Einleitung.

§. 1. Erkl. In einem und demselben Kreise kann die Sehne von verschiedener Größe sein, während der Durchmesser nur von **einer** Größe ist. Ist z. B. der Durchmesser = 20″, so kann die Sehne alle Werthe von 0″—20″ annehmen.

Größen, die, wie die Sehne desselben Kreises, verschiedene Werthe erhalten können, werden veränderliche, (variable) Größen genannt; Größen dagegen, die, wie der Durchmesser eines bestimmten Kreises, nur **einen** Werth haben können, pflegt man unveränderliche oder constante Größen zu nennen.

§. 2. Wahlf. Die veränderlichen Größen pflegt man durch die letzteren Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen, während die ersteren Buchstaben des Alphabets zur Bezeichnung der constanten Größen angewendet werden.

§. 3. Folg. Nur eine Veränderliche ist eines Zuwachses oder einer Abnahme fähig; der Zuwachs und die Abnahme einer constanten dagegen ist stets = 0.

§. 4. Lehrf. Ist in dem Bruche $\frac{a}{x}$ der Zähler constant, der Nenner hingegen veränderlich, so wird I) der Werth des Bruches immer kleiner, wenn x größer wird. II) Wächst x ohne Ende fort, so nimmt $\frac{a}{x}$ ohne Ende ab. III) Es giebt keine noch so kleine, wirklich angebbare Größe, unter die der Bruch $\frac{a}{x}$ nicht noch hinabsinken könnte.

Bew. von Nr. I. Je größer der Nenner wird, in desto mehr Theile wird a getheilt, desto kleiner wird also jeder einzelne Theil von a.

Nr. II folgt unmittelbar aus Nr. I.

Bew. von Nr. III. Es sei eine ungemein kleine, jedoch noch angebbare Größe z. B. b, so ist klar, daß es eine Zahl z. B. n von solcher Beschaffenheit geben muß, daß nb >

a wird, dann ist aber auch $\frac{nb}{n} > \frac{a}{n}$ oder $b > \frac{a}{n}$. Wenn man also dem Nenner des Bruches $\frac{a}{x}$ den Werth n giebt, so ist $\frac{a}{x} < b$, d. h. der Werth des Bruches sinkt dann unter b hinab.

§. 5. Erkl. Wird der Bruch des vorigen § kleiner, als jede noch angebbare, wenn auch noch so kleine Größe, so sagt man, der Bruch $\frac{a}{x}$ werde eine unendlich kleine Größe.

§. 6. Erkl. u. Wahls. Soll $\frac{1}{x}$ kleiner werden, als jede noch so kleine, aber noch angebbare Größe, so muß x offenbar größer, als jede noch so große, aber noch angebbare Größe, also unendlich groß werden. Wir bezeichnen eine unendlich große Größe durch ∞; es wird demnach $\frac{1}{\infty}$ das Zeichen für eine unendlich kleine Größe sein.

§. 7. Erkl. Eine unendlich kleine Größe, z. B. $\frac{1}{\infty}$, die in einer endlichen unendlichemal enthalten ist, wird eine unendlich kleine Größe des ersten Ranges genannt. Eine Größe aber, die in einer unendlich kleinen des ersten Ranges unendlichemal enthalten ist, heißt eine unendlich kleine Größe des zweiten Ranges. Unter einer unendlich kleinen Größe des dritten Ranges versteht man eine Größe, die in einer unendlich kleinen des zweiten Ranges unendlichemal enthalten ist u. s. w.

Ist (in Fig. 1) ae ein unendlich kleiner Kreisbogen; ist aeg ein Halbkreis, ag der Durchmesser, f der Mittelpunkt, also af der Halbmesser; so ist, wenn eb und da auf ag lothrecht stehn, ec aber parallel zu ag gezogen wird: $ab : eb = eb : bg$. Da nun der Perpendikel eb mit dem unendlich kleinen Bogen ea zusammenfällt, so ist auch eb unendlich klein; folglich in der endlichen Größe bg unendlichemal enthalten. Daher muß auch ab in eb unendlichemal enthalten, demnach ab eine unendlich kleine Größe des zweiten Ranges sein. Nun verhält sich ferner: $dc : ce = eb : bf$, da die $\triangle\triangle$ dce und ebf ähnlich sind; da aber $ce = ab$ ist, so ist auch: $dc : ab = eb : bf$. Nun ist eb in der Endlichen bf unendlichemal enthalten, demnach muß auch dc in der unendlich kleinen Größe des zweiten Ranges ab unendlichemal enthalten, also eine unendlich kleine Größe des dritten Ranges sein.

§. 8. Folg. I. Das Quadrat einer unendlich kleinen Größe des ersten Ranges ist also eine unendlich kleine Größe des zweiten Ranges, so wie der Cubus einer unendlich kleinen Größe des ersten Ranges eine unendlich kleine Größe des dritten Ranges ist, u. s. w. denn $\left(\frac{1}{\infty}\right)^2 = \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} : \infty$; es ist demnach $\left(\frac{1}{\infty}\right)^2$ in $\frac{1}{\infty}$ unendlichemal enthalten, folglich $\left(\frac{1}{\infty}\right)^2$ eine unendlich kleine Größe des zweiten Ranges. $\left(\frac{1}{\infty}\right)^3 = \frac{1}{\infty^3} = \frac{1}{\infty^2} : \infty$; es ist also der Cubus einer unendlich kleinen Größe des ersten Ranges in dem Quadrate derselben unendlichemal enthalten, demnach eine unendlich kleine Größe des dritten Ranges u. s. w.

§. 9. Folg. II. Das Produkt aus zwei unendlich kleinen Faktoren des ersten Ranges ist eine unendlich kleine Größe des zweiten Ranges; das Produkt aus drei unendlich kleinen Größen des ersten Ranges ist eine unendlich kleine Größe des dritten Ranges u. s. w., denn $\frac{x}{\infty} \cdot \frac{y}{\infty} = \frac{xy}{\infty^2}$ ist in $\frac{z}{\infty}$, wenn wir x, y, z als endliche Größen annehmen, unendlichemal enthalten; denn $\frac{z}{\infty} : \frac{xy}{\infty^2} = \frac{z}{xy} \cdot \frac{\infty^2}{\infty} = \frac{z}{xy} \cdot \infty$; da nun $\frac{z}{xy}$ eine endliche Größe sein muß, so ist $\frac{z}{xy} \cdot \infty$ eine unendlich große Größe, also $\frac{xy}{\infty^2}$ in $\frac{z}{\infty}$ unendlichemal enthalten.

Ferner ist $\frac{x}{\infty} \cdot \frac{y}{\infty} \cdot \frac{z}{\infty} = \frac{xyz}{\infty^3}$ in $\frac{v}{\infty} \cdot \frac{w}{\infty} = \frac{vw}{\infty^2}$ unendlichemal enthalten, wenn x, y, z, v, w als endliche Größen vorausgesetzt werden; denn $\frac{vw}{\infty^2} : \frac{xyz}{\infty^3} = \frac{vw}{xyz} \cdot \frac{\infty^3}{\infty^2} = \frac{vw}{xyz} \cdot \infty$. Da nun $\frac{v \cdot w}{x \cdot y \cdot z}$ eine endliche Größe sein muß, so ist $\frac{vw}{xyz} \cdot \infty$ eine unendlich große Größe, also $\frac{xyz}{\infty^3}$ in $\frac{vw}{\infty^2}$ unendlichemal enthalten.

§. 10. Lehrs. Wenn man zu einer endlichen Größe eine unendlich kleine addirt, oder diese von jener abzieht, so wird die endliche Größe nicht angebbar verändert, so daß also $x \pm \frac{m}{\infty} = x$ ist.

Bew. Sollte sich x von $x \pm \frac{m}{\infty}$ angebbar unterscheiden, so müßte ja $\frac{m}{\infty}$ eine angebbare Größe sein, was dem §. 6 widerspricht.

§. 11. Folg. Wir können also sagen, daß eine unendlich kleine Größe des ersten Ranges in Vergleich mit einer endlichen verschwindet; da ferner eine unendlich kleine Größe eines höheren Ranges sich zu einer des nächstniedrigeren gerade so verhält, wie eine unendlich kleine des ersten Ranges zu einer endlichen, so ist auch eine unendlich kleine Größe eines höheren Ranges in Beziehung auf eine des nächstniedrigeren verschwindend klein; es ist also z. B. $\frac{x}{\infty} \pm \frac{x}{\infty^2} = \frac{x}{\infty}$.

§. 12. Erläuterung. Nähme man von 1″ einen so kleinen Theil, daß der Nenner des Bruches, der diesen Theil bezeichnete, mit 1 und einer Million Nullen rechts geschrieben würde, so wäre dieser Theil offenbar eine Größe, deren Kleinheit beinahe ins Unbegreifliche ginge, aber doch noch keine unangebbar kleine Größe.

§. 13. Denken wir uns eine veränderliche Größe, z. B. eine veränderliche gerade Linie in einem bestimmten Zustande, z. B. wenn sie eben 2″ lang ist. Stellen wir uns vor, daß sie aus diesem Zustande in einen andern übergehe, z. B. 3″ lang werde, so ist wohl nicht zu bezweifeln, daß wir sie, bevor sie = 3″ wird, alle Mittelzustände zwischen 2″ und 3‴ durchgehen lassen müssen. Die Veränderung einer variablen Größe müssen wir uns also als eine successive, stetige oder continuirliche, die keine Sprünge zuläßt, vorstellen.

Der erste Zustand, den die oben gedachte Gerade nach demjenigen, in welchem sie = 2″ ist, beim Zunehmen erhält, muß sich von diesem allerdings in Etwas unterscheiden, denn sonst wäre ja der alte Zustand gar nicht verändert; das aber, wodurch sich der nächste neue Zustand vom vorigen unterscheidet, muß als kleiner, als jede noch angebbare Linie und folglich als unendlich klein angenommen werden; denn setzen wir den Fall, der nächste Zustand fände dann statt, wenn die veränderliche Linie, die wir x nennen wollen = 2″ + h wäre, und h bedeute einen ungemein kleinen, aber doch noch angebbaren Theil eines Zolls, z. B. einen Trillionten Theil, so könnte man h offenbar noch halbirt denken, und auch $\frac{h}{2}$ würde noch eine angebbare Größe sein, demnach wäre $2'' + \frac{h}{2}$ ein Zustand der Linie x, den sie offenbar eher, als den Zustand 2″ + h erreichte. 2″ + h wäre also der nächste Zustand nach 2″ keineswegs.

§. **14.** Erkl. Nimmt man an, daß eine Veränderliche aus einem bestimmten Zustand in einen anderen übergeht, der sich von dem vorigen um eine unangebbar kleine Größe unterscheidet, so sagt man, die Variable habe sich um ihr Differenzial verändert; so nennt man nämlich jenen hinzugekommenen, oder, wenn die Größe abnimmt, von der Veränderlichen hinweggenommenen unangebbar kleinen Theil.

Anm. Aus dem eben Gesagten erhellt, daß eine Veränderliche positive und negative Differenziale haben kann.

§. **15.** Es sei [in Fig. 2] bc ∥ ke und bf ∥ ae; ferner sei bc = 2 . ac. Wir wollen ac durch x, bc durch y bezeichnen.

Da △ bkf ∾ ist dem △ bca, so verhält sich: ac : cb = bf : fk; aber ac : cb = 1 : 2, da wir dies vorausgesetzt haben, also auch bf : fk = 1 : 2. Setzen wir den Fall, ae sei der nächste Zustand des x nach dem Zustande ac, so ist ce das Differenzial von ac oder x, und darum ist ek auch der nächste Zustand von y nach dem Zustande bc, also kf das Differenzial von y. Es ist demnach das Differenzial von x in dem von y hier zweimal enthalten.

Folg. Hieraus erhellet, daß zwei unangebbar kleine Größen zu einander ein bestimmtes, angebbares Verhältniß haben können.

§. **16.** Wahls. Das Zeichen für das Differenzial einer Veränderlichen x ist dx, man setzt nämlich der veränderlichen Größe links ein d vor, welches jedoch nie als ein Faktor zu betrachten ist. So heißt z. B. dy: das Differenzial von y; dz: das Differenzial von z.

§. 17. Erkl. Unter einer Function einer oder mehrerer veränderlicher Größen versteht man jeden Ausdruck, worin jene Veränderliche oder jene Veränderlichen vorkommen. So sind z. B. ax; $x + mx^2$ Functionen der Veränderlichen x; eben so wird der Ausdruck: $mx + ny$ eine Function der Veränderlichen x und y genannt.

§. 18. Wahls. Die Function einer Veränderlichen x deutet man durch fx; die zweier Veränderlichen x und y durch $f(x,y)$ an.

§. 19. Die Function einer oder mehrerer Veränderlichen ist in der Regel auch eine Veränderliche, deren Werth natürlich von dem der Veränderlichen in der Function abhängt. So ist z. B. die Function ax, wenn $x = 2$ angenommen wird, $= 2a$; ist $x = 3$, so ist $ax = 3a$ u. s. w.

§. 20. Erkl. Man kann eine Function auch durch einen einzigen Buchstaben z. B. durch y bezeichnen, so kann man z. B. die Function $ax + lz = y$ setzen. y stellt also hier auch eine Veränderliche vor, y heißt aber hier eine abgeleitete Veränderliche (relative Variable) während x und z als ursprünglich, als absolut veränderlich betrachtet werden.

§. 21. Erkl. Kommen die Veränderlichen in einer Function unter sich und mit Constanten nur durch die ersten vier Species der Arithmetik verbunden vor; oder ist darin die Veränderliche zu einer Potenz von einem constanten Exponenten erhoben, oder ist daraus eine Wurzel auszuziehn, deren Exponent eine beständige Zahl ist, so nennt man die Function eine algebraische. So sind $ax + m$; $\frac{hx}{c - lx}$; $ax + my$; gx^m: $\sqrt[m]{h}$ u. d. m. algebraische Functionen.

Functionen dagegen, worin sich die Veränderliche im Exponenten findet, worin von Logarithmen veränderlicher Größen die Rede ist; Functionen, worin veränderliche Kreisbogen oder trigonometrische Functionen veränderlicher Bogen vorkommen, werden transscendente Functionen genannt.

§. 22. Die algebraischen Functionen theilt man in ganze und gebrochene ein; jene enthalten keine Veränderliche mit negativem Exponenten im Zähler, auch keine mit positivem Exponenten im Nenner, was dagegen bei der gebrochenen Function der Fall seyn muß. $ax^3 + hx^m$ ist eine ganze, mx^4 und $\frac{hx^3}{cx^m}$ sind gebrochene Functionen.

§. 23. Erkl. Die ganzen Functionen sind ferner entweder ein oder mehrgliedrig, (Monome oder Polynome). Die Polynome, die aus zwei Gliedern bestehen, werden Binome genannt. So ist ax^n eine monome; $ax^2 + bx^3$ eine binome; $lx + hx^2 + qx^3 + \ldots$ eine polynome Function.

§. 24. Erkl. Setzt man in einer Function einer Veränderlichen, z. B. der Veränderlichen x, z. B. in der Function ax^3 statt x den Werth $x + h$, d. h. denkt man sich die ursprünglich Veränderliche der Function, hier also das x in den Zustand $x+h$ übergehend, also um h sich verändernd, so zieht dies, wie wir bereits in §. 19 angedeutet haben, in den meisten Fällen auch eine Veränderung des Werthes der Function selbst nach sich. Wir wollen das, um was sich die Function ändert, durch Fl bezeichnen.

Dasjenige, um was sich der Werth der Function verändert, wenn sich die ursprünglich Veränderliche derselben um ihre Differenz h ändert, nämlich das Fl wird man finden, wenn man in der gegebenen Function statt der Veränderlichen x den Werth $x+h$ setzt, die Function nach Potenzen von h entwickelt, und davon die gegebene Function selbst abzieht.

Setzt man z. B. in der obigen Function ax^3 statt x den Werth $x+h$, so erhält man:

$$a[x+h]^3 = a[x^3+3x^2h+3xh^2+h^3] = ax^3+3ax^2h+3axh^2+ah^3.$$

Zieht man hiervon die gegebene Function ax^3 ab, so erhält man $3ax^2h+3axh^2+ah^3$; dieß ist also der Ausdruck, den wir oben mit Fl bezeichneten, was für einen Werth auch h haben mag.

§. **25.** Dividirt man das Fl des vorigen § durch h, so erhält man in dem oben angeführten Beispiele $3ax^2+3axh+ah^2$. Diesen Quotienten nennt man den Differenzcoefficienten der gedachten Function ax^2, oder auch den Exponenten des Verhältnisses der Differenz der ursprünglich Veränderlichen zu der Differenz der Function. Bildet man nämlich ein geometrisches Verhältniß, worin der Nachsatz $= Fl$, der Vordersatz $= h$ ist, so ist der Exponent dieses Verhältnisses in der That das, was wir oben den Differenzcoefficienten der Function genannt haben.

§. **26.** Nimmt man an, daß h das Differenzial von x sei, so wird auch Fl das Differenzial der Function, die wir der Kürze wegen durch y bezeichnen wollen, vorstellen. Denn soll die Function y in einen anderen Zustand übergehn, so kann dieß nur unter der Bedingung stattfinden, daß ihre ursprünglich Veränderliche sich verändert; geht also x in seinen nächsten Zustand, nämlich in $x+dx$ über, so muß auch der Zustand, in welchen y dadurch versetzt wird, der auf den Zustand y zunächstfolgende, also das, um was sich dieser zweite Zustand vom ersten unterscheidet, nämlich Fl, das Differenzial der relativ Veränderlichen y genannt werden können.

§. **27.** Folg. Da unter der Voraussetzung, daß $h = dx$ ist, h eine unangebbar kleine Größe sein muß, so ist klar, daß man im Ausdrucke für Fl, wenn dieß $= dy =$ dem Differenzial der gegebenen Function wird, alle die Glieder ohne Fehler weglassen kann, welche eine höhere Potenz von h, als die erste enthalten. So geht also in dem Beispiele des §. 24 Fl d. i. dy in $3ax^2h = 3ax^2dx$ über [wegen §. 11.]

§. **28.** Der Differenzcoefficient der oben angenomenen Function, nämlich $\frac{Fl}{h}$ geht in dem Falle, daß $h = dx$, also $Fl = dy$ wird, in $3ax^2$ über, d. h. man nimmt bloß dasjenige

Glied von $\frac{H}{h}$, welches keine Potenz von h mehr in sich hat. In diesem Falle heißt der Differenzcoefficient Differenzialcoefficient der gegebenen Function.

§. **29.** Das Differenzial einer Function von einer veränderlichen Größe ist also der Ausdruck, dem sich die Differenz der Function ohne Ende nähert, wenn sich h ohne Ende, dem Werthe 0 zustrebend, verkleinert. Das Verhältniß $dx : dy$ ist dasjenige Verhältniß, dem sich $h : H$ ohne Ende zu nähern sucht; $\frac{dy}{dx}$ ist also eine Grenze für $\frac{H}{h}$, wenn man annimmt, daß sich h ohne Ende der 0 nähert.

Anm. Wenn man die Differenziale der Functionen aufsucht, so geschieht es gewöhnlich in der Absicht, sie mit denen der ursprünglich Veränderlichen zu vergleichen, oder den Differenzialcoefficienten zu finden, der in der Regel eine angebbare Größe ist.

§. **30.** Es ist klar, daß wir den Differenzialcoefficienten einer Function von einer veränderlichen Größe auch nach folgender Regel erhalten könnten: Man setze in der Function statt der ursprünglich Veränderlichen z. B. statt x den Werth $x + dx$; entwickle die Function nach Potenzen von dx; ziehe vom Resultat die gegebene Function ab; dividire den Ueberrest durch dx, und setze im Quotienten überall statt dx den Werth 0, so ist das, was sich sodann als Resultat ergiebt, der Differenzialcoefficient. Es sei z. B. der Differenzialcoefficient der Function $ax^2 + lx^3$ zu finden, so ist das Verfahren nach der eben angegebenen Regel folgendes: $a[x + dx]^2 + l[x + dx]^3 - ax^2 - lx^3 = ax^2 + 2axdx + adx^2 + lx^3 + 3lx^2dx + 3lxdx^2 + ldx^3 - ax^2 - lx^3 = [2ax + 3lx^2]dx + [a + 3lx]dx^2 + l.dx^3$. Dieses letzte Resultat durch dx dividirt, giebt: $2ax + 3lx^2 + [a + 3lx]dx + l.dx^2$. Setzt man nun in diesem letzten Resultate statt dx 0, so erhält man: $2ax + 3lx^2 + [a + 3lx].0 + l.0^2 = 2ax + 3lx^2$, und dieser letzte Ausdruck ist der verlangte Differenzialcoefficient.

Anm. Der Differenzialcoefficient der urspünglich Veränderlichen ist $= 1$.

§. **31.** Erkl. Setzt man eine Function einem einzigen Buchstaben z. B. z gleich, sagt man z. B. $z = ax^3$, so hat man eine Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen; und sucht man das Differenzial der Function ax^3, das man auch durch dz bezeichnen kann, so hat man [nach §. 27.] $dz = 3ax^2dx$, eine Gleichung zwischen den Differenzialen gedachter Veränderlichen. Wir nennen diese letztere Gleichung eine Differenzialgleichung.

§. **32.** Erkl. Wir haben bisher nur auf Functionen einer urspr. Veränderlichen, oder auf Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen geachtet. Wir wollen nun auch nachweisen, was wir unter dem Differenzial und dem Differenzialcoefficienten einer Function von mehreren Veränderlichen, und unter der Differenzialgleichung, die aus einer Gleichung zwischen drei und mehreren Veränderlichen abgeleitet wird, zu verstehen haben.

Denkt man sich, daß in einer Function von zwei oder mehreren ursprünglich veränderlichen Größen jede derselben sich um ihr Differenzial verändere, so zieht dies in der Regel auch eine Veränderung der Function nach sich, und das, um was sich die Function verändert, wird das Differenzial derselben genannt. Es sei z. B. xy die gegebene Function der Veränderlichen x und y. Der nächste Zustand dieser Function wird offenbar dadurch hervorgehn, daß x und y sich um ihre Differenziale ändern; da wird aber aus der Function xy werden: $[x + dx] . [y + dy] = xy + xdy + ydx + dy . dx$. Es hat sich somit xy um $xdy + ydx + dx . dy$, oder [wegen §. 9.] um $xdy + ydx$ geändert. Es ist somit das Differenzial der Function $xy = xdy + ydx$.

Der Differenzialcoefficient wird in diesem Falle dadurch gefunden, daß man das Differenzial der Function, die wir z. B. z nennen wollen, also dz entweder durch dx oder dy dividirt. Wir erhalten somit: $\frac{dz}{dx} = y + x . \frac{dy}{dx}$ oder: $\frac{dz}{dy} = x + y . \frac{dx}{dy}$. Die Ausdrücke: $\frac{dx}{dy}$ und $\frac{dy}{dx}$ sind, wie wir schon oben gesagt haben, häufig endliche, angebbare Größen, daher denn auch $\frac{dz}{dy}$ und $\frac{dz}{dx}$.

Elemente der Differenzialrechnung.

§. 33. Erkl. Die Differenzialrechnung lehrt die Regeln, nach welchen man das Differenzial einer vorgelegten Function finden kann.

§. 34. Erkl. Eine Function differenziiren, heißt, ihr Differenzial angeben; eine Gleichung zwischen zwei oder mehreren Veränderlichen differenziiren heißt, die ihr entsprechende Differenzialgleichung finden. [Man lese §. 31].

Anm. Die Grundregel des Differenziirens ist schon in den §§. 24, 26, 27 entwickelt worden; hier wollen wir aber kürzere, schneller zum Ziele führende Regeln aufstellen, wiewohl sie aus jener Grundregel abgeleitet werden.

A. Vom Differenziiren algebraischer Functionen mit einer und mehreren ursprünglich Veränderlichen.

§. 35. Aufg. Das Differenzial der Function ax zu finden.

Formel: $d(ax) = a \,.\, dx$.

Bew. Setzen wir $ax = y$, so ist $dy = d(ax) = a[x + dx] - ax = ax + adx - ax = adx$ q. e. d.

Beisp. $d(mz) = mdz$; $d[(m+n) \,.\, x] = [m+n] \,.\, dx$.

§. 36. Aufg. Das Differenzial von $lx + k$ zu finden.

Formel: $d(lx+k) = d(lx) = l \,.\, dx$.

Bew. Setzen wir die gegebene Function $= y$, so ist $dy = d(lx+k) = l(x + dx) + k - (lx + k) = lx + ldx + k - lx - k = ldx$ q. e. d.

Folg. Das constante Glied der Function hat also auf ihr Differenzial gar keinen Einfluß; so ist $d(ax) = d(ax+l) = d(ax+b) = d(ax-m)$ u. s. w.

§. 37. Aufg. Die Function $ax + by + cz$ zu differenziiren.

Formel: $d(ax+by+cz) = a \,.\, dx + b \,.\, dy + c \,.\, dz$.

Bew. Die gegebene Function möge v heißen, dann ist $dv = a[x + dx] + b[y + dy] + c[z + dz] - [ax + by + cz] = ax + adx + by + bdy + cz + cdz - ax - by - cz = adx + bdy + cdz$ q. e. d.

Folg. Hat man also eine polynome Function zu differenziiren, worin jedes Glied ein Produkt aus einem constanten und einem veränderlichen Faktor ist, so braucht man bloß die Differenziale der einzelnen Glieder zu addiren. Sollten außer den veränderlichen Gliedern auch constante vorkommen, so wird das Differenzial der polynomischen Function der Summe der Differenziale der veränderlichen Glieder gleich sein. Ist z. B. die Function $ax + by + l + q$ zu differenziiren, so kann man statt $ax + by$ z. B. v, statt $l + q$ z B. c setzen; man hat also dann: $d[ax + by + l + q] = d(v + c) = dv$ [nach §. 36] $= d[ax + by] = d(ax) + d(by)$ [nach §. 37].

§. 38. Aufg. Das Differenzial von xy zu finden:

Formel: $d(xy) = xdy + ydx$.

Der Bew. ist zwar schon aus §. 32 klar, wir wollen ihn jedoch, um die Ordnung nicht zu unterbrechen, hieher setzen.

$$d(xy) = [x + dx][y + dy] - xy =$$
$xy + ydx + xdy + dx.dy - xy = ydx + xdy + dx.dy = ydx + xdy$, da die unendlich kleine Größe des zweiten Ranges, nämlich $dx.dy$ in Hinsicht auf die des ersten Ranges verschwindet.

Folg. Man findet also das Differenzial eines Produkts aus zwei veränderlichen Faktoren, wenn man das Differenzial jedes Faktors durch den andern Faktor multiplicirt, und die sich so ergebenden Partialprodukte addirt.

§. **39**. Aufg. Die Function xyz zu differenziiren.

Formel: $d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$.

Bew. Man setze xy z. B. $= v$, dann ist $d(xyz) = d(vz) = vdz + zdv$ [nach §. 38]. Setzt man nun wieder statt v den Werth xy, so erhalten wir: $d(xyz) = xydz + zd(xy) = xydz + z[xdy + ydx] = xydz + xzdy + yzdx$ q. e. d.

Folg. Man erhält also das Differenzial eines Produktes aus drei veränderlichen Faktoren, wenn man das Differenzial jedes einzelnen Faktors durch das Produkt der übrigen Faktoren multiplizirt, und die sich so ergebenden Partialprodukte addirt.

§. **40**. Lehrs. Wird das Differenzial eines Produkts aus m veränderlichen Faktoren, [m als ganze, positive Zahl angenommen] dadurch gefunden, daß man das Differenzial jedes einzelnen Faktors mit dem Produkte der übrigen $m - 1$ Faktoren multiplicirt und die sich ergebenden Partialprodukte zusammenaddirt, so wird auch das Differenzial eines Produkts aus $m + 1$ veränderlichen Faktoren dadurch erhalten, daß man das Differenzial jedes einzelnen Faktors mit dem Produkte der übrigen m Faktoren multiplicirt, und die sich ergebenden Partialprodukte alle addirt.

Bew. Wir wollen das Produkt der ersten m Faktoren durch v bezeichnen; z möge der übrige $m + 1$te veränderliche Faktor sein. Dann ist das Differenzial aus dem Produkte der $m + 1$ veränderlichen Faktoren $= vdz + zdv$, [nach §. 38] Nun ist dv nach der Voraussetzung $=$ der Summe aller Partialprodukte, die man erhält, wenn man das Differenzial eines jeden der m ersten veränderlichen Faktoren mit dem Produkte der übrigen $m - 1$ ersten veränderlichen Faktoren multiplizirt; es ist demnach $zdv =$ der Summe aller Partialprodukte, die man erhält, wenn man das Differenzial eines jeden der m ersten veränderlichen Faktoren mit dem Produkte der übrigen m gegebenen Faktoren multiplicirt. Es ist somit $vdz + zdv =$ der Summe aller Partialprodukte, die man erhält, wenn man das Differenzial eines jeden der $m + 1$ gegebenen veränderlichen Faktoren mit dem Produkte der übrigen m Faktoren multiplicirt. q. e. d.

Folg. I. Da wir nun wissen, daß, wenn das Differenzial eines Produkts aus vier veränderlichen Faktoren zu bilden ist, die Voraussetzung, die wir im vorigen Lehrsatze gemacht, wirklich statt hat, (da wegen §. 39 $d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$); so muß, dem so eben erwiesenen Lehrsatze gemäß, $d[xyzv] = vxydz + vxzdy + vyzdx + xyzdv$ sein u. s. w.

Folg. II. Es ist hieraus klar, daß das Differenzial eines Produkts aus m veränderlichen Faktoren gefunden wird, wenn man das Differenzial jedes veränderlichen Faktors durch das Produkt der übrigen $m - 1$ Faktoren multiplicirt, und die hervorgehenden Partialprodukte zusammenaddirt.

§. 41. Es ist leicht einzusehn, daß $d(abxyz) =$ ist $ab \,.\, d(xyz)$; denn man kann ab z. B. durch α, xyz durch v bezeichnen; dann hat man: $d(\alpha v) = \alpha \,.\, dv$, oder wenn man für α und v ihre Werthe substituirt: $d(\alpha v) = d(abxyz) = ab \,.\, d(xyz)$. [Wie würden diese Formeln wohl, in Worten ausgesprochen, lauten?]

§. 42. Aufg. Das Differenzial von $\frac{x}{y}$ zu finden.

Formel: $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Bew. $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x + dx}{y + dy} - \frac{x}{y} = \frac{xy + ydx - xy - xdy}{y^2 + ydy} = \frac{ydx - xdy}{y^2 + ydy}$
$= \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Folg. Man findet also das Differenzial eines Bruches, dessen Zähler und Nenner veränderlich sind, wenn man den Nenner mit dem Differenzial des Zählers multiplicirt, vom Produkte aber das aus dem Zähler ins Differenzial des Nenners abzieht und den Rest durch das Quadrat des Nenners dividirt.

§. 43. Lehrs. Das Differenzial eines Bruches, dessen Nenner constant, dessen Zähler veränderlich ist, ist gleich dem Differenzial des Zählers, dividirt durch den Nenner.

Behaupt. $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{dx}{a}$.

Bew. $d\left(\frac{x}{a}\right) = d\left(\frac{1}{a} \,.\, x\right) = \frac{1}{a} \,.\, dx$ [wegen §. 35] $= \frac{dx}{a}$.

Der Bew. kann auch so geführt werden:
$d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{adx - xda}{a^2}$ [nach §. 42] $= \frac{adx}{a^2}$ [da $da = 0$ ist] $= \frac{dx}{a}$.

§. 44. Lehrs. Das Differenzial eines Bruches, dessen Zähler constant, dessen Nenner veränderlich ist, ist dem entgegengesetzt genommenen Differenzial des Nenners, multiplicirt durch den Zähler, dividirt durch's Quadrat des Nenners, gleich.

Behaupt. $d\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{a dx}{x^2}$.

Bew. $d\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{x \cdot da - a dx}{x^2}$; da aber $da = 0$ ist, so ist auch $d\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{-a dx}{x^2}$ q. e. d.

§. 45. Aufg. Das Differenzial von x^m zu suchen, wenn m eine ganze, positive Zahl ist.

Formel: $d(x^m) = mx^{m-1}dx$.

Bew. x^m ist ein Produkt aus m veränderlichen Faktoren. Das Differenzial dieses Produkts ist [nach §. 40] = der Summe der Partialprodukte, die man erhält, wenn man das Differenzial jedes einzelnen veränderlichen Faktors mit dem Produkte der übrigen $m-1$ veränderlichen Faktoren multiplicirt; es ist somit $d[x^m] = x^{m-1}dx + x^{m-1}dx + x^{m-1}dx + \ldots\ldots$ m mal $= mx^{m-1}dx$ q. e. d.

§. 46. Wir hätten die Richtigkeit der im vorigen §. aufgestellten Formel auch so erweisen können:

Ist das Differenzial von x^m (unter der Voraussetzung, daß m eine ganze, positive Zahl ist,) $= mx^{m-1}dx$, so ist auch das Differenzial von $x^{m+1} = (m+1)x^m \cdot dx$. Denn $x^{m+1} = x^m \cdot x$. Demgemäß ist $d(x^{m+1}) = d(x^m \cdot x)$ [oder, wenn man $x^m = v$ setzt] $= d(vx) = v dx + x dv = x^m dx + x \cdot d(x^m) = x^m dx + mx^m dx = [m+1]x^m dx$ q. e. d.

Folg. Nun ist $d(x^2) = d(xx) = x dx + x dx = 2x dx$; also muß auch $d(x^3) = 3x^2 dx$; $d(x^4) = 4x^3 dx$ sein u. s. w., also allgemein: $d(x^m) = mx^{m-1}dx$.

§. 47. Lehrs. Das Differenzial von x^{-m} wird, unter der Voraussetzung, daß m eine ganze, positive Zahl sei, auch nach der Regel des §. 45 gefunden, es ist nämlich $d(x^{-m}) = -mx^{-m-1}dx$.

Bew. $x^{-m} = \frac{1}{x^{+m}}$, also $d[x^{-m}] = d\left[\frac{1}{x^{+m}}\right]$; wegen §. 44 ist aber $d\left[\frac{1}{x^{+m}}\right] = \frac{-1 \cdot mx^{m-1}dx}{x^{2m}}$, also $d[x^{-m}] = \frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx$ q. e. d.

§. 48. Lehrs. Auch das Differenzial von $x^{\frac{m}{n}}$ wird, wenn m und n ganze, positive Zahlen sind, nach der Regel des §. 45 gefunden, es ist nämlich $d\left[x^{\frac{m}{n}}\right] = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}dx$.

Bew. Setzen wir $x^{\frac{m}{n}} = y$, so ist, wenn wir beiderseits zur nten Potenz erheben, $x^m = y^n$, also $d[x^m] = d[y^n]$, also auch $mx^{m-1}dx = ny^{n-1}dy$; demnach $\frac{mx^{m-1}dx}{ny^{n-1}} = dy$. Nun ist $y = x^{\frac{m}{n}}$, also $y^{n-1} = x^{\frac{m}{n}(n-1)} = x^{m-\frac{m}{n}}$; also $ny^{n-1} =$

$nx^{m-\frac{m}{n}}$; folglich $dy = d\left[x^{\frac{m}{n}}\right] = \frac{mx^{m-1}dx}{nx^{m-\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n} . x^{m-1-m+\frac{m}{n}} dx$
$= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx$ q. e. d.

§. 49. Lehrs. Auch das Differenzial von $x^{-\frac{m}{n}}$ wird nach der Formel des §. 45 gefunden und ist $= -\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1} dx$.

Bew. $d\left[x^{-\frac{m}{n}}\right] = d\left[\frac{1}{x^{+\frac{m}{n}}}\right] = \frac{-1 . d\left[x^{\frac{m}{n}}\right]}{x^{\frac{2m}{n}}}$ (nach §. 44) $= \frac{-\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx}{x^{\frac{2m}{n}}}$
$= -\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1-\frac{2m}{n}} dx = -\frac{m}{n} . x^{-\frac{m}{n}-1} dx$ q. e. d.

§. 50. Folg. Ist also der Exponent einer Potenzialgröße was immer für eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl, so gilt doch stets für das Differenziiren derselben folgende Regel: Man multiplicire den Exponenten der Potenz, wozu eine veränderliche Größe erhoben werden soll, mit der um einen Grad niedrigeren Potenz jener Veränderlichen und dann mit dem Differenzial jener Veränderlichen.

Anm. Die hier in Rede stehende Veränderliche kann auch eine Function einer oder mehrerer veränderlicher Größen sein.

Beisp. $d\,[ax + bx^2]^4 = 4(ax + bx^2)^3 . d(ax + bx^2)$. $d[\sqrt[3]{(ax^3 + bx^4)^m}] = d\left[(ax^3 + bx^4)^{\frac{m}{3}}\right] = \frac{m}{3} [ax^3 + bx^4]^{\frac{m}{3}-1} \times d\,[ax^3 + bx^4]$.

§. 51. Mit Hülfe der bisher erwiesenen Regeln läßt sich das Differenzial einer jeden algebraischen Function von einer oder mehreren ursprünglich Veränderlichen finden. — Wie man aus dem Differenzial der Function den Differenzialcoefficienten ableitet, kann nach dem, was in der Einleitung §. 28 gesagt worden ist, nicht schwer zu entscheiden sein.

Anwendung der Differenzialrechnung auf den Beweis des binomischen Lehrsatzes.

§. 52. Erkl. Unter dem binomischen Lehrsatze verstehn wir den Satz, daß $(a+c)^n$
$= a^n + na^{n-1}c + \frac{n[n-1]}{1 . 2} a^{n-2}c^2 + \frac{n[n-1][n-2]}{1 . 2 . 3} a^{n-3}c^3 + \ldots\ldots +$
$\frac{n[n-1][n-2][n-3] \times \ldots\ldots \times [n-r+1]}{1 . 2 . 3 . \times \ldots\ldots \times r} a^{n-r}c^r + \ldots$ ist, was für einen Werth auch n haben möge, einen positiven oder negativen, einen ganzen oder gebrochenen.

§. 53. Lehrs. $[1+\alpha x]^n = 1 + n\alpha x + \frac{n[n-1]}{1.2}(\alpha x)^2 + \frac{n[n-1][n-2]}{1.2.3}(\alpha x)^3 + \dots + \frac{n[n-1][n-2]\times\dots\times[n-r+1]}{1.2.3\times\dots\times r}(\alpha x)^r$ für jeden positiven und negativen, für jeden ganzen und gebrochenen Werth von n.

Bew. Es sei I. $(1+\alpha x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots$ d. h. wenn man die erste Seite nach Potenzen von x steigend entwickelt, komme ganz genau die zweite Seite zum Vorschein, was für einen Werth x auch haben mag.

Differenzirt man die Gleichung Nr. I, so erhält man:
II. $n[1+\alpha x]^{n-1}.d[1+\alpha x] = A.dx + 2Bxdx + 3Cx^2dx + 4Dx^3dx + \dots$

Multiplicirt man beiderseits mit $1+\alpha x$, so hat man: III. $n[1+\alpha x]^n.\alpha dx = [A.dx + 2Bxdx + 3Cx^2dx + 4Dx^3dx + \dots].[1+\alpha x]$. Wenn man beiderseits mit dx dividirt, die Multiplication auf der rechten Seite in Nr. III ausführt und für $(1+\alpha x)^n$ den Werth aus Nr. I setzt, so erhält man:
IV. $n\alpha + n\alpha Ax + n\alpha Bx^2 + n\alpha Cx^3 + n\alpha Dx^4 + \dots =$

$$A + \left.\begin{matrix}2B\\+\alpha A\end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix}3C\\+2\alpha B\end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix}4D\\+3\alpha C\end{matrix}\right\} x^3 \begin{matrix}+\dots\\+\dots\end{matrix}$$

Da sich nun, wenn man in Nr. IV auf beiden Seiten auf dieselbe Weise nach Potenzen von x ordnet, genau dasselbe ergeben soll, so müssen auch auf beiden Seiten bei gleichhohen Potenzen von x gleiche Coefficienten vorkommen; es muß also:
1) $n\alpha = A$; 2) $n\alpha A = 2B + \alpha A$; 3) $n\alpha B = 3C + 2\alpha B$; 4) $n\alpha C = 4D + 3\alpha C$ sein.

Aus 2) ergiebt sich: $B = \frac{n\alpha A - \alpha A}{1.2} = \frac{[n-1]\alpha A}{1.2}$; nun ist nach 1) $n\alpha = A$; also ist auch: $B = \frac{n(n-1)}{1.2}.\alpha^2$. Aus 3) ergiebt sich: $C = \frac{n\alpha B - 2\alpha B}{3} = \alpha B.\frac{[n-2]}{3}$; setzt man nun hier für B den aus 2) gefundenen Werth, nämlich: $\frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2$, so erhält man: $C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\alpha^3$. Aus 4) ergiebt sich: $D = \frac{n\alpha C - 3\alpha C}{4} = \alpha C.\frac{[n-3]}{4}$; nun war C aus 3) $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\alpha^3$ gefunden; demnach ist $D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\alpha^4$ u. s. w.

Setzen wir die für A, B, C, D gefundenen Werthe oben in Nr. I, so haben wir:
V. $[1+\alpha x]^n = 1 + n(\alpha x)^1 + \frac{n[n-1]}{1.2}(\alpha x)^2 + \frac{n[n-1][n-2]}{1.2.3}(\alpha x)^3$

$+ \frac{n[n-1][n-2][n-3]}{1.2.3.4} \cdot (\alpha x)^4 + \ldots.$, und diese Gleichung gilt, mag n eine ganze oder gebrochene, eine positive oder negative Zahl vorstellen.

§. 54. Folg. $[1+x]^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} x^4 + \ldots.$; denn wir dürfen nur in der letzten Gleichung des vorigen §. statt α den Werth 1 substituiren, um auf die in diesem §. aufgestellte Formel zu kommen.

§. 55. Lehrs. $[a + bx]^n = a^n + na^{n-1}bx + \frac{n[n-1]}{1.2} a^{n-2}(bx)^2 + \frac{n[n-1][n-2]}{1.2.3} a^{n-3}(bx)^3 + \frac{n[n-1][n-2][n-3]}{1.2.3.4} a^{n-4}(bx)^4 + \ldots$

Bew. Wenn man eine Zahl durch eine andere Zahl multiplicirt und auch wieder durch dieselbe Zahl dividirt, so bleibt das Resultat gleich der anfangs gegebenen Zahl, demnach ist $a + bx = a\left[\frac{a+bx}{a}\right] = a\left[1 + \frac{b}{a} x\right]$; demnach ist auch: $[a+bx]^n = \left[a[1 + \frac{b}{a}.x]\right]^n = a^n\left[1 + \frac{b}{a} x\right]^n$. Setzen wir in $\left[1 + \frac{b}{a}.x\right]^n$ statt $\frac{b}{a}$ z. B. α, so ist $\left[1 + \frac{b}{a}.x\right]^n = [1+\alpha x]^n = 1 + n(\alpha x) + \frac{n[n-1]}{1.2}(\alpha x)^2 + \frac{n[n-1][n-2]}{1.2.3}(\alpha x)^3 + \frac{n[n-1][n-2][n-3]}{1.2.3.4}(\alpha x)^4 + \ldots$

Es ist demnach auch $(1 + \alpha x)^n \cdot a^n = a^n + na^n\alpha x + \frac{n[n-1]}{1.2} a^n.(\alpha x)^2 + \frac{n[n-1][n-2]}{1.2.3} \cdot a^n.(\alpha x)^3 + \frac{n[n-1][n-2][n-3]}{1.2.3.4} \cdot a^n(\alpha x)^4 + \ldots\ldots$

Setzt man statt α den Werth $\frac{b}{a}$, so hat man: $\left[1 + \frac{b}{a} x\right]^n \cdot a^n = (a + bx)^n = a^n + na^n \frac{b}{a} x + \frac{n[n-1]}{1.2} a^n . \frac{b^2}{a^2} . x^2 + \frac{n[n-1][n-2]}{1.2.3} a^n . \frac{b^3}{a^3} . x^3 + \frac{n[n-1][n-2][n-3]}{1.2.3.4} . a^n . \frac{b^4}{a^4} x^4 + \ldots = a^n + na^{n-1}bx + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2}(bx)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} . a^{n-3}(bx)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} a^{n-4}(bx)^4 + \ldots$
q. e d.

§. 56. Folg. $[a+c]^n = a^n + na^{n-1}c + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2}c^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3}c^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} a^{n-4}c^4 + \ldots$; denn setzen wir den Fall, das c dieses. § sei dem bx des vorigen gleich, [eine Voraussetzung, die zu machen man berechtigt ist, denn es darf ja nur $x = \frac{c}{b}$ angenommen werden] dann wird man in dem Endresultate des vorigen §. nur statt bx den Werth c zu substituiren brauchen, um sogleich die in diesem §. aufgestellte Formel zu erhalten. Es ist somit der in §. 52 definirte binomische Lehrsatz für jeden positiven und negativen, für jeden ganzen und gebrochenen Werth des Exponenten n erwiesen.

Einiges über die höheren Differenziale.

§. 57. Bem. Das bisher betrachtete Differenzial wird auch erstes Differenzial genannt, es giebt nämlich auch ein zweites, drittes Differenzial u. s. w., welche mit einem allgemeinen Namen höhere Differenziale genannt werden.

§. 58. Erkl. Differenziirt man das erste Differenzial einer Function abermals, so erhält man das zweite Differenzial; wird dieses abermals differenziirt, so erhält man das dritte Differenzial der ursprünglich gegebenen Function u. s. w.

§. 59. Wahls. Um das zweite Differenzial einer Function, z. B. von x^m anzudeuten, schreibt man: $dd(x^m)$ oder, der Kürze wegen $d^2(x^m)$; will man das dritte Differenzial von x^m andeuten, so schreibt man: $ddd(x^m)$ oder kürzer: $d^3(x^m)$ u. s. w.; so bezeichnet auch $d^n(x^m)$ das $n$te Differenzial von x^m.

§. 60. Anm. Meistentheils wird bei der Bildung der höheren Differenziale das erste Differenzial der urspr. Veränderlichen als constant angenommen. So wird also z. B. beim abermaligen Differenziiren des ersten Differenzials der Function x^m, nämlich beim Differenziiren von $mx^{m-1}dx$ das Differenzial der urspr. Veränderlichen, nämlich dx, als constant behandelt. Es ist somit das zweite Differenzial der Function x^m, nämlich $dd(x^m) = d^2(x^m) = d(d(x^m)) = d(mx^{m-1}dx) = dx \,.\, d[mx^{m-1}] = m.dx.d(x^{m-1}) = mdx \,.\, (m-1)x^{m-2} \,.\, dx = m(m-1) \,.\, x^{m-2}dx^2$.

$d^3(x^m) = d(d^2(x^n)) = d[d(d(x^m))] = d^2[d(x^m)] = d[d(mx^{m-1}dx)] = d(m(m-1)x^{m-2}dx^2) = m(m-1)(m-2) \,.\, x^{m-3}dx^3$.

§. 61. Es kann vorkommen, daß das Differenzial eines gewissen Ranges = einer constanten Größe, das Differenzial des gedachten Differenzials also = 0 wird. So ist z. B. das erste Differenzial der Function $x^3 = 3x^2dx$; das zweite $= 2.3.xdx^2$; das dritte $= 1.2.3.dx^3$; da nun dieses dritte Differenzial, da dx als constant betrachtet wird, constant sein muß; so ist das 4te Differenzial der Function $x^3 = 0$. Dasselbe gilt auch von allen noch höheren Differenzialen gedachter Function.

Bem. Die Bestimmung dieser Schrift erlaubt uns nicht, in eine tiefere Untersuchung des hier berührten Gegenstandes einzugehn.

B. Einiges über das Differenziiren einiger transcendentalen Functionen.

a) Vom Differenziiren der Logarithmen, besonders derer des natürlichen Systems.

§. 62. Aus meinen Elementen der Analysis des Endlichen §. 111 und §. 119, läßt sich entnehmen, daß der Logarithmus der Zahl $1+x$ nach was immer für einem System $= M\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right)$ sei, wenn man unter M den Modulus des Systems, d. h. den Quotienten versteht, den man erhält, wenn man 1 durch den natürlichen Logarithmus der Basis des betrachteten Systems dividirt. Ist die Basis des betrachteten Systems z. B. $= 6$, so ist der Modulus desselben $= \frac{1}{\text{log. nat. } 6}$.

Folg. Im sogenannten natürlichen Systeme ist also der Modulus $= \frac{1}{\text{log. nat. } e}$, wenn e die Basis des natürlichen Systems anzeigt; dann ist aber $\text{log. nat. } e = 1$, also der Modulus des natürlichen Systems $= \frac{1}{1} = 1$, so daß also: $\text{log. nat. } (1+x) = x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ ist.

§. 63. Erkl. Unter dem Differenzial des Logarithmus von x versteht man diejenige Größe, um die sich der Logarithmus ändert, wenn sich die Zahl um ihr Differenzial ändert. Es ist somit $d(\text{log. } x) = \text{log. } (x+dx) - \text{log. } x = \text{log. } \left(\frac{x+dx}{x}\right) = \text{log. } \left(1+\frac{dx}{x}\right)$ und wegen §. 62 $= M\left[\frac{dx}{x}-\frac{dx^2}{2x^2}+\frac{dx^3}{3x^3}-\frac{dx^4}{4x^4}+\ldots\right]$. Da aber alle folgenden Glieder in dem innerhalb der Klammer stehenden Ausdrucke in Beziehung auf das erste, nämlich auf $\frac{dx}{x}$ (wegen §. 11) verschwinden, so ist $d(\text{log. } x) = M \cdot \frac{dx}{x}$, und daher $d[\text{log. nat. } x] = \frac{dx}{x}$, da im natürlichen System der Modulus $M = 1$ ist.

Folg. Man findet also das Differenzial des natürlichen Logarithmus einer Veränderlichen, wenn man das Differenzial derselben durch gedachte Veränderliche selbst dividirt.

b) Vom Differenziiren der Exponentialgrößen.

§. 64. Daß man unter einer Exponentialgröße eine angezeigte Potenz versteht, deren Exponent eine veränderliche Größe ist, mag die Basis veränderlich oder constant sein, ist bereits in meinen Elementen der Analysis endlicher Größen gesagt worden.

§. 65. Aufg. Das Differenzial von x^y zu finden.

Aufl. Wir setzen $x^y = z$, dann ist $\log. nat. (x^y) = \log. nat. z$, also $y . \log. nat. x = \log. nat. z$; also $d(y . \log. nat. x) = d(\log. nat. z)$; also $y . d(\log. nat. x) + \log. nat. x . dy = \frac{dz}{z}$ (nach §. 63) oder: $y . \frac{dx}{x} + \log. nat. x . dy = \frac{dz}{z}$, also $\frac{yzdx}{x} + z . \log. nat. x . dy = dz$, oder, wenn man statt z seinen Werth setzt: $\frac{yx^y dx}{x} + x^y . \log. nat. x . dy = d(x^y)$ also: $yx^{y-1} dx + x^y \log. nat. x . dy = d(x^y)$.

Anm. Wird x constant, ist z. B. a^y zu differenziiren, so geht der für $d(x^y)$ gefundene Ausdruck in folgenden über:

$$ya^{y-1} da + a^y \log. nat. a . dy = d(a^y).$$

Nun ist $da = 0$, also $d(a^y) = a^y \log. nat. a . dy$.

c) Einiges über das Differenziiren der trigonometrischen Functionen veränderlicher Bogen.

§. 66. Aufg. Man soll das Differenzial von sin. x finden.

Aufl. I. $d(\sin. x) = \sin. (x + dx) - \sin. x = \sin. x . \cos. dx + \sin. dx . \cos. x - \sin. x$.

Da nun dx ein unendlich kleiner Bogen ist, so ist sein Cosinus von dem eines Bogens von 0° nicht angebbar unterschieden. Da nun der Cosinus von $0° = 1$ ist, so ist auch $\cos. dx = 1$.

Der linearische Sinus des unendlich kleinen Bogens dx fällt mit diesem Bogen zusammen, so daß man sagen kann, der unendlich kleine Bogen dx und sein linearischer Sinus seien, als geometrische Größen betrachtet, einander gleich. Messen wir sie nun beide durch dasselbe Maaß, nämlich den Radius aus, so werden sie auch, als arithmetische Größen betrachtet, einander gleich sein müssen, es ist somit in diesem letztern Sinne $\sin. dx = dx$. Es ändert sich demnach die Gleichung Nr. I in folgende um: $\sin. x . 1 + \cos. x . dx - \sin. x = d(\sin. x)$; woraus $\cos. x . dx = d(\sin. x)$ folgt.

Folg. Man findet also das Differenzial des Sinus eines veränderlichen Bogens, wenn man den Cosinus desselben mit dem Differenzial des Bogens multiplicirt.

§. 67. Aufg. Das Differenzial des Cosinus eines veränderlichen Bogens, zu finden.

Aufl. Es ist $\sin.^2 x + \cos.^2 x = 1$, also, wenn man differenziirt: $2 \sin. x . d(\sin. x) + 2 \cos. x . d(\cos. x) = d(1)$ oder $2 \sin. x . \cos. x . dx + 2 \cos. x . d(\cos. x) = 0$ (wegen §. 66) und $2 \cos. x . d(\cos. x) = - 2 \sin. x . \cos. x . dx$, also $d(\cos. x) = - \frac{2 \sin. x . \cos. x . dx}{2 . \cos. x} = - \sin. x . dx$.

Folg. Man findet demgemäß das Differenzial des Cosinus eines veränderlichen Bogens, wenn man den Sinus des gedachten Bogens mit dem Differenzial desselben multiplicirt, und das Produkt entgegengesetzt nimmt.

§. 68. Es kann nun nicht schwer sein, die Differenziale der übrigen trigonometrischen Functionen zu finden; man beachte nur, daß $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$; $\sec x = \frac{1}{\cos x}$; $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$; $\sin\text{vers}\, x = 1 - \cos x$; $\cos\text{vers}\, x = 1 - \sin x$ ist. Differenziirt man diese Gleichungen, so werden sich aus den hervorgehenden Differenzialgleichungen die verlangten Differenziale leicht entwickeln lassen.

C. Von einigen Anwendungen der Differenzialrechnung.

Außer dem bereits in §. 53, 54, 55, 56 Vorgetragenen mögen hier noch folgende Anwendungen der Differenzialrechnung eine Stelle finden.

a) Anwendung der Differenzialrechnung bei Auffindung der Ausdrücke für die Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale und bei der Untersuchung über die Möglichkeit der Asymptoten.

§. 69. Es sei [in Fig. 3] cabl eine Secante der Curve dabs; df sei die Abscissenlinie; d der Anfangspunkt der Abscissen; ae und bf seien die senkrechten Ordinaten der Punkte a und b; ar sei parallel zu df. Die $\triangle\triangle$ ace und arb sind einander ähnlich, da bei e und r Rechte sind und, weil $ar \parallel cf$, auch $\angle bar = \angle bcf$ ist. Es ist demnach $ce : ea = ar : rb$. Wir wollen ce die Subsecante nennen und sie durch Σ bezeichnen; die Ordinate ae möge y, die Abscisse de x heißen; es ist somit: $\Sigma : y = ar : rb$, oder, da $ar = ef$ ist, $\Sigma : y = ef : rb$. Diese Proportion findet immer statt, wie nahe auch bf an ae sein mag.

Setzen wir nun den Fall, daß man die durch a gehende Secante cabl um diesen Punkt a zur Linken drehe, so wird der zweite Durchschnittspunkt b dem Punkte a immer näher rücken, und endlich unangebbar wenig von ihm abstehn; jedoch auch in diesem Falle wird, wie schon gesagt worden, die obige Proportion bestehen. Es wird aber dann aus der Secante cabl eine, die Curve in a berührende Linie; aus der Linie die wir mit Σ bezeichnet haben, wird die Subtangente des Punktes a, [die wir mit S bezeichnen wollen] die Linie ac wandelt sich in die Tangente des Punktes a um; aus ef wird das Differenzial der Abscisse; aus br das der Ordinate. Wir haben dann also folgende Proportion: $S : y = dx : dy$; hieraus folgt: $S = \frac{y\,dx}{dy}$.

Folg. In jeder Curve ist also die Subtangente eines jeden Punktes = der Ordinate dieses Punktes, multiplicirt mit dem Differenzial der Abscisse, dividirt durch das der Ordinate.

§. 70. Ist [in Fig. 4] cb die Tangente des Punktes c; cd seine senkrechte Ordinate; bd die Subtangente, so ist $cb^2 = cd^2 + bd^2$. Nennen wir die Tangente T, so ist $T^2 = y^2 + S^2$, oder wenn wir den im vorigen § für S gefundenen Werth substituiren: $T^2 = y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2} = \frac{y^2dy^2 + y^2dx^2}{dy^2}$, also $T = \sqrt{\frac{y^2}{dy^2}(dy^2 + dx^2)} = \frac{y}{dy}.\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$.

§. 71. Errichtet man [in Fig. 4] in c auf cb den Perpendikel cl, so heißt bekanntlich cl die Normale, (wir wollen sie durch N bezeichnen) und dl die Subnormale (sie mag K heißen) des Punktes c. Wir wollen nun einen Ausdruck für K finden.

Da bcl = R ist, und man aus der Spitze c auf die Hypotenuse einen Perpendikel cd herabgefällt hat, so ist $bd : dc = dc : dl$, also:

$$S : y = y : K, \text{ also } K = \frac{y^2}{S}.$$

Setzen wir statt S den Werth desselben aus §. 69, so haben wir: $K = \frac{y^2}{\frac{y\,dx}{dy}} = \frac{y^2dy}{y\,dx} = \frac{y\,dy}{dx}$.

Da ferner $cl^2 = cd^2 + dl^2$ ist, so ist $N^2 = K^2 + y^2 = \frac{y^2\,dy^2}{dx^2} + y^2 = \frac{y^2dy^2 + y^2dx^2}{dx^2} = \frac{y^2}{dx^2}\,[dy^2 + dx^2]$, also $N = \frac{y}{dx}.\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$.

§. 72. Will man also von irgend einer Curve z. B. die Subtangente finden, so nimmt man die Gleichung dieser Curve, differenziirt sie, und sucht auf der einen Seite den allgemeinen im §. 69 angegebenen Ausdruck für die Subtangente, nämlich $\frac{y\,dx}{dy}$ zu erhalten; dann ist der auf der andern Seite sich befindende Ausdruck der specielle Ausdruck für die Tangente in dieser Curve. Es sei z. B. die Subtangente der Parabel zu finden.

Die Gleichung für die Parabel ist: $y^2 = px$; wenn wir dieselbe differenziiren, so erhalten wir: $2y\,dy = p\,dx$, und wenn wir beiderseits durch p dividiren: $\frac{2y\,dy}{p} = dx$; dividiren wir ferner durch dy und multipliciren wir durch y, so erhalten wir: $\frac{2y^2}{p} = \frac{y\,dx}{dy}$, demnach ist der Ausdruck $\frac{2y^2}{p}$ = der Subtangente der Parabel.

Da $y^2 = px$ ist, so ist $\frac{2y^2}{p} = S = \frac{2px}{p} = 2x$.

Anm. Der Kürze wegen müssen wir andere Anwendungen obiger Formeln übergehen.

§. 73. Es sei [in Fig. 5] ea eine Tangente der Curve und zwar im Punkte e; ed die perp. Ordinate des Berührungspunktes, folglich ad die Subtangente; ferner sei cb in c auf ad lothrecht; dann ist $ac = ad - cd = S - x$ (wenn wir nämlich die Subtangente des Punktes $e = S$; die Abscisse desselben d. i. $cd = x$ setzen). Nun war (in §. 69) $S = \frac{ydx}{dy}$, also ist $ac = \frac{ydx}{dy} - x$.

Ferner verhält sich: $ac : cb = ad : de$, d. i. $\frac{ydx}{dy} - x : cb = \frac{ydx}{dy} : y$, also: $cb = \left[\frac{y^2dx}{dy} - xy\right] : \frac{ydx}{dy} = \frac{y^2dx - xydy}{dy} \times \frac{dy}{y.dx} = \frac{y^2dx - xydy}{y.dx}$
$= \frac{ydx - xdy}{dx} = y - \frac{xdy}{dx}$.

§. 74. Will man nun wissen, wie ac und cb bei einer speciellen Curve auszudrükken sind, so braucht man nur die Gleichung derselben zu differenziiren, auf einer Seite der sich ergebenden Differenzial-Gleichung den Ausdruck für ac oder cb (wie wir ihn im vorigen §. gefunden haben) zu bilden, so ist das, was auf der andern Seite steht, der Ausdruck für ac oder cb in der speciellen Curve.

§. 75. Die Ausdrücke, welche man nach der im vorigen § angegebenen Weise für ac und bc in einer speciellen Curve findet, gelten, wie groß auch die Abscisse sein mag, die zum Berührungspunkt der Tangente gehört.

Sollte die Curve eine Asymptote haben, so könnte man dieselbe als eine Tangente betrachten, deren Berührungspunkt einer unendlich großen Abscisse zugehört. Man setze also in den nach §. 74 gefundenen speciellen Werthen für ac und cb [in Fig. 5] die Abscisse $x = \infty$, so wird man erfahren, wie groß ac, wie groß bc unter dieser Voraussetzung sein muß, wenn nämlich die zum Berührungspunkt e gehörige Abscisse $cd = \infty$, also die Tangente ae zu einer Asymptote wird. Findet man $ac = \infty$, für bc aber eine bestimmte, endliche Größe, so ist dies ein Zeichen, daß die Asymptote in der der bc (wofür wir, wie gesagt, einen bestimmten, endlichen Werth gefunden,) gleichen Entfernung parallel zur Abscissenlinie gehe. Ist $ac = \infty$ und $bc = 0$, so ist die Abscissenlinie selbst die Asymptote. Findet man dagegen für ac und bc endliche Werthe, so ist dies ein Zeichen, daß die Asymptote die Abscissenlinie schneide.

Verfährt man nach der Angabe von §. 74 und dem hier Gesagten bei der Hyperbel, deren Gleichung : $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax)$ ist, (wenn wir unter b die zweite, unter a dagegen die erste Halbachse verstehen, den Vertex aber als Anfangspunkt der Abscissen betrachten,) so erhält man für ac den Werth a, für bc den Werth b; wenn demnach [in Fig. 6] ce eine Hyperbel und cr = a, die im Vertex c auf der Abscissenlinie lothrecht errichtete cf = b ist, so ist die durch r und f gezogene Gerade die Asymptote der Hyperbel.

b) Von der Anwendung der Differenzialrechnung bei der Auffindung des Maximums und Minimums der Functionen.

§. 76. Erkl. Es sei y eine Function einer veränderlichen Größe x; setzen wir den Fall, y erhalte, wenn x = a wird, einen Werth c, der größer ist, als derjenige, welchen y erhält, sowohl wenn x = a + e, als auch, wenn x = a — e wird, [e als sehr klein angenommen], dann sagen wir, die Function y erreiche, wenn x = a wird, ein Maximum c.

Wird aber der Werth der Function y, wenn man in ihr x z. B. = b setzt [wir wollen jenen Werth = h annehmen] kleiner, als derjenige, welchen y annimmt, sowohl, wenn man x = b + f, als auch, wenn man x = b — f setzt, [f als sehr klein betrachtet] so sagt man, die Function y erreiche, wenn x = b wird, ein Minimum h.

§. 77. Die Frage, welchen Werth die urspr. Veränderliche annehme, wenn die Function derselben ein Maximum oder Minimum erreicht, wird oftmals aufgeworfen.

Wie groß das Maximum oder Minimum einer Function sei, läßt sich leicht entscheiden, wenn man einmal weiß, bei welchem Werthe der urspr. Veränderlichen die Function ein Maximum oder Minimum erreicht; denn man braucht nur diesen Werth der urspr. Veränderlichen statt derselben in der Function zu setzen, um in dem, was aus der Function durch gedachte Substitution wird, das in Rede stehende Maximum oder Minimum zu erhalten.

§. 78. Ob aber die Function bei diesem Werthe der urspr. Veränderlichen ein Maximum oder Minimum erreiche, läßt sich theils aus den Umständen der Aufgabe, theils auf folgende Weise entscheiden:

Man setze in der Function statt der urspr. Veränderlichen eine Größe, die diejenige, bei der die Function ihr Maximum oder Minimum erreichen soll, sehr wenig übertrifft. Ist der Werth der Function, den sie durch diese Substitution annimmt, größer, als derjenige, von dem man nicht sicher ist, ob er ein Maximum oder Minimum vorstelle, so hatte die Function ein Minimum erreicht; ist aber der Werth, den die Function durch obige Substitution erreicht, kleiner, als der, von dem man nicht sicher wußte, ob er ein Maximum oder Minimum vorstelle, so hatte die Function ein Maximum erreicht.

§. 79. Es erreiche die Function y der urspr. Veränderlichen x z B., wenn $x = c$ ist, ihr Maximum oder Minimum, so ist klar, daß die Differenziale, die y erhält, wenn man einmal von einem x, das um eine Kleinigkeit kleiner, das anderemal von einem x, das um eine Kleinigkeit größer, als c ist, ausgeht, im Zeichen verschieden sein müssen.

Da wir nun die urspr. Veränderliche x immer als wachsend, also dx immer als positiv ansehen können, so wird das Zeichen von $\frac{dy}{dx}$ in jenen zwei Fällen auch verschieden sein müssen; ist z. B. $\frac{dy}{dx}$, kurz bevor $x = c$ wird, positiv, d. h. hat y mit dem wachsenden x zugenommen, so muß dagegen $\frac{dy}{dx}$ bald nachdem $x = c$ gewesen, negativ werden, d. h. mit dem nun noch wachsenden x ein abnehmendes y zusammengehören und umgekehrt.

Der Uebergang aus dem Positiven ins Negative findet aber am häufigsten durch die Null statt, (manchmal jedoch auch durch das Unendliche; man denke nur an die Tangente in der Trigonometrie.) Wollen wir also wissen, bei welchem Werthe von x die Function y ein Maximum oder Minimum erreiche, so hat man nur $\frac{dy}{dx} = 0$ zu setzen, und der Werth von x, der sich unter dieser Voraussetzung ergiebt, wird in den meisten Fällen anzeigen, wie groß x sein müsse, wenn y ein Maximum oder Minimum erreichen soll.

§. 80. Ist z. B. zu bestimmen, wo im Kreise die größte senkrechte Ordinate stattfinde, wenn man den Durchmesser als Abscissenlinie, einen der Scheitel als Anfangspunkt der Abscissen annimmt, so nehme man die Gleichung für den Kreis, welche in diesem Falle $y = \sqrt{(ax - x^2)}$ ist, [wenn man die Ordinate durch y, die Abscisse durch x, den Durchmesser durch a bezeichnet] und differenziire sie, so erhält man: $dy = d[ax - x^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[ax - x^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot d[ax - x^2] = \frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{(ax - x^2)}}$; demnach ist $\frac{dy}{dx} = \frac{a - 2x}{2\sqrt{(ax - x^2)}}$; nun setzen wir $\frac{dy}{dx} = 0$, dann ist $0 = \frac{a - 2x}{2\sqrt{(ax - x^2)}}$, demnach $0 = a - 2x$, also $2x = a$, also $x = \frac{a}{2}$, d. h. wenn die Abscisse = dem Radius ist, erreicht die Ordinate ein Maximum.

Will man nun wissen, wie groß dieses Maximum sei, so setze man in $y = \sqrt{(ax - x^2)}$ statt x den Werth $\frac{a}{2}$, so hat man $y = \sqrt{\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4}\right)} = \frac{a}{2}$ d. h. dieses Maximum der Ordinate = dem Radius.

Anm. Daß es sich hier von einem Maximum und nicht von einem Minimum handle, läßt sich also zeigen: Man setze in $y = \sqrt{(ax - x^2)}$ statt x den Werth $\frac{a}{2} + e$, so ist $y = \sqrt{\left[a\left(\frac{a}{2} + e\right) - \left(\frac{a}{2} + e\right)^2\right]} = \sqrt{\left[\frac{a^2}{2} + ae - \frac{a^2}{4} - ae - e^2\right]} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - e^2\right)}$. Da nun $\sqrt{\left[\frac{a^2}{4} - e^2\right]}$ offenbar kleiner ist, als

$\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}\right)}$ oder $\frac{a}{2}$, so findet, wenn $x = \frac{a}{2}$ ist, ein Maximum, nicht ein Minimum der Ordinaten statt.

c) Anwendung der Differenzialrechnung bei der Bestimmung des eigentlichen Werthes einer gebrochenen Function einer urspr. Veränderlichen, wenn sie die Form $\frac{0}{0}$ annimmt.

§. 81. Es kommt bisweilen vor, daß der Zähler und Nenner einer gebrochenen Function von einer urspr. Veränderlichen bei einem gewissen Werthe derselben zu gleicher Zeit 0 werden. Es kann gefragt werden, welchen Werth die Function in diesem Zustande eigentlich habe.

§. 82. Es sei $\frac{P}{Z}$ eine gebrochene Function von x, sowohl P als Z werde, wenn $x = a$ ist, $= 0$. Wir wollen untersuchen, welchen Werth $\frac{P}{Z}$ in dem Zustande hatte, der dem Zustande des Verschwindens des P und Z zunächst vorherging. In diesem Zustande war aber vom Zähler nur das Differenzial desselben, eben so vom Nenner nur sein Differenzial übrig.

Hieraus ergiebt sich also folgende Regel: Man differenziire den Zähler P für sich, eben so den Nenner Z, dividire das Differenzial des Zählers durch das des Nenners und setze im Resultate statt x den Werth a, so hat man den eigentlichen Werth des hier in Rede stehenden $\frac{0}{0}$.

Sollte man aber auch auf diesem Wege wieder das Resultat $\frac{0}{0}$ erhalten, so betrachte man den Bruch in dem Zustande, der dem Zustande $\frac{dP}{dZ}$ zunächst vorherging, nämlich in dem Zustande $\frac{d^2P}{d^2Z}$ u. s. w.

Beisp. Es ist bekanntlich die Summenformel der geom. Progression: $a, ax, ax^2, ax^3, \ldots = \frac{ax^n - a}{x-1}$.

Setzt man in dieser Formel $x = 1$, so ist die Summe $= \frac{a-a}{1-1} = \frac{0}{0}$. Wir wollen den eigentlichen Werth dieses $\frac{0}{0}$ suchen:

$$d(ax^n - a) = anx^{n-1}dx;$$
$$d(x-1) = dx;$$

also $\frac{d(ax^n - a)}{d(x-1)} = \frac{anx^{n-1}dx}{dx} = anx^{n-1}$.

Setzen wir nun im Resultate anx^{n-1} statt x den Werth 1, so hat man an; dies ist der eigentliche Werth von $\frac{0}{0}$ in dem obigen Falle. Daß dieses Resultat richtig sei, geht daraus hervor, daß unter der Voraussetzung, daß $x = 1$ sei, die obige Reihe in a, a, a u. s. w. übergeht, wo die Summe von n Gliedern offenbar $=$ na ist.

D. Einiges aus der Integralrechnung.

§. 83. Erkl. Ein Ausdruck, worin das Differenzial einer, oder die Differenziale mehrerer urspr. Veränderlichen vorkommen, wird ein Differenzialausdruck genannt. So sind also $a\,dy$; $nx^{n-1}dx$; $n(n-1)x^{n-2}dx^2$; $x\,dy + y\,dx$ Differenzialausdrücke.

§. 84. Erkl. Ist uns ein Differenzialausdruck gegeben, und suchen wir die Function, welche, differenziirt, jenen vorgelegten Differenzialausdruck giebt, so sagt man, daß man den vorgelegten Differenzialausdruck integrirt. Die Function, welche, differenziirt, den vorgelegten Differenzialausdruck giebt, heißt das Integral desselben, und die Anweisung, verschiedene Differenzialausdrücke auf eine möglichst bequeme Weise zu integriren, die Integralrechnung.

Beisp. Sollen wir den vorgelegten Differenzialausdruck $a.dx$ integriren, so sollen wir eine Function finden, die, differenziirt, $a.dx$ giebt; diese verlangte Function kann ax sein; es ist somit ax das Integral des vorgelegten Differenzialausdrucks $a.dx$.

§. 85. Bem. Nicht jeder vorgelegte Differenzialausdruck kann integrirt werden; manchmal ist die Integration absolut unmöglich, weil keine Function gedacht werden kann, die, differenziirt, den vorgelegten Differenzialausdruck giebt; in vielen Fällen kann man das gesuchte Integral nur annähernd finden und in manchen andern Fällen sind uns die Methoden unbekannt, durch deren Anwendung man zum verlangten Integral eines vorgelegten Differenzialausdrucks gelangen könnte; es ist somit die Integralrechnung noch keine abgeschlossene Wissenschaft.

§. 86. Wahls. Um anzuzeigen, daß man einen vorgelegten Differenzialausdruck integriren soll, setzt man demselben links das Zeichen $\int$ vor; so bedeutet also $\int(a\,dx)$ das Integral von $a\,dx$. Man hüte sich aber dieses $\int$ für einen Faktor anzusehen. $\int\int[m(m-1)x^{m-2}dx^2]$ oder $\int^2[m(m-1)x^{m-2}dx^2]$ zeigt an, daß man das Integral desjenigen Ausdrucks bilden soll, der als das Integral von $m(m-1)x^{m-2}dx^2$ erhalten wird. Jenes Integral heißt das zweite Integral der Function $m(m-1)x^{m-2}dx^2$. So spricht man auch wohl von einem dritten, vierten Integral u. s. w.

§. **87.** Aus §. 36 ist klar, daß das constante Glied einer Function auf das Differenzial desselben gar keinen Einfluß hat; so ist z. B. das Differenzial von ax dasselbe, wie das von $ax + b$.

Ist uns also ein Differenzialausdruck zum Integriren vorgelegt, so sind wir zwar in sehr vielen Fällen im Stande, den veränderlichen Theil der Function, deren Differenzial zu integriren war, nach den eigentlichen Integrationsregeln zu finden, es kann jedoch in der zu suchenden Function außer dem eben genannten veränderlichen Theil auch noch ein constantes Glied vorhanden sein.

Daher pflegt man zu dem durch die eigentlichen Integrationsregeln gefundenen veränderlichen Theil der verlangten Function noch ein C zu addiren, welches nämlich den möglicherweise in dem gesuchten Integral vorkommenden constanten Theil vorstellen soll. Man schreibt also: $\int(adx) = ax + C$. Dieses C kann natürlich auch $= 0$ werden.

Wissen wir z. B., daß die gesammte, zum Differenzialausdrucke adx gehörige Function $= h$ wird, wenn die urspr. Veränderliche der Function den Werth g erhält, so daß dann also $ax + C = h$ wird, so muß $ag + C = h$, also $C = h - ag$ sein; demnach ist das vollständige, zu adx gehörige, hier eigentliche gemeinte Integral $= ax + h - ag$.

§. **88.** Kennt man eine Function, die, differenziirt, den zum Integriren vorgelegten Differenzialausdruck giebt, so erhält man das verlangte Integral ohne Beachtung anderweitiger Integrationsregeln; man braucht nur zu jener Function noch die Constante C zu addiren, um das verlangte Integral vollständig zu finden. So wissen wir z. B. aus §. 35, daß $d(ax) = adx$ ist, daher ist das Integral von $adx = ax + C$. Da ferner (nach §. 46) $d(x^2) = 2xdx$ ist, so ist auch $\int(2xdx) = x^2 + C$. Nach §. 45 war ferner $d(x^3) = 3x^2dx$, also ist $\int(3x^2dx) = x^3 + C$. Aus §. 38 folgt: $d(xy) = xdy + ydx$; demnach ist auch $\int(xdy + ydx) = xy + C$. Nach §. 42 war $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$, demnach ist auch $\int\left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right) = \frac{x}{y} + C$. Da ferner nach §. 45, 47, 48, 49 $d(x^m) = mx^{m-1}dx$ ist, so ist auch $\int(mx^{m-1}dx) = x^m + C$.

§. **89.** Die Probe der Richtigkeit eines gefundenen Integrals besteht darin, daß man das Integral differenziirt, um zu sehen, ob dadurch das vorgelegte Differenzial erhalten werde.

§. **90.** Aus dem Vorigen ist klar, daß $\int(d(fx)) = fx$ ist.

§. **91.** Aufg. Man soll $z^m dz$ integriren, wenn z eine Function einer Veränderlichen x vorstellt, mag m eine ganze, oder gebrochene, eine positive oder negative Zahl sein.

Aufl. Man erhöhe den Exponenten m um eine positive Einheit, und dividire den so umgestalteten Ausdruck, nämlich $z^{m+1}dz$ durch $(m+1)dz$, so hat man den veränderlichen Theil des verlangten Integrals.

Bew. Es ist $d\left[\frac{z^{m+1}}{m+1}\right] = \frac{1}{m+1} \cdot d[z^{m+1}]$ (wegen §. 43) $= \frac{(m+1) \cdot z^m dz}{m+1} = z^m dz$. Da also $d\left(\frac{z^{m+1}}{m+1}\right) = z^m dz$ ist, so ist auch [nach §. 88] $\int(z^m dz) = \frac{z^{m+1}}{m+1} + C$.

§. 92. Lehrs. $\int[ax^m dx] = a\int(x^m dx)$.

Bew. $a \cdot \int(x^m dx) = a \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ (nach §.91).

Nun ist $d\left[\frac{ax^{m+1}}{m+1} + C\right] = a \cdot d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right) = \frac{a(m+1)x^m dx}{m+1} = ax^m dx$; da also $a\int(x^m dx)$, differenziirt, in der That den vorgelegten Differenzialausdruck giebt, so ist $a \cdot \int(x^m dx)$ auch wirklich das Integral von $ax^m dx$.

§. 93. Jeden zu integrirenden eingliedrigen Differenzialausdruck einer veränderlichen Größe muß man auf die Form $z^m dz$ zurückzuführen suchen, um ihn dann nach § 91 integriren zu können. Ist der zum Integriren vorgelegte Differenzialausdruck mehrgliederig, so braucht man nur die Integrale der einzelnen Glieder zu addiren. So ist z. B. $\int(adx + mx^{m-1}dx) = \int(adx) + \int(mx^{m-1}dx) = ax + x^m + C$; denn, wenn man den zuletzt gefundenen Ausdruck differenziirt, kommt der vorgelegte Differenzialausdruck wieder zum Vorschein.

§. 94. Wir wollen einige Beispiele zur Uebung hieher setzen.

Aufg. I. Man soll $dx\sqrt{x}$ integriren.

Aufl. $dx\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}dx$, also $\int(dx\sqrt{x}) = \int(x^{\frac{1}{2}}dx) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$.

Aufg. II. Man soll $\int\left(\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$ finden.

Aufl. $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}dx$, also ist $\int\left(\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$.

Aufg. III. Das Integral von $\frac{dx\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}}$ zu finden.

Aufl. $\frac{dx\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}dx}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{2}}dx}{2} = \frac{x^{-\frac{1}{6}}dx}{2}$; also $\int\left[\frac{dx\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}}\right] = \int\left(\frac{x^{-\frac{1}{6}}dx}{2}\right) = \frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{2.(-\frac{1}{6}+1)} = \frac{x^{\frac{5}{6}}}{2 \cdot \frac{5}{6}} = \frac{\sqrt[6]{x^5}}{\frac{5}{3}} = \frac{3\sqrt[6]{x^5}}{5}$.

Aufg. IV. Das Integral von $dx\sqrt{(a-x)}$ zu suchen.

Aufl. Man setze $\sqrt{(a-x)} = z$, dann ist $a - x = z^2$; differenziirt man beiderseits, so ist $-dx = 2z\,dz$; oder $dx = -2z\,dz$. Nun ist $\sqrt{(a-x)} = z$, also wenn man die zwei letzten Gleichungen mit einander multiplicirt: $dx\sqrt{(a-x)} = -2z^2\,dz$; also $\int(dx\sqrt{(a-x)}) = -\frac{2z^3}{3}$. Setzt man nun statt z den Werth $\sqrt{(a-x)}$, so ist $\int[dx\sqrt{(a-x)}] = -\frac{2}{3}\sqrt{(a-x)^3} = -\frac{2}{3}(a-x)\sqrt{(a-x)}$.

Aufg. V. Den Differenzialausdruck $\frac{dx\sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{x}}$ zu integriren.

Aufl. $\frac{dx\sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{x}} = x^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}dx = x^{\frac{n-m}{mn}}dx$, demnach auch $\int\left(\frac{dx\sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{x}}\right) =$

$$\int\left(x^{\frac{n-m}{mn}}dx\right). \text{ Nun ist } \int\left(x^{\frac{n-m}{mn}}dx\right) = \frac{x^{\frac{n-m}{mn}+1}}{\frac{n-m}{mn}+1} = \frac{x^{\frac{n-m+mn}{mn}}}{\frac{n-m+mn}{mn}} =$$

$$\frac{mnx^{\frac{n-m+mn}{mn}}}{n-m+mn} = \frac{mn}{n-m+mn} \cdot \sqrt[mn]{[x^{n-m+mn}]}.$$

Anm. Wir haben in den Beispielen dieses § nur auf den veränderlichen Theil des Integrals Rücksicht genommen.

Einige Anwendungen der Integralrechnung.

§. 95. Es sei [in Fig. 7] abc eine Curve, al die Abscissenlinie, ae die Abscisse, be die senkrechte Ordinate des Punktes b; es sei der Punkt f dem Punkte e unendlich nahe, also $ef = dx$; [wir verstehen hier unter x die Abscisse, unter y die Ordinate]. Ist nun cf in f auf al lothrecht, und $bd \parallel al$, so ist cd offenbar $= dy$.

Der arithmetische Ausdruck für den Flächenraum aeb ist sicher nur eine Function von x, da ja auch y als eine, von x abhängige Größe zu betrachten ist. Aendert sich x um sein Differenzial ef, so ändert sich auch die von x abhängige Function, (nämlich der arithmetische Ausdruck für den Flächenraum) um ihr Differenzial. Die geometrische Größe, die durch das so eben genannte Differenzial arithmetisch repräsentirt wird, ist befc.

Wir können bc als eine gerade Linie betrachten. Der △ bcd hat mit dem unendlich kleinen Parallelogramm befd dieselbe Höhe bd, die Basis des Triangels aber, nämlich cd ist in der des Parallelogramms, nämlich in df unendlichemal enthalten; es ist somit auch △ bdc unendlichemal in der unendlich kleinen Größe des ersten Ranges befd enthalten; es ist somit △ bcd eine unendlich kleine Größe des zweiten Ranges nnd verschwindet daher in Beziehung auf befd, so daß befd = befc gesetzt werden kann. Da nun befd = ef.be ist, so ist der arithmetische Ausdruck für das Differenzial der Fläche = $y\,dx$. Integrirt man den, dem $y.dx$ gleichbedeutenden, aus der Gleichung einer speciellen Curve abgeleiteten Ausdruck, so muß als Integral der arithmetische Repräsentant des Flächenraums hervorgehen.

§. **96**. Aufg. Man soll den arithm. Ausdruck für die Fläche abc [in Fig. 8] finden, wenn ac eine Parabel, ab die Abscisse, bc die senkrechte Ordinate des Punktes c ist.

Aufl. Die Gleichung für die Parabel ist: $y = \pm\sqrt{px}$. Multiplicirt man beiderseits mit dx, so hat man: $y\,dx = dx\sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$; integrirt man nun auf beiden Seiten, so hat man: $\int(y\,dx) = \int(p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx) = \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}.x = \frac{2}{3}\sqrt{px}.x$. Nun ist $\sqrt{px} = y$, also ist $\int(y\,dx) = \frac{2}{3}yx$. Es ist somit der num. Ausdruck für die Fläche abc $= \frac{2}{3}yx$. Man braucht also nur von dem Produkte aus der Abscisse in die Ordinate $\frac{2}{3}$ Theile zu nehmen, um den Ausdruck für die Fläche zu finden.

Anm. Wir haben in der so eben gelöseten Aufgabe die Constante des Integrals außer Acht gelassen, und konnten es, weil das C hier $=0$ ist, denn wir wissen, daß, wenn hier $x = 0$ wird, auch die zugehörige Parabelfläche $= 0$ sein muß; es ist somit: $\frac{2}{3}yx + C = 0$, wenn $x = 0$ gesetzt wird; dann ist aber $0 + C = 0$, also $C = 0$.

§. **97**. Es sei [in Fig. 9] avb eine beliebige Curve; ar die Abscisse, rv die senkrechte Ordinate des Punktes v; rk sei $= dx$; ku $\|$ rv; vn $\|$ al, so ist nu $= dy$. Der Bogen vu, der als gerade Linie angesehen werden kann, $= \sqrt{(vn^2 + nu^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Dreht sich alb um al als Achse herum, so bildet avb den Mantel des runden Körpers, so wie av insbesondere den Theil des Mantels, der sich auf die Abscisse ar $= x$ bezieht. Die Gerade vu bildet beim Umdrehen die unendlich kleine Zunahme des Mantels, d. i. das Differenzial des zur Abscisse x gehörenden Mantels. Drückt man also dieses Differenzial arithmetisch aus, und integrirt man diesen Ausdruck, so erhält man in dem Integrale den arithmetischen Ausdruck für den zu x gehörenden Mantel.

Nun ist obiges Manteldifferenzial die Seitenfläche eines unendlich kleinen gestutzten senkrechten Kegels, dessen Bases durch das Umdrehen von rv und ku, also von y, und $y + dy$ erzeugt werden, dessen Höhe aber $= dx$ ist.

Nun findet man den Mantel eines gestutzten senkrechten Kegels, wenn man die Seite desselben, (hier vu) durch das arithmetische Mittel zwischen den Peripherien der beiden Bases multiplicirt.

In unserem Falle ist die Peripherie der größeren Basis $= 2(y+dy)\pi = 2y\pi + 2\pi dy = 2y\pi$, [da $2\pi dy$ in Beziehung auf $2y\pi$ verschwindet.) Die Peripherie der kleineren Basis $= 2y\pi$, also das arithmetische Mittel zwischen beiden $= \frac{4y\pi}{2} = 2y\pi$.

Es ist demnach das oben erwähnte Manteldifferenzial $= 2y\pi\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Hat man also aus der Gleichung einer speciellen Curve für $2y\pi\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ ein Aequivalent gefunden, so braucht man nur dieses Aequivalent zu integriren, um den veränderlichen Theil der Function zu erhalten, welche den zu x gehörigen Theil des Mantels arithmetisch ausdrückt.

§. 98. Setzen wir den Fall, die Curve avb [in Fig. 9] sei eine Parabel.

Die Gleichung für die Parabel ist: $y^2 = px$; diese giebt, differenziirt: $2ydy = pdx$; also $dy = \frac{pdx}{2y}$; und, wenn man quadrirt, so erhält man $dy^2 = \frac{p^2dx^2}{4y^2}$; wenn man beiderseits dx^2 addirt, so erhält man: $dx^2 + dy^2 = \frac{p^2dx^2}{4y^2} + dx^2 = \frac{p^2dx^2 + 4.y^2.dx^2}{4y^2}$. Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel, so erhält man: $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{dx}{2y}.\sqrt{(p^2+4y^2)}$, und, wenn man beiderseits mit $2y\pi$ multiplicirt:

$$2y\pi\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{2y\pi dx}{2y}.\sqrt{(p^2+4y^2)}.$$

oder, da $4y^2 = 4px$ ist: I. $2y\pi\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \pi dx\sqrt{(p^2+4px)}$.

Nun haben wir auf der ersten Seite der letzten Gleichung das im vorigen §. angegebene Manteldifferenzial, wir werden also die gedachte Gleichung nur zu integriren brauchen, um auf den veränderlichen Theil der Function zu kommen, die den zu x gehörenden Mantel des Paraboloids arithmetisch repräsentirt.

Um das Integral der rechten Seite zu erhalten, wollen wir $\sqrt{(p^2+4px)} = z$, also $p^2 + 4px = z^2$ setzen und diese letztere Gleichung differenziiren; so erhalten wir: $4pdx = 2zdz$, also $dx = \frac{2zdz}{4p} = \frac{zdz}{2p}$. Setzen wir nun in der obigen Gleichung Nr. I statt dx den dafür gefundenen Werth und statt $\sqrt{(p^2+4px)}$ den Werth z, so haben wir:

$$2y\pi\sqrt{(d^2+dy^2)} = \frac{\pi z.dz}{2p}.z = \frac{\pi z^2dz}{2p},$$

also $\int(2y\pi\sqrt{(dx^2+dy^2)}) = \int\left(\frac{\pi z^2dz}{2p}\right)$; nun ist $\int\left(\frac{\pi z^2dz}{2p}\right) = \frac{\pi z^3}{3.2p} + C$ $= \frac{\pi}{6p}.z^3 + C$; setzt man statt z^3 den Werth $z^2.z$ oder $(p^2+4px)\sqrt{(p^2+4px)}$, so ist $\int(2y\pi\sqrt{(dx^2+dy^2)}) = \int\left(\frac{\pi z^2dz}{2p}\right) = \frac{\pi}{6p}(p^2+4px)\sqrt{(p^2+4px)} + C$.

In unserem Falle … $2(y+dy)\pi = 2y\pi + 2\pi dy$ $= 2y\pi$, [da $2\pi dy$ i… Die Peripherie der kleineren Basis $= 2y\pi$, also de… $= \frac{4y\pi}{2} = 2y\pi$.

Es ist demnach d… $2y\pi\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Hat man also aus der Gle… $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ein Aequivalent gefunden, so brau… griren, um den veränderlichen Theil der Function zu … heil des Mantels arithmetisch ausdrückt.

§. 28. Setzen n… sei eine Parabel.

Die Gleichung fü… differenziirt: $2y\,dy = p\,dx$; also $dy = \frac{p\,dx}{2y}$; u… $^2 = \frac{p^2 dx^2}{4y^2}$; wenn man beiderseits dx^2 addirt, so … $^2 = \frac{p^2 dx^2 + 4 \cdot y^2 \cdot dx^2}{4y^2}$. Zieht man auf beider… man: $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$ $\frac{dx}{2y} \cdot \sqrt{(p^2 + 4y^2)}$ … multiplicirt:

$2y\pi$… $+ 4y^2)$.

oder, da $4y^2 = 4px$ … $(p^2 + 4px)$.

Nun haben wir … ng das im vorigen §. angegebene Manteldifferenzia… ng nur zu integriren brauchen, um auf den veränderl… ie den zu x gehörenden Mantel des Paraboloids a…

Um das Integra… en wir $\sqrt{(p^2 + 4px)} = z$, also $p^2 + 4px = z$… ifferenziiren; so erhalten wir: $4p\,dx = 2z\,dz$, also … r nun in der obigen Gleichung Nr. I statt dx den d… $p^2 + 4px)$ den Werth z, so haben wir:

$2y\pi$ … $\frac{\pi z^2 dz}{2p}$,

also $\int(2y\pi\sqrt{(dx^2}$ – … $\frac{\pi z^2 dz}{2p}) = \frac{\pi z^3}{3.2p} + C$

$= \frac{\pi}{6p} \cdot z^3 + C$; … $(p^2 + 4px)\sqrt{(p^2 + 4px)}$,

so ist $\int(2y\pi\sqrt{(dx^2}$ … $^2 + 4px)\sqrt{(p^2 + 4px)} + C$.