

Fünfter Abschnitt.

§. 38.

Ueber die Zeichnung und Berechnung der goniometrisch aufgenommenen Figuren habe ich wenig oder nichts zu sagen. Der Zweck der gegenwärtigen kleinen Schrift beschränkt sich eigentlich auf Messungs-Methode, und was nicht dazu gehört, liegt dem Wesen nach ausserhalb ihrer Gränzen. Nichts desto weniger habe ich mich bestrebt, die in dem Vorstehenden abgehandelte Methode so sehr als irgend möglich, denen Formen anzupassen, welche bereits bei den goniometrischen Arbeiten eingeführt sind, und um dies zu erreichen habe ich gern einige Abänderungen aufgeopfert, wodurch einige Ausdrücke etwas abgekürzt worden waren. So wie ich mit beständiger Rücksicht auf das Angenommene und das bekannte Verfahren, die Methode der Normalen vorgetragen habe, ist sie in der That der gebräuchlichen Goniometrie äußerst ähnlich geblieben, und ich darf daher gewiß hoffen, daß niemand, dem die letztere bekannt ist, bei dem Gebrauch der Normalen auf irgend eine Bedenklichkeit oder Ungewißheit stoßen werde. Was ich im §. 28 und 29 über die Werthe der Abscissen und Ordinaten für die Projektion der Polygonal-Winkel-Punkte auf die Normale gesagt habe, enthält wohl alles was darüber anzumerken nöthig sein mochte: es betrifft vorzüglich die Werthe, welche den Abweichungen (womit gerechnet wird) beizulegen ist, weil nur diese, als gewissermaßen veränderliche Größen, der gegenwärtigen Methode eigenthümlich sind, während alles übrige die

Verzeichnung und Berechnung der Figuren betreffende, wiederum ganz mit dem gewöhnlichen Verfahren zusammen trifft. Und um mich von letzterm auch nicht weiter zu entfernen, habe ich es unterlassen, - den Ausdrücken für die Breiten und Längen eine andre, allgemeinere und abgekürzte Gestalt zu geben, deren sie sonst wohl fähig gewesen wären. So wie ich diese Ausdrücke aufgestellt habe, sind sie völlig in der gewöhnlichen Form beliebt und gleichwohl noch etwas einfacher, auch bequemer, in sofern zu ihrer Anwendung keine Reduktion oder Permutation der Polygonal-Winkel, oder der darin liegenden äussern nöthig ist, sondern die goniometrischen Größen unmittelbar aus dem Manual in die Rechnung übergeführt werden können. Ich werde daher nicht nöthig haben, noch etwas zur Erläuterung der Verzeichnungs- und Berechnungsart hinzuzufügen, indem ich dieselbe als bekannt voraussetze und mich übrigens auf die S. S. 28. 29. beziehe. Sonach bleibt mir für jetzt wenig zu sagen übrig, und dieses Wenige betrifft vorzugsweise die Anwendung der Normal-Methode in einem etwas ausgedehntern Sinne.

§. 39.

Nach meiner Meinung entstehen aus der gegenwärtig vorgetragenen Methode, ausser den Vortheilen, welche sie bei den Messungen selbst gewährt, noch andre eben so wesentliche dadurch, daß die Normale auch zugleich als Abscissen- oder Projektions-Linie der Polygonal-Winkel-Punkte dient, und ich darf daher voraussetzen, daß mit der Annahme der Methode überhaupt zugleich die Bestimmung verbunden werde, daß die Abscissen-Linien nicht willkürlich gewählt, sondern dazu allemal die Normalen selbst angenommen werden. Hierdurch entstehen noch

wendig Gleichförmigkeit und Zusammenhang unter mehreren, zu einem Ganzen gehörigen einzelnen Messungen, wie sie ohne jene Bestimmung schwerlich, oder doch nur durch mancherlei Reduktionen zu bewirken sind. So etwas wird man vorzüglich bei den Kadastral: Vermessungen, und unter manchen Umständen auch bei den geodätischen Arbeiten erfahren, welche den Separationen der Gemeinheiten und überhaupt dem Theilungs Geschäft von Gesamtgründen vorausgehen müssen, und es scheint mir nicht zweifelhaft, daß die Methode der Normalen ihre Brauchbarkeit durch Erleichterung und Vereinfachung sämtlicher Arbeiten bewähren werde.

Auch für die ausführenden Geometer hat die angegebene Bestimmung der Normale als Abscissenlinie bedeutende Vortheile, welche ihnen die ganze Methode um so angemessener machen wird, als sie außer den Vorzügen bei den Messungen selbst, die Hausarbeiten sehr merklich erleichtert. Denn sie sind dabei aller Reduktionen der Winkel, aller Berechnungen von einer Linie auf die andre überhoben, und finden die nöthigen Data zu den jedesmaligen Rechnungen ganz unmittelbar in ihren Manualen oder Vermessungs: Registern. Die Anschlüsse an die zunächst gelegenen Sectionen, oder überhaupt an nachbarliche Mitarbeiter werden auch bei weitem leichter bewirkt, wenn beide sich auf eine gemeinschaftliche, oder wenigstens in der Richtung gleichlaufende Linie beziehen, und ein etwaiges Versehen in der Lage der Figur oder den einzelnen Gränzen wird dabei schneller entdeckt und leichter berichtigt. Wenn die einzelnen Vermessungs: Sectionen zusammen genommen zu irgend einer weitem Bestimmung benutzt werden sollen, so ist die Uebereinstimmung in der Zeichnung durch die Reduktion auf eine gemeinschaftliche Normale, wiederum ein willkommenes Hülfsmittel.

tel um zu einer schnellen und richtigen Uebersicht zu gelangen. Sollen mehrere Vermessungs-Abtheilungen demnächst in eine einzige zusammenhängende Zeichnung gebracht werden, so ist auch diese Reduktion leichter, die Genauigkeit wahrscheinlicher, wenn alle einzelne Abtheilungen schon gleichförmig orientirt waren. Diese und andre praktische Vortheile sind an sich so einleuchtend, daß ich mich der weitern Erläuterung derselben wohl gewiß überheben darf.

§. 40.

Für größere zusammenhängende Arbeiten über eine ganze Provinz oder sonst eine beträchtliche Erdfläche möchte ich gern, daß man noch einen Schritt weiter gehen wollte; daß man sich zu der Bestimmung entschließen mögte; die Normalen sollen wahre Mittagslinien sein. Diese Bestimmung scheint mir nicht bloß das bequemste, sondern auch bei weitem das vorzüglichste Mittel zu sein, um die Messungen verschiedener einzelnen Sektionen in die Dreiecke eines größern Netzes genau einzupassen und unvermeidlich richtig zu orientiren.

Wenn die Hauptpunkte eines großen Dreiecknetzes ihre geographische Ortsbestimmung durch astronomische Hülfsmittel erhalten haben, wenn als die wahren Mittagslinien jener Hauptpunkte also gegeben anzusehen sind, und nun die Mittagslinien der Triangular-Punkte in den kleinern Netzen durch Rechnung bestimmt (oder auch unmittelbar beobachtet) werden, so sind die Normalen schon so gut also gegeben, oder doch sehr leicht ausgemittelt. Und welche erfreuliche Uebereinstimmung, welches erwünschte Anpassen auer einzelnen Arbeiten läßt sich nicht von einer solchen allgemeinen Normale hoffen! Wie viel Wahrheit wird in den Plan eines großen Landes kommen,

daß auf diese Weise vermessen und gezeichnet wird! Es fehlt wenig an der stereographischen Projektion desselben, wenn man der sphärischen Ueberschüsse gehörige Rechnung thut, was bei großen Dreiecknezen ohnehin geschehen wird.

Hierbei werde ich doch wohl nicht den Vorwurf befürchten dürfen, daß ich von parallelen Normalen rede, während die wahren Mittagslinien namhafte Winkel mit einander machen. Es wird nicht nöthig sein, noch besonders zu erinnern, daß der Parallelismus der Normalen sich allemal auf ihre nächsten Mittagslinien beziehe, und daß eben darin die Genauigkeit bestehe, mit welcher die einzelnen kleinen Flächenstücke in die nächsten Dreiecke, diese wieder in die größern u. s. w. passen.

Wenn man die Bogenlänge eines Aequatorgrades nach den scharfsinnigen Untersuchungen des sel. Prof. Klügel zu 57247 tois oder 29624,8 rhein. Ruthen als Mittelzahl annimmt, so wird die Bogenlänge eines Längengrades

unter 50° Polhöhe = 19042,46 rhein. Ruthen,
 „ 52 „ = 18228,86 „

betragen. Zwischen zwei solchen Graden kämen demnach durchschnittlich auf 1 Min. in Gradmaas 310,6775 Ruthen rhein. in Längenmaas. Wenn man daher annehmen wollte, daß die spectellen Vermessungen mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{2}$ Min. bewirkt werden könnten, so würde zwischen je 155,8387 Ruthen eine Verbesserung der Lage der Normale von 30 Sec. vorzunehmen sein. Diese Korrektion ist hinreichend, um die Sections-Vermessungen in völlige Uebereinstimmung mit den Dreiecknezen zu bringen; denn wosfern alsdann die Lage irgend eines Meridians in der Section gegeben ist, so wird dieselbe für jede Ordinatenlänge von $155\frac{1}{2}$ Ruthen um 30 Sec. verändert, nach einer oder der andern Seite, je nach

dem die Richtung ist, in welcher die Ordinaten mit Bezug auf die Zählungs-Richtung der Meridiane liegen. Etwas diesem Aehnliches enthält die Untersuchung des §. 6.

Es ist gewiß allemal möglich und auch leicht, die Lage eines Meridians für jede Section anzugeben, wenn nemlich die Dreieckspunkte des umfassenden Dreiecks durch Beobachtung oder Rechnung geographisch fest gelegt sind. Und dieses letztere kann wiederum nicht fehlen, wenn die Hauptpunkte eines großen Dreiecknetzes astronomisch bestimmt sind. Die erforderlichen Operationen und Rechnungen, wodurch allen diesen Punkten ihre Lagen gegen eine erste Mittagslinie angewiesen, folglich auch die Neigungen aller Meridiane gegen die ersten und unter einander bestimmt werden, sind denen bekannt, welchen so wichtige Arbeiten übertragen werden. Daher bleibt mir nur der Wunsch übrig, daß diese, so wie überhaupt diejenigen, welche die Leitung großer Messungen übernehmen, die Gedanken, welche ich in vorstehenden Worten nur angedeutet habe, erwägen und würdigen mögen.

§. 41.

Die Methode der Normalen, davon ich gesucht habe die Grundzüge aufzustellen, hat an sich selbst Vorzüge genug, um sich zur Anwendung zu empfehlen, wenn gleich die Annahme der Meridiane als allgemeiner Normalen, noch zur Zeit nicht unmittelbar ausgeführt werden kann, indem dazu gewisse Vorbereitungen und allgemeine Dispositionen in der Anlage großer Messungen nöthig sind, die sich nicht sogleich vernehmen lassen, wenn gleich die Messungen bereits verordnet worden. Deshalb habe ich auch auf diese Herbeiführung der Meridiane in den frühern

Betrachtungen über die Anwendung der Normalen, keine weitere Rücksicht genommen, ungeachtet die ganze Idee eigentlich aus dem Gebrauch der Meridiane in der mathematischen Geographie entstanden ist. Die goniometrischen Ausdrücke welche ich in den obigen Untersuchungen aufgestellt habe, beziehen sich daher auch auf wirkliche Parallelen, und nicht auf Meridiane, welche gegeneinander geneigt sind.

Hieraus könnte aber vielleicht ein anscheinender Widerspruch hergeleitet werden, indem die hier angenommene vollkommene Parallelität der Normalen verhindert, die wahren Meridiane als Normalen zu brauchen; denn, die Vorschrift, Meridiane zu Normalen zu machen, hebt die Anwendbarkeit der, in den vor. §§. gegebenen goniometrischen Ausdrücke auf. Wenn ich nun diese Behauptung in der Allgemeinheit, womit sie aufgestellt ist, einräume, so wird es doch nur weniger Bemerkungen bedürfen, um zu zeigen, wie sehr leicht sich beides in völlige Uebereinstimmung bringen läßt.

§. 42.

Was zuerst die Messung der Abweichungen betrifft, so ist klar, daß die Normalen eben sowohl gegen einander geneigt, als parallel sein könnten, ohne die Arbeit im geringsten schwieriger zu machen, wofern nur die Neigung der Normalen gegen einander gegeben ist. Denn in diesem Falle würde nur nöthig sein, den Parallelismus um die gegebne Größe zu alteriren, wodurch denn die Abweichung an einem Winkelpunkte auf der einen Seite um eben diese Neigung größer, auf der andern Seite kleiner ausfallen müßte, als unter der Voraussetzung des Parallelismus der Normalen geschehen wäre. Zugleich aber ergibt sich auch, daß die Summe zweier Abweichungen an einem Winkelpunkte noch eben die

selbe bleiben, und daß überhaupt die Summe aller Abweichungen an einer geschlossenen Figur durch den Mangel der Parallelität der Normalen ganz und gar nicht geändert würde, da allemal gleiche Größen entgegengesetzter Art erscheinen, deren Summen sich aufheben.

Fig 25. sei ABC ein großes Dreieck, durch dessen Winkelpunkte die Meridiane SN, MO, PQ gelegt sind, wovon die letztern gegen die erste eine Neigung = $MAm = \mu$, und $PCp = \nu$ haben. Die Abweichungen der Seiten dieses Dreiecks mögen a, b, c, d, e, f heißen, wenn die Normalen MO, PQ mit SN parallel sind. Sie werden aber gemessen, und so gefunden:

die Abweichung $CA = f - \nu + R$ (wegen §. 21.)

$$: : AC = a - \mu + R$$

$$: : AB = b + \mu + R$$

$$: : BC = d$$

$$: : BA = c$$

$$: : CB = e + \nu + R$$

$$\text{oder } f + a = 2R - (\mu + \nu) + 2R$$

$$b + c = 2R + \mu + R$$

$$d + e = 2R + \nu + R$$

zusammen $3 \cdot 2R \dots + 2 \cdot 2R$.

Nach dem, im §. 23. gegebenen Ausdruck soll

$$s = (m + p) \cdot 2R$$

$$= (3 + 2) \cdot 2R \text{ sein, welches völlig}$$

mit der vorigen Summe übereinstimmt. Man übersieht hier auch sogleich, wie die positiven (südlichen) Ueberschüsse gegen die negativen (nördlichen) in einer geschlossenen Figur aufgehoben werden. Es sind in Wahrheit Komplemente zu $2R$. Begreiflich ist hier jedoch kein sphärisches Dreieck gemeinet, sondern ein Sehnen-Dreieck, worin daher kein sphärischer Ueber-

Schluß der Winkel zu betrachten, (oder schon reducirt) ist. Demnach ist der Einfluß des Mangels an Parallelität nur örtlich, d. h. er ändert nur die Größe der einzelnen Abweichungen (nicht ihre Summe) an den Polygonal-Punkten, wo die Normale eine Neigung gegen die frühern erhält.

§. 43.

Ein Sektion mag beiläufig 500 Ruthen in der Breite, und 600 Ruthen in der Länge haben, und die Lage der Normale (Meridian) ist für einen ersten, äußersten Punkt gegeben; so wird die Normale des letzten Punktes (der Länge) eine Neigung von 2 Min. gegen die erste haben. Diese Neigung wird (wenn die Genauigkeit der Winkelmessung auf 30 Sec. festgesetzt ist, was jedoch bei speciellen Arbeiten wohl selten der Fall sein mag) auf 4 Normalen an der einen Längenseite, und eben so viel an der andern (rückwärts) vertheilt, welche zwischen 150 bis 160 Ruthen in grader Längensrichtung von einander entfernt sind.

Die Meridiane MN, OP YZ, Fig. 26. mögen diejenigen sein, an welchen die Neigung von 30 Sec. gegen die vorhergehende zu bewirken ist, indem alle zwischen liegenden Normalen des erlaubten Fehlers wegen völlige Parallelen bleiben. Man habe von A angefangen und gehe an der Südseite in der Länge gegen B fort, so muß die Abweichung $OBA = 2R - MAB + 30 \text{ Sec.}$ genommen werden, und man wird die folgende Abweichung OBC um 30 Sec. kleiner finden, als geschehen sein würde, wenn OP ~~≠~~ MN gemacht wäre. Eben dasselbe wird in C, D u. s. w. geschehen, und auf dem Rückwege an der Nordseite von F nach L wird ein Gleiches, jedoch entgegengesetztes geschehen, d. h. die Abwei-

hung WGF muß $= 2R - ZFW - 30$. Sec. sein, wogegen die zweite Abweichung an eben dem Winkelpunkte, WGH um eben so viel größer wird, als bei völliger Parallelität der Normale gefunden wäre.

Die Wirkung hiervon äußert sich nun eigentlich nur auf die **Sin.** und **Cosin.** der veränderten Abweichungen, d. h. auf die Projektion der Polygonalwinkelpunkte oder ihre Längen und Breiten, sofern nemlich die Berechnung jener goniometrischen Funktionen sich auf die nächstliegenden Normalen bezieht. In diesem Falle müssen die Längen (**Sinus**) für spitze Abweichungen etwas größer, für stumpfe hingegen etwas kleiner ausfallen, als man bei parallelen gefunden hätte. Die positiven Breiten (**Cosinus**) werden etwas kleiner, die negativen etwas größer; in beiden Fällen ist aber der Unterschied sehr unbedeutend. Streng betrachtet behandelt man nicht die graden Linien der Geodäsie, sondern die Bogen der Sphärik. Alsdann können aber die positiven Längen (von A bis F) den negativen (von F bis B) nicht gleich werden, wie es bei parallelen Normalen nothwendig ist, und auch für die Breiten findet man andre Werthe. Die Unterschiede in den letztern heben sich jedoch auf, und auch die der Längen verschwinden in der Wahrheit, wenn man erwägt, daß die Summe der nördlichen Längen zwischen zwei Meridianen in der That kleiner seyn muß, als die der südlichen. Denn in der Voraussetzung paralleler Normalen, wo also $MX \neq YZ$, würde man nicht bloß bis L , sondern weiter, bis X messen, und dadurch die Gleichheit der Längen wieder herstellen, welche aber auch aufhören würden, wahre Längen zu sein, weil L , aber nicht X in dem Meridian von A liegt.

Die sphärische Betrachtung eines so kleinen Theils der Erdoberfläche als eine gewöhnliche Vermessungs-Section einnimmt, scheint übrigens zu den Spitzfindig-

keiten zu gehören, welche aus der Praxis mit allem Recht verwiesen werden. Man wird auch mit aller Strenge richtig rechnen und zeichnen, wenn man auf die Ueberschüsse wegen des Parallelismus der Normalen gar keine weitere Rücksicht nimmt, sondern den gegebenen Meridian als Abscissenlinie betrachtet und alle Abweichungen so in Rechnung bringt, als wenn sämtliche Normalen mit jener Abscissenlinie völlig parallel wären. Es wird dabei kein Fehler merklich, und daher hinreichend, wenn die Ueberschüsse wegen des Parallelismus der Normalen in dem Manual gehörigen Orts zu anderweitigem Gebrauch bemerkt werden, wozu das Probeblatt des S. 27. auch eine Rubrik enthält.

Wollte man auch davon abstrahiren, daß die allmähliche Neigung der Normalen gegen einander aus den ebenen Flächen, welche die Geodäsie betrachtet, Kugelflächen macht, und die Veränderungen der Abweichungen schlecht hin auf die Sehnen beziehen, was freilich bei weitem zu große Resultate geben würde, so wären die dabei bemerkten Unterschiede der Längen für die Praxis ohne Bedeutung. Angenommen, z. B. daß die Abweichungen, deren Funktionen als Faktoren in den Ausdrücken für die Längen erscheinen, durchschnittlich 45° betragen, und daß dieselben auf je 155 Ruthen um 30 Sec. größer oder kleiner genommen werden, so findet man die daraus entstehenden Unterschiede in Zahlen:

Log. 155	=	2,1903317
Log. Sin. 45°	=	9,8494850 — 10
Log. 109,601	=	2,0398167
Log. 155	=	2,1903317
Log. Sin. $45^\circ 30''$	=	9,8495481 — 10
Log. 109,6174	=	2,0398798

$$\text{Log. } 155 = 2,1903317$$

$$\text{Log. Sin. } 44^{\circ}59'30'' = 9,8494218 - 10$$

$$\text{Log } 109,5856 = 2,0397535$$

d. h. würden die Abweichungen um 30 Sec. größer, so wäre der Unterschied in der Länge:

$$= 109,6174 - 109,601 = 0,0164$$

würden die Abweichungen kleiner, so wäre der Unterschied

$$= 109,601 - 109,5856 = 0,0154,$$

oder auf 150 Ruthen etwa $1\frac{1}{2}$ Zoll, welches nur $\frac{1}{10000}$ der ganzen Länge beträgt, ein Fehler, der bei speciellen Arbeiten gänzlich der Beachtung entgeht. Dennoch wiederhole ich, daß diese Unterschiede, sphärisch betrachtet, noch bei weitem nicht so beträchtlich ausfallen würden.

Es hat übrigens hiermit für alle Sections-Vermessungen gar nichts auf sich: die Beobachtung der Abweichungen geschieht ohne Einschränkung mit Bezug auf parallele Normalen, und die Anwendung derselben bei den Berechnungen der Längen und Breiten giebt Resultate, welche von der Wahrheit nicht abweichen. Demnach ist hier eigentlich nur die Rede von der Lage der ersten Normale, welche als Abscissenlinie dienen soll, wozu freilich am besten wahre Meridiane gewählt werden möchten. Auch bleibt es hierbei immer wünschenswerth, daß diese erste Normale, nach den richtigen Bemerkungen des Hrn. Däzel, so viel möglich durch die Mitte der Sectionen gelegt werde.

In der Verlagsbehandlung dieses Werks erschienen
auch noch folgende empfehlungswerthe mathema-
tische Werke:

Fischer's, J. E., Professor in Greifswalde,
erste Gründe der reinen Mathematik.
Zum Unterricht in Schulen. Für Jünglinge von
14 bis 16 Jahren. Mit Kupf. 1808. 8. 12 Gr.

Richard's, K. H., Dr. und Regierungs-Sec-
retair zu Osnabrück, Sammlung analy-
tisch-synthetischer Uebungen aus der
reinen Geometrie. Erstes Bändchen. 1811. 8.







