Uebrigens muß ich noch zum Beschluß bemerken, daß die Voraussetzung, worauf die Rechnung hier gegründet ist, daß nemlich nichts als die Lage des Endpunkts 13. in Bezug auf die Normale YZ, gegeben sei, nicht füglich statuirt werden darf. Man sieht, daß unter solchen Umständen das ganze Vieleck zuerst auf die Normale YZ bezogen, und gänzlich berechnet werden müsse, bloß um den Winkel der Abweichung einer neuen Abscissenlinie zu finden, da dann die Rechnung in Bezug auf diese letzte Linie noch einmal zu führen wäre. Das hieße etwa so viel: man habe sich nach der Hand anders besonnen — was aber nicht zulässig ist; und sich auch bei einer, gehörig angelegten Messung nicht annehmen läßt. Es ist billig, vorauszusetzen, daß alle Umstände vorher erwogen worden, und in diesem Falle wird der Geometer die doppelte Rechnung, welche bei größern Arbeiten viel Zeit raubt, und durch die Einförmigkeit sehr ermüdet, ohne Zweifel ersparen.

Vierter Abschnitt.

---

§. 30.

Der Gegenstand, welcher in den §.§. 10 — 12. des 2ten Abschnitts kurz berührt wurde, ist dort abgebrochen, um den Nutzen der Methode der Normalen auch bei andern trigonometrischen Fragen zu zeigen, welche in der praktischen Meßkunst häufig aufgelöset werden müssen.

Jetzt wird es aber doch nützlich seyn, die dort abgebrochenen Betrachtungen noch etwas weiter fortzusetzen.

Im §. 11. wurde gezeigt, daß die Beobachtung der Abweichungen, ODC, ODB, Fig. 4. hinreiche, die Winkel des Dreiecks BCD zu finden, und daher nur noch ein Maasstab nöthig sei, um auch die Seite BC (oder BD, CD) zu bestimmen. Eben dasselbe muß auch für die andre Seite AB gelten, wenn die Winkel des Dreiecks ABD durch die Beobachtung der Abweichungen ODB, ODA, gefunden sind. Wenn daher auch die Entfernungen AB, BC unbekannt oder nicht meßbar sind, so lassen sie sich doch auf dem eben angedeuteten Wege finden, sofern nur der zugehörige Maasstab ausgemittelt ist.

Gesetzt, man hätte, wie in §. 12. noch einen zweiten Punkt E, daran die Normale gezogen, und die Abweichungen PEA, PEB beobachtet wären, so würde die Linie ED den verlangten Maasstab abgeben, wenn sie gemessen, und ihre Abweichung EDR oder ODE beobachtet werden kann. In diesem Falle sind in dem Dreieck BDE bekannt.

Die Seite DE

der Winkel $BDE = 2R - (ODB + RDE)$

— — $DEB = 2R - (PEB - RDE)$

und man hat daher

$$BD = ED . \frac{\text{Sin } DEB}{\text{Sin } EBD}$$

$$BE = ED . \frac{\text{Sin } BDE}{\text{Sin } EBD}$$

In dem Dreieck BCD sind, ausser der Seite BD auch noch die Winkel $CDB = ODB - ODC$

$CBD = MBC - ODB$

bekannt, und daher

$$\text{die Seite } BC = BD . \frac{\text{Sin } CDB}{\text{Sin } BCD}$$

$$= ED . \frac{\text{Sin } BED . \text{ Sin } CDB}{\text{Sin } EBD . \text{ Sin } BCD}$$

Auf gleiche Weise sind in dem Dreieck ABE, ausser der Seite BE auch noch

der Winkel $AEB = PEB - PEA$

— — $BAE = MBA + PEA$

bekannt, und man erhält

$$\text{die Seite } AB = BE . \frac{\text{Sin } AEB}{\text{Sin } BAE}$$

$$= ED \frac{\text{Sin } BDE . \text{ Sin } AEB}{\text{Sin } EBD . \text{ Sin } BAE}$$

Dies heißt nun überhaupt so viel: von einer gegebnen oder gemessenen Standlinie (ED) an welcher die Abweichungen nach je zwei entfernten Orten (wenn auch der dritte Ort von einem Standpunkte nicht gesehen werden kann; z. B. A in D, und C in E nicht sichtbar ist) beobachtet sind, können die Entfernungen der Orte, (A, B, C.) unter einander bestimmt werden. Der Weg dazu ist äußerst einfach, und die Ausdrücke für die gesuchten Seiten sind es nicht minder. Die Sache aber ist nützlich, und wird durch die Leichtigkeit des Weges um so viel brauchbarer.

Wenn aber der Punkt E von D nicht gesehen, folglich die Abweichung RDE nicht beobachtet werden kann, so wird die Sache schon weit schwieriger. Den Abweichungswinkel RDE direkt zu finden, sehe ich noch kein Mittel, wenn keine Linie von bekannter Abweichung gegeben ist. Alle Winkel an den fünf Punkten A, B, C, D, E, können unverändert bleiben, und dennoch bleibt die Lage von D oder E veränderlich, wofern nicht auch der Winkel RDE — oder ein andrer, der die Lage von DE bestimmt — gegeben ist. Nur in dem einzigen Falle, wo die Punkte A, B, C, indem sie verrückt werden, doch in derselben Normale bleiben, behalten auch D und E ihre unveränderte Lage gegen einander. Dies ist aber ein ganz einzelner Fall unter allen übrigen möglichen, wovon die Entwickelung eben deshalb unnütz ist. Beiläufig zeigt aber diese Bemerkung, von welcher wesentlichen Erleichterung der Gebrauch der Normalen auch hier ist. Denn ohne diese letztern würde die vorstehende Aufgabe, welche sich so leicht auflöset, schwer zu lösen sein.

Es kann aber gleich wohl der Fall sein, daß man ED zur Standlinie zu wählen gute Gründe hätte, ungeachtet diese Linie nicht übersehen und nicht gemessen werden könnte. Man kommt alsdann noch am kürzesten zum Ziel, wenn sich irgendwo zwei Punkte wie F, G, ausserhalb der Linie ED finden lassen, deren Entfernung von einander man messen, und von wo aus man die Punkte D und E sehen, folglich die Abweichungen beobachten kann. Man hat dann die Bedingungen eines bekannten trigonometrischen Problems, in welchem aus der Seite FG und den beobachteten Winkeln SFD, SFE u. s. w. die Seite ED und der Winkel FED gefunden werden. Alsdann ist, wegen der Parallelität der Normalen

$$SFE = 2R - FEV$$
$$FEV = FED + VED$$
$$VED = RDE$$
$$SFE = 2R - (FED + RDE)$$

daher $RDE = 2R - (SFE + FED)$

welches die gesuchte Abweichung ist, mit deren Hülfe das obige Problem gelöset wird.

§. 25.

Wenn die vorstehende Betrachtung keinen andern Zweck hätte, als für ein Problem, welches sich ohne Hülfe der Normalen schwer, oder gar nicht lösen läßt, eine leichte Solution vorzutragen, so möchte sie an sich noch immer ihren Werth haben, allein sie würde nicht hierher gehören, und ich hätte derselben auch diesen Platz nicht eingeräumt. Es scheint mir jedoch, daß das goniometrische Verfahren in der Maaße vorzüglicher wird, als es die unmittelbare Messung der Linien mehr und mehr vermeidet. Bei diesen Messungen werden stets Fehler begangen, und sie rauben eine sehr ansehnliche Zeit, welche zuweilen auf Kosten der Genauigkeit erspart wird. Dazu müssen diese Messungen im Felde geschehen während einer Zeit, in welcher die goniometrischen Operationen grade am besten vorzunehmen sind, wogegen die Berechnung der Linien zu den Hausarbeiten gehört, die auf bequeme Muße recht wohl warten, und man zu jeder Tages- und Jahreszeit vornehmen kann. Die berechneten Linien aus genau gemessenen Winkeln werden auch weit weniger Fehler enthalten, als die unmittelbar gemessenen, und die Genauigkeit der Arbeit gewinnt in eben dem Verhältniß als man den Messungen die Rechnung substituiren kann.

Die Goniometrie erhält ihre wahre und vorzüglichste Bedeutung durch die Anwendung der Rechnung statt der Messung; denn durch die Beobachtung der Abweichungen der Linien und Punkte von einander bringt sie zur Kenntniß der innern Verhältnisse dieser Linien unter sich, und es kommt dann nur noch auf die Erfindung eines Maaßstabes an, um eine ganze Figur aufzulösen.

Dieses sind die Gründe welche mich bewogen haben, hier etwas über den Weg zu sagen, auf welchem sich ein solcher Maaßstab finden ließe, und aus welchem die Seiten einer Winkelreihe oder eines Polygons bequem berechnet werden könnten. Die Grundidee ist auch hier nicht neu, sondern bei Triangular-Operationen längst angewandt, und es kommt nur darauf an, ob die Anwendung so zweckmäßig und bequem sei, als sich für die Fälle der speciellen Geodäsie wünschen läßt. Meine Gedanken darüber

will

will ich hier in möglichster Kürze zur Prüfung, Beurtheilung und Verbesserung vortragen, und dazu habe ich das Problem des vor. §. gebraucht. —

Es sei nunmehr A, B, C, ... O ... Fig. 22. ein Theil einer Winkelreihe oder des Perimeters eines Vielecks, daran die Abweichungen von einer gegebnen oder angenommenen Normallinie beobachtet worden. Von den Seiten AB, BC, u. s. w. sind aber keine gemessen, sondern dieselben sollen berechnet werden.

Man nehme die Punkte V, W, ausserhalb oder innerhalb der Winkelreihe so vortheilhaft als möglich, d. h. so, daß die möglich größte Anzahl von Winkelpunkten aus beiden Standorten V und W frei übersehen werden könne. Auch ist es vortheilhaft, darauf Rücksicht zu nehmen, daß die Linie VW so lang genommen werde als die Umstände gestatten, und daß sie mit der Hauptrichtung der Winkelreihe ABC .... O ... einigermaaßen parallel laufe. Man erhält hierdurch die Vortheile bequemer, und gleichförmig variirender Winkel, wodurch die Fehler vermieden werden, welche mit sehr spitzen oder stumpfen Winkeln verbunden sind.

Die Lage und Länge der Standlinie VW sei nun übrigens unmittelbar gemessen, oder durch eine vorgängige Operation und Rechnung bestimmt worden, so kann diese Linie hier in jeder Rücksicht als bekannt angenommen werden, und macht demnach eine solche Grundlinie aus, von welcher alle Seiten der Winkelreihe oder des Polygons, so weit dieselben von V W aus sichtbar sind, berechnet werden können.

In dem Standorte V beobachte man nun die Abweichungen PVK, PVI, PVH ...... PVA, und in dem Standorte W, die Abweichungen QWK, QWI, QWH ..... QWA; so hat man in den Dreiecken VKW, VIW, VHW ..... VAW, die Seite VW, nebst den Winkeln KVW, KWV; IVW, IWV; HVW, HWV: ..... AVW, AWV; woraus sich die Linien KW, IW, HW .... u. s. w. und die andern AV, BV, CV .... u. s. w. sehr leicht entwickeln lassen.

Um den Zweck der Rechnung zu erreichen, nemlich um die Seiten AB, BC, CD .... IK .... zu bestimmen, ist es übrigens keinesweges nöthig, alle Seiten AV, AW; BV, BW; ...... KV, KW; .... zu kennen; sondern man übersieht hier schon, daß es schon hinreiche, wenn man nur die Hälfte dieser Seiten berechnet, wobei man noch den Vortheil hat, die bequemsten der Lage nach wählen zu können. In der Fig. 22. nehme man z. B. die Seiten AV, BV, ... FV, und dann GW, HW .... bis KW, so finden sich in jedem Dreieck wie ABV, BCV, ... u. s. w. und IKW, HIW ... u. s. w. eine Seite und alle drei Winkel bekannt, um die Seite AB, BC .... IK ... zu finden. Die Zahl der nöthigen Berechnungen wird sich aber noch weiter deprimiren lassen, wie ich bald anführen werde.

§. 32.

Ich will die Abweichungswinkel der Polygonal-Seiten nach der Reihe a, b, c, ... k, und die Abweichungen der Gesichtslinien in V nach A, B, C ... u. s. w. α, β, γ .... λ, μ ... in W, aber a. b, c, ... h, k, und endlich die Abweichung der Standlinie VW $= \omega$ nennen, so daß PVA $= \alpha$; PVB $= \beta$; PVC $= \gamma$ .... u. s. w. TWA $=$ a; TWB $=$ b; TWC $=$ c; ...... TWG $=$ h; TWI $=$ i; TWK $=$ k.

Man hat alsdann zur Berechnung der Seiten AV, BV, CV .... und KW, IW, HW ... u. s. w.

in den Dreiecken AVW, BVW, CVW ..... GVW ..... KVW, folgende bekannte Stücke.

1. Die bekannte Seite
$VW = A.$

2. Die Winkel
$WVA = PVA + PVW = \alpha + \omega$
$WVC = PVC + PVW = \gamma + \omega$
$WVB = PVB + PVW = \beta + \omega$

3. Die Winkel
$VWA = 2R - (TWA + PVW) = 2R - (a + \omega)$
$VWB = 2R - (TWB + PVW) = 2R - (b + \omega)$
$VWC = 2R - (TWC + PVW) = 2R - (c + \omega)$

4. Die Winkel

$$\begin{aligned}VAW &= 2R - (WVA + VWA)\\ &= 2R - (\alpha + \omega) - 2R + (a + \omega)\\ &= a - \alpha\\ VBW &= 2R - (WVB + VWB)\\ &= 2R - (\beta + \omega) - 2R + (b + \omega)\\ &= b - \beta\\ VCW &= 2R - (WVC + VWC)\\ &= 2R - (\gamma + \omega) - 2R + (c + \omega)\\ &= c - \gamma\end{aligned}$$

u. s. w.

woraus sich denn die Seiten

$$AV = A. \frac{\text{Sin}(a + \omega)}{\text{Sin}(a - \alpha)}$$

$$BV = A. \frac{\text{Sin}(b + \omega)}{\text{Sin}(b - \beta)}$$

$$CV = A. \frac{\text{Sin}(c + \omega)}{\text{Sin}(c - \gamma)}$$

$$DV = A. \frac{\mathrm{Sin}(\mathfrak{d} + \omega)}{\mathrm{Sin}(\mathfrak{d} - \delta)}$$

u. s. w. ergeben. Auf gleiche Weise erhält man

1. die Winkel

$$WVK = PVK + PVW = \mu + \omega$$
$$WVI = PVI + PVW = \lambda + \omega$$
$$WVH = PVH + PVW = \varkappa + \omega$$

2. die Winkel

$$\begin{aligned} VWK &= 2R - (TWK + PVW) \\ &= 2R - (\mathfrak{k} + \omega) \\ VWI &= 2R - (TWI + PVW) \\ &= 2R - (i + \omega) \\ VWH &= 2R - (TWH + PVW) \\ &= 2R - (\mathfrak{h} + \omega) \end{aligned}$$

3. die Winkel

$$\begin{aligned} VKW &= 2R - (WVK + VWK) \\ &= 2R - (\mu + \omega) - 2R + (\mathfrak{k} + \omega) \\ &= \mathfrak{k} - \mu \\ VIW &= 2R - (WVI + VWI) \\ &= 2R - (\lambda + \omega) - 2R + (i + \omega) \\ &= i - \lambda \\ VHW &= 2R - (WVH + VWH) \\ &= 2R - (\varkappa + \omega) - 2R + (\mathfrak{h} + \omega) \\ &= \mathfrak{h} - \varkappa \end{aligned}$$

u. s. w.

woraus sich die Seiten

$$KW = A. \frac{\mathrm{Sin}(\mu + \omega)}{\mathrm{Sin}(\mathfrak{k} - \mu)}$$

$$IW = A. \frac{\mathrm{Sin}(\lambda + \omega)}{\mathrm{Sin}(i - \lambda)}$$

$$HW = A. \frac{\text{Sin}\,(\varkappa + \omega)}{\text{Sin}\,(\mathfrak{h} - \varkappa)}$$

u. s. w. finden lassen.

Man wird nun aus der vorstehenden Auseinandersetzung sogleich erkennen, wie sich die Werthe der Winkel jedes mal ergeben, und wie sie durch bloße Addition und Subtraktion für jeden Polygonal-Winpunkt — jedoch mit Bezug auf den Standort V oder W, gefunden werden.

§. 33.

Nach der Bestimmung dieser Seiten AV, BV, CV ..... HW, IW, KW ..... sind nun in den Dreiecken ABV, BCV, CDV ..... HIW. IKW ..... alle Winkel und zwei Seiten bekannt; man wird also die dritte noch fehlende Seite AB, BC .... HI, IK ... welche die Polygonal-Seite ist, auf jedem beliebigen Wege finden können. Die Wahrnehmung aber, daß auf dem, im vor. §. angezeigten Wege mehr Stücke gefunden werden, als zur Bestimmung der Seiten AB, BC u. s. w. nöthig sind, giebt nun hier Veranlassung, die am Schlusse des §. 31. gemachte Bemerkung zu bestätigen. Man übersieht nemlich leicht, daß man nicht alle Seiten wie AV, BV, CV ..... KW, IW, HW ..... berechnen dürfe, sondern an einer Seite für zwei aneinander liegende Dreiecke, wie z. B. an BV für die Dreicke ABV, BCV oder IW für die Dreiecke IKW, HIW genug habe.

Man findet die Winkel in diesen Dreiecken so:

$$AVB = WVA - WVB$$
$$= (\alpha + \omega) - (\beta + \omega) = \alpha - \beta$$
$$BVC = WVB - WVC$$
$$= (\beta + \omega) - (\gamma + \omega) = \beta - \gamma$$

$$CVD = WVC - WVD$$
$$= (\gamma + \omega) - (\delta + \omega) = \gamma - \delta$$
$$DVE = WVD - WVE$$
$$= (\delta + \omega) - (\varepsilon + \omega) = \delta - \varepsilon$$

= = = = = = = = =

$$VAB = a - PVA = a - \alpha$$
$$VBC = b - PVB = b - \beta$$
$$VCD = c - PVC = c - \gamma$$
$$VDE = d - PVD = d - \delta$$
$$VCB = 2R - b + PVC = 2R - (b - \gamma)$$
$$VED = 2R - d + PVE = 2R - (d - \varepsilon)$$

= = = = = = = = =

und ferner:

$$KWI = TWI - TWK = i - \mathfrak{k}$$
$$IWH = TWH - TWI = \mathfrak{h} - \mathfrak{i}$$
$$HWG = TWG - TWH = \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$$
$$GWF = TWF - TWG = \mathfrak{f} - \mathfrak{g}$$

= = = = = = = = = =

$$IKW = 2R - i + TWK = 2R - (i - \mathfrak{k})$$
$$HIW = 2R - h + TWI = 2R - (h - i)$$
$$GHW = 2R - g + TWH = 2R - (g - \mathfrak{h})$$
$$FGW = 2R - f + TWG = 2R - (f - \mathfrak{g})$$
$$IHW = h - TWH = h - \mathfrak{h}$$

= = = = = = = = = =

Man hat nunmehr in dem Dreieck ABV

$$AB : BV = \text{Sin}\, AVB : \text{Sin}\, VAB$$
$$= \text{Sin}\,(\alpha - \beta) : \text{Sin}\,(a - \alpha)$$
$$AB = BV.\ \frac{\text{Sin}\,(\alpha - \beta)}{\text{Sin}\,(a - \alpha)}$$

vorhin war:

$$BV = A.\ \frac{\sin(\mathfrak{b} + \omega)}{\sin(\mathfrak{b} - \beta)}$$

daher:

$$AB = A.\ \frac{\sin(\mathfrak{b} + \omega)}{\sin(\mathfrak{b} - \beta)} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\mathfrak{a} - \alpha)}$$

Ferner im Dreieck BCV

$$BC : BV = \sin BVC : \sin VCB$$
$$= \sin(\beta - \gamma) : \sin(2R - (b - \gamma))$$

$$BC = BV.\ \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(b - \gamma)}$$

$$BC = A.\ \frac{\sin(\mathfrak{b} + \omega)}{\sin(\mathfrak{b} - \beta)} \cdot \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(b - \gamma)}$$

Im Dreieck CDV.

$$CD : DV = \sin CVD : VCD$$
$$= \sin(\gamma - \delta) : \sin(c - \gamma)$$

$$CD = DV.\ \frac{\sin(\gamma - \delta)}{\sin(c - \gamma)}$$

es war vorhin

$$DV = A.\ \frac{\sin(\mathfrak{d} + \omega)}{\sin(\mathfrak{d} - \delta)}$$

daher

$$CD = A.\ \frac{\sin(\mathfrak{d} + \omega)}{\sin(\mathfrak{d} - \delta)} \cdot \frac{\sin(\gamma - \delta)}{\sin(c - \gamma)}$$

Im Dreieck DEV.

$$DE : DV = \sin DVE : \sin VED$$
$$= \sin(\delta - \varepsilon) : \sin(2R - (d - \varepsilon))$$

$$DE = DV.\ \frac{\sin(\delta - \varepsilon)}{\sin(d - \varepsilon)}$$

$$= A. \frac{\text{Sin}(\mathfrak{d} + \omega)}{\text{Sin}(\mathfrak{d} - \delta)} \cdot \frac{\text{Sin}(\delta - \varepsilon)}{\text{Sin}(d - \varepsilon)}$$

Von der andern Seite gerechnet hat man im Dreieck IKW

$$IK : IW = \text{Sin}\, IWK : \text{Sin}\, IKW$$
$$= \text{Sin}(i - \mathfrak{k}) : \text{Sin}(i - \mathfrak{k})$$

$$IK = IW. \frac{\text{Sin}(i - \mathfrak{k})}{\text{Sin}(i - \mathfrak{k})}$$

vorhin war gefunden

$$IW = A. \frac{\text{Sin}(\lambda + \omega)}{\text{Sin}(i - \lambda)}$$

daher

$$IK = A. \frac{\text{Sin}(\lambda + \omega)}{\text{Sin}(i - \lambda)} \cdot \frac{\text{Sin}(i - \mathfrak{k})}{\text{Sin}(i - \mathfrak{k})}$$

Im Dreieck HIW

$$HI : IW = \text{Sin}\, HWI : \text{Sin}\, IHW$$
$$= \text{Sin}(\mathfrak{h} - i) : \text{Sin}(h - \mathfrak{h})$$

$$HI = IW. \frac{\text{Sin}(\mathfrak{h} - i)}{\text{Sin}(h - \mathfrak{h})}$$

$$= A. \frac{\text{Sin}(\lambda + \omega)}{\text{Sin}(i - \lambda)} \cdot \frac{\text{Sin}(\mathfrak{h} - i)}{\text{Sin}(h - \mathfrak{h})}$$

Nur um über die Verbindung der Winkel, deren Summen oder Differenzen in den Rechnungssätzen vorkommen, keinen Zweifel zu lassen, habe ich die Ausdrücke so weit fortgesetzt. Wenn man sich die Summen und Differenzen so untereinander schreibt:

$$
\begin{array}{llll}
\dfrac{\mathfrak{a}+\omega}{\mathfrak{a}-\alpha} \cdots\cdots \dfrac{\mu+\omega}{\mathfrak{k}-\mu} & & \dfrac{\alpha-\beta}{a-\alpha} & \\
\dfrac{\mathfrak{b}+\omega}{\mathfrak{b}-\beta} \cdots\cdots \dfrac{\lambda+\omega}{\mathfrak{i}-\lambda} & & \dfrac{\beta-\gamma}{b-\gamma} \cdots\cdots & \dfrac{\mathfrak{i}-\mathfrak{k}}{i-\mathfrak{k}} \\
\dfrac{\mathfrak{c}+\omega}{\mathfrak{c}-\gamma} \cdots\cdots \dfrac{\varkappa+\omega}{\mathfrak{h}+\varkappa} & & \dfrac{\gamma-\delta}{c-\gamma} \cdots\cdots & \dfrac{\mathfrak{h}-\mathfrak{i}}{h-\mathfrak{h}} \\
\dfrac{\mathfrak{d}+\omega}{\mathfrak{d}-\delta} & & \dfrac{\delta-\varepsilon}{d-\varepsilon} &
\end{array}
$$

so kann man unmöglich über die Fortschritte ungewiß bleiben, worin diese Summen und Unterschiede für die Berechnung aller Polygonal-Seiten zu nehmen sind. Wenn man sich von den, hierin herrschenden Gesetzen eine deutliche Vorstellung macht, so kann man die, bei jedem Rechnungssatze zu brauchenden Winkel gradezu hinschreiben, ohne die Operation aus der Figur erst herzuleiten. Da sich auch die Polygonal-Seiten auf verschiedenen Wegen, z. B. BC durch BV, oder CV, oder CW finden lassen, so behält man die freie Wahl der bequemsten Winkel. Uebrigens empfehlen sich diese Rechnungssätze eben so wohl durch ihre einfache und übersichtliche Gestalt, welche sich dem Gedächtnisse bald einprägt, als durch ihre Bequemlichkeit zur logarithmischen Auflösung.

§. 27.

Auf die vorstehende Weise wären denn alle Polygonal-Seiten von A bis K, oder soweit die Winkelreihe von V und W aus, zu übersehen ist, sehr leicht berechnet — eine Arbeit, welche sich im Zimmer mit aller Muße und großer Genauigkeit ausführen läßt, während die wirklichen Messungen zeitraubend, beschwerlich und fehlerhaft ausfallen. Um daher auch einem andern Theil des Perimeters, oder einer, von V und W aus, nicht sichtbaren Winkelreihe, z. B. von K bis O.... durch ähnliche Rechnung zu finden, wird man eine andre Standlinie, z. B. YZ nehmen müssen. Man kann eine solche Linie messen — oder auch berechnen.

Zum Behuf des letztern lassen sich wohl mancherlei Kombinationen denken: um eine davon auszuwählen nehme ich einmal an, daß die Endpunkte einer neuen Standlinie YZ, zwar von dem einen Punkte W, der erstern gesehen werden können, daß aber am andern Punkte V, nur das nächste Ende Y, der neuen Standlinie sichtbar sei.

In dem Dreieck VWY sind die Winkel WVY und VWY nebst der Seite VW bekannt, und man kann daher die Seite WY bestimmen.

Man erhält:

$$WY = A.\ \frac{\text{Sin } WVY}{\text{Sin}(WVY + VWY)}$$

Wenn man demnächst in Y die Abweichung des Punkts Z, d. i. SYZ beobachtet, so hat man auch in den Dreieck WYZ die Seite WY, den Winkel $YWZ = TWZ - TWY$, und den Winkel $WYZ = 2R - SYZ + TWY$. Hieraus ergiebt sich nun die Seite

$$YZ = WY.\ \frac{\text{Sin } YWZ}{\text{Sin } WZY}$$

$$= A.\ \frac{\text{Sin } WVY}{\text{Sin}(WVY + VWY)} \cdot \frac{\text{Sin }(TWZ - TWY)}{\text{Sin }(SYZ - TWZ)}$$

Hiernach kann nun der Theil des Perimeters K, L, M, N, O, ... völlig ebenso von YZ aus bestimmt werden, als vorhin der Theil A.......K von VW aus berechnet würde, und man sieht, daß es an sich nicht die geringste Schwierigkeit habe, mit 3 oder 4 solchen Standlinien um eine ganze Figur herum zu gehen, ohne mehr als eine einzige Linie zu messen.

Indessen will ich hiermit doch keinesweges geläugnet haben, daß nicht Umstände eintreten könnten, wodurch die unmittelbare Messung der Standlinien YZ, u. s. w. zweckmäßiger werden möchte als die Berechnung. Es ist hier blos im allgemeinen von dem Wege die Rede, auf welchem sich die verlangten Resultate durch Rechnung finden lassen, ohne daß jedoch alle andre Operationen unmittelbarer Messungen ausgeschlossen wären.

§. 35.

Es ist bei der Berechnung der Polygonal-Seiten aus einer, oder einigen Standlinien in jeder Rücksicht wünschenswerth, der letztern so wenig zu haben, als die Umstände irgend gestatten. Die Wahl der Endpunkte solcher Linien hängt vorzüglich davon ab, daß der möglich größte Theil des Perimeters oder der Winkelreihe übersehen werde, und die Winkel, welche die Gesichtslinien nach den Polygonal-Winkelpunkten mit der Standlinie machen, eine bequeme Größe haben. Wenn nur diese Endpunkte, als die eigentlichen Beobachtungsorte diese vortheilhafte Lage haben, so kann ihre Wahl dadurch nicht beschränkt werden, daß die Linie, welche sie verbindet, nicht übersehen, und nicht gemessen werden kann. Man wird doch eine andre Linie, wie AB, finden, welche die, im §. 30. angeführten Eigenschaften hat, und durch welche also die Länge der Linie VW bestimmt werden kann. Es scheint sogar nützlich, eine solche kleinere Linie AB zu messen, und die größere, eigentliche Standlinie VW, daraus zu berechnen, weil die Messung so langer Linien, wenn sie mit Genauigkeit geschehen soll, oft mit vielen Schwierigkeiten verbunden ist, welche man durch die Wahl einer kleinern vermeidet. In jedem Falle muß jedoch die gemessene Linie mit der größten Sorgfalt und Genauigkeit bestimmt werden, weil darauf die Richtigkeit der ganzen Operation beruhet, wie es an sich schon einleuchtet.

Kann man die erste Grund- und Standlinie VW in das Innere der Figur verlegen, so ist dieses ohne Zweifel sehr oft vortheilhaft, theils weil man im Innern weit mehr Winkelpunkte übersehen, theils, weil man mit der gehörigen Aufmerksamkeit, so zu sagen im Vorbeigehen, eine große Anzahl von Punkten zum Anhalt und zur Beschleunigung der Detail-Messung fest legen kann. Es ist jedoch nicht allemal möglich oder aus andern Rücksichten räthlich, die erste Grundlinie in dem innern Raum eines Polygons zu ziehen, und in solchen Fällen wird man sich der, vorhin angegebenen Methode mehr oder weniger bedienen müssen.

Hierbei ist es wohl möglich, daß die Standlinien wie VW, YZ eine solche Lage gegen einen Theil des Perimeters erhalten, daß einzelne Seiten desselben nicht hinreichend übersehen werden können, so wie dieses in der Fig. 22. bei der Linie KL der Fall ist. Man kann nun solche Linien, deren es bei gehöriger Wahl der Standlinien, immer doch nur wenige geben wird, unmittelbar messen, wofern dieses für das kürzeste gehalten wird: man kann sie aber auch berechnen. Zu diesem Endzweck bemerke man, daß in den Dreiecken KWY und LWY alles bekannt sei, was erfordert wird, um die Seite KY oder auch LY zu bestimmen. Wenn eine dieser Seiten bekannt ist, so kann auch die Seite KL im

Dreieck KYL berechnet werden. Da diese Sache ganz einfach ist, und völlig mit demjenigen übereinstimmt, was zur Berechnung der Seiten AB, BC u. s. w. bereits in den §. §. 32. 33. ausführlich nachgewiesen, so kann ich mich hier darauf beschränken, bloß die Rechnungssätze herzustellen.

Wenn daher TWY = m; SYK = ν; SYL = ϱ, so ist

$$KY = WK. \frac{\text{Sin } KWY}{\text{Sin } KYW}$$

$$= WK. \frac{\text{Sin } (k - m)}{\text{Sin } (\nu - m)}$$

und weil im §. 32.

$$WK = A. \frac{\text{Sin } (\mu + \omega)}{\text{Sin } (k - \mu)}$$

$$KY = A. \frac{\text{Sin } (\mu + \omega)}{\text{Sin } (k - \mu)} \cdot \frac{\text{Sin } (k - m)}{\text{Sin } (\nu - m)}$$

ferner:

$$KL = KY. \frac{\text{Sin } KYL}{\text{Sin } KLY}$$

$$= KY. \frac{\text{Sin } (\varrho - \nu)}{\text{Sin } (k - \varrho)}$$

$$KL = A. \frac{\text{Sin } (\mu + \omega)}{\text{Sin } (k - \mu)} \cdot \frac{\text{Sin } (k - m)}{\text{Sin } (\nu - m)} \cdot \frac{\text{Sin } (\varrho - \nu)}{\text{Sin } (k - \varrho)}$$

Man sieht leicht, wie auch dieser Ausdruck denen des §. 33. vollkommen ähnlich sei, indem der vierte Faktor nur von dem Mangel des Winkels PVL herrührt. Wo fern die Winkel KWL und KLW nicht zu spitz, und deshalb unbequemer würden, so könnte man die Seite KL nach §. 33. kürzer finden. Man hätte

$$KL = KW. \frac{\text{Sin } KWL}{\text{Sin } KLW}$$

$$= A. \frac{\text{Sin}(\mu + \omega)}{\text{Sin}(k - \mu)} . \frac{\text{Sin}(k --- l)}{\text{Sin}(k --- l)}$$

§. 36.

Ein paar besondre Fälle, welche bei dieser Berechnung der Polygonal-Seiten eintreffen können, will ich hier noch kurz berühren, um damit den Bedenklichkeiten zu begegnen, wozu die Lage einzelner Seiten Anlaß geben könnte.

Erster Fall: Es könnte sein, daß eine Polygonal-Seite wie z. B. GH Fig. 23. mit der Richtung einer Visirlinie WH in grader Linie läge, wobei TWH = TWG würde. Dies verursacht indessen nicht die geringste Schwierigkeit, indem man die Linien GV, HV nichts desto weniger nach §. 32. findet!

$$GV = A. \frac{\text{Sin}(g + \omega)}{\text{Sin}(g - \vartheta)}$$

$$HV = A. \frac{\text{Sin}(h + \omega)}{\text{Sin}(h - \eta)}$$

und demnach GH beliebig aus GV oder HV, nebst den bekannten Winkeln, völlig so berechnen kann, wie AB, BC, u. s. w. im §. 33. gefunden worden.

Zweiter Fall. Wenn sich eine Seite des Polygons z. B. HI so weit zurück zieht, daß der Winkelpunkt I von V aus nicht mehr gesehen werden kann, so hat es doch keine Schwierigkeit, die Seite HI aus HW, und die folgende Seite IK aus der

Seite KW zu berechnen. Man braucht dazu nur der Anleitung zu folgen, welche in den §. §. 32. 33. enthalten sind, indem man

$$IK = KW. \frac{\mathrm{Sin}\, IWK}{\mathrm{Sin}\, KIW}$$

$$= A. \frac{\mathrm{Sin}(\mu + \omega)}{\mathrm{Sin}(\mathfrak{k} - \mu)} \cdot \frac{\mathrm{Sin}(i - \mathfrak{k})}{\mathrm{Sin}(i - \mathfrak{i})}$$

und

$$HI = HW. \frac{\mathrm{Sin}\, IWH}{\mathrm{Sin}\, HIW}$$

$$= A. \frac{\mathrm{Sin}(\varkappa + \omega)}{\mathrm{Sin}(\mathfrak{h} - \varkappa)} \cdot \frac{\mathrm{Sin}(\mathfrak{h} - i)}{\mathrm{Sin}(h - \mathfrak{h})}$$

sucht.

Eben so wenig würden die Polygonal-Seiten IL, LN, NO unbekannt bleiben dürfen, wenn sie gleich alle drei so gelegen wären, daß sie nur von dem einen Standpunkte W, nicht aber vom andern, V, angezielt werden können. Denn da O, (oder auch ein folgender Winkelpunkt P') von V aus gesehen, folglich die Seite OW berechnet werden kann, so läßt sich in den Dreieck NOW,, sowohl die Polygonal-Seite NO, als auch die Ziel-Linie NW berechnen, und durch die letztere kann wieder LW, dann auch IW gefunden werden, wofern man diese letztere brauchen wollte, was jedoch nicht nöthig ist. Es liedet demnach keinen Zweifel, daß die Polygonal-Seiten IL, LN, NO ausgemittelt werden können.

Dritter Fall. Nur der Fall, da ein Winkelpunkt, z. B. P, von keinem Standorte V und W sichtbar ist, könnte vielleicht etwas bedenklicher scheinen. Indessen wird sich auch hier sehr bald ein Ausweg finden.

Denn, da sich die Seite LW, durch HW, und QW durch RW, nach dem vorstehenden finden lassen, so ziehe man noch die Diagonale LQ. Alsdann sind in dem Dreieck LQW, die beiden Seiten LW, QW und der, von denselben eingeschloßne Winkel LWQ bekannt, woraus sich sowohl die Diagonale LQ, als auch die Winkel, QLW, LQW berechnen lassen. Man findet demnächst aus den letztern Winkeln nebst den Polygonalpunkten L, P, Q, die beiden Winkel PLQ und PQL, z. B. auf folgende Weise:

$$
\begin{aligned}
PLQ &= ZLP - ZLQ \\
ZLQ &= QLW - ZLW \\
&= QLW - (2R - TWL) \\
PLQ &= 2R - (QLW + TWL - ZLP) \\
PQL &= YWQ + TWQ - LQW.
\end{aligned}
$$

Der eine dieser Winkel hätte auch, wie man sogleich erkennt, aus dem andern, mit der bekannten Polygonal-Ecke, LPQ gefunden werden können. In jedem Falle sind in dem Dreieck PLQ die Winkel nebst der Diagonale LQ bekannt, um daraus die Polygonal-Seiten PL, PQ zu berechnen.

Zieht sich jedoch die Perimeter noch weiter zurück, so daß z. B. zwei Punkte P und S von keinem der beiden Standorte V und W sichtbar sind, so wird die Sache schon weit verwickelter. Wofern man es nicht vermeiden konnte, der Grundlinie VW eine solche Lage zu geben, wobei mehrere, auf einander folgende Polygonalpunkte ganz unsichtbar bleiben, so scheint es au kürzesten, für diesen unsichtbaren Theil des Perimeters eine eigne Standlinie, z. B. eine Diagonale LU zu wählen, selbige zu messen oder zu berechnen, und aus derselben die fehlenden Polygonal-Seiten zu bestimmen. Es kann auch wohl sein, daß ein solcher, von der Grundlinie unsichtbarer Theil des Perimeters sich bequem unmitteltelbar messen läßt, welches denn von den örtlichen Umständen abhängt.

§. 37.

Hierher kann noch, seiner Aehnlichkeit wegen der besondre Fall gehören, da zwei von einander entfernt liegende Felder, Wiesen, Aecker, Forsten, u. dgl. gegen einander in eine richtige geographische Lage gebracht werden sollen. Da dies keine, aus der bloßen Vorstellung genommene Forderung ist, sondern bei Vermessung der Forsten, Domainen, großen Güter u. s. w. in der That häufig gemacht wird, so kann es zweckmäßig scheinen, etwas darüber mit Bezug auf die Methode der Normalen zu sagen.

Die Sache hat bei dem gewöhnlichen goniometrischen Verfahren wirklich nicht geringe Schwierigkeiten, deren Wegräumung oft bedeutende Arbeit kostet. Dies zu erweisen wird überflüssig seyn, da ich voraussetzen darf, daß die Erfahrung darüber schon hinlänglich belehrt habe. Daher beschränke ich mich darauf, hier zu zeigen, um wie viel kürzer der Forderung Genüge geleistet werden kann, wenn man sich bei den Messungen der einzelnen Theile der Methode der Normalen bedient hat.

Es seien demnach ABCDEF und GHIKL zwei von einander entfernt liegende Polygone, und beide mit Anwendung der Normalen vermessen. Um nun diese beiden Figuren in gehöriger Lage auf die Zeichnung zu bringen, oder mit andern Worten, richtig zu orientiren, ist es, wie man leicht sieht, nur nöthig, sich von der Entfernung und Lage eines bekannten Punkts in dem einen Polygon von einem eben solchen Punkte im andern zu unterrichten, um die Aufgabe völlig lösen zu können; denn alsdann findet sich alles übrige von selbst. Wäre GHK das eine Polygon, welches gegen ACE orientirt werden soll, so ist es einleuchtend, daß alle Polygonal-Punkte des erstern bereits unter sich, vermöge der Normalen orientirt sind. Wenn demnach nur die Lage von G oder H, oder überhaupt irgend eines perimetrischen Punkts des ersten Polygons gegen das letztere ACE aufgefunden wird, so ist die Frage auch beantwortet. Bei den, hier zu erforderlichen Operationen können nun vorzüglich zwei Fälle eintreten, nemlich erstens, daß ein Theil des Perimeters GHK sich von einem Theile des andern ACE übersehen läßt, oder zweitens, daß GHK von ACE aus gar nicht sichtbar ist. Diese beiden Fälle will ich daher noch kurz betrachten, wiewohl es nach allem vorhergehenden fast überflüssig sein mögte.

1. Man kann G oder H, oder irgend einen Punkt in GHK von A und C übersehen und beobachtet die Abweichungen von G bei A und bei C, d. i. die Winkel UAG und TCG. Es ist klar, daß man in dem ganz bekannten Polygon ACE die Seite AC nebst den Winkeln ACT, CAU kenne, oder leicht finden könne. Die §. §. 15. 28. 29. geben dazu alle erforderliche Anleitung. Man hat alsdann in dem Dreieck ACG oder ACH alle drei Winkel und die Seite AC, woraus sich AG oder CG (AH oder CH) bestimmt. Es ist nemlich:

$$ACG = ACT + TCG$$
$$AGC = UAG - TCG$$

und

$$AC = AC. \frac{\text{Sin } AGC}{\text{Sin } ACG}$$

Wollte man die Linie AG (oder CH) unmittelbar messen, so bedürfte es nur der Beobachtung der Abweichung UAG (oder TCH) um das Polygon GHK gegen ACE zu orientiren.

2. Man kann in dem Polygon ACE nichts von GHK sehen, allein der Ort M ist von beiden Polygonen aus sichtbar.

In diesem Falle wird man den Punkt M von A und C aus durch eben dieselbe Rechnung festlegen, d. h. an M die Normale ziehen (durch Anzielen aus A oder C) und die Entfernung CM berechnen, so wie solches so eben für G geschah. Hierauf wird man noch wieder dieselbe Rechnung in dem Dreieck GHM wiederholen um die Seite HM zu finden, wodurch denn das Vieleck GHK gegen ACE dergestalt orientirt ist, daß beide Figuren in richtiger Lage gegen einander verzeichnet werden können. Es leuchtet nemlich ein, daß die Punkte M und H (oder G) gegen irgend eine erste Normale als Abscissenlinie grade so bestimmt werden, als dieses bei andern Polygonal-Punkten geschieht; denn A und G oder C, M oder H, sind nunmehr als Punkte eines Polygons zu betrachten. Die Polygonometrie, und auch hier die §. §. 28. 29. geben zulängliche Auskunft hierüber.

Es können wohl manche örtliche Umstände eintreten, wodurch die Sache bald erleichtert, bald etwas verwickelter wird, und ich könnte hier leicht dergleichen anführen. Allein ich darf hoffen, daß ein kundiger Geometer sich in allen Fällen unbedenklich zurecht finden werde, und folge daher dem Gesetz der Sparsamkeit, wonach mir hier nur noch wenige Blätter übrig bleiben.

Dies ist gewiß, kann und will man eine Standlinie VW für beide Polygone benutzen, wie §. 31. f.f. zeigen, so bedarf es der in gegenwärtigem § angegebenen Rechnung nicht, weil sich dann CH als eine Polygonal-Seite findet.
