welche in der praktischen Geodäsie gewöhnlich fehlen. — Wollte man sich endlich gar auf die Angaben der Entfernungen, die von Ortbewohnern eingezogen werden können, verlassen, so fällt es in die Augen, wie sehr man fehlen, und wie unsicher eine darauf gegründete Rechnung werden könne.

Aus diesen Gründen habe ich geglaubt, daß die vorstehende Auflösung der Aufgabe, bei welcher die Entfernungen der Zielobjekte nicht als bekannt angesehen, sondern gesucht werden, hier einen Platz verdienen könnte, da sie zumal um nichts schwerer, und sehr wenig weitläuftiger ist, als die gewöhnliche. Allein ich habe doch bei dieser Darstellung keine Rücksicht auf die Normallinie genommen, weil man bei goniometrischen Arbeiten oft unerwartet in die Lage versetzt wird, den wahren Winkelpunkt nicht benutzen zu können, und es dann schwer hält, an dem gewählten excentrischen Punkte eine richtige Normale zu legen. Auch kann es Fälle geben, wo die Reduktion excentrischer Winkel ohne Hülfe der Normalen geschehen muß, wie z. B. wenn an den Punkten B und C noch keine Normale gelegt wäre, u. dergl.

Dritter Abschnitt.

§. 17.

Nach der bereits gegebnen Erklärung von dem Begriffe, welcher hier mit der Normallinie verbunden wird, und nachdem die nützliche Anwendung solcher Normalen an einigen oft vorkommenden Fällen im vorhergehenden Abschnitt gezeigt worden, darf ich wohl hoffen, über die Sache selbst allgemein verständlich zu seyn, und ich werde daher jetzt dazu übergehen können, einige goniometrische Folgerungen und deren Gebrauch in der ausübenden Meßkunst darzustellen.

Wenn an einem Winkelpunkte eine Normallinie gezogen wird, so entstehen daraus nothwendig vier Winkel, welche zwischen dieser Normallinie und den Schenkeln des Winkels liegen. Der ursprünglichen Ableitung der Normalen (von den Meridianen) zufolge, und um die eben angedeuteten Winkel durch die Benennung selbst zu bestimmen, mag es mir erlaubt seyn, diese Winkel: Abweichungen (Azimuth) zu nennen, und sie dadurch hier von andern Triangular- oder Polygonal-Winkeln zu unterscheiden. Von den vier Abweichungen aber, welche die Schenkel eines Winkels oder die Seiten einer Figur mit der Normale bilden, werden im Folgenden, wie bisher, nur diejenigen beiden in Betrachtung gezogen, welche außen an dem Winkel, oder außen an der Figur liegen.

Wenn an zwei auf einander folgenden Winkelpunkten eine Normale gezogen, und die Abweichung, welche die zwischen beiden Winkelpunkten gezogne Gränze mit der Normale an einem Punkte macht, beobachtet ist, so muß die Abweichung eben derselben Gränze mit der Normale am andern Punkte, ebenfalls bekannt seyn; denn die Normalen sind mit einander parallel, und die Summe zweier solche Abweichungen ist demnach = 2 R. Daher auch umgekehrt; wenn die Abweichung einer Gränzlinie von der Normale an einem Polygonal-Punkte bekannt ist, so ist auch die Normale an dem nächstfolgenden Winkelpunkte gegeben, denn die Gränzlinie hat an diesem zweiten Endpunkte eine Abweichung von der Normale, welche das Komplement der Abweichung am ersten Punkte zu 2 R, macht.

Wenn die Normalen an zwei Polygonalpunkten gelegt, und die Abweichungen beobachtet sind, welche von den Gränzlinien nach einem dritten (etwa unzugänglichen) Winkelpunkte gebildet werden, so ist auch dieser dritte Winkel gemessen. Denn die Summe der Abweichungen an demselben ist das Komplement jener ersten, bekannten Abweichungen zu 4 rechten Winkeln.

Auch ist jeder Winkel einer Figur das Komplement der Abweichungen an diesem Winkelpunkte zu 4 rechten Winkeln.

Wenn die Normale mit einer Gränzlinie parallel ist, oder dieselbe deckt, so ist die Abweichung dieser Gränzlinie entweder $= 0$, oder $= 2R$, je nachdem man sich die Figur an der Normallinie so, oder so gedreht denkt, oder je nachdem die Richtung beschaffen ist, in welcher man die Abweichungen an einer Figur mißt.

Nach diesen vorläufigen Erinnerungen, die an sich leicht verständlich sind, und zu deren etwaiger Erläuterung man irgend eine Figur wählen oder selbst entwerfen kann, gehe ich zur Anwendung derselben über.

§. 18.

Die drei Gränzpunkte **A, B, C Fig.** 15. irgend einer Figur sollen in Grund gelegt werden; man kann aber nicht von einem Punkte zum andern, auch nach B ganz und gar nicht kommen, sondern nur hinsehen. Die Richtung der Normallinie ist aber für die ganze Figur anderweitig gegeben.

Man lege an **A** die Normale **QA** in der gegebnen Richtung, und beobachte die Abweichung $QAB = \alpha$. Eben so lege man die Normale **NG** an **C**, und beobachte $NCB = \delta$. Alsdann sind die Abweichungen der Gränzen **BA, BC**, von der Normallinie an B, oder $MBA = 2R - \alpha$; $MBC = 2R - \delta$, und der Polygonal-Winkel $ABC = 4R - (MBA + MBC) = 4R - (2R - \alpha + 2R - \delta) = \alpha + \delta$

Hierdurch sind nun die Punkte A, B, C ihrer Lage nach, geometrisch gegeben, und wenn die Gränzen AB, BC selbst, oder ihr Verhältniß zu einander — kurz, wenn der Maaßstab gegeben ist, so können die drei Punkte auch verzeichnet werden.

Die wirkliche Ziehung der Normalen QA, MB, NC ist bei dieser Operation keine nothwendige Bedingung. Denn da die Lage der Normallinie schon anderweitig; z. B. durch die bekannten Abweichungen QAY, NCZ gegeben ist, so kann man die Abweichungen QAC, NCB schon bestimmen, indem man die ganzen Winkel YAB, ZCB (nemlich den erhabenen) beobachtet. Zieht man hiervon die gegebnen Abweichungen QAY, ZCB ab, so sind die Reste gleich den Abweichungen QAB, NCZ $= \alpha$ und δ. Aus diesen aber erhält man die Abweichungen MBA, MBC, und demnach auf den Winkel ABC′ auf die vorhin gedachte Weise.

Diese Bemerkung ist in praktischer Hinsicht nicht ohne Erheblichkeit, da die wirkliche Ziehung der Normalen an jedem Standpunkte zuweilen ihre bedeutenden Schwierigkeiten hat. Hiervon ist schon im 1sten Abschnitt das nothwendigste angeführt worden. Die Unterlassung dieser Arbeit kann jedoch auf der andern Seite fürchten lassen, daß in der richtigen Messung, oder der richtigen Angabe der Abweichungen Fehler, oder Versehen vorfallen mögten, die nicht bemerkt würden, und es ist daher nöthig, hier etwas über die Art, wie sich dergleichen Fehler entdecken, hinzuzufügen.

Gesetzt also, es sei in A ein Fehler vorgefallen, entweder in der Messung des Winkels oder der Lage der Normale durch unrichtige Bestimmung der Abweichungen, so wird dieser Fehler in jedem Falle dadurch ausgedrückt, daß man annimmt, die Normale habe eine, von ihrer wahren wahren Richtung verschiedene Lage, z. B. qA erhalten.

In diesem Falle wird der Winkel qAB kleiner gemessen, als er wirklich ist, nemlich kleiner als QAB, und indem das falsche Maas, in Voraussetzung der richtigen Lage von qA auf die wahre Normale QA bezogen wird, erhält die Gränze AB die Lage Aa. Würde hierauf in C richtig gearbeitet, folglich NCB seinen wahren Werth behalten, so würde B nach a fallen, und das Verhältniß der Seiten Aa : aC würde gestört werden. Wenn demnach dieses Verhältniß = AB : BC gegeben wird, so erscheint der begangne Fehler in der Winkelmessung durch die Verschiedenheit dieser Verhältnisse.

Auch ohne das Verhältniß der Seiten AB : BC als bekannt anzunehmen, erhellet der Fehler aus der Winkelmessung selbst. Denn wenn man in B, oder jetzt vielmehr in a die Normallinie am legt, oder denkt, so kann dieses nur in Bezug auf die an A gelegte qA geschehen, und man muß am $\#$ qA, nicht $\#$ QA legen.

An dieser falschen Normale wird nun die Abweichung aC beobachtet oder gelegt, und dieselbe wird $= maB < NCB$ (oder auch größer je nach der Beschaffenheit des ersten Fehlers an A) gemacht oder gefunden. Hierin aber liegt das Mittel, den Fehler zu entdecken.

Denn wenn richtig gearbeitet ist, folglich am $\#$ NC, so hat man.

$$amC = PCA = 2R - (aCm + maC)$$

und $maC = 2R - (PCA + aCm)$

auch ist

$$maC = CAa + AaC - PCA.$$

Da nun die Winkel an C oder A, und a gemessen sind, so findet man in den vorstehenden Ausdrücken den Werth, welchen maC haben soll, wofern richtig gearbeitet ist. Wird nun für maC ein andrer Werth gefunden, als der vorstehende Ausdruck giebt, so ist am nicht parallel mit NP, und es muß ein Fehler vorgefallen seyn, dessen Größe sich eben durch die Vergleichung ergiebt. In der Voraussetzung nun daß bei C richtig gearbeitet sey, muß der Fehler in A und a zu suchen seyn.

In dem vorhin bemerkten Falle, daß aC auf BC fällt, kann unter gewissen Umständen eine Zweideutigkeit entstehen, wobei es unentschieden bleibt, ob ein Fehler vorgefallen sei, weil nemlich alsdann $aCm = BCA$. Diese verschwindet jedoch wieder, wenn man die Rechnung nach der andern Seite führt und auf die Abweichungen an A bezieht. Man hat — immer in Voraussetzung der richtigen Arbeit

$$amA = OAC = 2R - (maA + aAm)$$
$$maA = 2R - (OAC + aAm)$$

so auch

$$maA = AaC + aCA - OAC.$$

In beiden Fällen ergiebt sich also durch bloße Addition und Subtraktion sowohl das Daseyn als die Größe des begangenen Fehlers.

§. 19.

Wenn zwei Gränzen in AB, AC Fig. 16., eine Neigung gegen einander, und zugleich gegen eine dritte willkührlich gezogene Linie MN haben, so entstehen daraus an der letztern vier Abweichungen, davon zwei außen an der Neigung oder dem Winkel liegen, wie α und β, und zwei andre innerhalb der Neigung wie δ und ε.

Die erstern betrachten wir hier und sagen: der Sinus des, von beiden Gränzen gebildeten Winkels

BAC ist gleich dem Sinus der Summe der beiden Abweichungen, welche dem Winkel entgegen stehen, oder

$$\text{Sin } BAC = \text{Sin } (\alpha + \beta).$$

So lange die Gränzen AB und AC die Lage gegen einander behalten, daß beide Abweichungen α und β auf eben derselben Seite von MN liegen, so ist es für sich klar, daß $\alpha + \beta = 2R - BAC$; denn sie sind entweder Wechselwinkel der beiden Dreieckswinkel, wozu BAC den dritten ausmacht, oder Nebenwinkel welche mit ABC an einer graden Linie liegen, und demnach ist der Satz in jedem Falle richtig.

Wenn man sich aber denkt, daß AC sich um A bewege, und etwa die Lage Ac erhalten habe, so rückt die Abweichung β mit der Seite fort, und gelangt dadurch auch die andre Seite der Linie MN oder deren Verlängerung, etwa wie γ, derjenigen entgegen gesetzt, an welcher α liegt. Alsdann ist die Sache nicht so grade zu deutlich.

Nennt man die Lage von α und β in Beziehung auf MN positiv, so ist klar, daß die Lage von γ in eben der Beziehung negativ sey. Was ein negativer Winkel sei oder bedeuten könne, braucht hier nicht weiter erörtert zu werden; aber es leuchtet ein, daß er allem entgegengesetzt ist, was von einem positiven Winkel gesagt werden kann. Sind demnach Sinus und Kosinus eines positiven Winkels positiv, so müssen diese Funktionen eines negativen Winkels auch negativ seyn. Indem nun $-\gamma$ statt $+\beta$ gebraucht wird, kann man jedoch nicht $\alpha - \gamma$ statt $\alpha + \beta$ schreiben; denn γ soll nicht abgezogen werden, sondern der, in sich negative Winkel soll addirt werden.

Da nun $\text{Sin}\,(\alpha + \beta) = \text{Sin}\,\alpha.\,\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\beta.\,\text{Cos}\,\alpha$, so wird man in diesem Ausdruck $-\gamma$ so einführen müssen, daß dessen Funktionen ebenfalls verneint werden. Auf solche Weise erhält man:

$$\text{Sin BAC} = -\text{Sin}\,\alpha.\,\text{Cos}\,\gamma - \text{Sin}\,\gamma.\,\text{Cos}\,\alpha$$
$$= -(\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\gamma + \text{Sin}\,\gamma\,\text{Cos}\,\alpha)$$

Dieses ist nun $= -\text{Sin}\,(2\,R + (\alpha + \gamma))$
oder auch $= -\text{Sin}\,(4\,R - (\alpha + \gamma))$
welches allemal $= \text{Sin}\,(\alpha + \gamma)$.

Daher ist in jedem Falle, auch wenn β negativ ist, dennoch $\text{Sin BAC} = \text{Sin}\,(\alpha + \beta)$. Wären beide Winkel negativ, so würde man noch immer denselben Ausdruck erhalten.

Man könnte etwa auch so sagen: der Sinus des Winkels BAC sei dem Sinus der Summen beider Abweichungen δ und ε gleich, aber entgegen gesetzt, oder

$$\text{Sin BAC} = -\text{Sin}\,(\delta + \varepsilon)$$

Denn da $\text{BAC} + \delta + \varepsilon = 4R$,
so ist $\text{Sin BAC} = \text{Sin}\,(4R - (\delta + \varepsilon))$
$= -\text{Sin}\,(\delta + \varepsilon)$
weil aber $\delta = 2\,R - \alpha$
$\varepsilon = 2\,R - \beta$
folglich $-\text{Sin}\,(\delta + \varepsilon) = -\text{Sin}\,(4R - (\alpha + \beta))$
so ist wieder
$\text{Sin BAC} = -\text{Sin}\,(\delta + \varepsilon) = \text{Sin}\,(\alpha + \beta)$
und die Sache wird dadurch nicht modificirt.

§. 20.

Um mit mehrerer Deutlichkeit zu übersehen, wie der Sinus von BAC, er sei nun hohl oder erhaben, unter allen Umständen dem Sinus der äußern Abweichungen gleich sei, setze man nach und nach für β die verschiedenen Werthe, wodurch eine Abänderung bewirkt werden könnte, nemlich:

$(R - \alpha)$; o oder $- 2R$; $- \alpha$; $-(2R - \alpha)$; $-(2R + \alpha)$; in dem Ausdruck

$\text{Sin } BAC = \text{Sin } \alpha . \text{Cos } \beta + \text{Sin } \beta . \text{Cos } \alpha$.

Man erhält:

1. für $\beta = (R - \alpha)$

$\text{Sin } BAC = \text{Sin } \alpha^2 + \text{Cos } \beta^2 = 1 = r$ d. h., BAC ist ein rechter Winkel, wie auch nothwendig, wenn $\alpha + \beta = R$, wie die Voraussetzung angiebt.

2. Für $\beta = 0$, oder $= - 2R$

$\text{Sin } BAC = \text{Sin } \alpha . 1 - 0 = \text{Sin } \alpha$, welches also anzeigt, daß $BAC = \alpha$, oder auch $= (2R - \alpha)$; beides richtig, weil in beiden Fällen $AC \nparallel MN$, oder AC auf MN fällt.

3. Für $\beta = - \alpha$

$$\text{Sin } BAC = \text{Sin } \alpha . \text{Cos } \alpha - \text{Sin } \alpha . \text{Cos } \alpha$$
$$= 0$$

d. h. AB und AC decken einander, oder auch, sie liegen in einer graden Linie.

Dies ist auch nothwendig, wenn $cnN = \vartheta$, weil alsdann α und ϑ Scheitelwinkel sind, welches voraussetzt, daß $BA \nparallel cA$, oder was einerlei ist, daß sie zusammen eine grade Linie ausmachen.

Daher ist in diesem Falle $BAB = 0$, oder $BAc = 2R$.

4. Für $\beta = -(2R - \alpha)$

$$\text{Sin } BAC = \text{Sin } \alpha \text{ Cos } \alpha + \text{Sin } \alpha \text{ Cos } \alpha$$
$$= 2 \text{ Sin } \alpha . \text{Cos } \alpha$$
$$= \text{Sin } 2\alpha$$

$= \text{Sin}\,(\alpha + \beta)$

$= - \text{Sin}\,(4\,R - (\alpha + \beta))$

d. h. BAC ist ein stumpfer Winkel, hohl oder erhaben, dem an 4 rechten Winkeln noch $\alpha + \beta = 2\,\alpha$ fehlt, weil in dem Falle Ac eben so viel unter MN liegt, als AB darüber liegt.

5. Für $\beta = -(2\,R + \alpha)$

$\text{Sin BAC} = \text{Sin}\,\alpha.\ \text{Cos}\,\alpha - \text{Sin}\,\alpha.\ \text{Cos}\,\alpha$
$= 0$

weil nemlich AC so weit um A herum gekommen ist, daß Ac auf AB fällt, daher $\text{BAC} = 4\,R$, oder auch $= 0$.

6. Bisher sind die Werthe von β bald positiv, bald negativ, aber immer nur in Beziehung auf die Lage gegen MN genommen. Man kann sich aber auch denken, daß die Abweichung β an sich selbst verneint werde, sofern nemlich der Bogen, welcher das Maas derselben ausdrückt, demjenigen der Richtung nach entgegengesetzt ist, womit α gemessen wird. Dann liegen die Winkel in einander, wie z. B. wenn AC die Lage APc hat und dabei das Maas der Abweichung nach dem Bogen NQ geschätzt wird, während die Größe von α nach dem Bogen QB (in entgegen gesetzter Richtung von NQ) gemessen ist.

Dergleichen geschieht, bei der so eben angedeuteten Ansicht der Sache, 1. zwischen Nr. 2 und 3; denn um β von dem Werthe $= 0$ zu dem $= -\alpha$ zu bringen, muß Ac sich in einer Richtung NQ bewegen, welche der QB entgegen gesetzt ist. 2. Zwischen Nr. 4 und 5, da β, um von dem Werthe $-(2\,R - \alpha)$ zu dem andern $-(2\,R + \alpha)$ zu gelangen, nothwendig durch $2\,R$, d. h. durch 0 gehen, folglich nach dem Durchgange verneint werden muß, wenn der vorherige Werth positiv war.

In beiden Fällen erhält man

$$\text{Sin } BAC = - \text{Sin } (4 R - (\alpha - \beta)).$$

Diese Fälle, da die beiden Abweichungen in einander fallen, gehören zwar der Strenge nach nicht mehr zur Frage, sondern erscheinen nur in der analytischen Entwickelung; allein sie sind keineswegs unmöglich oder nur idealisch, wie wir weiter unten Gelegenheit haben werden zu bemerken, da es sich denn zeigt, wie nützlich dergleichen analytische Betrachtungen seyn können, wenn gleich nicht sogleich einleuchtet, wozu sie dienen. Uebrigens sind jene Fälle noch immer in der allgemeinen Formel

$$\text{Sin } BAC = \text{Sin } (\alpha + \beta)$$

mit enthalten, weil darin keine Bedingung vorkommt, wonach die Abweichungen positiv seyn oder heißen müßten. Die Begriffe von Positivität und Negativität sind ja überall nur relativ, und beziehen sich auf gewisse, an sich willkührliche Voraussetzungen. Eben so ist es mit den goniometrischen Größen und ihren Funktionen beschaffen, so daß die beiden Abweichungen, oder nur eines davon verneint seyn kann, ohne die Gültigkeit des allgemeinen Ausdruckes zu beschränken.

§. 21.

Wenn die Abweichungen der Gränzen einer ebnen Fläche von der gegebnen Richtung einer Normallinie beobachtet werden, so ist die Summe dieser Abweichungen allemal das Komplement der Polygonwinkel. Dies ist die Folge von demjenigen, was in den vorigen §. §. 19. 20 gesagt worden. Allein es wurde dort (wenn der Polygonalwinkel $BAC = \pi$ gesetzt wird)

$$\text{Sin } \pi = - \text{Sin } (2 R + (\alpha + \beta))$$

oder auch $= - \text{Sin } (4 R - (\alpha + \beta))$

gefunden, und es ist noch nicht gesagt, welcher von diesen beiden Werthen gebraucht werden müsse. Um uns nun hierüber ganz zu verständigen, wollen wir die Fig. 17. mit zu Hülfe nehmen.

Wenn man etwa von A anfängt, die Abweichungen der Seiten einer Winkelreihe zu beobachten, so ist die Abweichung der ersten Seite AE, ohne Zweifel $= MAE = \alpha$ in Bezug auf die Normale AM. Die Abweichung der zweiten Seite AB ist nun, in Bezug auf eben die Normale AM von doppelter, einander entgegen gesetzter Art, entweder nach eben der Richtung, wonach α gemessen wird, d. h. nach dem Bogen **emb**, und in dem Falle ist das Maaß desselben $= 2R + NAB = 2R + \beta$. Beide Abweichungen zusammen sind demnach $= 2R + \alpha + \beta$. Oder zweitens, die Abweichung von AB wird nach der entgegen gesetzten Richtung **meb** gemessen, und das Maaß derselben ist dann $= 2R - NAB = 2R - \beta$. In dieser Beziehung ist aber die erste Abweichung MAE an sich negativ, (§. 20. Nr. 6.) und ihr negatives Maaß ist $= - em = nbm - em = 2R - \alpha$. Die Summe der Abweichungen ist demnach $= 4R - (\alpha + \beta)$. In dem ersten Falle ist die Summe der Abweichungen außen an dem Polygonalwinkel gelegen, und gehört demselben als Komplement zu 4 R. Dieser Polygonalwinkel ist daher $= \pi = 4R - (2R + \alpha + \beta)$

$$= 2R - (\alpha + \beta).$$

Im zweiten Falle liegen die Abweichungen in dem Polygonalwinkel, sind aber gleichwohl sein Komplement zu 4 R, d. h. $\pi = 4R - (4R - (\alpha + \beta))$

$$= \alpha + \beta$$

oder die Summe der Abweichungen ist dem Polygonalwinkel gleich, natürlich — weil sie darin liegt, und die eine Abweichung dabei verneint ist.

Jetzt werden wir die oben bemerkte Zweideutigkeit über den Werth von π gänzlich wegräumen können. Die Summe der Abweichungen im ersten Falle $= 2R + \alpha + \beta$ liegt außen an der Figur, und gehört der Frage über die Größe des zugehörigen Polygonalwinkels gar nicht an, weil nicht die Neigung, welche außen an der Figur gebildet wird, dem Polygon gehört, sondern diejenige, welche die Seiten nach dem Innern der Figur zu einschließen. Daher ist der Ausdruck: $\mathrm{Sin}\,\pi = - \mathrm{Sin}\,(2R + (\alpha + \beta))$ gar nicht zur Frage gehörig, weil man nicht wissen will, was der Polygonalwinkel nicht sei, sondern das, was er ist. Im zweiten Falle fanden wir, daß die Summe der Abweichungen dem Polygonalwinkel gleich sei, und daß diese Summe $= 4R - (\alpha + \beta)$; also ist $\mathrm{Sin}\,\pi = - \mathrm{Sin}\,(4R - (\alpha + \beta))$.

Dieses alles bezieht sich auf Polygonalwinkel, deren Seiten an einer Seite der Normallinie liegen, und ist für diese ganz allgemein, wenn man nur über die positive oder negative Bedeutung der Abweichungen völlig einverstanden ist. Weil aber dieses zuweilen Anstoß geben kann, so will ich auch den Weg anzeigen, auf welchem man ihn vermeidet, der auch schon in der Sache liegt, jedoch in den allgemeinen Ausdrücken nicht erscheint. Ohne sich also darum zu bekümmern, ob eine Abweichung positiv oder negativ zu nehmen sei, wird man jeder Abweichung an Winkeln, deren Seiten an einer Seite der Normale liegen wie EAM, BAN 90° zulegen können, und dann die Formel gebrauchen. Man sieht leicht, daß dieses eben sowohl bei B als bei A, und überhaupt in einer Figur so oft geschehen müsse, als sich an derselben Winkel finden, deren Seiten auf einer Seite der Normale liegen.

Wenn bisher nur von Polygonal-Winkeln die Rede war, so dürfen doch auch die Ecken nicht vernachlässigt werden, d. h. solche Neigungen der Seiten, deren Maaß nach der Figur zu $> 2R$. Man pflegt dergleichen auch wohl erhabene Winkel zu nennen, wiewohl es mir scheint, daß der gemeine Sprachgebrauch das Wort: Ecke dafür hinreichend billige, daher ich mir erlaube, dies Wort zu brauchen, ohne gleichwohl den Tadel der Neuerungssucht in einer so importanten Angelegenheit auf mir laden zu wollen.

Also, eine solche Ecke wäre bei **C**, daran die Abweichungen außen an der Figur beobachtet werden sollen. Diese äußern Abweichungen sind aber RCD und QCB, und es ist hier ganz in die Augen fallend, daß sie in einander liegen, welches der, in §. 20. Nr. 6 aufgestellten Betrachtung entspricht. Wir fanden dort, daß allemal

$$\text{Sin}\, BAC = -\text{Sin}\,(4R - (\alpha - \beta))$$

sei, und das wird also auch hier der Fall seyn.

Das Maaß der Ecke BCD ist $= 4R - BCD$ und man hat: $BCD = 2R - (DCQ + BCR)$

$$\begin{aligned}
\text{also ist } DCQ &= 2R - RCD \\
&= 2R - \beta \\
BCR &= 2R - BCQ \\
&= 2R - \alpha \\
\text{folglich } BCD &= 2R - (2R - \beta + 2R - \alpha) \\
&= (\alpha + \beta) - 2R \\
\text{und } \pi &= 4R - (\alpha - (2R - \beta))
\end{aligned}$$

so daß in diesem Falle $\beta' = -(2R - \beta)$ ist.

Man hat daher

$$\text{Sin}\,\pi = \text{Sin}\,BCD = -\text{Sin}\,(4R - (\alpha - (2R - \beta)))$$

und es ist auch $\pi = (4R - (\alpha + \beta - 2R))$.

Dies heißt also, daß man bei Ecken von der Summe der Abweichungen 180° abzuziehen habe.

um das Komplement zu 4 rechten Winkeln für die Polygonalecke zu erhalten.

In Verbindung mit demjenigen was vorhin über die Zulage von 90° zu jeder Abweichung von Seiten, welche eine gleichnamige Lage gegen die Normallinie haben, bemerkt wurde, kann man jetzt überhaupt sagen:

$$\mathrm{Sin}\,\pi = -\mathrm{Sin}\left[4R - ((\alpha \pm 90^\circ) + (\beta \pm 90^\circ))\right]$$

Das heißt: in allen Fällen, wo die Seiten eines Vielecks eine gleichnamige Lage gegen die Normale haben, werden jeder beobachteten Abweichung an Polygonal-Winkeln 90° zugelegt, an Ecken hingegen abgezogen. In diesem Verstande ist der Ausdruck allgemein für Polygonalwinkel oder Ecken:

$$\mathrm{Sin}\,\pi = -\mathrm{Sin}\,(4R - (\alpha + \beta)$$

denn es ist weiter nichts darin enthalten, was auf die, außen an der Figur liegenden Ecken oder Winkel Bezug hätte.

§. 22.

Wenn die Zahl aller Polygonalwinkel und Ecken überhaupt $= m$, die Summe aller Abweichungen der Polygonalgränzen $= s$, und die Summe aller Polygonalwinkel oder Ecken $= S$; so ist

$$S = 4.\,mR - s$$

dies ist eine unmittelbare Folge von dem Ausdruck:

$$\pi = 4R - (\alpha + \beta)$$

denn, mit m vermehrt giebt er

$$m\,\pi = S = 4\,mR - m\,(\alpha + \beta)$$

wobei begreiflich unter α und β keine unveränderliche Größen, sondern die, an jedem Orte beobachteten Abweichungen der Polygonalseiten von der Normallinie verstanden werden. Daher ist $m\,(\alpha + \beta) = s$, und das giebt den vorigen Ausdruck.

Es ist hierin nichts enthalten, wodurch der gänzliche Schluß einer Figur bedingt würde, und der vorige Satz muß daher auch noch wahr seyn, wenn nur ein Theil eines Perimeters, oder eine beliebige Anzahl von Winkelpunkten in Betrachtung gezogen wird. Dies ist auch sehr leicht einleuchtend: denn da jeder Polygonalwinkel nach dem vorigen $= 4R - (\alpha + \beta)$; so setze man nur für die Summe der Abweichuugen jedesmal den gemessenen Werth, und die bloße Addition wird zu dem Resultate führen:

$$
\begin{array}{ll}
1. & \pi = 4R - (\alpha + \beta) \\
2. & \pi' = 4R - (\gamma + \delta) \\
3. & \pi'' = 4R - (\varepsilon + \zeta) \\
4. & \pi''' = 4R - (\vartheta + \eta) \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n. & \pi^{n-1} = 4R - (\sigma + \tau)
\end{array}
$$

$$(1,2,3,4-n) = m;\ m.\pi = m.4R - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \vartheta + \eta + \sigma + \tau)$$

heißt nun diese letzte Summe $(\alpha + \beta + \gamma — + \tau) = s$ so ist wieder: $S = m.4R - s$ ohne alle Rücksicht auf die Gestalt des, durch diese Winkelreihe konstituirten Perimeters.

Der Ausdruck dient also dazu, die Summe der Polygonalwinkel eines jeden beliebigen Theils vom Perimeter einer Figur aus den Abweichungen zu finden, indem die Zahl der, in diesem Theile enthaltenen Winkel $= m$ gesetzt wird.

§. 23.

Wenn die Abweichungen an m Polygonalstationen gemessen, und man nennt die Summe aller Abweichungen $= s$, die erste Abweichung $= \alpha$, die letzte $= \tau$; die Zahl der Polygonalwinkel, deren Schenkel auf einer Seite der Normale liegen $= p$, und welchen nach §. 21. jedesmal 90° hinzugelegt werden sollen; so ist

$$s = (p + m - 1).\ 2R + \alpha + \tau$$

Die Zahl aller Abweichungen an m Stationen ist $= 2m$; hiervon die erste und letzte Abweichung abgezogen, bleibt die Zahl der übrigen $= 2(m - 1)$. Von diesen letzten sind allemal je zwei und zwei an den innern Seiten der Normallinien gelegen, vermöge deren Parallelität die Summe solcher zwei innern Abweichungen $= 2R$; daher ist die Summe aller $2(m-1)$ Abweichungen $= \frac{2(m-1)}{2}.\ 2R = (m-1).\ 2R$.

Wenn nun in den m Polygonalwinkeln eine Zahl $= n$ vorhanden ist, deren Schenkel auf einer Seite der Normale liegen, so werden nach §. 21. für jeden derselben 2 R zu der vorigen Summe der Abweichungen hinzugelegt, und für Anzahl $= o$ von Polygonalecken eben der Art (deren Abweichungen in einander fallen) abgezogen. Demnach ist die Summe $= (m + n - (o + 1)).\ 2R$.

Endlich füge man noch die erste und letzte Abweichung $\alpha + \tau$ hinzu um die Summe aller Abweichungen

$$= s = (m + n - (o + 1))\ 2R + \alpha + \tau$$
$$= (p + m - 1).\ 2R + \alpha + \tau$$

zu erhalten, wo $p = n - o$.

Wofern die Figur mit der Abweichung τ schließt, so ist auch $\alpha + \tau = 2R$, und für eine jede geschlossene Figur von m Winkeln ist die Summe aller Abweichungen

$$= s = (p + m).\ 2R.$$

Aus diesem Ausdruck erhält man auch den Werth der 2 mten Abweichung

$$\tau = s - ((p + m - 1).\ 2R + \alpha).$$

Wenn man für $n = (m - 1)$ Polygonalwinkel die Summe aller Abweichungen $= s'$ setzt, so ist nun wieder

die $2n$'te Abweichung $= \zeta = s' - ((p + n - 1) . 2R + \alpha)$.

Die nächstfolgende Abweichung, oder die $(2n+1)$te welche, da $n = (m - 1)$, der $(2m - 1)$sten entspricht, ist $= \sigma = 2R - \zeta$, und demnach ist

die $(2m - 1)$ste Abweichung

$$= \sigma = 2R - s' + (p + n - 1) . 2R + \alpha$$
$$= (p + n) . 2R + \alpha - s'$$
$$= (p + m - 1) . 2R + \alpha - s'.$$

Unter Anwendung der Methode der Normalen kann man demnach (1) die Summe der Polygonalwinkel einer ganzen Figur, oder auch eines jeden beliebigen Theils des Perimeters, und zwar nicht so wie sie etwa gemessen wird, sondern wie sie seyn soll, aus dem §. 22. gegebenen Ausdruck: $s = 4mR - s$; (2) aus dem im gegenwärtigen § gegebnen Ausdruck, die Summe aller Abweichungen an einem geschlossenen Polygon $s = (p + m) . 2R$, oder einer jeden beliebigen Winkelreihe, so wie sie seyn soll $s = (p + m - 1) . 2R + \alpha + \tau$; (3) die $(2m - 1)$ste Abweichung $= \sigma = (p + m - 1) . 2R + \alpha - s'$ und (4) die $2m$te Abweichung an jeder beliebigen Stelle $= \tau = s - ((p + m - 1) 2R + \alpha)$ finden. Es ist dabei einleuchtend, da m einen jeden Werth haben kann, daß man jede Zahl von Polygonalwinkeln oder auch Abweichungen finden, so wie jede Abweichung als die $(2m - 1)$ste oder die $2m$te ansehen und bestimmen könne. Hierin liegen aber, wie man leicht erkennt, manche willkommne Mittel, die Richtigkeit einer Arbeit zu prüfen, die Fehler zu erkennen und auch an den Orten zu verbessern, wo sie wirklich liegen. Ich werde dieses gleich nachher durch ein ausführlicheres Beispiel erläutern.

§. 24.

In einem jeden Vieleck, welches nur Winkel, (hohle) keine Ecken (erhabene) hat, sind allemal zwei, aber nicht mehr Polygonalwinkel, deren Schenkel auf einer Seite der Normallinie fallen. Man überzeugt sich sehr leicht aus den beiden vorigen §.§. 22. 23. von der Richtigkeit dieser Behauptung.

Denn da $S = 4\, m R - s$

$s = (m + p).\ 2 R$

so ist $S = 4\, m\, R - (m + p).\ 2 R$

$= (m - p).\ 2 R.$

Ebenfalls ist aus der Geometrie bekannt:

$S = (m - 2).\ 2 R$

daher; $(m - p).\ 2 R = (m - 2).\ 2 R$

und $p = 2.$

Es ist jedoch noch ein Fall übrig, wobei es zweifelhaft scheinen könnte, was aus p werden möchte, nemlich der, wo die Normale mit einer Polygonalseite parallel geht, oder mit derselben zusammen fällt. Es ist schon in §. 17 bemerkt worden, daß die Abweichungen in einem solchen Falle entweder $= 0$ oder $= 2 R$ seyn müßten, je nachdem die Vorstellung beschaffen ist, die der Werthbestimmung der goniometrischen Funktionen zum Grunde liegt. Das ist demnach der, in §. 20 Nr. 2 angeführte Fall, und die Abweichungen sind nun das einemal $= 0$ oder $= 2 R$, das andremal $= 2 R$, oder $= 0$ wovon und wie diese alternativen Werthe anzunehmen sind, man sich auf folgende Weise leicht überzeugt.

Wenn AB Fig 18. eine Polygonalseite und MN eine Normallinie ist, darauf die folgende Polygonal seite BC oder BC′ fällt, und dabei die Richtung BN positiv heißt (wodurch die Neigung ABC einen Winkel kleiner als 180° giebt) so muß BM negativ heißen (wobei ABC′ eine Ecke > 180° bildet).

Alsdann ist der Winkel ABC = 4R — (ABC′ + 2R), dagegen die Ecke ABC′ = 4R — (ABC + 0). Daher ist in den allgemeinen Ausdrücken des §. 20 $\beta = 2R$ oder auch $= 0$. Ist aber $\beta = 2R$ für den Winkelpunkt B, so muß für den Eckpunkt C nothwendig $\alpha = 0$ werden, wofern nemlich BC, BC′ ihre relative Lage nicht ändern, d. h. wofern die nächste Polygonalseite CD an einer andern Seite der Normallinie MN liegt als AB. Bleibt hingegen CD‴ auf eben derselben Seite von MN auf welcher AB liegt, so hat BC eigentlich den Halbkreis BB′ durchlaufen, und alsdann ist $\alpha = 2R$, wogegen $\beta = 0$. Man sieht hieraus, wie diese Werthe zusammen hängen, nemlich: wenn B und C Winkel sind, so ist:

$$\begin{aligned}\text{Sin } ABC &= \text{Sin } (4R - (\alpha + 2R)) \\ &= \text{Sin } (\alpha + 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Sin } BCD''' = BC'D'' &= \text{Sin } (4R - (2R + \beta)) \\ &= \text{Sin } (0 + \beta)\end{aligned}$$

Sind aber von beiden B und C, der eine (B) ein Winkel, der andre (C) eine Ecke, so ist

für den Winkel:

$$\text{Sin } ABC = \text{Sin } (4R - (\alpha + 2R))$$

für die Ecke:

$$\text{Sin } BCD = -\text{Sin } (4R - (\alpha + 0))$$

in beiden Fällen = $\text{Sin } \alpha$,

oder umgekehrt:

für die Ecke:

$$\begin{aligned}\text{Sin } ABC' &= -\text{Sin } (4R - (\alpha + 0)) \\ &= \text{Sin } \alpha\end{aligned}$$

für den Winkel:

$$\text{Sin}\, BC'D' = -\text{Sin}\,(4\,R - (2\,R + \beta))$$
$$= \text{Sin}\,\beta.$$

Hieraus ist es nun auch klar, daß die Polygonalwinkel π

für jede Ecke $= 4\,R - \alpha$

für jeden Winkel $= 4\,R - (2\,R + \alpha)$

und die Summe der Abweichungen $(\alpha + \beta)$

für die Ecken $= (\alpha + 0) = (\beta + 0)$

für die Winkel $= (\alpha + 2\,R) = (2\,R + \beta)$

werden müßen.

Es bleibt demnach auch hier für die Summen der Abweichungen bei dem, in §. 21 für alle Fälle gesagten, wo die Gränzen der Polygone oder Winkelreihen auf einer Seite der Normallinie fallen, daß denselben bei Polygonal-Winkeln $2\,R$ zugelegt, bei Ecken abgezogen werden, um den allgemeinen Ausdruck gültig zu brauchen.

§. 25.

Wenn in einem Polygon zwei Ecken, deren Schenkel auf einer Seite der Normallinie liegen, auf einander folgen, so muß die Summe der negativen Abweichungen (§. 21) kleiner als 2 rechte Winkel seyn.

In der Fig. 19 seien b und c zwei auf einander folgende Polygonalecken und die Normallinie $MN \nparallel OP$, so ist klar, daß Mbc und dcP als negativ erscheinen müssen, wenn abN und bcP positiv genommen worden. Wofern nun die Summe dieser negativen Abweichungen so groß wäre als zwei rechte Winkel oder $Mbc + dcP = 2\,R$, und dabei ohne Zweifel $Mbc + bcP = 2\,R$ (weil $MN \nparallel OP$) so würde $dcP = bcP$ seyn müssen.

In diesem Falle würde also dc auf bc fallen, folglich die Ecke $bcd = 0$ oder auch $= 4R$ seyn, und es könnte sich bei c weder Winkel noch Ecke finden. Wäre hingegen $Mbc + dcP$ größer als zwei rechte Winkel, also $Mbc + dcP > 2R$ und $Mbc + bcP = 2R$, folglich $dcP > bcP$; so würde $d'c$ auf die andre Seite von bc fallen, und man fände bei c keine Ecke, sondern einen Winkel. Dieser Fall gehört aber nicht mehr zur Frage, indem vorausgesetzt ist, daß b und c Ecken seyn sollen; daher es nothwendig folgt, daß die Summe der negativen Abweichungen an zwei auf einander folgenden Polygonalecken kleiner als $2R$ seyn müsse.

Wofern auf c noch eine dritte Polygonalecke d folgte, so würde für die Abweichungen an c und d eben das gelten müssen, was so eben für b und c als gültig erwiesen worden, daß nemlich:

$$Ocd + edQ < 2R$$

und da $Ocd = 2R - dcP$

so ist $edQ < dcP$.

Nun ist aber schon nach dem vorstehenden

$dcP + Mbc < 2R$, und um so viel mehr muß $edQ + Mbc < 2R$ seyn.

An diesen drei auf einander folgenden Ecken ist daher die Summe der ersten und letzten Abweichung kleiner als zwei rechte Winkel, und da dieses auch für mehrere solcher Ecken auf die gleiche Weise zu beweisen ist, so ist auch für jede Reihe auf einander folgender Polygonalecken, die Summe der ersten und letzten negativen Abweichung (positiv genommen) kleiner als zwei rechte Winkel.

Die Frage: ob die Zahl der auf einander folgenden Ecken von der angegebenen Art in einem Polygonal- oder einer Winkelreihe eine Gränze habe? und welche die Gränze sei? gehört zu den unbestimmten Aufgaben. Die Summe der negativen Abweichungen an je zwei, auf einander folgenden Ecken nähert sich zwar immer mehr dem Werthe von 2 R, je größer die Zahl solcher Ecken wird; allein dieser letzte Werth ist als eine Asymtote anzusehen, die nie erreicht wird. Es giebt sogar einen einzelnen Fall, in welchem gar keine Annäherung mehr statt findet, sondern die Differentialien der Summen Null werden. Dies geschieht, wenn jeder zweite negative Winkel Null ist, oder jede zweite Polygonalseite mit der Normale parallel läuft. In einem solchen Falle würde dieser Theil des Perimeters aus einer unbestimmten Reihe in einander liegender Vierecke, oder wenn ich so reden darf, aus einer viereckigen Spirale bestehen, der aber eine andre, gleichartige, jedoch entgegen gesetzte Spirale folgen muß, wofern die Winkelreihe eine Figur umfassen soll.

Die weitere Entwickelung hierher gehöriger Untersuchungen liegt außer den Gränzen meines gegenwärtigen Zwecks, für welchen kein großer Nutzen davon zu erwarten ist, weil dergleichen Fälle in der Wirklichkeit nicht leicht vorkommen.

§. 26.

Für jede Reihe oder Anzahl von Polygonal-Ecken, deren Schenkel auf einer Seite der Normallinie liegen, muß sich in einem geschlossenen Polygon eine gleiche Anzahl von Winkeln ähnlicher Lage gegen die Normale finden. Denn die allgemeine Richtung des Perimeters, um eine Figur ganz zu schließen, wird durch jede Ecke, sie sei übrigens welche sie wolle, um 2 R aus dieser Richtung verschoben: sie wird rückgängig (— 180°) und muß daher um eben so viel ergänzt, — vorschreitend (+ 180°) werden. Da nun dieses in einem Polygonalperimeter nicht anders als durch einen Winkel von gleicher Lage gegen die Normallinie geschehen kann, so müssen auch nothwendig in jedem geschlossenen Polygon für jede Zahl von Ecken, eine gleiche Zahl von Winkeln angetroffen werden, wodurch die Wirkung der Ecken auf die goniometrischen Summen aufgehoben wird.

Es ist schon vorhin, §. 24 bewiesen, daß in jedem geschlossenen Polygon, an dessen Perimeter lauter Winkel (keine Ecken) sind, zwei derselben die Lage haben müssen, daß ihre Schenkel auf einer Seite der Normallinie fallen, und es folgt daraus, daß in einem Polygon, darin n Ecken vorkommen, (n + 2) Winkel seyn müssen, deren Schenkel die gedachte Lage haben. Weil aber übrigens diese n Winkel nur die Wirkung jener n Ecken aufheben, so ist das Aggregat derselben in einer geschlossenen Figur ohne Einfluß auf die Summe der Abweichungen, und es mögen daher in einem Polygon Ecken seyn oder nicht, so bleibt für die geschlossene Figur jederzeit $p = 2$. Nur auf die Summe der Abweichungen an einzelnen Theilen des Perimeters behalten die n Ecken und Winkel ihren Einfluß, und ihre Zahl muß für diese Fälle mit in p enthalten seyn. Aus diesem Grunde nur, und um die Richtigkeit der goniometrischen Größen an einzelnen Theilen einer Winkelreihe erforschen zu können, müssen die Ecken und Winkel, welche ganz an einer Seite der Normallinie liegen, mit ihrem additionellen oder subtraktiven Werth angemerkt werden.

§. 27.

Jetzt will ich in aller Kürze zeigen, von welcher Anwendbarkeit und welchem Nutzen die bisherigen Sätze des gegenwärtigen Abschnitts in der speciellen Goniometrie sind. Ich nehme zur Erläuterung an, daß das folgende ein Theil des bei der Messung geführten Manuals sei. Die Fig. 20. kann mit dazu dienen.

Zu S. 72.

…des …. Theils,

Jahr 18 . geführt von …….

Tag der Beob- achtung.	B…	…fswinkel.			Anmerkungen.
	vo…	Gr.	Min.	Sec.	
Juli 6.	A.	26	35	30	
— :	A.				
— :	B.				
— :	B.				
— :	C.	153	24	30	
— :	C.				
— :	D.				
— :	D.				
— :	E.				
— :	E.				
— :	F.				
— :	F.				
	m				

Manual

der beobachteten Abweichungen an den Winkelpunkten des .... Theils, der ..... Sektion im Dreiecknetz ....

Jahr 1821. gefühlt von ....

Tag der Beobachtung.	Ort der Beobachtung.		Beobachtete Abweichungen.			Ueberschuß wegen des Parallelismus.				p.	Korrektion.			Hülfswinkel.					Anmerkungen.
						+		−											
	von	nach	Gr	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.		Gr.	Min.	Sec.	von	nach	Gr.	Min.	Sec.	
Juli 6.	A.	Z.	61	10	15					90				A.	C.	26	35	30	
— =	A.	B.	23	6	12					90									
— =	B.	A.	156	53	48														
— =	B.	C.	30	8	16						÷ „	50	6						
— =	C.	B.	150	41	50									C.	A.	153	24	30	
— =	C.	D.	93	8	30	30	—												
— =	D.	C.	86	51	30														
— =	D.	E.	118	4	20														
— =	E.	D.	61	55	40														
— =	E.	F.	138	57	48						÷ „	20	—						
— =	F.	E.	41	22	12														
— =	F.	G.	50	16	20														
	m		1012	36	41					180									
		+	180	—	—														
			1192	36	41														

1. Man hat zu einer gewissen Zeit eine Anzahl von Abweichungen an m Polygonalstationen gemessen, und will nunmehr wissen, ob die Arbeit richtig sei, um mit Zuverlässigkeit darauf fortgehen zu können.

Hierzu summire man im Manual alle gemessene Abweichungen, so weit selbige nemlich untersucht werden sollen, und bediene sich dann der Formel:

$$s = (p + m - 1)\ 2R + \alpha + \tau,$$

welche in Zahlen aufgelöset, jener gefundenen Summe des Manuals gleich seyn muß. Wofern sich in diesen beiden Summen ein Unterschied findet, so ist auch irgendwo in den Operationen gefehlt. Dieser Fehler, sowohl als auch der Beobachtungsort, wo er vorgefallen ist, wird aber durch den Gebrauch der Formeln für die $(2m-1)$ste und die 2 mte Abweichung $\sigma = (p + m - 1).\ 2R - s'$

$$\tau = s - ((p + m - 1).\ 2R + \alpha)$$

entdeckt.

2. Wir wollen dieses jetzt versuchen.

Die Summe aller, im Manual angeschriebenen Abweichungen ist

$= 1012^\circ\ 36'\ 41'' + 180^\circ = 1192^\circ\ 36'\ 41''$

Dieselbe soll gleich seyn

$$\begin{aligned} s &= (p + m - 1).\ 2R + \alpha + \tau \\ &= (1 + 6 - 1).\ 2.\ 90 + 61^\circ\ 10'\ 15'' + 50^\circ\ 16'\ 20'' \\ &= 6.\ 180^\circ + 111^\circ\ 26'\ 35'' \\ &= 1080^\circ + 111^\circ\ 26'\ 35'' = 1191^\circ\ 16'\ 35''. \end{aligned}$$

Da es jedoch hier erscheint, daß diese Summe mit der ersten, aus dem Manual gezogenen Summe der Abweichungen nicht überein stimmt, so muß in den Beobachtungen ein Fehler vorgefallen seyn, welcher $1192^\circ\ 36'\ 41'' - 1191^\circ\ 26'\ 35'' = 1^\circ\ 10'\ 6''$ beträgt.

Um denselben auszumitteln, nehmen wir nun zuerst die Beobachtungen an je zwei Standpunkten für sich zusammen, und wiederholen die vorigen Summirungen mit denselben.

An den beiden Beobachtungsorten A und B ist nach dem Manual die Summe der Abweichungen

$= 271^\circ\ 18'\ 31'' + 180^\circ = 451^\circ\ 18'\ 31''$

und $s = (p + m - 1).\ 2R + \alpha + \tau$

$= (1 + 2 - 1).\ 2.\ 90 + 61^\circ\ 10'\ 15'' + 30^\circ\ 8'\ 16''$

$= 360^\circ + 91^\circ\ 18'\ 31''$

$= 451^\circ\ 18'\ 31''$

Hier stimmen nun die Summen auf beiden Wegen mit einander überein, und es entdeckt sich demnach auch noch kein Fehler. Wir gehen also weiter, und nehmen B und C auf gleiche Weise vor.

Wir finden an diesen Beobachtungsorten die Summe der Abweichungen nach dem Manual

$= 430^\circ\ 52'\ 24''$

und $s = (p + m - 1).\ 2R + \alpha + \tau$

$= (0 + 2 - 1).\ 2R + 156^\circ\ 53'\ 48'' + 93^\circ\ 8'\ 30''$

$= 180^\circ + 250^\circ\ 2'\ 18''$

$= 430^\circ\ 2'\ 18''$.

Die beiden hier gefundenen Summen sind aber um 50′ 6″ von einander verschieden, und es muß demnach in den Beobachtungen an den Stationen B und C ein Versehen vorgefallen seyn.

3. Damit nun der fehlerhafte Winkel entdeckt werde brauchen wir die Formeln für σ und τ, d. h. für die vorletzte und letzte Abweichung.

Es ist nemlich:

$$TBA = \tau = s - ((p + m - 1).\ 2R + \alpha)$$
$$= 430^\circ\ 52'\ 24'' - (0 + 2 - 1).\ 2R - 93^\circ\ 8'\ 30''$$
$$= 430^\circ\ 52'\ 24'' - 273^\circ\ 8'\ 30''$$
$$= 157^\circ\ 43'\ 54''$$

$$TBC = \sigma = (p + m - 1).\ 2R - s'$$
$$= (0 + 2 - 1).\ 2.\ 90 - 150^\circ\ 41'\ 50''$$
$$= 29^\circ\ 18'\ 10''.$$

Nun findet man aber im Manual;

TBA (von B nach A) = 156° 53′ 48″

TBC (von B nach C) = 30° 8′ 16″

und der erstere Werth ist um 50′ 6″ zu klein, der letztere um eben so viel zu groß. Dieser Unterschied ist jedoch genau dem Fehler gleich, der vorhin in den Summen gefunden wurde, und es ist daher mit Recht zu schießen, daß eine dieser beiden Abweichungen um so viel fehlerhaft beobachtet, oder notirt sei. Da nun die Summe der gemessenen Abweichungen nach dem Manual größer ist, als sie nach der Rechnung seyn sollte, so muß diejenige Abweichung fehlerhaft seyn, welche größer ist, als die, so eben geführte Rechnung giebt. Das ist hier TBC, und diese muß demnach ein Manual korrigirt werden, wozu eine eigne Spalte reservirt ist.

4. Der ganze Unterschied der beiden Summen wurde in Nr. 2, = 1° 10′ 16″ gefunden, wovon bis jetzt nur bei der Abweichung TBC 50′ 6″ ausgemittelt sind. Es muß daher noch sonst irgendwo eine Unrichtigkeit von 20′ eingeschlichen seyn, zu deren Auffindung geschritten werden muß, damit die goniometrischen Summen in vollständige Uebereinstimmung kommen.

Wenn man die Reihe der beobachteten Abweichungen des Manuals auf die, so eben angezeigte Weise durchgeht, so findet man für die Beobachtungsorte E und F, die Summe derselben

im Manual = 292° 32′ —

nach der Rechnung: $s = (p + m - 1) . 2R + \alpha + r$

$= 292° 12′$ —

und hier steckt also der Fehler. Bei welcher Abweichung derselbe vorgefallen sei, ergiebt sich auf dem vorhin benutzten Wege durch Berechnung der letzten und vorletzten Abweichungen.

Man findet:

$$WED = \tau = s - ((p + m - 1).\ 2R + \alpha)$$
$$= 292^\circ\ 32' - ((0 + 2 - 1).\ 2.\ 90^\circ + 50^\circ\ 16'\ 20'')$$
$$= 62^\circ\ 15'\ 40''$$

$$WEF = \sigma = (p + m - 1).\ 2R - s'$$
$$= (0 + 2 - 1).\ 2.\ 90^\circ - 41^\circ\ 22'\ 12''$$
$$= 138^\circ\ 37'\ 48''$$

Dafür steht im Manual:

$$WED = \tau = 61^\circ\ 55'\ 40''$$
$$WEF = \sigma = 138^\circ\ 57'\ 48''$$

ersterer um 20 Min. zu klein, letzterer um eben so viel zu groß. Da nun der in Nr. 2 gefundene Fehler der ganzen Summe noch um diese 20 Min. größer ist, als die, bereits in vor. Nr. 3 entdeckte Korrektion, so muß man auch hier diejenige Abweichung korregiren, welche im Manual größer notirt worden ist, als die Rechnung giebt. Dies ist WEF (von E nach F) welche 138° 37′ 48″ hätte gefunden werden müssen.

Mit diesen, im vorstehenden ausgemittelten Verbesserungen stimmt nun die Summe der Abweichungen genau mit der Rechnung überein, und es ist weiter keine Unrichtigkeit zu fürchten.

5. Ich will hierbei jedoch nicht verschweigen, daß es einen einzelnen Fall giebt, in welchem ein begangenes Versehen auf die bisher (durch Nr. 2 3. 4) angegebene Weise nicht entdeckt wird. Dieser Fall tritt ein, wenn z. B. der Fehler, welcher in TBC (von B nach C) begangen ist, in NCB (von C nach B) wiederholt wird, und man dagegen die folgenden Abweichungen, von C nach D, und von D nach C richtig beobachtet. Alsdann würden die, im Manual notirten Abweichungen so stehen:

von B nach C — 30° 8′ 16″
von C nach B — 149° 51′ 44″
von C nach D — 92° 18′ 24″

von D nach C — 87° 41′ 36″
von D nach E — 118° 4′ 20″
u. s. w.

In diesem Falle wäre der Fehler örtlich, d. h. er hätte blos auf die Lage von C, nicht auf die übrigen Punkte der Winkelreihe, noch auch den Schluß der ganzen Figur, einen Einfluß. Es wäre so viel als ob der Punkt C nach c verlegt wäre, ohne B oder D zu afficiren, wogegen bei den, im Manual angezeichneten Abweichungen die ganze Figur verschoben würde. Ein solcher örtlicher Fehler würde sich nun etwa durch die Anwendung der, im §. 18 vorgetragenen Berichtigungsweise entdecken, wenn nicht die gegenwärtige Ansicht der Sache, wie ich sogleich zeigen werde, leichtere Mittel dazu an die Hand gäbe. Vorgängig bemerke ich nur noch, daß dergleichen örtliche Fehler auf den gewöhnlichen Korrektionswegen goniometrischer Resultate nicht bemerkt werden. Auch sind sie, wenn nicht gröblich gefehlt wird, von unbedeutenden Einfluß auf die Gestalt einer Winkelreihe oder eines ganzen Polygons, so wie auch auf das Areal einer Parcelle. Bei größern Arbeiten hingegen, z. B. zur Anlage von Triangularnetzen sind sie schon von Belang, und müssen billig aufgesucht werden. Wie sich dieses am leichtesten bewirken lasse, will ich jetzt suchen kurz anzugeben.

6. Von jedem guten Geometer, dem es um eine richtige Arbeit zu thun ist läßt sich erwarten, daß er sich nicht dabei beruhigen werde, an jedem Standorte die nothwendigen Dinge zu messen, sondern daß er auch solche Winkel bestimmen werde die, ohne grade nothwendig zum Schluße einer Arbeit zu seyn, doch sehr nützlich zu Korrektionen dienen können. Das Wesen des goniometrischen Verfahrens, welches gegenwärtig so viele Vorzüge hat, erfordert die Beobachtung aller Winkel, welche auf eine Figur einfließen, oder in derselben zu bestimmen sind, und

wer dieses vernachlässigt, indem er sich auf das Nothdürftige beschränkt, verkennt den Werth der Goniometrie, und wird auch nur eine nothdürftige Arbeit liefern.

In der billigen Voraussetzung des Bessern ist hingegen in dem vorgelegten Auszuge aus einem Vermessungsmanuale eine eigne Spalte mit der Rubrik: Hülfswinkel, hinzugefügt, und dabei angenommen, daß der Geometer auf der Station A, außer den Beobachtungen der Abweichungen von AZ, AB, auch nach C, so wie in C zurück nach A gezielt habe. Diese letztere Abweichungen sind im Manual als Hülfswinkel angezeichnet.

Um nun zu prüfen, wiefern c richtig gelegt sei, setze man die Richtigkeit der Lage voraus, so daß nemlich $TBc = TBC$, oder c auf C fällt. Alsdann ist

$$\begin{aligned}
TBC &= NBC + NBT \\
NBT &= BAM \\
NBC &= BAC + BCA \\
TBC &= BAC + BCA + BAM \\
BAC &= MAC - BAM \\
&= MAC + BCA \\
BCA &= NCA - NCB \\
TBC &= MAC + (NCA - NCB)
\end{aligned}$$

Nun ist nach dem Manual

NCA — (von C nach A)	=	153° 24′ 30″
NCB — (von C nach B)	=	150° 41′ 50″
NCA — NCB	=	2° 42′ 40″
MAC — (von A nach C)	=	26° 35′ 30″
TBC	=	29° 18′ 10″

Dagegen ist diese Abweichung ein Manual zu 30° 8′ 16″ notirt, woraus denn erhellet, daß c falsch gelegt worden. Die Abweichung an c ist nemlich um 30° 8′ 16″ — 29° 18′ 16″ = 50′ 6″ zu groß genommen, welches mit der vorigen Rechnung in Nr. 2 u. 3 völlig überein kommt.

7. Es braucht jetzt wohl nicht mehr erinnert zu werden, was gewissermaßen von selbst einleuchtet, daß nemlich die, in den vorigen Nr. erzählten Korrektionen fast auf der Stelle vorgenommen werden können. Ein aufmerksamer Ueberblick des Manuals kann den Geometer auf jeder zweiten, dritten und folgenden Station zu Bemerkungen über die Richtigkeit seiner Arbeit führen, dadurch er sich spätere, mühsamere Korrektionen erspart. Die Summirung der Abweichungen auf je zwei Stationen, ist schon an sich selbst eine Korrektion, die so zu sagen im Vorbeigehen vorgenommen wird, und daher nicht versäumt werden darf.

8. Wäre ein Fehler in der ersten oder letzten Abweichung α oder τ der Summe $= s$, vorgefallen, so würde derselbe sich auf dem bisherigen Wege zu dieser Zeit noch nicht entdecken, weil diese Größen als bekannt angenommen werden. Allein der letzte Winkel bleibt nicht immer der letzte: war er es dieses Mal, so wird er doch später in der Reihe derer mit vorkommen, welche geprüft werden können, und nur über die erste Abweichung, womit die Arbeit angefangen worden, bleibt die Sache bis zum gänzlichen Schlusse der Arbeit unentschieden. Diese Bemerkung wird aber den Geometer veranlassen können, seine Aufmerksamkeit bei Bestimmung dieser ersten Abweichungen, oder eigentlich, der Lage der ganzen Figur gegen die Normallinie (Orientirung) zu verdoppeln. Da übrigens dieser erste Fehler nur die Lage der Figur, nicht die einzelnen Theile derselben afficirt, so wird sich der Fehler auch korrigiren lassen, oder man wird die Figur um A, gleichsam als um ihren Pol drehen können, ohne die innern Verhältnisse der Seiten und Winkel zu stören.

Wenn hingegen der Fehler bloß in der ersten Abweichung AZ nicht zugleich in der folgenden AB, also nicht in der Lage der Normallinie begangen worden, so muß er sich beim Schlusse der Figur zeigen, da die erste Abweichung (α) alsdann als eine vorletzte (σ) erscheinen muß, und als solche geprüft werden kann.

Die große Leichtigkeit des im vorstehenden angedeuteten Weges zur jedesmaligen partiellen Verbesserung der goniometrischen Operationen, wird derselben hoffentlich eben so sehr zur Empfehlung dienen, als die Sache selbst.

§. 28.

Wenn die Normallinien bei der Messung einer Winkelreihe oder eines Polygons zum Grunde gelegt werden, so ist nichts natürlicher noch auch bequemer als dieselben, oder eine davon als gegebene Mittagslinie zur allgemeinen Projektions- (Abscissen-)Linie anzunehmen, um die geometrische Lage der gemessenen Winkelpunkte zu bestimmen.

Die Seiten des Polygons und ihre Abweichungen sind dabei als vorgängig gemessen oder berechnet, natürlich vorauszusetzen, und alsdann die Orte der Polygonalpunkte durch die **Sin.** und **Cosin.** der Abweichungen als Ordinaten und Abscissen sehr leicht gefunden.

Die Fig. 21. mag eine solche gemessene Winkelreihe, oder auch ein geschlossenes Polygon vorstellen, darin die vorzüglichsten Fälle vorkommen, welche dabei etwa eintreten können. Man nehme nun in der Figur zu erst das, was über — oder auch, was unter — der Normallinie YZ liegt, als eine für sich bestehende Winkelreihe, und YZ für die erste Normale, oder Abscissenlinie an, so ist es klar, daß die

die einzelnen Winkelpunkte, senkrecht auf die Absciſſenlinien projicirt, auf derselben den **Cosinus** der ersten, an denselben Punkten liegenden Abweichungen, abschneiden, wozu die, an eben den Abweichungen liegenden Seiten die Halbmesser abgeben. Die Figur macht es sogleich deutlich, daß a. Cosin β die Absciſſe des Punkts 2.; b. Cosin δ die Absciſſe des Punkts 3. u. s. w. auf der, jedem Winkelpunkte zugehörigen Normale, und demnach auch auf der ersten Normale YZ, bestimmen. Indem ich übrigens die Bekanntschaft mit diesem, in der Polygonometrie bereits angenommenen Verfahren voraussetze, kann ich mich darauf beschränken, ohne weitere Erläuterung zu sagen:

Die Absciſſe eines jeden Winkelpunktes ist gleich der Summe der Absciſſen aller vorhergehenden Winkelpunkte vom ersten an gerechnet, oder

$$= a.\ \text{Cosin}\ \beta + b\ \text{Cosin}\ \delta + c.\ \text{Cosin}\ \zeta + \ldots\ldots$$

Auf gleiche Weise ist der Perpendikus, oder die Ordinate eines jeden Winkelpunkts gleich dem Produkte des Sinus der ersten Abweichung an demselben Punkte in die daran liegende Seite, oder $= a.\ \text{Sin}\ \beta$; $b.\ \text{Sin}\ \delta$; u. s. w. Rechnet man die Ordinaten von dem Winkelpunkte der ersten Normale als Anfang der Absciſſenlinie an, so sind dieselben für jeden Winkelpunkt gleich der Summe der Ordinaten der vorhergehenden Winkelpunkte, vom ersten an gerechnet, oder

$$= a.\ \text{Sin}\ \beta + b\ \text{Sin}\ \delta + c.\ \text{Sin}\ \zeta + \ldots\ldots$$

Hiezu füge ich folgende kurze Bemerkungen:

1. Die vorstehenden Ausdrücke sind in ihrer Entstehungsart und Gestalt ganz diejenigen, welche Hr. Däzel bereits früher gegeben, und nur die gonio-

metrischen Funktionen der einfachen Abweichungen, was im Grunde sehr wenig bedeutet. Hr. Schierek hat auch in s. Polygonometrie eben das gethan, was hier steht, und seine reducirte Winkel sind eben die, hier gebrauchten Abweichungen, von denen sie nur in der Lage (und übrigen Behandlungsort) verschieden sind. Es kommt hier also eben nicht viel Neues vor, und ich kann mich desto kürzer fassen.

2. Man kann sich über diejenigen Abweichungen, welche in der Rechnung zu brauchen sind, gar nicht irren: ihre Lage ist deutlich bezeichnet, und es findet keine Abänderung darin statt.

Die Cosin. stumpfer Winkel sind negativ, d. h. sie fallen in der Richtung nach dem Anfangspunkte der Abscissen zu, wie bekannt ist.

Bei Ecken, deren Schenkel auf verschiedenen Seiten der Normale liegen, wie bei 3. werden die ersten Abweichungen ganz nach der Vorschrift genommen.

Bei Ecken, deren Schenkel auf einer Seite der Normale fallen, wie 6. und 11. welche man etwa Wendepunkte — so wie bei 10, welche man Rückkehrpunkt — **punctum reflexus** — nennen könnte, wird man sich dessen erinnern, was früher in §. 20. 21. gesagt worden. Die Abscissen und Ordinaten, werden alsdann den Komplementen zu 4 R. proportional. Nemlich bei dem Wendepunkt 6. sind nach §. 20. der Wendung wegen 2 R. hinzu zu legen; demnach ist die Abscisse für den Winkelpunkt $7 = g. \text{Cosin} (2R + \mu)$. Es ist $\mu = 2R - \lambda$, folglich jene Abscisse $= g. \text{Cosin} (4R - \lambda)$. Eben so ist auch die Ordinate für diesen Winkelpunkt $= g. \text{Sin} (4.R - \lambda)$. Bei dem Polygonal Punkte 11. welcher gleichfalls ein Wendepunkt ist, hat es eben dieselbe Bewandniß.

Anmerkung. Es wird hier nun zwar, wie es scheint, nicht die erste Abweichung an 7, welche π ist, sondern die zweite μ, gebraucht, und auch dieser seine andre, λ, welche die zweite an 6 ist, substituirt. Allein wenn man die Rechnung von 12. an führt, so ist λ allerdings die erste Abweichung, wodurch die Abscisse für den Radius g, bestimmt wird. In diesem Falle würde das Verfahren von 12. bis 6, dem, auf der andern Seite, von 1. bis 6. völlig gleich sein, und 6. käme als Wendungspunkt gar nicht in Betrachtung. Jene Substitution ist daher nur die Folge der Einführung des Wendepunkts in die Rechnung, und auch nur in sofern nöthig. Die Bequemlichkeit, welche mit der Zählung der Abscissen und Ordinaten von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte (Nullpunkt) verbunden ist, und die Betrachtung, daß es zweckmäßig sei, Fälle wie diese, mit vorzutragen, haben mich bewogen, die Rechnung auf die angegebne Art zu führen.

Für den Rückkehrpunkt 10. findet noch wieder dasselbe Verhältniß Statt. Von 12. angefangen ist φ die erste Abweichung, und wegen der Wendung ist die Abscisse $=$ l. Cosin $(2\,R + \varphi)$. Es ist aber φ an sich negativ und $= -(2\,R - \psi)$; demnach ist die Abscisse $=$ l. Cos. ψ (oder wenn man will, auch l. Cos $(4\,R + \psi)$). Die Ordinate ist ebenfalls $=$ l. Sin ψ.

Demnach hat man, von 1. angefangen, die Abscissen $=$ a. Cos. β + b. Cos δ + c Cos. ζ + d. Cosin η + e. Cosin $\varkappa$ + g. Cos. $(4\,R - \lambda)$ + h. Cos. $(4\,R - \pi)$

$$+\text{i. Cos}\,(4R-\sigma)+\text{k. Cos.}\,(4R-\tau)$$
$$+\text{l. Cos.}\,\psi+(m-x).\ \text{Cos.}\,(4R-\omega)$$

Die Ordinaten $=$ a. Sin β + b. Sin δ + c Sin ζ +

$$\text{d. Sin}\,\eta+\text{e Sin}\,\varkappa+\text{g. Sin}\,(4R-\lambda)$$
$$+\text{h. Sin}\,(4R-\pi)+\text{i. Sin}\,(4R-\sigma)$$
$$+\text{k. Sin}\,(4R-\tau)+\text{l. Sin}\,\psi$$
$$+(m-x).\ \text{Sin}\,(4R-\omega)$$

4. Die **Cosin.** der Komplemente zu 4 R sind an sich positiv, daher werden auch alle Abscissen positiv, deren zugehörige Abweichungen kleiner als ein rechter Winkel sind. Für größere Abweichungen werden die **Cosin.**, folglich auch die Abscissen negativ.

Die **Sinus** der Winkel wie $(4R-\alpha)$ hingegen sind negativ, wenn man daher die Ordinaten einer Winkelreihe vom Anfange bis zum Durchschnittspunkte einer Polygonalseite mit der Abscissenlinie zusammen nimmt, so müssen die positiven und negativen Ordinaten einander gleich, oder die ganze Summe aller Ordinaten muß Null seyn. Das ist:

$$\text{a. Sin}\,\beta+\text{b. Sin}\,\delta+\text{c. Sin}\,\zeta+\text{d. Sin}\,\eta+\text{e. Sin}\,\varkappa$$
$$=-[\text{g. Sin}(4R-\lambda)+\text{h Sin}(4R-\pi)+\text{i. Sin}(4R-\sigma)$$
$$+\text{k. Sin}(4R-\tau)+\text{l Sin}\,\psi+(m-x).\text{Sin}(4R-\omega)]$$

oder $0=$ a. Sin β + b. Sin δ + c. Sin ζ + d. Sin η

$$+\text{e Sin}\,\varkappa+\text{g Sin}\,(4R-\lambda)+\text{h Sin}\,(4R-\pi)$$
$$+\text{i Sin}(4R-\sigma)+\text{k Sin}(4R-\tau)+\text{l. Sin}\,\psi$$
$$+(m-x).\ \text{Sin}\,(4R-\omega)$$

5. Wenn man eben diese Rechnung zur Bestimmung der Koordinaten für die andre, unter der Abscissenlinie YZ liegende Winkelreihe, oder den andern Theil des Vielecks in fortlaufender Reihe für 13. 14. u. s. w. fortsetzt, so bleibt es völlig bei der bisherigen Bezeichnungsart. Für 13. hat man die

Abscisse = x. Cos $(4R-\omega)$ für 14. die: n. Cos. $(4R-a)$ u. s. w. Für 17. ist die Abweichung (nemlich die zweite an 16.) = o, oder = 2R; daher die Abscisse = $-q$ Für 18. müssen wegen der Wendung, welche der in 6. der Richtung nach entgegen gesetzt ist, 2 R abgezogen werden, daher bleiben nur 2R — g, oder was dem gleich ist: k. Die Abscisse für 18. ist daher = r Cos k, und man sieht schon, daß man jetzt, nach dem Umgange durch die Wendungen des Perimeters, wieder in die erste Ordnung (zu Anfang dieses §. und in Nr. 2) komme. Für den Winkelpunkt 20. ist die erste Abweichung = n; für 21. sind wegen der Wendung 2 R hinzuzulegen, also ist die Abscisse = u Cosin $(2R+q)$ und weil $q = (2R-o)$ so wird diese Abscisse = u. Cosin $(4R-o)$.

Für die Ordinaten werden eben dieselben goniometrischen Ausdrücke gebraucht, und sie werden, nach dem Werthe derselben, bald positiv, bald negativ.

Alle Abscissen werden hier negativ (den besondern Fall ausgenommen, da eine der gebrauchten Abweichungen kleiner als 90° wird, wie z. B. bei 4, welcher Fall in der untern Hälfte der Figur grade nicht vorkommt) und die Summe aller negativen Abscissen muß der Summe aller positiven Abscissen, welche für den obern Theil des Vielecks gefunden worden, gleich seyn. Man kann daher auch die gesammte Summe aller Abscissen gleich Null setzen oder:

$$
\begin{aligned}
o = {} & a.\ Cos.\ \beta + b.\ Cos.\ \delta + \ldots\ldots g.\ Cos.\ (4R-\lambda) \\
& + h.\ Cos.\ (4R-\mu) \ldots + (m - x\ Cos.(4R-\omega) \\
& + x.\ Cos.\ (4R-\omega) + n.\ Cos.\ (4R-a) \\
& \ldots\ldots\ldots + q + r.\ Cos.\ k. \ldots + u.\ Cos.\ (4R-o) \\
& + v.\ Cos.\ \alpha
\end{aligned}
$$

welches zur Prüfung der Abscissenlinie dient.

Die Ordinaten werden bis zum Wendungspunkte 16. negativ, für 17 = 0, und für die folgenden Winkelpunkte positiv, ausgenommen für 21, wegen der Rückkehr in 20.

Ich habe diese Rechnung rund um den Perimeter in unveränderter Richtung fortgeführt, um dabei zu zeigen, wie die goniometrischen Funktionen sich dem, früher in den §. §. 20. 21. bemerkten gemäß, ihrer Natur nach ändern, und nach vollendetem Cyklus wieder auf ihre ersten Werthe zurück kommen. Allein es ist keinesweges nothwendig, die Rechnung grade so durchzuführen, man kann, wenn man es leichter findet, von 1. bis 12. über 2. 3. u. s. w. und wieder von 1. bis 12. auf dem andern Wege über 21. 20. u. s. w. rechnen. Man braucht dabei nur die Figur umzukehren. Fände man es bequemer, nur von 1. bis 6. und dann wieder von 12. bis 6. so wie von 1. bis 17. und dann von 12. bis 16. zu rechnen, so hätte auch dieses kein Bedenken. Nach dem oben gesagten wird man über die Wahl der zu brauchenden Abweichungen und ihre Werthe nicht in Zweifel sein können.

§. 29.

Das Verfahren des Hrn. Däzel, eine Abscissenlinie ungefähr mitten durch das Vieleck zu nehmen, verdient ohne Zweifel alle Empfehlung, sowohl in Rücksicht auf die Verbesserung der Fehler, als auch wegen der, dadurch möglich gemachten Absätze in den Berechnungen, welche allerdings ermüdend werden können, wenn dieselben schlechterdings aus einem Anfangspunkte geführt werden sollen.

Wenn man nun mit Beibehaltung dieses Verfahrens eine mittlere Normallinie zur Abscissenlinie nimmt, so ist die Lage derselben schon gegeben, und es bedarf der Rechnung nicht, um die Winkel 2. 1. 12 $= \beta$; 11. 12. 1 $= \omega$ zu finden.

Die Länge der Abscissenlinie ist gleich der Summe der Abscissen für die einzelnen Winkelpunkte, und daher eben so zu finden, wie im vorigen §. Nr. 3. gezeigt worden. Um aber den Ort zu finden, wo die angenommene Abscissenlienie eine gegenüber stehende Seite des Vielecks, oder überhaupt, einer Winkelreihe schneidet, wird man erwägen, daß das ganze Vieleck bekannt, folglich auch die Lage eines Winkelpunkts, wie etwa 11. auf irgend einem Wege gegeben sei. Demnach ist die Ordinate für 11. bekannt, wie sie denn auch allemal aus der Gleichung in §. 28. Nr. 4 : $o = a.\,\mathrm{Sin}\,\beta + b.\,\mathrm{Sin}\,\delta + \ldots\ldots + (m - x)\,\mathrm{Sin}\,(4R - \omega)$ gefunden werden kann, weil darin nichts anders als x unbekannt ist, und man erhält das, von der Abscissenlinie abgeschnittne Stück der Seite m, oder:

$$x = \frac{a.\,\mathrm{Sin}\,\beta + b.\,\mathrm{Sin}\,\delta + \ldots\ldots + l.\,\mathrm{Sin}\,\psi}{\mathrm{Sin}\,(4R - \omega)} + m$$

$$= - \frac{a.\,\mathrm{Sin}\,\beta + b.\,\mathrm{Sin}\,\delta + \ldots\ldots + l.\,\mathrm{Sin}\,\psi}{\mathrm{Sin}\,\psi} + m$$

Es scheint nun zwar kein Grund vorhanden sein zu können, weshalb von der, bei weitem leichtern und adäquatern Annahme der Normale als Abscissenlinie abgewichen werden sollte; indessen läßt sich doch auch nicht erweisen, daß keine Verbindung von Umständen zur Wahl einer andern Abscissenlinie, als grade der Normale, bestimmen könnte, und es wird daher angemessen seyn, wenigstens das Nöthigste über einen solchen Fall hinzuzufügen.

Hätte nun etwa die Linie 1. 13. aus überwiegenden Gründen zur Abscissenlinie gewählt werden müssen, so kann man dabei doch ohne Zweifel erwarten, daß man diese Wahl auf eine bestimmte Weise werde bezeichnen können, oder daß sie mit karakteristischen Kennzeichen vorgeschrieben werde. Dieses heißt nun doch wohl so viel, daß die Richtung der neuen Abscissenlinie, oder ihre Lage gegen bekannte Punkte des Vielecks gegeben sei Und damit dies geschehe, muß entweder die Abweichung der Abscissenlinie von der Normale, folglich der Winkel 12. 1. 13. oder der Endpunkt 13. in seiner Lage gegen die übrigen Punkte des Vielecks, folglich die Ordinate desselben, gegeben sein.

1. Wofern nun erstlich die Abweichung der neuen Abscissenlinie von der Normale gegeben ist, so kann die Projektion der Winkelpunkte auf die Abscissenlinie alsbald geschehen, wenn man die ganze Figur um irgend einen Punkt, z. B. um 1. oder 6. so viel gedrehet denkt, als die Abweichung der Abscissenlinie von der Normale beträgt, oder mit andern Worten, wenn man alle Normalen so viel drehet, als die gedachte Abweichung der Abscissenlinie von der ersten Normale aus macht. Hätte man nun schon zu Anfang der Messung gewußt, wie die Abscissenlinie liegen solle, so würde man dieselbe begreiflich sogleich als Normale gebraucht, alle andre Normale an den Winkelpunkten damit parallel gelegt, und dann ohne weitere Abänderung eben das Verfahren befolgt haben, welches der vorige §. 28. angiebt, so wie man denn auch eben dieselben Ausdrücke erhalten würde. Wird hingegen die Abscissenlinie nach Beendigung der Messung gegeben oder gewählt, so bringt man diese Messung auch leicht auf die neue Abscissenlinie, indem man die Beobachtungen der Abweichungen (d. i. die Winkel β, δ, η, u. s. w.) um so viel abändert, als die Abscissenlinie von der Normale abweicht. Ist z. B. dieser letzte Abweichungswinkel $= \eta$, so wer-

den die Abweichungen an den Winkelpunkten = $(\beta + \eta)$; $(\delta + \eta)$......; $(\lambda - \eta)$; $(\mu - \eta)$.....; $(\varkappa - \eta)$; $(g - \eta)$; $(k + \eta)$; u. s. w. und man erkennt leicht, wie sich die, im Manual verzeichneten Abweichungen ändern. Mit diesen veränderten, und auf die Abscissenlinie bezogenen Abweichungen wird nun übrigens ganz nach dem vor. §. 28. verfahren.

2. Wären aber zweitens, nicht die Abweichung der Abscissenlinie von der ersten Normale, sondern die Lage ihres Endepunkts 13. gegeben, so erkennt man leicht, daß die Abweichung der Abscissenlinie von der Normale, oder der Winkel 12. 1. 13. auch in diesem Falle gefunden werden könne. Wofern die Lage des Endpunkts 13. nicht anders als durch die Projektion der Polygonal-Winkelpunkte auf die Normale YZ gegeben ist, so hat man doch

$$\text{tang. } 12.\ \text{I. } 13. = \frac{\text{Summe der Ordinaten}}{\text{Summe der Abscissen}}$$

oder nach §. 28. Nr. 5.

$$-\text{tang. } 12.\ \text{I. } 13. = \left\{\begin{array}{l} n.\,\text{Sin}\,(4R-\mathfrak{a}) + o\,\text{Sin}\,(4R-\mathfrak{b}) \\ +\,p.\,\text{Sin}\,(4R-\mathfrak{d}) + q.\,\text{Sin}\,4R \\ +\,r.\,\text{Sin}\,\mathfrak{k} + s.\,\text{Sin}\,\mathfrak{m} + \\ t.\,\text{Sin}\,\mathfrak{n} + u.\,\text{Sin}\,(4R-\mathfrak{v}) \\ +\,v.\,\text{Sin}\,\alpha \end{array}\right\} \div \left\{\begin{array}{l} x.\,\text{Cos.}\,(4R-\omega) + \\ n.\,\text{Cos.}\,(4R-\mathfrak{a}) + \\ o.\,\text{Cos.}\,(4R-\mathfrak{b}) + \\ p.\,\text{Cos.}\,(4R-\mathfrak{d}) + \\ q\ \text{Cos.}\,(4R+\ \ ) + \\ r.\,\text{Cos}\,\mathfrak{k} + s\,\text{Cos}\,\mathfrak{m} + \\ t\,\text{Cos}\,\mathfrak{n} + u.\,\text{Cos}\,(4R-\mathfrak{v}) \\ +\,v.\,\text{Cos.}\,\alpha \end{array}\right\}$$

Um diesen Ausdruck aufzulösen, muß man zuvor x, oder das von der Normale abgeschnittene Stück der Seite 11. 13. ausgemittelt haben: wozu im Anfange dieses §. Veranlassung gegeben ist.

Die Tangente wird nicht negativ (wenigstens nicht anders, als dieses durch den eignen Werth der Summen der Ordinaten und Abscissen etwa geschehen könnte) sondern der Nenner des obigen Ausdrucks ist an sich verneint, weil alle Abscissen verneint sind, und das vorgesetzte negative Zeichen dient nur zur Auflösung dieser Negationen. Nemlich, ich habe die Abscissen und Ordinaten hier so beibehalten, wie sie im vor. §. 28. aufgestellt sind, als wären sie alle aus einem Punkte gezählt. Dieses ist aber nur geschehen, um in einer konsequenten Schlußfolge zur Erleichterung der Uebersichtlichkeit zu bleiben, und den Zusammenhang der goniometrischen Funktionen durch keine neu eingeführte Supposition zu stören. Bei jener Zählungsweise wurde nun die Richtung der Abscisse ZY negativ, wenn die andre, YZ positiv genommen war. Allein dieses ist eine relative Vorstellung, welche sich blos auf den Anfangspunkt der Abscissen bezieht, und kann auf den Werth der Tangente einer neuen, davon unabhängigen Abweichung keinen Einfluß haben. Wollte man jedoch bei derselben Relation stehen bleiben, so würde die Abscissenlinie 1. 13. sich von YZ an um den Anfangspunkt der Abscissen 1. rückwärts durch 11.... 10.... 6.... 1. 21.... u. s. w. gedrehet haben, und alsdann auch die Tangente des Winkels allerdings verneint sein, weil die Winkel $= (4R - \eta)$ sein würde. — Wer aber wirklich in die Lage käme, eine solche Rechnung zu führen, würde die Abscissen doch wohl nicht von dem entferntesten Punkte aus zählen, und rund um die Figur herum gehen, sondern damit da anfangen, wo die nöthige Rechnung anfängt, in welchem Falle die Abscissen positiv werden.

Uebrigens muß ich noch zum Beschluß bemerken, daß die Voraussetzung, worauf die Rechnung hier gegründet ist, daß nemlich nichts als die Lage des Endpunkts 13. in Bezug auf die Normale YZ, gegeben sei, nicht füglich statuirt werden darf. Man sieht, daß unter solchen Umständen das ganze Vieleck zuerst auf die Normale YZ bezogen, und gänzlich berechnet werden müsse, bloß um den Winkel der Abweichung einer neuen Abscissenlinie zu finden, da dann die Rechnung in Bezug auf diese letzte Linie noch einmal zu führen wäre. Das hieße etwa so viel: man habe sich nach der Hand anders besonnen — was aber nicht zulässig ist; und sich auch bei einer, gehörig angelegten Messung nicht annehmen läßt. Es ist billig, vorauszusetzen, daß alle Umstände vorher erwogen worden, und in diesem Falle wird der Geometer die doppelte Rechnung, welche bei größern Arbeiten viel Zeit raubt, und durch die Einförmigkeit sehr ermüdet, ohne Zweifel ersparen.

Vierter Abschnitt.

§. 30.

Der Gegenstand, welcher in den §. §. 10 — 12. des 2ten Abschnitts kurz berührt wurde, ist dort abgebrochen, um den Nutzen der Methode der Normalen auch bei andern trigonometrischen Fragen zu zeigen, welche in der praktischen Meßkunst häufig aufgelöset werden müssen.

Jetzt wird es aber doch nützlich seyn, die dort abgebrochenen Betrachtungen noch etwas weiter fortzusetzen.