .	$1 . \; 30 . \; 4$	3007
Il restera		5847
C'est le logarithme de	$0^h . \; 46' . \; 50''$	
Qu'on ajoutera à l'heure de la distance qui précede. . . .	$6 . \; 0 . \; 0$	
Et on aura enfin L'HEURE DE PARIS	$6 . \; 46 . \; 50$	

Calcul de l'heure du vaisseau.

L'heure de Paris étant connue, il sera aisé d'en conclure la distance polaire du soleil.

Déclinaison du soleil le 26 mai à midi	$13^\circ . \; 34' . \; 31''$	bor.
Et le 27 mai à midi	$13 . \; 53 . \; 40$	
Différence . . .	$0 . \; 19 . \; 9$	

D'où on trouvera, en prenant les parties proportionnelles, qu'à $6^h\,47'$, heure de Paris au temps de l'observation, la déclinaison étoit	$13°.\ 39'.\ 56''$ bor.
Et par conséquent la distance au pole élevé.	$76\ .\ 20\ .\ 4$
Ou simplement	$76\ .\ 20\ .\ 0$

Maintenant, au moyen de cette distance polaire connue, de la latitude estimée $16°\,10'$, et de la hauteur vraie du centre $18°\,50'\,20''$, on calculera l'heure comme on l'a enseigné précédemment.

Hauteur vraie ☉	$18°.\ 50'.\ 20''$		
Latitude	$16\ .\ 10\ .\ 0$	com. cos.	$0\ .\ 0175226$
Distance polaire . . .	$76\ .\ 20\ .\ 0$	com. sin.	$0\ .\ 0124737$
Somme . . .	$111\ .\ 20\ .\ 20$		
Demi-somme . . .	$55\ .\ 40\ .\ 10$	cos.	$9\ .\ 7512533$
Demi-somme — haut.	$36\ .\ 49\ .\ 50$	sin.	$9\ .\ 7777534$
Somme			$19\ .\ 5590030$
Demi-somme			$9\ .\ 7795015$
C'est le log. sin. du demi-ang. hor.			$37°.\ 0'.\ 14''$
Multipliant par . .			8
On aura L'HEURE DU VAISSEAU.			$4^h.\ 56'.\ 1''.\ 52'''$

Conclusion du calcul.

HEURE DE PARIS trouvée ci-dessus	$6^h.\ 46'.\ 50''$
HEURE DU VAISSEAU	$4\ .\ 56\ .\ 2$
Différence de longitude en temps entre le vaisseau et Paris	$1\ .\ 50\ .\ 48$
Différence de LONGITUDE en degrés	$27°.\ 42'.\ 0$
Dont le vaisseau sera plus ouest que Paris.	

Pour mieux faire voir l'ensemble des opérations que nous venons d'expliquer, nous allons les réunir dans un seul tableau qui montrera la disposition qu'on doit donner à toutes les parties du calcul.

Éléments du calcul.

LATITUDE.	16°. 10
Heure approchée.	5h. 0
Long. estimée . .	27 . 0
Heure de Paris. .	6h. 48
Demi-diam. ☉. .	15′ . 56
Demi-diam. ☾ .	15 . 32
Aug. du ½ diam.	0 . 11
Demi-diam. corr.	15′. 43″
Parall. hor. ☾ . .	56 . 55
Dis. obs. ☉☾	116°. 8′. 50″
Demi-diam. ☉	0 . 15 . 56
Demi-diam. ☾	0 . 15 . 43
	116 . 40 . 29
Déviat. . . . —	0 . 20
	116 . 40 . 9
Err. du miroir. —	0′. 26
DIST. AP. ☉☾	116 . 39 . 43
Haut. obs. ☉	18 . 40 . 55
Dép. de l'hor. —	4 . 3
	18 . 36 . 52
Demi diam. ☉ +	15 . 56
HAUT. APP. ☉	18 . 52 . 50
Réf. — par. . —	2 . 37
	18 . 50 . 13
Corr. therm. +	0 . 6
Corr. bar. . +	0 . 1
HAUT. AP. ☉.	18 . 50 . 20
Haut. obs. ☾ .	44 . 15 . 25
Dép. de l'hor. —	4 . 3
	44 . 11 . 22
Demi-diam. ☾ +	15 . 43
HAUT. APP. ☾	44 . 27 . 10
Par. — réf. +	39 . 1
+	0 . 39
Ther. et bar. +	0 . 2
HAUT. VR. ☾	45 . 6 . 52

Réduction de la distance.

Dist. app. ☉☾	116°. 59′. 0″			
Haut. app. ☉ .	18 . 52 . 50	com. cos.	0 . 0240192	
Haut. app. ☾ .	44 . 27 . 10	com. cos.	0 . 1464065	
Somme	179 . 59 . 0			
Demi-somme.	89 . 59 . 30	cos.	6 . 1626961	
Moins la dist.	26 . 39 . 30	cos.	9 . 9511907	
Haut. vraie ☉	18 . 50 . 20	cos.	9 . 9760886	
Haut. vraie ☾	45 . 6 . 52	cos.	9 . 8486158	
Somme.	63 . 57 . 12	Somme	36 . 1090169	
		Demi-somme	18 . 0545084	
Demi-somme.	31 . 58 . 36	cos.	9 . 9285309	8 . 1259775 . sin. A
		cos. A	9 . 9999611	A = 0°. 45′ . 57″
		Somme	9 . 9284920	
C'est le sin. de la demi-distance			58°. 0′ . 54″	
Distance			116 . 1 . 48	
Quantité restituée			0 . 0 . 43	Différ. log. logi.
DISTANCE RÉDUITE			116 . 2 . 31	0°. 23′. 26″ 8854
Dist. prises dans les tables. 1re à 6h			115 . 39 . 5	1 . 30 . 4 3007
2me à 9h			117 . 9 . 9	
			Différ. . . .	58 47
			Ce qui répond à . . .	0h. 46′ . 50″
			Heure de la premiere distance . . .	6 . 0 . 0
			HEURE DE PARIS . . .	6 . 46 . 50

Calcul de l'heure du vaisseau.

Hauteur ☉.	18°. 50′. 20″		
Latitude . .	16 . 10 . 0	com. cos.	0 . 0175226
Dist. pol. .	76 . 20 . 0	com. sin.	0 . 0124737
Somme	111 . 20 . 20		
Dem. som.	55 . 40 . 10	cos.	9 . 7512533
Moins haut.	36 . 49 . 50	sin.	9 . 7777534
		Somme	19 . 5590030
		Demi-somme	9 . 7795015
C'est le sin. du demi-angle hor.			37° . 0′ . 14″
Multiplié par			8
HEURE DU VAISSEAU	4h. 56′. 1″. 52‴		
HEURE DE PARIS	6 . 46 . 50		
Différence en temps	1 . 50 . 48		
LONG. A L'OUEST DE PARIS	27° . 42′		

Déclinaison.

Décl. le 26	13°. 34′. 31″ bor.
Et le 27	13 . 53 . 40
Dif. en 24h	0 . 19 . 9
Part. proportionnelles.	
Pour 6h	0 . 4 . 47
Pour 45′	0 . 0 . 36
Pour 2′	0 . 0 . 2
Pour 6h 47′	0 . 5 . 25
Déclin. .	13 . 39 . 56
Dist. pol.	76 . 20 . 0

Calcul des observations de longitude faites par un seul observateur.

Le 26 avril 1787, étant par la même latitude et la même longitude qui ont été supposées dans l'exemple précédent, un observateur a fait, avec le cercle de réflexion, les observations suivantes des distances du soleil à la lune, et des hauteurs de ces deux astres sur l'horizon, en marquant l'heure d'une montre à secondes à l'instant de chaque observation.

	Heures des observations.	Angles donnés par le cercle de réflexion.
Premieres observations du bord inférieur du soleil.	$4^h.\ 58'.\ 3''$ $4.\ 58.\ 48$	. . $39^\circ.\ 52'$
Premieres observations du bord inférieur de la lune.	$4.\ 59.\ 40$ $5.\ 0.\ 15$	. . $86.\ 45$
Observations des distances.	$5.\ 1.\ 20$ $5.\ 2.\ 1$ $5.\ 2.\ 59$ $5.\ 4.\ 15$ $5.\ 5.\ 21$ $5.\ 6.\ 12$	. . $696.\ 53$
Secondes observations du bord inférieur du soleil.	$5.\ 7.\ 25$ $5.\ 8.\ 5$	. . $35.\ 26$
Secondes observations du bord inférieur de la lune.	$5.\ 8.\ 59$ $5.\ 9.\ 45$	. . $91.\ 13$

On demande de conclure de ces observations la longitude du vaisseau.

On prendra d'abord la somme des heures auxquelles on a observé les deux premieres hauteurs du soleil, et on la divisera par 2, ainsi que l'angle total des deux hauteurs donné par le cercle de réflexion; on fera la même chose pour les deux premieres hauteurs de la lune, et ensuite pour les secondes hauteurs du soleil et les secondes hauteurs de la lune; on prendra également la somme des heures auxquelles on a observé les distances, qu'on divisera par 6, ainsi que l'angle total des six distances donné par le cercle de réflexion, et alors toutes les observations seront réduites aux cinq suivantes:

Premiere hauteur du ☉ . . .	$19^\circ.\ 56'.\ 0''$	$4^h.\ 58'.\ 25''$
Premiere hauteur de ☾ . . .	$43.\ 22.\ 30$	$4.\ 59.\ 58$
Distances ☉☾ . . .	$116.\ 8.\ 50$	$5.\ 3.\ 41$
Deuxieme hauteur du ☉ . . .	$17.\ 43.\ 0$	$5.\ 7.\ 45$
Deuxieme hauteur de ☾ . . .	$45.\ 36.\ 30$	$5.\ 9.\ 22$

Il faut maintenant réduire les hauteurs de chaque astre à l'heure de la distance observée, ou, ce qui est la même chose, chercher quelle étoit la hauteur de chaque astre à $5^h\ 3'\ 41''$, temps de l'observation moyenne des distances.

Pour cela on prendra d'abord la différence entre les deux hauteurs de chaque astre, ainsi qu'entre les heures correspondantes ; ensuite la différence entre l'heure de la premiere hauteur et l'heure de la distance moyenne des deux astres ; et on fera cette proportion :

La différence entre les heures des hauteurs de l'astre est à la différence de ces mêmes hauteurs
Comme la différence entre l'heure de la premiere hauteur et l'heure de la distance moyenne
Est à un quatrieme terme.

On ajoutera ce quatrieme terme à la premiere hauteur, ou on l'en retranchera, suivant que la hauteur de l'astre ira en augmentant ou en diminuant, et on aura alors la hauteur de l'astre correspondante à la distance moyenne. Commençons par les hauteurs du soleil.

		Différences.
Heure de la premiere hauteur du soleil. .	$4^{h}.\ 58'.\ 25''$	. . $0^{\circ}.\ 9'.\ 20''$
Heure de la deuxieme hauteur	5 . 7 . 45	
Premiere hauteur du soleil	19 . 56 . 0	. . 2 . 13 . 0
Deuxieme hauteur	17 . 43 . 0	
Heure de la premiere hauteur	4 . 58 . 25	. . 0 . 5 . 16
Heure de la distance moyenne	5 . 3 . 41	

On fera donc cette proportion,

$9'\ 20'' : 2^{\circ}\ 13' :: 5'\ 16''$ est à un quatrieme terme qu'on trouvera égal à . . . . $1^{\circ}.\ 15'.\ 0''$

La hauteur du soleil ayant été en diminuant pendant l'observation, on retranchera cette quantité de la premiere hauteur du soleil . . . . 19 . 56 . 0

Et il restera LA HAUTEUR du soleil au temps de l'observation de la distance moyenne . . . . 18 . 41 . 0

Faisant les mêmes opérations pour les hauteurs de la lune, on parviendra à cette proportion,

$9'\ 24'' : 2^{\circ}\ 14' :: 3'\ 43''$ est à un quatrieme terme qu'on trouvera égal à. . . . . 0 . 52 . 58

La hauteur de la lune ayant été en augmentant, on ajoutera cette quantité à la premiere hauteur . . . . 43 . 22 . 30

Et on aura LA HAUTEUR cherchée de la lune . . . . 44 . 15 . 28

D'après cela toutes les observations se trouveront réduites aux trois observations simultanées suivantes :

Hauteur du bord inférieur ☉.	Hauteur du bord inférieur ☾.	Distance des deux disques.
$18^{\circ}.\ 41'.\ 0''$	$44^{\circ}.\ 12'.\ 48''$	$116^{\circ}.\ 8'.\ 50''$

Il ne restera plus qu'à calculer ces observations par le procédé expliqué dans l'exemple précédent.

Calcul des observations de longitude par les distances de la lune aux étoiles.

Il y a plusieurs manieres de faire ces observations : la premiere, en opérant comme pour les observations des distances de la lune au soleil, soit qu'on emploie trois observateurs, soit qu'on n'en emploie qu'un seul ; la deuxieme, en ne se servant des hauteurs observées de l'étoile et de la lune que pour faire la réduction de la distance, et déterminant l'heure du vaisseau par l'heure d'une montre à secondes, réglée, pendant le jour, par des observations des hauteurs du soleil ; la troisieme, en réglant aussi une montre à secondes, pendant le jour, par des observations du soleil, et déterminant ensuite par le calcul les hauteurs de la lune et de l'étoile au temps des observations des distances, pour en conclure la distance réduite.

Premiere maniere, *en faisant les mêmes opérations que pour les distances du soleil à la lune.*

Le calcul des observations faites de cette maniere ne differe de celui que nous avons expliqué précédemment qu'en ce que l'heure du vaisseau se détermine par les hauteurs observées de l'étoile ; et pour cela il faut se servir de la méthode enseignée pag. 40 : cette heure étant connue, ainsi que celle de Paris, conclue de la distance réduite, on trouvera la longitude du vaisseau comme ci-dessus.

Nous remarquerons qu'on observe difficilement les hauteurs des étoiles avec quelque précision, parceque l'horizon ne s'apperçoit jamais bien distinctement pendant la nuit. Il suit de là qu'en déterminant l'heure du vaisseau par les hauteurs des étoiles, on peut quelquefois commettre des erreurs assez considérables. On évitera ces erreurs si on a une bonne montre à secondes, et qu'on emploie l'une ou l'autre des deux manieres d'observer dont nous allons parler, et sur-tout la derniere.

Deuxieme maniere.

On prendra pendant le jour des hauteurs du soleil pour en conclure l'heure du vaisseau et l'avance ou le retard de la montre; ensuite, pendant la nuit, on fera les observations des distances de la lune à l'étoile, et des hauteurs de ces deux astres sur l'horizon, de la même maniere que nous l'avons dit pour les observations des distances de la lune au soleil. Cela posé, connoissant l'avance ou le retard de la montre, l'heure de la montre au temps de l'observation moyenne des distances, et enfin le chemin parcouru par le vaisseau depuis le temps où on a fait les observations du soleil jusqu'à celui où on a pris les distances, on trouvera l'heure vraie du vaisseau; après cela, par la distance et les hauteurs des deux astres, on calculera la distance réduite comme nous l'avons expliqué ci-dessus, et il sera aisé ensuite d'en conclure la longitude.

Troisieme maniere.

Cette troisieme maniere est moins embarrassante pour l'observateur que les deux premieres; elle est en même temps plus précise: mais comme elle exige beaucoup de calculs, il est nécessaire que nous en donnions un exemple que nous expliquerons avec détail.

Exemple.

Le 21 avril 1787, étant par 44° 50′ de longitude estimée à l'ouest de Paris, et par 14° 58′ de latitude nord, on a observé, vers $4^h \frac{3}{4}$, plusieurs hauteurs du soleil qui ont donné pour hauteur vraie du centre de l'astre, toutes corrections faites, 19° 42′, et l'heure moyenne marquée par la montre étoit alors $4^h\ 45'\ 7''$.

Le même jour, vers 7 heures du soir, étant par 45° 30′ de longitude estimée, et par 15° 10′ de latitude, on a pris plusieurs distances de l'étoile α du lion à la partie la plus éloignée du disque de la lune, qui étoit alors le côté éclairé de cet astre, et la distance moyenne a été trouvée de 62° 12′ 15″, l'heure moyenne de la montre étant $7^h\ 0'\ 48''$. On demande la longitude du vaisseau.

Voici l'ordre qu'on suivra dans les opérations du calcul.

1°. Par les observations des hauteurs du soleil, on calculera l'angle horaire du vaisseau au temps de ces observations, et on en conclura l'heure du vaisseau et l'heure de Paris pour le temps où les observations des distances ont été faites.

2°. On calculera l'angle horaire et la distance polaire de chaque astre.

3°. On se servira de ces angles horaires et distances polaires pour calculer les hauteurs vraies, et ensuite les hauteurs apparentes et la distance apparente des deux astres.

4°. On fera le calcul de la distance réduite comme on l'a enseigné précédemment, et on en conclura l'heure de Paris au temps de l'observation. Retranchant ensuite l'heure de Paris de l'heure du vaisseau, on déterminera la longitude.

Calcul de l'heure de Paris et de l'heure du vaisseau au temps de l'observation des distances.

On trouvera, au moyen de *la Connoissance des Temps*, que la distance polaire du soleil, au temps des observations des hauteurs, étoit de 77° 58′; la latitude estimée étoit alors 14° 58′, et la hauteur du centre 19° 42′. Calculant l'angle horaire d'après ces données, et réduisant cet angle en temps,

On trouvera pour l'heure du vaisseau, à l'instant de ces premieres observations.	4h . 50′ . 13″
Mais la montre marquoit. . . .	4 . 45 . 7
Donc retard de la montre. . . .	5 . 6
Ajoutant cette quantité à l'heure de la montre, au temps des observations des distances.	7 . 0 . 48
On aura l'heure du vaisseau rapportée au méridien où on avoit observé les hauteurs du soleil.	7 . 5 . 34
Mais ce méridien étoit plus est que celui où on a observé les distances de 40′ de degré, ou 2′ 40″ d'heure : par conséquent l'heure comptée sous ce premier méridien seroit trop grande de.	2 . 40
Retranchant cette quantité de la premiere, on aura L'HEURE DU VAISSEAU au temps de l'observation des distances.	7 . 3 . 14
Et comme le vaisseau étoit supposé 45° 30′ à l'est de Paris, ou en temps.	3 . 2 . 0
Il s'ensuit que L'HEURE APPROCHÉE DE PARIS étoit. . . .	10 . 5 . 14

Calculs des angles horaires et des distances polaires.

Pour trouver les angles horaires, il faut d'abord connoître l'ascension droite du soleil, et ensuite l'ascension droite du méridien du vaisseau.

La Connoissance des Temps donne la distance de l'équinoxe au soleil pour le 21 avril à midi.	22h .	3′ .	34″
Et pour le 22 avril à midi.	21 .	59 .	50
Diminution en 24 heures. .		3 .	34
Ainsi pour 10h 5′, heure approchée de Paris, lors des observations de la lune, la diminution étoit.		1 .	34
D'où on trouve la distance de l'équinoxe au soleil. . .	22 .	2 .	0
Prenant le complément de cette quantité à 24 heures, on aura l'ascension droite du soleil en temps.	1 .	58 .	0
Qui, étant ajoutée à l'heure du vaisseau trouvée ci-dessus.	7 .	3 .	14
Donnera L'ASCENSION DROITE du méridien du vaisseau, exprimée en temps.	9 .	1 .	14
Et en degrés. . . .	135° .	18′ .	30″

Il sera maintenant aisé de trouver l'angle horaire de chaque astre.

Cherchant d'abord dans *la Connoissance des Temps* l'ascension droite de l'étoile α du lion pour l'année 1787, on trouvera.	149° .	15′ .	0″
Ascension droite du méridien du vaisseau.	135 .	18 .	30
Prenant la différence entre ces deux ascensions droites, on aura L'ANGLE HORAIRE de l'étoile.	13 .	56 .	30
Ascension droite de la lune, calculée au moyen de *la Connoissance des Temps*, pour le 21 avril à midi. . . .	78 .	23 .	0
Et pour le même jour à minuit. . .	86 .	25 .	0
Donc augmentation en 12 heures. . .	8 .	2 .	0
D'où on trouvera l'augmentation pour 10h 5′.	6 .	45 .	0
Et par conséquent on aura l'ascension droite de la lune	85 .	10 .	0
Ascension droite du méridien du vaisseau.	135 .	18 .	30
Différence, ou ANGLE HORAIRE de la lune. . . .	50 .	10 .	30

Quant aux distances polaires des deux astres, on trouvera dans *la Connoissance des Temps* la déclinaison de l'étoile pour l'année 1787 . . . . 13 . 0 . 16

Ce qui donnera pour SA DISTANCE au pole nord élevé sur l'horizon.	76 .	59 .	44
Ou simplement.	77 .	0 .	0

On trouvera aussi dans *la Connoissance des Temps* la déclinaison de la lune, le 21 à 6 heures du soir.	24° . 31′	bor.
Et le même jour à 12 heures. . .	24 . 21	
Différence en 6 heures. . . .	0 . 10	
Donc, à 10^h 5′, la différence étoit. . .	0 . 7	
Donc, déclinaison à cette heure-là. .	24 . 24	
Et par conséquent SA DISTANCE au pole élevé. .	65 . 36	

Calcul des hauteurs des deux astres.

Connoissant la latitude, les angles horaires, et les distances polaires, on trouvera les hauteurs comme il suit.

On écrira d'abord l'angle horaire dont on prendra la moitié, et on mettra au-dessous la distance polaire de l'astre et la latitude du vaisseau; on prendra la somme de ces deux dernieres quantités, la différence de leur somme à 90°, et la moitié de cette différence; ensuite on écrira à côté le log. sinus du demi-angle horaire, la moitié du log. sinus de la distance polaire, la moitié du log. cosinus de la latitude, et le complément sinus de la demi-différence à 90°. La somme de ces quatre logarithmes sera le log. tangente d'un angle subsidiaire dont on prendra le comp. cosinus qu'on ajoutera au log. sinus de la demi-différence, à 90°, et on aura le log. sinus de la demi-distance au zénith, d'où on conclura aisément la hauteur. Voici le type du calcul tant pour l'étoile que pour la lune.

	Hauteur de l'étoile.		Hauteur de la lune.	
Angle horaire.	13° . 56′ . 30″		50° . 10′ . 30″	
Dont la moitié.	6 . 58 . 15	sin. 9 . 0849001	25 . 5 . 15	sin. 9 . 6273678
Dist. polaire.	77 . 0 . 0	dem. sin. 4 . 9943620	65 . 36 . 0	dem. sin. 4 . 9796337
Latitude. . .	15 . 10 . 0	dem. cos. 4 . 9923016	15 . 10 . 0	dem. cos. 4 . 9923016
Somme . .	92 . 10 . 0		80 . 46 . 0	
Diff. à 90°. . .	2 . 10 . 0		9 . 14 . 0	
Demi-diff. . .	1 . 5 . 0	com. sin. 1 . 7233864	4 . 37 . 0	com. sin. 1 . 0942642
Somme		0 . 7949501		0 . 6935673
C'est la tang. d'un angle subsidiaire .		80° . 53′ . 26″		78° . 33′ . 8″
Com. cos. angle subsidiaire		0 . 8004620		0 . 7022949
Sin. demi-différence.		8 . 2766136		8 . 9057358
Somme .		9 . 0770756		9 . 6080307
C'est le sin. demi-distance au zénith.		6° . 51′ . 31″		23° . 55′ . 30″
Distance au zénith		13 . 43 . 0		47 . 51 . 0
HAUTEUR DE L'ÉTOILE . . .		76 . 17 . 0	HAUTEUR DE LA LUNE . .	42 . 9 . 0

Les hauteurs qu'on vient de trouver sont les hauteurs vraies des deux astres : il faut maintenant chercher les hauteurs apparentes.

On aura la hauteur apparente de l'étoile en ajoutant à la hauteur vraie la réfraction qui convient à cette hauteur.

Hauteur vraie de l'étoile.	76° . 17′ . 0″
Réfraction qui convient à cette hauteur.	14
Donc hauteur apparente. . .	76 . 17 . 14

Pour avoir la hauteur apparente de la lune, on cherchera d'abord dans *la Connoissance des Temps* la parallaxe horizontale pour le temps de l'observation, et on la trouvera de. . . 60 . 9″

Cela posé, la hauteur vraie de la lune étant. . .	42° . 9′ . 0″
On prendra dans la table VIII la parallaxe de hauteur moins la réfraction qui convient à la hauteur 42° 9′, et à la parallaxe horizontale 60′ 9″, et on trouvera.	43 . 33
Qui, étant retranchés de 42° 9′, donneront une premiere hauteur apparente approchée.	41 . 25 . 27
Cherchant maintenant la correction de la même table VIII pour la même paral. horiz. 60′ 9″, et la hauteur approchée 41° 25′ 27″, on trouvera la vraie paral. de haut.	44 . 2
Et enfin retranchant cette derniere quantité de la hauteur vraie.	42 . 9 . 0
On aura la HAUTEUR apparente ☾. . .	41 . 24 . 58

Il reste encore à trouver la distance apparente de l'étoile au centre de la lune.

Dist. observée de l'étoile au bord le plus éloigné de ☾		62° . 12′ . 15″
Demi-diam. ☾ au temps de l'observation. .	16′ 25″	
Augmentation pour 42° de hauteur.	11	
Donc demi-diametre corrigé.		16 . 36

Retranchant ce demi-diametre de la distance observée, parceque c'est la distance de l'étoile au bord le plus éloigné qui a été mesurée, on aura

La DISTANCE apparente de l'étoile à la lune. . . . . 61 . 55 . 39

Les hauteurs vraies et apparentes, et la distance apparente, étant ainsi connues, on calculera la distance réduite par la méthode ordinaire, et on calculera la longitude comme il suit.

Distance des astres	61°. 55′. 39″		
Hauteur apparente de l'étoile . .	76 . 17 . 14	com. cos. 0 . 6251512	
Hauteur apparente de la lune . .	41 . 24 . 58	com. cos. 0 . 1249821	
Somme . .	179 . 37 . 51		
Demi-somme . . .	89 . 48 . 55	cos. 7 . 5083980	
Demi-som. — distance	27 . 53 . 16	cos. 9 . 9463861	
Hauteur vraie de l'étoile . . .	76 . 17 . 0	cos. 9 . 3749696	
Hauteur vraie de la lune . . .	42 . 9 . 0	cos. 9 . 8700470	
Somme . . .	118 . 26 . 0	Somme 37 . 4499340	
		Demi-som. 18 . 7249670	9 . 0158727
Demi-somme . . .	59 . 13 . 0	cos. 9 . 7090943	
		cos. A 9 . 9976514	A = 5°. 57′. 12″
		Somme 9 . 7067457	
C'est le log. sin. demi-distance	30°. 35′. 58″		
Distance réduite	61 . 11 . 56		log. logi.
Distances prises dans les tables. Premiere, à 9 heures .	61 . 57 . 10	0°. 45′. 14″	5998
Seconde, à 12 heures .	60 . 8 . 16	1 . 48 . 54 —	2182
			3814

Ce qui répond à.	1h . 14′ . 48″
Heure de la premiere distance.	9 . 0 . 0
Par conséquent HEURE DE PARIS.	10 . 14 . 48
HEURE DU VAISSEAU trouvée ci-dessus.	7 . 3 . 14
Différence.	3 . 11 . 34
Différence en degrés ou LONGITUDE.	47′ . 54″

Calcul des observations de longitude, en ayant égard à l'aplatissement de la terre.

J'ai cru pouvoir donner ici la maniere d'appliquer aux observations de longitude les corrections relatives à l'aplatissement de la terre, parceque j'ai réduit ces corrections à des opérations très simples qui n'exigent presque pas de calcul.

On corrigera d'abord, par la table VII, la parallaxe horizontale de la lune prise dans *la Connoissance des Temps*, et qui est calculée pour la latitude de Paris. Ensuite, employant cette parallaxe corrigée, on cherchera la distance réduite des deux astres par la méthode que nous avons donnée ci-dessus.

Cette distance réduite étant trouvée, on y fera les deux corrections suivantes.

1°. On écrira les uns sous les autres le log. du nombre 34, le log. sinus de la latitude, le log. cosinus de la distance polaire du soleil et le complément log. sinus de la distance des deux astres; la somme de ces quatre logarithmes sera le log. du nombre de secondes de la premiere correction.

2°. On écrira encore le log. du nombre 34, et le log. sinus de la latitude ; ensuite le log. cosinus de la distance polaire de la lune, et le log. tangente de la distance des deux astres moins 90° : la somme de ces quatre logarithmes sera le log. du nombre de secondes de la seconde correction.

Enfin on ajoutera ces deux corrections à la distance réduite ci-dessus, et on aura la distance des deux astres corrigée de l'aplatissement de la terre.

Supposons que l'observation à calculer soit celle de l'exemple I[er], dans lequel on a

La latitude.	=	16°	. 0′
La distance polaire ☉	=	76	. 20
La distance polaire ☾	=	83	. 15
La distance observée.	=	116	. 40
La parallaxe horizontale ☾	=	56	. 55

D'abord, dans la table VII, on trouvera pour la latitude de 16°, et pour la parallaxe de 57′, une correction de 12″ qu'on ajoutera à la parallaxe 56′ 55″, et on aura 57′ 7″. Calculant ensuite la distance réduite, en employant la nouvelle parallaxe 57′ 7″, on trouvera 116° 2′ 22″.

Il restera à corriger les distances suivant les formules ci-dessus.

Log. du nombre 34	1 . 5315
Log. sinus de la latitude 16°	9 . 4403
Log. cos. de la distance polaire ☉ 76° 20′ . .	9 . 3734
Comp. log. sinus de la distance ☉ ☾	0 . 0501
Somme . . .	0 . 3953
C'est le log. de	2″, 5
Log. du nombre 34.	1 . 5315
Log. sinus de la latitude 16°	9 . 4403
Log. cos. distance polaire ☾ . . 83° . 15′. .	9 . 0701
Log. tang. dist. ☉☾ — 90°, ou 26 . 40 . .	9 . 7009
Somme	9 . 7428
C'est le log. de	0, 6

Prenant la somme de ces deux corrections, on aura 3″, 1, ou 3″ qu'on ajoutera à 116° 2′ 22″, et on aura la distance corrigée de l'aplatissement de la terre 116° 2′ 25″.

On remarquera que si, dans la premiere correction, la distance polaire du soleil se trouvoit plus grande que 90°, alors cette premiere correction seroit négative.

La seconde correction seroit aussi négative, si la distance polaire de la lune se trouvoit plus grande que 90°, ou si la distance des deux astres étoit plus petite que 90°; mais si les deux conditions avoient lieu en même temps, cette seconde correction redeviendroit positive.