Normalen überall nur eine andre Art, die Winkel anzuschreiben, seyn mögte.

Wenn die Normallinien auch keinen andern Nutzen hätten, als daß sie die Messung an allen Punkten richtig orientiren, dieselben folglich grade dahin setzen, wo sie geographisch liegen; so würde schon dies allein nicht wenig, es würde eben das seyn, was in der allgemeinen Ortsbeschreibung durch die Meridiane, und mehr als was bei speciellen Messungen durch die Boussole bewirkt wird. Gleichwohl beschränken sich die Vortheile des Normalen nicht hierauf, sondern sie kürzen die Auflösung goniometrischer Aufgaben beträchtlich ab, erleichtern die Arbeiten bei polygonometrischen Messungen, und dienen zur größern Genauigkeit derselben, indem sie leichtere Mittel an die Hand geben, eine große Anzahl von Linien durch Rechnung zu bestimmen. Hiervon wünsche ich einige Beweise zu geben.

Zweiter Abschnitt.

---

§. 10.

In der praktischen Geometrie kommen häufige Fälle vor, wo man sich an unbestimmten Orten befindet, deren Lage gegen andre, bereits bekannte (gemessene oder gegebne) Punkte ausgemittelt werden soll. Dabei sind aber nicht immer solche Stücke in den Figuren bekannt, wodurch die Auflösungen der Aufgaben aus einfachen geometrischen oder analytischen Sätzen hergeleitet werden können, und die Verwikkelung, welche durch den Mangel jener konstituirenden Dinge verursacht wird, macht die Auflösungen der hierher gehörigen Fragen mehr oder weniger schwierig.

Unter denen, welche sich mit diesen Gegenständen beschäftigt haben, um die dabei vorkommenden Schwierigkeiten wegzuräumen, war, wie ich glaube, Lambert der erste, der die Sache in analytischer Allgemeinheit behandelte, wiewohl er auch noch viel durch geometrische Konstruktionen zu bewirken suchte. Für den einfachsten dieser Fälle will ich Lambert's Auflösung hierher setzen, so wie sie in seinen Beiträgen Thl. 1. Pag. 75 gegeben ist, indem ich nur zur schnellern Verständlichkeit die, dort ausgelassenen Substitutionen mit beifüge.

Es sey Fig. 3. ABC ein ganz gegebnes Dreieck, darin $AB = a$, $BC = b$ und der Winkel $ABC = \gamma$. Man befinde sich in D, und könne die Winkel $ADB = \alpha$; $BDC = \beta$ messen, aus welchen Stücken die Lage von D gegen die gegebnen Punkte A, B, C, bestimmt werden soll.

In den Dreiecken ABD und BCD ist $BD =$

$$\frac{a.\,\mathrm{Sin}\;BAD}{\mathrm{Sin}\;\alpha} = \frac{b.\,\mathrm{Sin}\;BCD}{\mathrm{Sin}\;\beta}$$

oder

$$a.\,\mathrm{Sin}\;\beta : b.\,\mathrm{Sin}\;\alpha = \mathrm{Sin}\;BCD : \mathrm{Sin}\;BAD$$

man nenne $BAD = x$, so ist

$$BCD = 4R - (\alpha + \beta + \gamma) - x$$

$$4R - (\alpha + \beta + \gamma) = d$$

und

$$a.\,\mathrm{Sin}\;\beta : b.\,\mathrm{Sin}\;\alpha = \mathrm{Sin}\;(d - x) : \mathrm{Sin}\;x$$

so auch:

$$(a.\,\mathrm{Sin}\;\beta + b.\,\mathrm{Sin}\;\alpha) : (a.\,\mathrm{Sin}\;\beta - b.\,\mathrm{Sin}\;\alpha)$$
$$= (\mathrm{Sin}\;(d - x) + \mathrm{Sin}\;x) : (\mathrm{Sin}\;(d - x) - (\mathrm{Sin}\;x)$$

nun ist aber:

$$\mathrm{Sin}\;(d - x) + \mathrm{Sin}\;x = 2\,\mathrm{Sin}\;\tfrac{1}{2}\,d.\;\mathrm{Cos}\;\tfrac{1}{2}\,(d - 2x)$$
$$\mathrm{Sin}\;(d - x) - \mathrm{Sin}\;x = 2.\,\mathrm{Cos}\;\tfrac{1}{2}\,d.\;\mathrm{Sin}\;\tfrac{1}{2}\,(d - 2x)$$
$$\mathrm{Cosin}\;(d - x) + \mathrm{Cos}\;x = 2.\,\mathrm{Cos}\;\tfrac{1}{2}\,d.\;\mathrm{Cos}\;\tfrac{1}{2}\,(d - 2x)$$

Setzt man nun die hier gefundenen Werthe von Sin (d — x) + Sin x und Sin (d — x) — Sin x in die obige Gleichung, und dividirt beide Glieder durch den Werth von Cosin (d — x) + Cos x so erhält man

$$(a.\ \mathrm{Sin}\ \beta + b.\ \mathrm{Sin}\ \alpha) : (a.\ \mathrm{Sin}\ \beta - b.\ \mathrm{Sin}\ \alpha) = \frac{\mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}\ \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(d-2x)}{\mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}d.\ \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(d-2x)} : \frac{\mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}d.\ \mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}(d-2x)}{\mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}d.\ \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(d-2x)}$$
$$= \mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2}d : \mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2}(d-2x)$$

woraus denn tang ($\frac{1}{2}$ d — x) folglich auch x berechnet werden kann.

Wenn noch ein zweiter Punkt E, oder mehrere dergleichen unbestimmte Orte ihrer Lage nach gegen ABC fest gelegt werden sollen, so geräth man auf noch mehr zusammengesetzte Ausdrücke, welche bei Lambert a. a. O. §. 111 ff. — 270 ff. nachzusehen sind. Auch andre Schriftsteller haben sich mit diesen Fällen beschäftigt, und die Sache bald so, bald anders angesehen, ohne wie es scheint, zu einfacheren Resultaten gelangt zu seyn. Die Einführung eines Hülfswinkels giebt unter manchen Umständen merkliche Erleichterungen, und man findet davon in dem lesenswerthen Werke des Hrn. Dr. Schulz-Montanus[1]) mehrere sehr artige und elegante Beweise, z. B. Thl. 2. §. 121. 122.

§. 11.

Das Vorstehende habe ich nur mitgetheilt, um zur Vergleichung zu dienen; jetzt will ich zeigen, um wie viel leichter alle Aufgaben dieser Art zu lösen sind, obgleich von dem Dreieck ABC selbst wenig oder auch nichts bekannt wäre, wofern nur eine Normale an A, B, C, gezogen ist.

---

1) Systematisches Handbuch der gesammten Land- und Erdmessung ꝛc. von A. Schulz, Dr. ꝛc. Berlin 1819.

Es seyen nun A, B, C, Fig. 4. wieder drei Punkte, an denen die Normalen MB, QA, NC, gezogen worden, und D ein vierter Ort, dessen Lage gegen die erstern bestimmt werden soll. Da es keinem Zweifel unterworfen ist, daß man auch an D die Normale OK $\#$ MB $\#$ NC legen, und die Winkel ODB, ODC messen könne, so hat man in dem Dreieck BCD die Winkel

$$CDB = ODB - ODC$$
$$CBD = MBC - ODB$$

demnach auch den dritten Winkel $BCD = 2R - (CDB + CBD.)$

Der Ort D ist demnach geometrisch gegeben, und wenn nur noch etwa eine Seite, z. B. BC bekannt wäre, so würde auch der graphische Ort des Punktes D zu bestimmen seyn, indem alsdann die Seiten BD oder DC durch einen einfachen trigonometrischen Satz auszumitteln wären. Eine Zweideutigkeit, wie sie in dem Ausdruck des vorigen § wegen der positiven oder negativen Werthe der goniometrischen Ausdrücke eintreten kann, ist hier, wie man leicht sieht, gar nicht zu erwarten.

§. 12.

Ganz auf gleiche Weise würde sich auch jeder andre Ort E, oder jede beliebige Zahl von Orten ihrer Lage nach gegen ABC bestimmen lassen, ohne daß es nöthig wäre, eine weitläuftigere Rechnung deshalb anzustellen, wenn nur die Lage der Normale an diesen Punkten gegeben ist. Auch ist es hinreichend, wenn an jedem zu bestimmenden Orte zwei bereits bekannte sichtbar sind, und es bedarf deren weder 3 noch 4 oder mehr, wie sonst bei ähnlichen Aufgaben, z. B. aus drei gegebnen Orten die Lage von drei andern zu finden, wohl vorausgesetzt wird. Bei allen diesen Aufgaben kommt es vorzüglich auf die Erfindung des einen Winkels wie BCD oder ABD an, und dieser ist vermöge der gegebnen Lage der Normalen schon bekannt, wie man im vorigen § bemerkt hat. Hierin liegt die Auflösung des Problems, und man kann daher sagen, daß die Normalen alle derartige Fragen beantworten. Wo jedoch die Lage der Normalen nicht bekannt ist, da behalten jene analytischen Auflösungen allerdings ihren Werth, und es kann hier daher nicht die Meinung seyn, leztere ganz überflüssig zu machen, sondern nur, die Erleichterung zu zeigen, welche aus dem Gebrauch der Normalen fließt.

Daß ich mich hier auf die Bedenklichkeiten nicht eingelassen habe, welche bei den hierher gehörigen Problemen aus der Beschaffenheit der etwa zu spitzen oder stumpfen Winkel u. d. gl. eintreten, wird wohl keiner besondern Entschuldigung bedürfen, so wenig, als daß ich dabei keine Distinktion besonderer Fälle statuirt habe, wie sie großentheils zum Ueberfluß vorgetragen zu werden pflegt. Es ist kein Leitfaden oder Handbuch, welches ich hier liefere, sondern bloß eine Betrachtung über eine Meß-Methode, und ein motivirter Vorschlag dazu. —

§. 13.

Zu mehrerer Erläuterung und zur Benutzung bei vielen Vorfällen der Ausübung will ich den Gebrauch der Normalen für einige der häufigsten Aufgaben, welche bei den Messungen zu lösen sind, im Folgenden anzeigen.

In Fig. 5. sey D ein Winkelpunkt, den man jedoch von B und C weder sehen, noch erreichen kann; es wird verlangt, den Winkel BDC nebst den Seiten BD, CD zu bestimmen.

Man lege durch D in beliebiger Richtung die Linie AG, und bezeichne die Endpunkte A, G, welche

welche von B und C sichtbar sind, und messe die Linie ADG. In B und C, an welchen Punkten die Normale gezogen ist, ziele man auf A und G, schreibe die gefundenen Abweichungen an, wodurch also die Normale an A und G gleichfalls bestimmt ist, und beobachte entweder in A oder in G die Abweichung der Linie AG von der Normale.

Durch dieses Verfahren sind folgende Größen bekannt geworden:

Die Winkel: $HCG = MGC$
$KBG = NGB$
$HCA = OAC$
$KBA = PAB$
$NGA = OAG$

Die Seiten: AD, DG, folglich AG und man hat nunmehr in dem Dreieck AGC, die Seite AG, nebst den Winkeln

$$CGA = 2R - NGA + HCG = a$$
$$CAG = NGA - HCA = b$$
$$ACG = HCA - HCG = c$$

$$\text{folglich } CG = AG. \frac{\text{Sin b.}}{\text{Sin c.}}$$

und in dem Dreieck CDG.

Die Seiten GC, GD, nebst dem Winkel $CGD = a$,

$$\text{folglich: Cot. } CDG = \frac{DG}{CG. \text{ Sin a}} \pm \text{Cot. a}$$

$$\text{oder tang } CDG = \frac{CG \text{ Sin a}}{DG \pm CG \text{ Cos a}}$$

$$= \frac{AG. \text{ Sin b. Sin a}}{DG. \text{ Sin c} \pm AG. \text{ Sin b. Cos a}}$$

und die Seite

$$CD = CG. \frac{\text{Sin a}}{\text{Sin CDG}}$$

Ganz auf dieselbe Weise findet man in dem Dreieck BDG.

$$\text{tang}\,BDG = \frac{AG.\ \text{Sin}\ BAG.\ \text{Sin}\ BGA}{DG.\ \text{Sin}\ ABG \pm AG.\ \text{Sin}\ BAG.\ \text{Cos}.\ BGA}$$

$$= \frac{AG.\ \text{Sin}\ e.\ \text{Sin}\ d.}{DG.\ \text{Sin}\ g \pm AG.\ \text{Sin}.\ e\ \text{Cos}.\ d.}$$

wenn d, e, g die angezeichneten Winkel bedeuten, und die Seite

$$BD = BG\ \frac{\text{Sin}\ a}{\text{Sin}\ BDG.}$$

Der ganze Winkel

$$BDC = CDG + BDG.$$

§. 14.

Das vorstehende Verfahren begreift eine Anzahl einzelner Fälle in sich, welche als eben so viel besondre Probleme pflegen vorgetragen zu werden; und ich werde einige davon hier anführen, um zu zeigen, wie sie in dem Vorhergehenden enthalten sind.

1. In der Fig. 6. ist D ein Winkelpunkt, auf welchen zwar von C, aber nicht von B zielen kann, dagegen ist ein andrer Punkt A von B, D und C aus sichtbar, und die Entfernungen AB, AC, AD, können gemessen werden.

Da man nun, ausser den Seiten, nach der Voraussetzung auch noch die Winkel BAD, CAD, CDA messen kann, so ist offenbar, daß alles gegeben sei um die Winkel CDA, BDA, folglich deren Summe CDB nebst den Seiten BD, CD zu finden.

Man hat:

$$\text{Cot.}\ ABD = \frac{AB}{AD\ \text{Sin}\ BAD} \pm \text{Cot.}\ BAD$$

$$\text{Cot.}\ ACD = \frac{AC}{AD.\ \text{Sin}\ CAD} \pm \text{Cot.}\ BAD$$

$$< BDC = BAC - (ABD + ACD)$$

die Seiten: $BD = AD. \frac{\text{Sin } BAD}{\text{Sin } ABD}$

$$CD = AD. \frac{\text{Sin } CAD}{\text{Sin } ACD}$$

Ohne alle diese Dinge zu messen, giebt der vorige § Anleitung zur kürzern Auflösung. Denn da nach der Voraussetzung von C nach D gezielt, folglich die Normale an D gezogen werden kann, so ist damit schon der Winkel CDA gegeben, und es kommt nur noch auf den andern Winkel BDA an. Da man jedoch nach §. 13 die Winkel ABG, BGA und BAG kennt, so ist auch wie dort: die Seite

$$BG = AG. \frac{\text{Sin } BAG}{\text{Sin } ABG}$$

$$\text{tang}\, BDG = \frac{AG.\ \text{Sin } BAG.\ \text{Sin } BGA}{DG.\ \text{Sin } ABG \pm AG.\ \text{Sin } BAG.\ \text{Cos } BGA}$$

und die Seiten BD, CD, werden wie dort durch ganz einfache Analogien bestimmt.

2. Ein zweiter Fall wird häufig angenommen, da man nemlich von C nach D, aber nicht nach A, hingegen von B nach A, aber nicht nach D zielen kann. Dieser Fall ist indessen bereits in dem vorigen mit enthalten; (sofern die Normalen gebraucht werden) denn der Winkel CAG ist in den vorigen Ausdrücken zur Erfindung des fehlenden gar nicht vorgekommen. Man reicht daher auch hier mit dem vorigen völlig aus.

Nach der sonst gewöhnlichen Auflösungs-Art muß man die Seiten AB, AD, CD, und die Winkel BAD, ADC messen.

Dann steht die Rechnung so:

$$(AB+AD):(AB-AD) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(ABD+ADB) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(ABD-ADB)$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(ABD-ADB) = \frac{AB-AD}{AB+AD} \times \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(ABD+ADB)$$

und weil $ABD + ADB = 180^\circ - BAD$,
so ist

$$ADB = \tfrac{1}{2}(180^\circ - BAD + (ADB - ABD))$$
$$ABD = \tfrac{1}{2}(180^\circ - BAD - (ADB - ABD))$$

demnach:

$$BDC = ADB + ADC$$
$$DB = AD.\frac{\text{Sin } BAD}{\text{Sin } ABD}.$$

3. Zuweilen wird wohl noch vorausgesetzt, daß weder A noch D von B aus gesehen werden können, und das heißt nun im Grunde weiter nichts, als daß der Punkt A unrichtig gewählt worden. Denn in einem solchen Falle gäbe es zwischen den Seiten und Winkeln des Dreiecks ABD gar keine Relation, folglich auch keine Möglichkeit, etwas daraus zu schließen. Man muß also die Punkte, etwa wie G, G′ so wählen, daß die Dinge des §. 13 bekannt werden, welches wirklich noch sehr wenig ist, und allemal möglich seyn wird, wofern man nicht in undurchdringlichen Wäldern arbeitet, wo man denn überhaupt mit Winkelmessern allein schwerlich vorwärts kommen würde. Man muß sich in solchen Fällen schon an die unmittelbare Messung der Linien halten.

Herr ꝛc. Däzel [1]) der so viel Verdienst um die Polygonometrie erworben hat, räth unter solchen Umständen an, eine Zwischen-Station zwischen D und B zu nehmen, sehr nahe an der Richtung DB, und so viel möglich in der Mitte zwischen D und B, wie etwa a, Fig. 6. Wenn alsdann die Seiten aB, aD nebst dem Winckel BaD gemessen sind, so soll der Winkel aDB aus der Analogie

$$aD : aB = aBD : aDB$$
$$aD + aB : aB = (aBD + aDB) : aDB$$
$$= (2\,R - BaD) : aDB$$

1) Ueber die zuverlässigste Methode, große Waldungen zu messen u. s. w. — S. 30 ff. 2. Aufl. 1819.

gefunden werden. Um die Seite BD zu finden, soll aus a ein Perpendikel auf BD gefällt, und die dadurch auf BD bestimmten Stücke Db, Bb aus den bekannten Seiten aD, aB und den Winkeln aDB, aBD berechnet werden.

Dieses Verfahren ist aber nur annähernd, nicht methodisch, weil die Voraussetzung, daß sich die Winkel verhalten wie die gegenüber liegenden Seiten, nicht streng ist, desto weniger, je weiter a aus der Mitte zwischen beiden Punkten B, D, und von der Richtung BD entfernt liegt. Da die letztere nicht bekannt ist, so kann man sich von der Erfüllung der andern Forderungen nicht überzeugen, und die gebrauchte Analogie könnte in dem Falle merklich von der Wahrheit abweichen. Auch werden die Winkel aBD, aDB sehr klein, und hierin liegt wieder ein Grund zur Furcht, bei dem Verfahren zu fehlen.

Unterdessen kommen dergleichen Fälle unstreitig, besonders bei der Messung von Waldparcellen vor, wo der Geometer sich an keine Methode halten kann, sondern nur suchen muß, die nöthigen Stücke zu messen. Wenn es aber doch gemessen seyn muß, so mögte ich noch eben so lieb den Punkt a als eine Station ansehen, aus aD, cD und aDc die Seite aC, dann auf ähnliche Weise BC, und endlich aus BC, CD und BCD die Seite BD nebst dem Winkel BDC berechnen.

Das ist allerdings umständlicher, aber da es zu Hause geschehen kann, so wird ein wenig mehr Rechnung nichts ausmachen, da man so viel richtiger arbeitet.

Ich will die hierher gehörigen Fälle nicht mehr häufen, um zu einem andern Satze überzugehen, der unter mancherlei Umständen noch leichter anzuwenden ist.

§. 15.

ABCDE — Fig. 7., sei eine Reihe von Winkelpunkten, daran die Normale gezogen, und die Abweichungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \vartheta$ gemessen, auch die Seiten BD, DE, EC, auf irgend einem Wege bekannt sind.

Alsdann ist:

$$\text{tang}\, EBH = -\frac{BC \sin\beta + CD \sin\delta + DE \sin\zeta}{BC \cos\beta + CD \cos\delta + DE \cos\zeta}$$

$$\text{und } BE = \frac{BC. \sin\beta + CD \sin\delta + DE \sin\zeta}{\sin EBH.}$$

Diese Ausdrücke sind in vielen Fällen anzuwenden, davon einige hier kurz angeführt werden sollen.

1. In den Figuren 7 und 8, ist ABE ein Umfangswinkel, der aber von B nicht angezielt werden kann: man soll den Winkel ABE und die Seite BE bestimmen.

Ausserhalb der Linie BE können die Punkte C und D an einer, oder an beiden Seiten von BE bestimmt, und die Seiten BC, CD, DE gemessen werden. In beiden Fällen ist der Winkel EBH, und die Seite BE ganz nach den vorigen Ausdrükken zu berechnen, daher auch ABE = ABH + HBE bekannt.

2. Die Polygonalwinkel A, B, C, D, Fig. 9., machen einen Theil einer Figur aus, in welcher die Seite BC nicht zu erreichen, auch der Winkel B nur von A und C angezielt werden kann: man soll den Winkel B, nebst der Seite BC bestimmen, wenn die Linie AC bekannt ist.

Man sieht sogleich, daß der Winkel B durch das Anzielen von A und C aus bekannt geworden, weil $\beta + \gamma = \delta + \varepsilon = 2\,R$, folglich $\gamma + \delta$

$= 4R - (\beta + \varepsilon)$, und $B = 4R - (\gamma + \delta)$
$= \beta + \varepsilon$. Auch ist:

$$AC = \frac{AB.\ \mathrm{Sin}\ \beta + BC.\ \mathrm{Sin}\ \delta}{\mathrm{Sin}\ CAN}$$

demnach

$$BC = \frac{AC.\ \mathrm{Sin}\ CAN - AB.\ \mathrm{Sin}\ \beta}{\mathrm{Sin}\ \delta}$$

3. Wenn unter den vorigen Voraussetzungen auch noch die Seite AB unbekannt, dagegen die Diagonale BD auf irgend einem Wege gegeben ist, so sieht man leicht, daß das vorige Verfahren auch hier völlig ausreicht. Denn es ist wiederum:

$$BD = \frac{BC.\ \mathrm{Sin}\ \varepsilon + CD.\ \mathrm{Sin}\ \vartheta}{\mathrm{Sin}\ BDP}$$

und

$$BC = \frac{BD.\ \mathrm{Sin}\ BDP - CD.\ \mathrm{Sin}\ \vartheta}{\mathrm{Sin}\ \varepsilon}$$

auf gleiche Weise

$$AB = \frac{AC.\ \mathrm{Sin}\ CAN - BC\ \mathrm{Sin}\ \delta}{\mathrm{Sin}\ \beta}$$

Der Winkel ABC ist aber, wie vorher, bekannt.

Hierbei ist es offenbar, daß es in der Beantwortung der vorgelegten Fragen keinen Unterschied machen könne, wenn auch die unbekannten Seiten nicht neben einander, sondern in einem Perimeter zerstreuet liegen. Die Sache bleibt genau dieselbe, und es scheint daher ganz überflüssig, besondere Probleme daraus zu machen, wie man es hin und wieder findet.

4. Wenn die Diagonalen wie vorhin, nicht gegeben, aber die Seiten BC, DE eines, übrigens

bekannten Polygons gefunden werden sollen, so dienen dazu ebenfalls die vorigen Ausdrücke.

In Fig. 10. ist vermöge der Voraussetzung, daß die Figur bekannt sei, auch die Lage von D bekannt, oder kann allemal gefunden werden, z. B., durch die bei A und F beobachteten Winkel NAD, PFD, und die Seite AF welche jederzeit zu finden ist, wenn der Theil des Perimeters FGHA bekannt ist. Es ist nemlich:

$$AF = \sqrt{(GF \text{ Cos } \mu + HG \text{ Cos } \varrho + HA \text{ Cos } \varrho)^2 + (GF. \text{ Sin } \mu + HG \text{ Sin } \varrho - HA \text{ Sin } \varrho)^2}$$

Demnach sind auch die Längen DY und DZ bekannt. Nun ist

$$DY = DC. \text{ Sin } \varepsilon + BC \text{ Sin } \gamma + AB \text{ Sin } \alpha$$
$$DZ = DE. \text{ Sin } \zeta + EF \text{ Sin } \gamma$$

daher

$$BC = \frac{DY - (DC. \text{ Sin } \varepsilon + AB \text{ Sin } \alpha)}{\text{Sin } \gamma}$$

$$DE = \frac{DZ - EF \text{ Sin } \eta}{\text{Sin } \zeta}$$

5. Der Theil eines Perimeters ABC .... G Fig. 11. ist in Winkeln und Seiten bekannt, und es soll die Gränzlinie BF ihrer Richtung und Größe nach gefunden werden.

Die gesuchten Dinge sind also: die Linie BF nebst den Winkeln CBF und EFB.

Man hat:

$$\text{tg } FBH = - \frac{BC. \text{ Sin } \gamma + CD \text{ Sin } \delta + DE \text{ Sin } \varepsilon + EF \text{ Sin } \zeta}{BC. \text{ Cos } \gamma + CD. \text{ Cos } \delta + DC. \text{ Cos } \varepsilon + EF \text{ Sin } \zeta}$$

Daher

$$CBF = 2R - (\gamma + FBH)$$
$$EFB = 2R - (\zeta + FBH)$$

$$BF = \frac{BC.\,Sin\,\gamma + CD.\,Sin\,\delta + DE.\,Sin\,\varepsilon + EF\,Sin\,\zeta}{Sin\ FBH}$$

6. Es kann bei Polygonal-Messungen wohl der Fall seyn, daß die Schwierigkeiten des Terrains nicht verstatten, an allen Winkelpunkten die Abweichungen der Seiten entweder unmittelbar, oder nur durch Anzielen von den nächsten Stationen zu bestimmen, deren Kenntniß jedoch zur Verzeichnung der Figur nöthig ist. Außer den, hierher gehörigen, bereits angegebenen Fällen, nehme ich noch an:

a) daß in dem Theil eines Perimeters ABCD die beiden Winkel bei B und C nebst der Seite BC fehlen. Fig. 12.

Weil die Punkte A und D, folglich DH als bekannt anzusehen ist, so wird auch:

$Bn = BC\,Sin\,\beta$ dadurch gefunden, daß man

$$Bn = DH - (AB\,Sin\,\alpha + CD\,Sin\,\delta)$$

setzt. Auch ist

$$Cn = \frac{DH}{tang\ HAD} + CD.\,Cos\,\delta - AB.\,Cos\,\alpha$$

und

$$tang\ CBn = \frac{Cn}{Bn}$$

nun ist

$$\beta = R - CBn$$
$$\gamma = R + CBn$$

folglich

$$ABC = 2R + \alpha - \beta = R + \alpha + CBn$$
$$BCD = 2R + \delta - \gamma = R + \delta - CBn$$

und die Seite

$$BC = \frac{Bn}{Sin\,\beta} = Bn.\ Sec.\ CBn$$

Anmerkung. In dem Ausdruck für Bn habe ich die Tangente des Winkels HAD eingeführt, weil der übrige Theil der Figur zwischen A und D nicht in Betrachtung gezogen ist. Durch diesen, hier fehlenden Theil der Figur wird die Breite des Punkts D, oder AH bestimmt, und ich habe tang AHD hier nur dafür in jenem Ausdruck substituirt.

b) Wäre die Richtung der Seiten AB und CD oder die Abweichung α und δ nicht gegeben, so fehlen eigentlich 4 Winkel nebst einer Seite, und das ist ein wenig zu viel. Der Fall ist auch schwer zu denken; denn wenn AB und CD gemessen werden können, so müssen auch ihre Richtungen bekannt seyn. Aber diese beiden Seiten können auf andern Wegen ausgemittelt seyn, und der gedachte Fall kann also doch eintreten, wie er denn auch in einigen Schriften betrachtet wird. In etwas muß man jedoch zu Hülfe kommen, und da nimmt man z. B. an, daß von A zwar nicht nach B, wohl aber nach C, und von D nach B gesehen und gemessen werden könne. Alsdann aber ist $CN = AC. \sin NAC$,

und $BM = BD. \sin MDB$,

weil auch, vermöge der, in der Figur gegebnen Lage von A und D, die Länge des Punktes D, oder DH bekannt seyn muß, so hat man:

$$HD - BM = BO$$
$$HD - CN = CP,$$

folglich $\sin \alpha = \dfrac{BO}{AB}$

$$\sin \delta = \frac{CP}{CD}$$

dann aber wieder

$$Bn = BM + CN - HD$$
$$= BD. \sin PDB + AC. \sin NAC - HD$$
$$Cn = \frac{DH}{\tan NAD} + CD. \cos \delta - AB. \cos \alpha$$

woraus denn die Winkel ABC, BCD, und die Seite BC durch das vorhin angegebne Verfahren gefunden werden.

c) Wofern die unbekannten Stücke nicht neben einander in der Figur liegen, sondern zerstreut, z. B. in Fig. 13 die Seite BC, nebst den Winkeln CDE und EFG gesucht werden; so ist dies kein besonderer Fall, wie ich schon vorhin bei ähnlicher Gelegenheit bemerkt habe. Anstatt aber schwieriger zu werden, ist die Sache hier im Gegentheil weit leichter, sofern man die Methode der Normalen braucht, und löset sich beinahe selbst auf.

Denn da die Winkel C, E und G gegeben, folglich ihre Abweichungen γ, ε, ζ und ϑ beobachtet sind, so sind die beiden Winkel d und f zugleich und nothwendig bekannt.

Es ist nemlich $CDE = 4R - (\gamma + \varepsilon)$
und $EFG = 4R - (\zeta + \vartheta)$

Die Zweideutigkeit, ob diese Winkel ein- oder ausgehend sind, hebt sich durch die Ausdrücke selbst. Denn da die Abweichungen allemal außen an der Figur beobachtet werden, so ist der nicht gemeßne Winkel z. B. CDE eingehend, wenn die beiden Abweichungen $(\gamma + \varepsilon) > 2R$, und umgekehrt, ausgehend, wie CD′E wofern $(\gamma + \varepsilon) < 2R$.

Die fehlende Seite BC zu berechnen, ist schon früher gezeigt worden.

d) In einem, übrigens bekannten Vieleck sind die drei, auf einander folgenden Winkel C, D und E, Fig 13. nicht gemessen werden, und sollen durch Rechnung ausgemittelt werden.

Weil die Winkel B und F bekannt sind, so sind auch die Richtungen BC und FE gegeben, d. h. die Abweichungen β und η sind gemessen. Es kommt daher nur noch darauf an, die Abweichungen γ und ε zu finden.

Da auch die Seiten BC und FE gegeben sind, so sind die Längen und Breiten der Punkte C und E oder ihre Projektion auf AG und AH bekannt. Daher ist Ae — Ac eine bekannte Größe, und man hat

$$CD. \text{Sin}\,\gamma + ED\,\text{Sin}\,\varepsilon = ec = Ae - Ae.$$

Ebenfalls ist MO — MN = NO bekannt, und

$$ED.\,\text{Cos}\,\varepsilon - CD\,\text{Cos}\,\gamma = NO.$$

Hieraus kann man nun schon den Sin. oder Cos. von γ oder ε entwickeln, allein die Sache wird etwa weitläuftig. Weit kürzer kommt man auf folgende Art dazu. Man denke sich das Dreieck CDE durch die grade Linie EC geschlossen, so hat man in demselben, weil

$$EC = \sqrt{ec^2 + NO^2}$$

alle drei Seiten bekannt, und wenn deren Summe = s, so erhält man

$$\text{Sin}\,CED = \frac{\sqrt{s.(s-2CD.)(s-2ED.)(s-2EC)}}{2.\,ED.\,EC.}$$

$$\text{Sin}\,CEO = \frac{ec}{EC}$$

$$\text{und } \varepsilon = R + CED + CEO.$$

Ganz auf dieselbe Weise findet man auch den Winkel γ. Man kann aber noch etwas kürzer den

$$\text{Sin}\,CDE = \frac{\sqrt{s.(s-2CD.)(s-2ED.)(s-2EC)}}{2.\,CD.\,ED}$$

nehmen, und daraus

$$\gamma = 4R - (CDE + \varepsilon) \text{ finden.}$$

Wofern die fehlenden Winkel nicht neben einander, sondern zerstreut im ganzen Vieleck liegen, so ist es offenbar, daß die einzelnen Winkel, vermöge des Gebrauchs der Normalen, bereits gefunden sind. Denn wenn ein Polygonal-Punkt von zweien, daneben liegenden Winkelpunkten angezielt wird, und die dabei beobachteten Abweichungen sind = Φ und Ψ so ist der angezielte, außen an der Figur liegende Polygonal-Winkel allemal $= 4R - (\varphi + \psi)$

Man kann hieraus folgern, daß es bei der Anwendung der Normal-Methode hinreiche, an jedem zweiten Winkel des Perimeters einen Standpunkt zu nehmen, um dennoch alle Winkel zu messen. Dies ist nun auch freilich an sich ganz richtig, und gewährt in vielen Fällen der Ausübung eine sehr willkommne Erleichterung; dem unerachtet wird man doch nicht aus bloßer Bequemlichkeit jeden zweiten Winkelpunkt überschlagen dürfen, indem die Messung, selbst überflüssig scheinender Winkel zur völligen Richtigkeit einer geodätischen Arbeit sehr vieles beiträgt, und daraus Korrektions-Mittel entstehen, welche sonst schon schwieriger seyn können, aufzufinden. Man würde die wahren Vorzüge der Goniometrie verkennen, wenn man sich dabei auf die nothdürftige Messung der Winkel, welche eine Figur konstituiren, beschränken wollte: kann man sich durch goniometrisches Verfahren die Messung von einer Menge Linien, wobei so häufige Fehler vorgefallen, ersparen, so müssen hingegen die Winkel mit desto größerer Schärfe bestimmt werden, wenn man nicht die gewonnenen Vortheile selbst aus den Händen geben will.

§. 16.

Das Zentriren der Winkel findet bei goniometrischen Arbeiten so häufig statt, daß ich darüber einen einzigen Satz hierher setzen will, obgleich der Gegenstand eigentlich nicht hierher gehört.

Der Winkel BDC, Fig. 14 ist gemessen: derselbe soll in A — in gegebner Richtung und Entfernung $= AD$ — zentrirt werden.

Um dieses zu bewirken nehme man einen zweiten Standpunkt irgendwo inner- oder ausserhalb der Figur z. B. in E, jedoch so, daß E in gegebner oder zu messender Richtung und Entfernung von D, auch in C und B sichtbar sei. Der Winkel EDC und die Linie ED sind also bekannt.

Wenn man nunmehr den Winkel DEC mißt, so sind in dem Dreieck CDE die zwei Winkel an D und E, folglich auch der dritte an C, nebst der Seite DE bekannt, und man hat:

$$DC : DE = \text{Sin } DEC : \text{Sin } DCE$$

$$DC = \frac{DE.\ \text{Sin } DEC}{\text{Sin } DCE}$$

dann aber in dem Dreieck ADC, aus den beiden Seiten DE, DC, nebst dem Winkel ADC

$$\text{Cot. } ACD = \frac{DC}{AD.\ \text{Sin } ADC} \mp \text{Cot. } ADC$$

$$\text{tang, } ACD = \frac{AD.\ \text{Sin } ADC}{DD \mp AD.\ \text{Cos } ADC}$$

$$= \frac{AD.\ \text{Sin } ADC.\ \text{Sin } DCE.}{DE.\ \text{Sin } DEC \mp AD\ \text{Sin } DCE.\ \text{Cos.}\ ADC.}$$

Auf dieselbe Weise erhält man, wenn der Winkel DEB gemessen wird, in dem Dreieck BDE die Winkel an D und E, folglich auch den dritten an B, nebst der Seite DE; deshalb ist auch hier

$$DB = \frac{DE.\ \text{Sin } DEB}{\text{Sin } EBD}$$

und dann in dem Dreieck ABD

$$\text{tang. } ABD = \frac{AD.\ \text{Sin } ADB}{DB \mp AD.\ \text{Cos. } ADB}$$

$$= \frac{AD.\ \text{Sin } ADB\ \text{Sin } DBE}{DE.\ \text{Sin } DEB \mp AD.\ \text{Sin } DBE.\ \text{Cos } ADB}$$

Da nun die beiden Winkel DCA und DBA dem Unterschiede der beiden Winkel BDC und BAC gleich sind, so hat man den zentrirten Winkel

$$BAC = BDC \mp (ABD + ACD)$$

wenn nemlich A innerhalb der Schenkel BD, DC liegt, folglich größer als D ist, so werden die beiden Winkel ABD und ACD zu BDC addirt, oder das positive Zeichen wird gebraucht.

In solchen Fällen, da die Winkel auf die gedachte Weise zentrirt werden sollen, kann es sich wohl treffen, daß ein Winkel, z. B. EDB größer als 180° ist, oder daß das Dreieck BDE an einer andern Seite der Linie DE liegt als das Dreieck EDC.

Allein die vorigen Ausdrücke bleiben nicht minder gültig, und man erhält sie durch die Rechnung eben so wie vorhin.

Weil aber der Winkel ADC, in Bezug auf eben den Winkel des vorigen Falls, eigentlich der erhobne $(4R - ADC)$ ist, so wird der Sinus dieses Winkels verneint, $=$

$$-\mathrm{Sin}\, ADC = \mathrm{Sin}\,(4R - ADC)$$

und deshalb wird der ganze Ausdruck für $\mathrm{tang}\, D'CA$ verneint. Nun ist aber $-\mathrm{tang}\,\omega$ entweder $= \mathrm{tang}\,(2R - \omega)$ oder $= \mathrm{tang}\,(4R - \omega.)$ d. h. der gefundne Winkel erscheint, mit Bezug auf eben den Winkel, welcher vorhin positiv genommen war, als eine negative Größe, und muß daher abgezogen werden. Demnach wird jetzt der zentrirte Winkel

$$BA'C = BDC \mp (A'BD - A'CD).$$

Man kann sich übrigens auch aus der Figur leicht von der Sache überzeugen. Denn man hat den äußern Winkel

$$\begin{aligned} \lambda &= BDC + A'CD \\ &= BA'C + A'BD \end{aligned}$$

demnach ist

$$\begin{aligned} BDC + A'CD &= BA'C + A'BD \\ \text{und } BA'C &= BDC + A'CD - A'BD \\ &= BDC - (A'BD - A'CD), \end{aligned}$$

Diese Bemerkung macht nun, daß der Ausdruck für den zentrirten Winkel die allgemeine Form erhält:

$$BAC = BDC \mp (ABD \pm ACD)$$

Man wird leicht erkennen, daß die gegenwärtige Auflösung der Aufgabe, einen Winkel zu zentriren, alle andre Fälle, welche sonst häufig als besondre Aufgaben vorgetragen werden, mit einschließt. Denn die Lage von E ist ganz willkührlich genommen, und läßt daher alle Bedingungen zu, welche man daran knüpfen mögte, z. B. daß E in der Verlängerung einer Gesichts-Linie, wie AB, oder in der Linie AB oder deren Verlängerung liegen soll, u. s. w.

Bei dieser Materie nimmt man aber gewöhnlich auch noch die Entfernungen AB, AC als bekannt an, wodurch die Rechnung etwas weniges kürzer wird. Indessen ist es selten der Fall, daß diese Entfernungen würklich bekannt sind, und man pflegt sich dann wohl mit einer Schätzung zu behelfen, wobei man jedoch in merkliche Irrthümer gerathen kann, welche auf die Rechnung erheblich einfließen. Es gehört schon gute Uebung dazu, eine Länge von mehrere 100 Schritten auf ebnem Felde annähernd zu schätzen; schwerer wird die Schätzung auf abhängenden oder aufsteigenden Boden; allein eine Linie von mehrern 100 Schritten über Berg und Thal läßt sich auf die Weise ganz und gar nicht erträglich bestimmen. — Aus der Größe des Sehwinkels eines entfernten Gegenstandes ließe sich eher etwas schließen, wenn man im Stande wäre, diesen Winkel zu schätzen, und dabei die wahre Größe des Gegenstandes kennte. Beides ist nicht oft der Fall, und wenn man auch den scheinbaren Durchmesser des Gegenstandes durch Messung bestimmt, so bleibt doch der wahre fast immer unbekannt. — Aus der Fortpflanzung des Schalls ist auch nur dann etwas über die Entfernungen herzuleiten, wenn gewisse Data vorhanden sind,

welche

welche in der praktischen Geodäsie gewöhnlich fehlen. — Wollte man sich endlich gar auf die Angaben der Entfernungen, die von Ortbewohnern eingezogen werden können, verlassen, so fällt es in die Augen, wie sehr man fehlen, und wie unsicher eine darauf gegründete Rechnung werden könne.

Aus diesen Gründen habe ich geglaubt, daß die vorstehende Auflösung der Aufgabe, bei welcher die Entfernungen der Zielobjekte nicht als bekannt angesehen, sondern gesucht werden, hier einen Platz verdienen könnte, da sie zumal um nichts schwerer, und sehr wenig weitläuftiger ist, als die gewöhnliche. Allein ich habe doch bei dieser Darstellung keine Rücksicht auf die Normallinie genommen, weil man bei goniometrischen Arbeiten oft unerwartet in die Lage versetzt wird, den wahren Winkelpunkt nicht benutzen zu können, und es dann schwer hält, an dem gewählten exentrischen Punkte eine richtige Normale zu legen. Auch kann es Fälle geben, wo die Reduktion excentrischer Winkel ohne Hülfe der Normalen geschehen muß, wie z. B. wenn an den Punkten B und C noch keine Normale gelegt wäre, u. dergl.

Dritter Abschnitt.

§. 17.

Nach der bereits gegebnen Erklärung von dem Begriffe, welcher hier mit der Normallinie verbunden wird, und nachdem die nützliche Anwendung solcher Normalen an einigen oft vorkommenden Fällen im vorhergehenden Abschnitt gezeigt worden, darf ich wohl hoffen, über die Sache selbst allgemein ver-