1303

1303

Ueber den Gebrauch einer Normal-Linie bei geodätischen Arbeiten.

Ein Beitrag zur Goniometrie

von

H. v. Kramer,
Oberst-Lieutenant.

Mit 26 Figuren.

Preis 12 Gr.

Hamm,
bei Schultz und Wundermann.

1821.

Vorwort.

Nicht etwas Neues will ich lehren, sondern nur etwas Altes und lange Bekanntes zum bequemen Gebrauch einrichten. Lambert — einer der scharfsinnigsten Geometer seiner — und unsrer — Zeit, hat mir die Veranlassung zu dieser Arbeit gegeben, wiewohl die Art, wie er in seinen Beiträgen zur praktischen Geometrie die Mittagslinien einführt, ganz andre Beziehungen hatte, und haben mußte, in sofern der damalige Zustand der Geodäsie weit mehr unmittelbare Verzeichnungen und Konstruktionen als goniometrische Operationen voraussetzte.

Hätten die Winkelmesser, welche in der gewöhnlichen Praxi der Feldmesser gebraucht werden können, zu seiner Zeit die Vollkommenheit erreicht, die sie gegenwärtig haben, so würde auch Lambert seinen Scharfsinn auf ihren nützlichsten Gebrauch gewandt haben; und daß es nicht geschehen konnte, ist ohne Zweifel ein Verlust für die Wissenschaft, denn jeder Freund derselben weiß, mit welchem Geiste Lambert die Gegenstände durchdrang, womit er sich beschäftigte.

Diese Erklärung habe ich für diejenigen vorausgehen lassen, welche mir vielleicht beilegen könnten, was mir nicht gebührt.

Den Kennern der Mathematik lege ich diese kleine Abhandlung zur Prüfung der Behandlungsweise des Gegenstandes und seines Nutzens in der praktischen Geometrie mit dem Wunsche vor, daß ihr Urtheil meine darüber ausgesprochenen Gedanken bestätigen möge.

Bei der Bearbeitung habe ich vorzüglich zwei Forderungen an mich gemacht: Die möglichste Kürze zu beobachten, und die überzeugendste

Deutlichkeit auch für minder Geübte zu bewirken. Denn ich wünschte, bei aller Kürze, doch für die Praktiker eine solche Verständlichkeit zu erreichen, wodurch die Anwendung der Methode der Normalen bei ihnen keine Art von Schwierigkeit antreffen mögte. Die Erleichterungen, welche diese Methode in der Praxis gewährt, werden den ausübenden Geometern, wie ich hoffe, desto schneller einleuchten, je weniger sie von dem bereits Gewohnten abweicht, und die dargebotenen Vortheile werden ihnen desto willkommener seyn, je einfacher und natürlicher der Weg ist, auf welchem Sie dazu gelangen. Deshalb habe ich es mir ganz besonders angelegen seyn lassen, in den analytischen Ausdrücken so einfach und kurz zu seyn, als möglich, die zusammengesetztern lieber zu verwerfen oder zu unterdrücken, und von den, in der Goniometrie bereits angenommenen Formen so wenig abzuweichen, daß die Abweichung kaum merklich ist. Bei dieser höchst einfachen Kürze habe ich dagegen auch geglaubt, die Beispiele in Zahlen, mit Ausnahme einzelner Fälle gänzlich ersparen zu können, wozu ich ohnehin durch den beschränkten Raum, den ich mir bei dieser Arbeit vorgesteckt hatte, genöthigt war.

der übrigen Gestirne zu haben schien, und man bemerkte bald, daß eine Linie vom Auge zu diesem unbeweglichen Punkte alle Tagkreise in gleiche Hälften theile. Da eben dies an dem Tagbogen der scheinbaren Bewegung der Sonne geschah, und der Tag daher in gleiche Theile getheilt wurde, so nannte man jene Linie die Mittagslinie, und die Unveränderlichkeit derselben gab die natürliche Veranlassung zu dem Gedanken, die Lage der Oerter an der Mittagslinie abzuzählen, oder darauf zu beziehen.

Die unveränderliche Richtung dieser Linie wurde von der Zeit des phönicischen Hercules bis zu der des Picard (1680) nicht in Zweifel gezogen, da derselbe aus den Abweichungen mehrerer astronomischen Beobachtungen von denen des Ty ge Brahe auf die Vermuthung gerieth, daß die Richtung der Mittagskreise einer Veränderung unterworfen seyn könnte.

Die Vermuthung hat sich glücklicherweise nicht bestätigt, allein sie hat den Nutzen gehabt, daß die sorgfältigsten Untersuchungen darüber angestellt worden, woraus sich ergeben hat, daß die Mittagslinien ihre Richtung durchaus nicht verändern.

Nicht blos für die Astronomie und die mathematische Geographie, sondern auch für die speciellere Geodäsie sind die Mittagslinien von großer Wichtigkeit, indem sich alle Messungen auf dieselbe beziehen lassen, wodurch eine Wahrheit des Bildes von der gemessenen Fläche erhalten wird, wie man sie sonst nicht darstellen kann, und die Anpassung einzelner Messungen an einander zur Darstellung eines größern Theils der Erdfläche sich nur durch die allgemeine Beziehung auf die Mittagslinien so bewirken läßt, daß auch das größere Bild noch dem dargestellten Theil der Kugelfläche ähnlich bleibt.

Zur Entwerfung von Land- und See-Karten sind die Mittagslinien als unentbehrlich, stets zum Grunde gelegt, so lange diese Karten überhaupt einigen Anspruch auf Richtigkeit haben machen können, d. i. seit der letztern Hälfte des 16. Jahrhunderts. Es fehlt jedoch viel, daß diese Richtigkeit der Karten sich soweit erstreckte, als man gegenwärtig zu erwarten berechtigt seyn mögte, weil die Kostbarkeit und die Schwierigkeiten, welche mit der Bestimmung der Mittagslinien verbunden sind, bisher nur gestattet haben, dieselbe an einigen Hauptpunkten zu bewirken, deren Zahl verhältnißmäßig noch sehr gering ist.

Auch in der praktischen Geometrie ist die Benutzung der Mittagslinien einigermaßen bearbeitet worden. Der scharfsinnige Lambert hat in seinen Beiträgen mehrere Aufgaben mit Hülfe der Meridiane aufgelöset, und J. T. Meyer hat in seiner praktischen Geometrie auch diesen Gegenstand so weit abgehandelt, als die Schwierigkeit zuließ, Meridiane auf dem Felde zu ziehen.

Der Gebrauch der Magnetnadel bei geodätischen Arbeiten gründet sich ebenfalls auf den Begriff der Mittagslinien, und er ist besonders deshalb häufig empfohlen worden, unerachtet die Variationen in der Abweichung schon ziemlich früh beobachtet sind.

Die Ziehung eines Meridians — wenn auch nur eines magnetischen — gewährte in der praktischen Geometrie den Vortheil, die graphischen Instrumente, dergleichen vorzüglich der Meßtisch, mit großer Leichtigkeit zu benutzen. Das Bestreben, die Auflösung vieler Aufgaben durch geometrische Konstruktion zu bewirken, war vielleicht durch die analytische Geometrie befördert, und selbst der treffliche Lambert verwandte noch viel Zeit auf die geometrische Darstellung von analytischen Resultaten. In der praktischen Geometrie aber hielt man sich vorzugsweise an die Konstruktions-Methoden, weil dabei weniger oder geringere Fehler zu befürchten waren, als bei dem Gebrauch der goniometrischen Werkzeuge, deren Unvollkommenheit allerdings weit größere Fehler unvermeidlich machte.

Man empfahl daher, und wohl mit Recht, die graphischen Instrumente, deren mögliche Vervollkommnung nicht unterblieb, und sie sind bis zum Ende des vorigen Jahrhunderts fast ausschließlich in der Geodäsie gebraucht.

In unserm gegenwärtigen Jahrhunderte aber ist die Verfertigung sehr genauer Winkelmesser so weit gediehen, daß die Anschaffung solcher Werkzeuge, welche bis dahin nur auf den Sternwarten — und noch nicht auf allen — gesehen wurden, das Vermögen eines praktischen Geometers nicht mehr übersteigen, und jetzt verhält sich die Sache anders. Wenn früher der Meßtisch und ähnliche Instrumente mit gutem Grunde den Winkelmessern vorgezogen wurden, so ist jetzt mit eben so vielem Rechte zu behaupten, daß die Benutzung der letztern bei geometrischen Arbeiten eine viel größere Genauigkeit gewähre, als durch irgend eine Konstruktions-Methode zu erreichen ist. Hierdurch hat die niedere praktische Geometrie gewissermaßen eine andre, und gewiß vorzüglichere Gestalt erhalten; es ist auch ein neuer Zweig, die Polygonometrie, entstanden, die wir zunächst den Bemühungen des Herrn Däzel verdanken — denn was früher in diesem Fache von Lambert, Lexel u. a. geleistet war, hatte eine ganz andere Richtung.

Aber der Gebrauch der Mittagslinien ist darüber aus den Augen verloren, wiewohl derselbe zur Richtigkeit der entworfenen Bilder immer gleich viel beiträgt, wie auch die Meßgeräthe beschaffen seyn mögen.

Zwar, die wirkliche Ziehung der Meridiane hat noch immer dieselben Schwierigkeiten; allein, konnte man sich früher mit der Boussole behelfen, um einen magnetischen Meridian zu ziehen, und diesen Gebrauch rechtfertigen, so wird man jetzt auch irgend eine andre — gleichviel, welche — aber unveränderliche Linie wählen dürfen. Konnte der magnetische Meridian, ungeachtet seiner Veränderlichkeit, zur Festlegung einer Messung empfohlen werden, um wie viel mehr wird dies bei einer andern Linie geschehen können, deren Richtung zwar nicht am Himmel zu lesen ist, deren Unveränderlichkeit sich aber verbürgen läßt.

Eine solche Linie, welche bei einer Messung als Basis dient, worauf sich Winkel und Linien beziehen, und worauf die Länge und Breite einer gemessenen Fläche mit geometrischer Genauigkeit projicirt werden kann, will ich hier, in Ermangelung eines bessern Namens, Normal-Linie nennen. Diese Linie mag für irgend eine Messung willkührlich angenommen werden, so wird sie, wofern sie nur in dieser Messung eine unveränderliche Richtung behält, die Stelle einer wahren Mittagslinie vertreten, folglich auch alle damit verbundene geographische Vortheile weit genauer gewähren, als ein magnetischer Meridian zu erwarten gestattet.

Ohne Zweifel werden diese Vortheile von jedem Geometer eingestanden, und nach dem, was ich oben gesagt habe, würde ich nicht nöthig haben, noch etwas zur Empfehlung des Gebrauchs einer solchen Normal-Linie hinzu zu fügen, wenn ich nicht glaubte, daß damit auch andre Erleichterungen verbunden sind, welche es in Praxi wichtig machen können, eine Methode der Normalen anzuwenden.

Dieses ist der Grund, wodurch ich bewogen bin, in den folgenden Blättern noch einiges über diesen Gegenstand zu sagen; weil ich damit aber nur den Wunsch verbinde, die Sache kompetenten Richtern zur Prüfung vorzulegen, so habe ich mir die möglichste Kürze zur Pflicht gemacht, und nur das Wichtigste berührt, ohne es jedoch wie ich hoffe, an derjenigen Deutlichkeit fehlen zu lassen, wodurch auch jüngere praktische Geometer in Stand gesetzt werden, die Anwendung auf dem Felde selbst zu machen.

Erster Abschnitt.

§. 1.

Die gegebne Erklärung von demjenigen, was hier unter Normal-Linie zu verstehen ist, wird hinreichen zu erkennen, was mit ihrem Gebrauch gemeint seyn kann. Die Richtung derselben mag an sich selbst willkührlich seyn, wofern sie nicht durch andre Rücksichten bedingt oder von den Obern, welche die Messung leiten, vorgeschrieben ist; so wird die Normale doch in jedem Falle die wahre Mittagslinie ersetzen, wenn die Richtung für den ganzen Umfang der Messung unveränderlich ist — oder die Veränderungen darin einem bekannten Gesetze unterworfen sind. Sofern daher die Normale ihrer Richtung nach gewählt oder gegeben ist, wird sich das Azimuth andrer Gegenstände, z. B. die Begränzung eines Vielecks oder ihre Abweichung von der Normale eben so gut messen lassen, als dieses mit Bezug auf den Meridian am Himmel und auf der Erde geschieht. Und dieses ist es auch, wodurch sich die Anwendung der Normalen in der Geodäsie von andern gewöhnlichen Winkelmessungen unterscheidet, daß man nemlich nicht die Winkel, welche von Gränzlinien gebildet werden, sondern die Abweichungen dieser Gränzen von der Normale mißt. Der Gebrauch hiervon schränkt sich begreiflich nicht auf die specielle Vermessung einzelner Grundstücke oder deren Aggregat ein: auch bei größern geometrischen Arbeiten ist er mit eben dem Nuzzen anzuwenden. Der Begriff davon ist, wie ich schon vorhin anführte, von oben genommen, und wird sich auch auf das, näher daran Gränzende erstrecken, wenn er sogar in der entferntern Einzelheit noch brauchbar bleibt.

§. 2.

Die einmal gegebne oder angenommene Richtung der Normale wird im ganzen Umfange einer Messung unveränderlich beibehalten, und an jedem Standpunkte goniometrischer Operationen wird eine, mit der ersten parallele Normale gezogen oder gedacht, wodurch eine vollkommne Gleichförmigkeit in den Verhältnissen der gesammten Abweichungen von der ersten Normale bewirkt wird. Hierin scheint zwar der Begriff dieser letzten Linie sich von dem der Meridiane zu unterscheiden, deren es bekanntlich für jeden Ort, oder jede Reihe von Orten eine eigne giebt. Allein man wird auch leicht übersehen, daß diese Verschiedenheit bei geometrischen Arbeiten auf kleinen Flächen nur verschwindenden Einfluß haben könne; für ausgedehnte Strecken aber ist allerdings eine, jedoch sehr leichte Korrektion nöthig. Auf diesen Umstand werde ich übrigens weiter unten noch zurück kommen, wogegen die Leichtigkeit der Arbeit bei Special-Vermessungen und die große Simplicität der Rechnungsformen unter der Voraussetzung einer völligen Parallelität der Normalen grade das Vorzügliche und Empfehlende der Methode ausmacht, wodurch ich bewogen bin, diese Parallelität beizubehalten, und lieber ein klein wenig wider die strenge Wahrheit zu sündigen, als die Arbeiten und die Rechnungen zu erschweren.

§. 3.

Wenn nun aber Normalen gezogen, und mit einander parallel gelegt werden sollen, so fragt es sich natürlich, wie dieses zu bewirken seyn mögte.

Man kann dazu nun erstlich eine wahre Mittagslinie wählen, wenn dieselbe am Orte der Beobachtung etwa bekannt ist. Dieses ist jedoch sehr selten der Fall, und man kann schon nicht bei Dreiecksreihen des 2. und 3. Ranges — viel weniger aber bei den speciellen Polygonal-Messungen erwarten, auf solche Punkte zu treffen, für welche die Mittagslinie bestimmt ist.

Die Mittagslinie für eine solche specielle Messung selbst, und zwar mit hinreichender Genauigkeit zu ziehen, erfordert einen Aufwand von Vorkehrungen, Instrumenten und Zeit, welche im allgemeinen das Vermögen und die Verhältnisse eines praktischen Geometers übersteigen müßte, wenn es ihm auch im Ernste zugemuthet werden könnte. Leichtere Mittel zur Bestimmung der Mittagslinie, z. B. die Beobachtung der Schatten senkrechter Stifte an horizontalen Kreisen oder andre gnomonische Vorkehrungen sind zu unsicher, um eine erträgliche Genauigkeit zu verbürgen, und die Magnetnadel ist nun gar nicht anzuwenden. Wenn aber auch die Mittagslinie auf irgend einem Wege gezogen wäre, so müßte eben das an jedem Winkelpunkte wiederholt werden, oder die erste Arbeit hätte keinen weitern Nutzen, als den eine jede andre gegebne Richtung der Normale haben würde. In der speciellen Goniometrie scheint daher die Ziehung der Mittagslinien als Normalen nicht füglich gefor-

gefordert werden zu können; aber dieses hindert keinesweges, daß nicht bei solchen Arbeiten eine Normale vorgeschrieben werden könnte, welche mit einer gegebnen Mittagslinie zusammen fällt, was ohne Zweifel sehr nützlich ist, wenn eine Reihe specieller Arbeiten ein richtig zusammenhängendes, wohl orientirtes Ganze ausmachen soll.

Bei größeren geodätischen Arbeiten, wie etwa z. B. bei Triangulationen des ersten Ranges über eine ganze Provinz oder mehrere, wobei die Haupt-Winkelpunkte, als eben so viel geographische Oerter allerdings astronomisch fest gelegt werden sollen, tritt freilich ein andrer Fall ein. Die Kenntniß der Mittagslinien ist nicht blos eine Selbstfolge der geographischen Ortsbestimmung, sondern die Beobachtung der Azimuthal-Winkel wird auch zur Bestimmung der relativen Lage andrer Punkte gegen einen gegebnen ersten Meridian dienen. Bei dergleichen wichtigern Arbeiten liegt es schon in der Natur der Sache, so wie in der erforderlichen astronomischen Genauigkeit, daß die Mittagslinien als Normalen benutzt worden; und die Uebertragung derselben auf die Punkte kleinerer Dreiecknetze wird an sich nicht schwierig, dagegen für die genaue Einpassung der Theile in das Ganze von wesentlicher Erleichterung seyn. — Allein dies ist nicht eigentlich der Gegenstand, womit ich mich hier zu beschäftigen habe, indem ich nur vorzüglich von dem Gebrauch der Normalen bei speciellen Messungen das nothwendigste sagen wollte.

§. 4.

Wenn man eine Reihe von Winkelpunkten hat, von welchen ein, verhältnißmäßig sehr entfernter Gegenstand sichtbar ist, so läßt sich leicht ausmitteln, wiefern die Gesichtslinien von jedem der gegebnen Winkelpunkte nach dem entfernten Gegenstande für parallel untereinander gelten können, oder wie groß die Fehler werden, wenn man die Parallelität jener Gesichtslinien annimmt.

Gesetzt, man hätte eine Winkelreihe, deren ganze Länge in gerader Linie gemessen 300 Ruthen betrüge, in welcher man einen, etwa 2000 Ruthen entfernten Gegenstand sehen könnte, so würde der parallaktische Winkel, unter welchem dieser Gegenstand an beiden Enden der Winkelreihe erscheint, schon beträchtlich seyn. Läge der entfernte Gegenstand mitten vor der Winkelreihe, so würde die Parallaxe $8°34'41,8''$ betragen; befände sich derselbe aber dem einen Ende der Winkelreihe gegenüber, so würde der parallaktische Winkel $8°31'50,77''$ ausmachen.

Hieraus ist nun freilich klar, daß dieser Weg, die Richtung der Normale an jedem Winkelpunkte durch das bloße Hinzielen auf den entfernten Gegenstand zu bestimmen, nicht gewählt werden könne. Mit Hülfe einer leichten Korrektion aber ist das Mittel doch nicht ganz zu verwerfen. Denn wenn die Länge der Winkelreihe $= a$; die Entfernung des Zielgegenstandes $= b$, und man sucht den ganzen parallaktischen Winkel $= \tan\beta = \frac{a}{b}$, theilt denselben in a Theile, und legt dem beobachteten Winkel an jedem Polygonal-Punkte $\frac{1}{a}\beta$ zu (oder zieht diesen Werth davon ab) so wird der Fehler, welcher hierbei noch vorfällt, so klein, daß er bei den gewöhnlichen Special-Vermessungen als verschwindend anzusehen ist. Das Verfahren giebt die Unterschiede der parallaktischen Winkel anfangs zu klein, hernach zu groß (weil die Differenzen der Tangenten Ordinaten einer, gegen die Abscissenlinie erhabnen Kurve sind, und diese Differenzen hier rückwärts gezählt werden) allein die Unterschiede bleiben für kleine Winkel immer unbedeutend, und heben sich am Ende gegenseitig auf. So würde der parallaktische Winkel bei den vorhin gebrauchten Zahlen = 4°17'20,9'', folglich $\frac{1}{a}\beta$ = ,,°1'42,9'' seyn, wohingegen $\frac{1}{2000}$ = tang ,,°1'43,7'', und $\frac{2}{2000}$ = tang ,,°3'26,25'', folglich der Unterschied zwischen diesen beiden Winkeln = ,,°1'42,5'' gefunden wird. Er sollte aber nach der Voraussetzung (daß die Tangenten gleichförmig mit den Bogen wachsen) 1,42,9'' betragen, und diese kleine Verschiedenheit könnte freilich am Ende bemerklich werden, wenn sie immer auf einer Seite läge, und dabei a beträchtlich wäre.

Die Sache verhält sich aber eigentlich so: Fig. 1. sey AC die gerade Ausdehnung der Winkelreihe, Bc die senkrechte Entfernung des Zielgegenstandes, und der Ort der Beobachtung in D oder E; so ist der parallaktische Winkel in D = ABc — DBc, und in E = ABC — EBC. Die Größe dieses Winkels, von C an gerechnet, nimmt für gleiche Theile von CA ab, je weiter E oder D von C entfernt sind. Wenn demnach der angenommene mittlere Werth des Wachsthums der parallaktischen Winkel = $\frac{1}{CA}\beta$ für die, zunächst an C gelegenen Punkte, wie E zu groß ist, so wird er für die letzten, an A gelegenen Punkte zu klein; für die ganze Länge CA aber heben sich diese Differenzen auf.

Wäre AD = 10 = EC, und AC = 150, so würde

tang ABD = tang (ABC — DBC)
= tang (4°17'20,9'' — 4°,,'11,7'')

und daher ABD = ,°17'9,2''. Braucht man hingegen den vorigen mittlern Werth der Zunahme von ABD für jede, in CA enthaltne Einheit, = ,,°1'42,9'', so ist für AD = 10, ABD = ,,°17'7'' also nur noch um 0,2 Sec. zu klein. — Auf gleiche Weise wird ABE = ABC — EBC

$= 4°17'20{,}9'' - \,,°17'11{,}3'' = 4°\,,'7{,}6''$; wogegen man $\frac{140}{150}.\ \beta = 140 \times \,,°1'42{,}9'' = 4°\,,'6''$ also um 3,6 Sec. zu klein findet. Diese anfänglichen Unterschiede (von C an gerechnet) werden also kleiner, je näher man nach A kommt, welches begreiflich die Folge der wachsenden Tangenten ist. Ueberhaupt sind aber alle diese Unterschiede für die gewöhnliche geometrische Praxis so gering, daß sie der Beobachtung entgehen.

§. 5.

Es kommt also darauf an, 1. die Entfernung eines Zielgegenstandes von der graden Linie durch die Endpunkte der Winkelreihe, und 2. die senkrechte Entfernung der verschiedenen Winkelpunkte von der durchgehenden graden Linie zu kennen. Alsdann erhält man an dem senkrechten Projektions-Punkte jedes Polyg.-Winkels die Richtung der Normalen mit der ersten parallel, indem man auf den entfernten Gegenstand zielt, und für m Ruthen Entfernung von dem ersten Observations-Orte den mittlern parallaktischen Winkel $= \frac{m}{a}\beta$ hinzulegt. Dadurch wird eine Normale erhalten welche von der vollkommnen Parallelität mit der, am ersten Winkelpunkte durch den Zielgegenstand gelegten, weniger abweicht, als selbst gute Instrumente mit Sicherheit beobachten lassen.

Die vorige Figur kann noch dazu dienen, dieses deutlich zu machen. Wenn A d f g e c eine Winkelreihe, und B ein entfernter Zielpunkt, D, F, G, E Projektionen der Winkelpunte d, f, g, e, folglich AD, AF, u. s. w. das jedesmalige m für AC = a, so ist $DM \# AB$, wofern $BDM = ABD = \frac{m}{a}\beta$.

Aber diese Bemerkung, daß der parallaktische Winkel $\frac{m}{a}\beta$ nicht für den Beobachtungsort d, sondern für dessen Projektion D gilt, führt zu der Nothwendigkeit, mit dem oben angegebnen Verfahren noch eine Korrektion zu verbinden.

§. 6.

Wenn AD eine Polygonal-Seite, AB die Richtung der Normale an A durch den Zielpunkt B, $BAC = \gamma$, $DAC = \alpha$; so ist dBA, oder d″BA der parallaktische Winkel $= \frac{m}{a}\beta$ für die Projektionspunkte d, oder d″. Allein am Beobachtungsorte D oder D″ wird B nach einer andern Richtung gesehen, als von d oder d″, d. h. der parallaktische Winkel DBA, oder D″BA ist dem dBA oder d″BA nicht gleich, sondern um den Winkel DBd, oder DBd″ davon verschieden. Dieser Winkel des Unterschieds sey $= \varphi$, so hat man wenn $CAB = \gamma$:

$$\text{tang } DBA = \frac{AD \text{ Sin } (\gamma \pm \alpha)}{AB \mp AD \text{ Cos } (\gamma \pm \alpha)}$$

$$dBA = \frac{m}{a}\beta$$

$$\text{tang } (DBA - dBA) = \text{tang } DBd = \text{tang } \varphi =$$

$$\frac{\text{tang } DBA - \text{tang } dBA}{1 + \text{tang } DBA.\ \text{tang } dBA} =$$

$$\frac{AD \text{ Sin } (\gamma \pm \alpha) - (AB \mp AD.\text{ Cos } (\gamma \pm \alpha)).\ \text{tang} \frac{m}{a}\beta.}{AB \mp AD.\text{ Cos } (\gamma \pm \alpha) + AD.\text{ Sin } (\gamma \pm \alpha) \text{ tang } \frac{m}{a}\beta.}$$

Nennt man der Kürze wegen:

$$AD \text{ Sin } (\gamma \pm \alpha) = M,$$

$$AB \mp AD \text{ Cos } (\gamma \pm \alpha) = N;$$

so ist $\text{tang } \varphi = \dfrac{M - N \text{ tang } \frac{m}{a} \beta.}{N + M \text{ tang } \frac{m}{a} \beta.}$

Giebt dieser Ausdruck etwas positives, so ist der parallaktische Winkel an D größer als an d, und der Winkel φ muß von $\frac{m}{a} \beta$ abgezogen werden, um durch den Rest $= \frac{m}{a} \beta - \varphi = BDP$, $DP \# AB$ zu erhalten. Wird gegentheils tang φ negativ, so ist $-$ tang $\varphi =$ tang $(4 R - \varphi)$ und $BD''P'' = \frac{m}{a} \beta + \varphi$.

Mit Benutzung dieser Korrektion kann man sich an jedem Standpunkte einer Winkelreihe in die Normale $DP \# AB$ einrichten, indem man auf B zielt, und den Winkel BDP, oder $BD''P''$ aus der vorigen Formel bestimmt, an die Gesichtslinie DB legt.

Hierin läge nun an sich nichts Schwieriges, denn man könnte wohl Tafeln entwerfen, darin BDP für jeden Fall im Voraus berechnet wäre. Allein es sind zur Benutzung solcher Tafeln Data erforderlich, die sich in der ausübenden Goniometrie nicht so leicht ausmitteln lassen. Man muß kennen:

1) die senkrechte Entfernung des Zielpunkts B von der Hauptlinie AC,
2) den Winkel $CAB = \gamma$,
3) den Winkel $DAC = \alpha$,
4) die Länge der Seite AD.

In Rücksicht auf die letztere ist noch zu bemerken, daß wenn AD nicht die erste Polygonal-Seite von A an, sondern eine andre, z. B. ge Fig. 1. wäre, man für AD die ganze Länge Ae in grader Linie gemessen, nehmen, und den Winkel eAC = α bestimmen müßte. Ueberhaupt erscheint jedoch die Sache in vielen Fällen zu verwickelt, um bei speciellen polygonometrischen Arbeiten mit Nutzen angewandt zu werden.

Bei größern geodätischen Arbeiten wäre das Verfahren um so eher anzuwenden, als man dabei z. B. bei einem Triangularnetz des ersten Ranges über eine ausgedehnte Fläche ohne Zweifel suchen wird, die geographischen Orte der Haupt-Dreieckpunkte zu bestimmen. Nimmt man nun bei einer solchen Arbeit den Meridian eines ersten Punkts als Normal-Linie für die ganze Messung an, so kann B in der vorigen Figur den Pol bedeuten, und an jedem andern Orte wie D, wird sich der Winkel DBA oder die Lage des Meridians von D gegen den von A, bestimmen lassen, welchem dann der Winkel BDP gleich ist. In solchen Fällen aber wird das Dreieck ABD als ein sphärisches betrachtet werden müssen, darin AD auf Gradmaaß gebracht, und AB die Polhöhe ist.

Weil dabei der Winkel BAD bekannt ist, so wird der Ausdruck sehr einfach, nemlich:

$$\text{Cot. } ABD = \frac{\text{Cot. } A \text{ Sin } (AB - Q)}{\text{Sin } Q.}$$

$$\text{wobei Cot. } Q = \frac{\text{Cot. } AD''}{\text{Cos. } A.}$$

Da es jedoch in gegenwärtiger Schrift nicht meine Absicht ist, von dergleichen größern Unternehmungen zu reden, so lasse ich die so eben berührte Materie bis zu einer schicklichern Gelegenheit ausgesetzt seyn.

§. 7.

Besser als die bisherigen Wege zur Bestimmung der Normallinie und deren Parallelen wird sich für specielle Messungen das folgende einfache Verfahren passen.

Wenn AdkgeC wiederum eine Winkelreihe vorstellt, so wird im Anfange derselben A, die Normale AB entweder willkührlich bestimmt, oder durch einfließende Rücksichten bedingt. Nach dieser Bestimmung wird nun die Abweichung von AD, oder der Winkel BAd ohne Zweifel gemessen, so genau als das goniometrische Geräth, seiner Einrichtung nach, mit oder ohne Repetition gestattet. Geht der Geometer demnächst nach d, so wird er von d eben so gut nach A sehen können als von A nach d, und er kann daher das Instrument auf A einrichten. Gesetzt, er hätte hierbei die Alhydade der Diopter oder des Fernrohrs auf Null am Limbus gestellt (wiewohl dieses keineswegs nothwendig ist) und drehete dann eben diese Alhydade, bei unverrückten Stande des Instruments, um einen Winkel = (2 R — BAd) = AdM nach der Richtung gegen B, so wird dM ⧣ AB und demnach ist dM die Normale für den Punkt d.

Die Sache ist äußerst einfach und spricht sich selbst aus: Fehler können nur solche dabei vorfallen, welche in der Unvollständigkeit des Instruments oder der Schwäche der Sinne liegen, und diese werden bei keiner Beobachtung vermieden. Daher kann ich mich zur weitern Erklärung darauf beschränken, das Verfahren für einen bestimmten Fall in der Kürze zu beschreiben.

§. 8.

Das gebrauchte Instrument sei ein Repetitions-Kreis oder ein solcher Theodolit, worauf die Winkel durch den Nonius bis auf einzelne Minuten zu lesen sind. Der Winkel BAd sey durch Repetition = 97°10′12″ gefunden, so daß der Winkel AdM = 180° — 97°10′12″ = 82°49′48″ seyn soll.

Wenn man nun in d angekommen ist, und das Instrument gehörig über dem Stationspunkte aufgestellt hat, so löse man zuerst die unterste Klemmschraube und bringe A genau in die Schare des Versicherungsrohrs. Hat man sich von dieser genauen Einrichtung überzeugt, so befestige man das Versicherungsrohr sorgfältig, löse darauf die obere Klemme nebst der Alhydade, bringe die letztere genau auf Null — oder auch auf einen andern Theilstrich des Limbus, von welchem man etwa anfangen will, zu zählen — und führe den Kreis so weit herum, daß auch das obere Fernrohr genau auf A einzielt. Man befestige nunmehr den Kreis durch Anschrauben der obern Klemme, löse dagegen die Alhydade, und führe sie soweit herum nach der Richtung dM, daß der Index auf 82°49′48″ des Limbus zeigt. — Der Centrations- Kollimations- oder andre Fehler des Instruments, werden hier bei Seite gesetzt, oder als berichtigt angenommen. Weil man jedoch nach der Voraussetzung, auf dem Instrument keine Secunden angeben kann, so suche man möglichst genau 48 Sec. = $\frac{4}{5}$ Min. am Nonius zu schätzen. Ist dieses geschehen, und man hat sich durch das Versicherungsrohr von der unverrückten Stellung des Instruments überzeugt, so befestige man die Alhydade, richte in angemessener Entfernung ein Signal Z in das Fadenkreuz des obern Fernrohrs — wozu aber ein scharfbegränztes Zeichen, z. B. das Tableau einer Nivellir-Latte nöthig ist, — und befestige dies Signal aufs beste in lothrechter Stellung.

Nach dieser ersten Bestimmung des Abweichungswinkels, löse man die Alhydade, und führe dieselbe zurück nach A, wobei der Index wieder auf den Nullpunkt des Limbus zeigen wird, wofern die Lage des Versicherungsrohrs noch beweiset, daß das Instrument nicht verrückt worden. Es ist nunmehr klar, daß der Winkel AdZ eben so gut wie jede andre Abweichung zweier Objekte, mit dem Instrumente repetirt werden könne. Demnach repetire man den Winkel AdZ so lange, bis der ganze Bogen nur noch Minuten, keine Secunden enthalten soll, das ist in gegenwärtigem Falle fünf mal. Alsdann muß der ganze Bogen $= (82°49'48'') \, 5 = 414°9' \times$ betragen, wofern Z richtig ausgesteckt ist. Trifft dieses ein, d. h. lieset man nach der fünften Repetition auf dem Limbus wirklich $360° + 54°9'$ so ist auch der Winkel AdZ $=$ AdM genau $82°49'48''$. In einem andern Falle ist bei dem ersten Ausstecken von Z oder der Normallinie dM ein Fehler vorgefallen; z. B. man hätte bei der Repetition des Winkels AdZ den ganzen Bogen $= 414°12'$, also um $3'$ zu groß gefunden, so wäre der Winkel AdZ um $\frac{3}{5}$ Min. $=$ 36 Sec. zu groß gemacht. Diesen Fehler durch Verrückung des Signals Z zu verbessern, könnte in der Ausübung sehr schwierig seyn, und man würde Gefahr laufen, dabei in einen andern Fehler zu verfallen, vielleicht so groß oder gar noch größer als derjenige, den man berichtigen will. Man würde die vorige Behandlung von neuem vornehmen, und auf solche Weise vielleicht sehr lange arbeiten müssen, wofern man nicht in der Ungewißheit bleiben wollte, ob ein Fehler begangen worden, und wie groß er sey. Daher ist es ohne Zweifel besser, den ersten Winkel AdZ gar nicht zu berichtigen, und dieses kann auch, der Genauigkeit der Arbeit unbeschadet, füglich unterbleiben. Denn da man nunmehr weiß, daß der Winkel AdZ um 36 Sec. zu groß gemacht worden, so wird dieser Fehler, anstatt ihn von AdZ abzuziehen, jeder anderweitigen Beobachtung in d hinzugelegt, wofern die beobachteten Abweichungen nach dem, von

A abgewandten Bogen bestimmt werden, wie z. B. d f; oder abgezogen, wenn die Abweichung in dem, nach A gewandten Bogen gemessen wird, wie z. B. d f′. Gesetzt man fände Z d f = 54°19′13″, so wäre derselbe in der That noch um 36″ größer, folglich 54°19′49″; oder, wenn Z d f′ = 206°30′40″ gefunden wäre, so würde derselbe in der That 200°31′16″ seyn. Hätte man hingegen den Winkel Z d f nach dem andern, A zugewandten Bogen = 153°29′20″ gefunden, so müßten davon 36 Sec. abgezogen, folglich das wahre Maaß des Winkels = 153°28′44″ genommen werden.

Dies alles hat, wie man leicht sieht, nicht die geringste Schwierigkeit, ist auch, wenn die geforderte Genauigkeit überhaupt Repetitionen nothwendig macht, nicht weitläuftiger, als jede andre repetirende Winkelmessung.

§. 9.

Wollte man in d etwa nichts anders messen, als den Winkel M d f, so würde man sich die Arbeit noch erleichtern können. Denn wenn man, ohne Rücksicht auf die Normale, den Winkel A d f gradezu mißt, und dabei dasjenige Verfahren beobachtet, welches der vorgeschriebne Grad der Genauigkeit erfordert, alsdann aber von dem gefundenen Bogen A d f den Winkel A d M = 2 R — B A D abzieht, so bleibt der Bogen M d f übrig, und man wird dabei um nichts fehlen, wofern sonst richtig gearbeitet ist.

Alsdann wird im Grunde nichts anders geschehen, als was bei jeder Polygonal-Messung auch geschieht; allein obgleich dieses in dem angenommenen Falle in Rücksicht auf den einzelnen Polygonwinkel gewissermaßen wahr ist, so läßt sich daraus doch wohl noch nicht schließen, daß die Methode der

Normalen überall nur eine andre Art, die Winkel anzuschreiben, seyn mögte.

Wenn die Normallinien auch keinen andern Nutzen hätten, als daß sie die Messung an allen Punkten richtig orientiren, dieselben folglich grade dahin setzen, wo sie geographisch liegen; so würde schon dies allein nicht wenig, es würde eben das seyn, was in der allgemeinen Ortsbeschreibung durch die Meridiane, und mehr als was bei speciellen Messungen durch die Boussole bewirkt wird. Gleichwohl beschränken sich die Vortheile des Normalen nicht hierauf, sondern sie kürzen die Auflösung goniometrischer Aufgaben beträchtlich ab, erleichtern die Arbeiten bei polygonometrischen Messungen, und dienen zur größern Genauigkeit derselben, indem sie leichtere Mittel an die Hand geben, eine große Anzahl von Linien durch Rechnung zu bestimmen. Hiervon wünsche ich einige Beweise zu geben.

Zweiter Abschnitt.

§. 10.

In der praktischen Geometrie kommen häufige Fälle vor, wo man sich an unbestimmten Orten befindet, deren Lage gegen andre, bereits bekannte (gemessene oder gegebne) Punkte ausgemittelt werden soll. Dabei sind aber nicht immer solche Stücke in den Figuren bekannt, wodurch die Auflösungen der Aufgaben aus einfachen geometrischen oder analytischen Sätzen hergeleitet werden können, und die Verwikkelung, welche durch den Mangel jener konstituirenden Dinge verursacht wird, macht die Auflösungen der hierher gehörigen Fragen mehr oder weniger schwierig.

Unter denen, welche sich mit diesen Gegenständen beschäftigt haben, um die dabei vorkommenden Schwierigkeiten wegzuräumen, war, wie ich glaube, Lambert der erste, der die Sache in analytischer Allgemeinheit behandelte, wiewohl er auch noch viel durch geometrische Konstruktionen zu bewirken suchte. Für den einfachsten dieser Fälle will ich Lambert's Auflösung hierher setzen, so wie sie in seinen Beiträgen Thl. 1. Pag. 75 gegeben ist, indem ich nur zur schnellern Verständlichkeit die, dort ausgelassenen Substitutionen mit beifüge.

Es sey Fig. 3. ABC ein ganz gegebnes Dreieck, darin $AB = a$, $BC = b$ und der Winkel $ABC = \gamma$. Man befinde sich in D, und könne die Winkel $ADB = \alpha$; $BDC = \beta$ messen, aus welchen Stücken die Lage von D gegen die gegebnen Punkte A, B, C, bestimmt werden soll.

In den Dreiecken ABD und BCD ist BD =

$$\frac{a. \operatorname{Sin} BAD}{\operatorname{Sin} \alpha} = \frac{b. \operatorname{Sin} BCD}{\operatorname{Sin} \beta}$$

oder

$$a. \operatorname{Sin} \beta : b. \operatorname{Sin} \alpha = \operatorname{Sin} BCD : \operatorname{Sin} BAD$$

man nenne $BAD = x$, so ist

$$BCD = 4R - (\alpha + \beta + \gamma) - x$$

$$4R - (\alpha + \beta + \gamma) = d$$

und

$$a. \operatorname{Sin} \beta : b. \operatorname{Sin} \alpha = \operatorname{Sin} (d - x) : \operatorname{Sin} x$$

so auch:

$$(a. \operatorname{Sin} \beta + b. \operatorname{Sin} \alpha) : (a. \operatorname{Sin} \beta - b. \operatorname{Sin} \alpha)$$
$$= (\operatorname{Sin} (d - x) + \operatorname{Sin} x) : (\operatorname{Sin} (d - x) - (\operatorname{Sin} x)$$

nun ist aber:

$$\operatorname{Sin} (d - x) + \operatorname{Sin} x = 2 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} d. \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} (d - 2x)$$
$$\operatorname{Sin} (d - x) - \operatorname{Sin} x = 2. \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} d. \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2} (d - 2x)$$
$$\operatorname{Cosin} (d - x) + \operatorname{Cos} x = 2. \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} d. \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} (d - 2x)$$

Setzt man nun die hier gefundenen Werthe von $\mathrm{Sin}\,(d-x) + \mathrm{Sin}\,x$ und $\mathrm{Sin}\,(d-x) - \mathrm{Sin}\,x$ in die obige Gleichung, und dividirt beide Glieder durch den Werth von $\mathrm{Cosin}\,(d-x) + \mathrm{Cos}\,x$ so erhält man

$$(a.\,\mathrm{Sin}\,\beta + b.\,\mathrm{Sin}\,\alpha) : (a.\,\mathrm{Sin}\,\beta - b.\,\mathrm{Sin}\,\alpha) = \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(d-2x)}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}d.\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(d-2x)} : \frac{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}d.\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(d-2x)}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}d.\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(d-2x)}$$

$$= \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}d \;:\; \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(d-2x)$$

woraus denn $\mathrm{tang}\,(\frac{1}{2}d - x)$ folglich auch x berechnet werden kann.

Wenn noch ein zweiter Punkt E, oder mehrere dergleichen unbestimmte Orte ihrer Lage nach gegen ABC fest gelegt werden sollen, so geräth man auf noch mehr zusammengesetzte Ausdrücke, welche bei Lambert a. a. O. §. 111 ff. — 270 ff. nachzusehen sind. Auch andre Schriftsteller haben sich mit diesen Fällen beschäftigt, und die Sache bald so, bald anders angesehen, ohne wie es scheint, zu einfacheren Resultaten gelangt zu seyn. Die Einführung eines Hülfswinkels giebt unter manchen Umständen merkliche Erleichterungen, und man findet davon in dem lesenswerthen Werke des Hrn. Dr. Schulz-Montanus[1]) mehrere sehr artige und elegante Beweise, z. B. Thl. 2. §. 121. 122.

§. 11.

Das Vorstehende habe ich nur mitgetheilt, um zur Vergleichung zu dienen; jetzt will ich zeigen, um wie viel leichter alle Aufgaben dieser Art zu lösen sind, obgleich von dem Dreieck ABC selbst wenig oder auch nichts bekannt wäre, wofern nur eine Normale an A, B, C, gezogen ist.

---

1) Systematisches Handbuch der gesammten Land- und Erdmessung ꝛc. von A. Schulz, Dr. ꝛc. Berlin 1819.

Es seyen nun A, B, C, Fig. 4. wieder drei Punkte, an denen die Normalen MB, QA, NC, gezogen worden, und D ein vierter Ort, dessen Lage gegen die erstern bestimmt werden soll. Da es keinem Zweifel unterworfen ist, daß man auch an D die Normale OK $\#$ MB $\#$ NC legen, und die Winkel ODB, ODC messen könne, so hat man in dem Dreieck BCD die Winkel

$$CDB = ODB - ODC$$
$$CBD = MBC - ODB$$

demnach auch den dritten Winkel $BCD = 2R - (CDB + CBD.)$

Der Ort D ist demnach geometrisch gegeben, und wenn nur noch etwa eine Seite, z. B. BC bekannt wäre, so würde auch der graphische Ort des Punktes D zu bestimmen seyn, indem alsdann die Seiten BD oder DC durch einen einfachen trigonometrischen Satz auszumitteln wären. Eine Zweideutigkeit, wie sie in dem Ausdruck des vorigen § wegen der positiven oder negativen Werthe der goniometrischen Ausdrücke eintreten kann, ist hier, wie man leicht sieht, gar nicht zu erwarten.

§. 12.

Ganz auf gleiche Weise würde sich auch jeder andre Ort E, oder jede beliebige Zahl von Orten ihrer Lage nach gegen ABC bestimmen lassen, ohne daß es nöthig wäre, eine weitläuftigere Rechnung deshalb anzustellen, wenn nur die Lage der Normale an diesen Punkten gegeben ist. Auch ist es hinreichend, wenn an jedem zu bestimmenden Orte zwei bereits bekannte sichtbar sind, und es bedarf deren weder 3 noch 4 oder mehr, wie sonst bei ähnlichen Aufgaben, z. B. aus drei gegebnen Orten die Lage von drei andern zu finden, wohl vorausgesetzt wird. Bei allen diesen Aufgaben kommt es vorzüglich auf die Erfindung des einen Winkels wie BCD oder ABD an, und dieser ist vermöge der gegebnen Lage der Normalen schon bekannt, wie man im vorigen § bemerkt hat. Hierin liegt die Auflösung des Problems, und man kann daher sagen, daß die Normalen alle derartige Fragen beantworten. Wo jedoch die Lage der Normalen nicht bekannt ist, da behalten jene analytischen Auflösungen allerdings ihren Werth, und es kann hier daher nicht die Meinung seyn, leztere ganz überflüssig zu machen, sondern nur, die Erleichterung zu zeigen, welche aus dem Gebrauch der Normalen fließt.

Daß ich mich hier auf die Bedenklichkeiten nicht eingelassen habe, welche bei den hierher gehörigen Problemen aus der Beschaffenheit der etwa zu spitzen oder stumpfen Winkel u. d. gl. eintreten, wird wohl keiner besondern Entschuldigung bedürfen, so wenig, als daß ich dabei keine Distinktion besonderer Fälle statuirt habe, wie sie großentheils zum Ueberfluß vorgetragen zu werden pflegt. Es ist kein Leitfaden oder Handbuch, welches ich hier liefere, sondern bloß eine Betrachtung über eine Meß-Methode, und ein motivirter Vorschlag dazu. —

§. 13.

Zu mehrerer Erläuterung und zur Benutzung bei vielen Vorfällen der Ausübung will ich den Gebrauch der Normalen für einige der häufigsten Aufgaben, welche bei den Messungen zu lösen sind, im Folgenden anzeigen.

In Fig. 5. sey D ein Winkelpunkt, den man jedoch von B und C weder sehen, noch erreichen kann; es wird verlangt, den Winkel BDC nebst den Seiten BD, CD zu bestimmen.

Man lege durch D in beliebiger Richtung die Linie AG, und bezeichne die Endpunkte A, G, welche

welche von B und C sichtbar sind, und messe die Linie ADG. In B und C, an welchen Punkten die Normale gezogen ist, ziele man auf A und G, schreibe die gefundenen Abweichungen an, wodurch also die Normale an A und G gleichfalls bestimmt ist, und beobachte entweder in A oder in G die Abweichung der Linie AG von der Normale.

Durch dieses Verfahren sind folgende Größen bekannt geworden:

Die Winkel: $HCG = MGC$
$KBG = NGB$
$HCA = OAC$
$KBA = PAB$
$NGA = OAG$

Die Seiten: AD, DG, folglich AG und man hat nunmehr in dem Dreieck AGC, die Seite AG, nebst den Winkeln

$$CGA = 2R - NGA + HCG = a$$
$$CAG = NGA - HCA = b$$
$$ACG = HCA - HCG = c$$

$$\text{folglich } CG = AG. \frac{\text{Sin b.}}{\text{Sin c.}}$$

und in dem Dreieck CDG.

Die Seiten GC, GD, nebst dem Winkel $CGD = a$,

$$\text{folglich: Cot. } CDG = \frac{DG}{CG.\ \text{Sin a}} \pm \text{Cot. a}$$

$$\text{oder tang } CDG = \frac{CG\ \text{Sin a}}{DG \pm CG\ \text{Cos a}}$$

$$= \frac{AG.\ \text{Sin b. Sin a}}{DG.\ \text{Sin c} \pm AG.\ \text{Sin b. Cos a}}$$

und die Seite

$$CD = CG. \frac{\text{Sin a}}{\text{Sin CDG}}$$

Ganz auf dieselbe Weise findet man in dem Dreieck BDG.

$$\text{tang}\,BDG = \frac{AG.\ \text{Sin}\ BAG.\ \text{Sin}\ BGA}{DG.\ \text{Sin}\,ABG \pm AG.\ \text{Sin}\,BAG.\ \text{Cos}.\ BGA}$$

$$= \frac{AG.\ \text{Sin}\ e.\ \text{Sin}\ d.}{DG.\ \text{Sin}\ g \pm AG.\ \text{Sin}.\ e\ \text{Cos}.\ d.}$$

wenn d, e, g die angezeichneten Winkel bedeuten, und die Seite

$$BD = BG\ \frac{\text{Sin}\ a}{\text{Sin}\ BDG.}$$

Der ganze Winkel

$$BDC = CDG + BDG.$$

§. 14.

Das vorstehende Verfahren begreift eine Anzahl einzelner Fälle in sich, welche als eben so viel besondre Probleme pflegen vorgetragen zu werden; und ich werde einige davon hier anführen, um zu zeigen, wie sie in dem Vorhergehenden enthalten sind.

1. In der Fig. 6. ist D ein Winkelpunkt, auf welchen zwar von C, aber nicht von B zielen kann, dagegen ist ein andrer Punkt A von B, D und C aus sichtbar, und die Entfernungen AB, AC, AD, können gemessen werden.

Da man nun, ausser den Seiten, nach der Voraussetzung auch noch die Winkel BAD, CAD, CDA messen kann, so ist offenbar, daß alles gegeben sei um die Winkel CDA, BDA, folglich deren Summe CDB nebst den Seiten BD, CD zu finden.

Man hat:

$$\text{Cot.}\ ABD = \frac{AB}{AD.\ \text{Sin}\,BAD} \pm \text{Cot.}\ BAD$$

$$\text{Cot.}\ ACD = \frac{AC}{AD.\ \text{Sin}\,CAD} \pm \text{Cot.}\ BAD$$

$$< BDC = BAC - (ABD + ACD)$$

die Seiten: $BD = AD. \frac{\text{Sin } BAD}{\text{Sin } ABD}$

$$CD = AD. \frac{\text{Sin } CAD}{\text{Sin } ACD}$$

Ohne alle diese Dinge zu messen, giebt der vorige § Anleitung zur kürzern Auflösung. Denn da nach der Voraussetzung von C nach D gezielt, folglich die Normale an D gezogen werden kann, so ist damit schon der Winkel CDA gegeben, und es kommt nur noch auf den andern Winkel BDA an. Da man jedoch nach §. 13 die Winkel ABG, BGA und BAG kennt, so ist auch wie dort: die Seite

$$BG = AG. \frac{\text{Sin } BAG}{\text{Sin } ABG}$$

$$\text{tang } BDG = \frac{AG. \text{Sin } BAG. \text{Sin } BGA}{DG. \text{Sin } ABG \pm AG. \text{Sin } BAG. \text{Cos } BGA}$$

und die Seiten BD, CD, werden wie dort durch ganz einfache Analogien bestimmt.

2. Ein zweiter Fall wird häufig angenommen, da man nemlich von C nach D, aber nicht nach A, hingegen von B nach A, aber nicht nach D zielen kann. Dieser Fall ist indessen bereits in dem vorigen mit enthalten; (sofern die Normalen gebraucht werden) denn der Winkel CAG ist in den vorigen Ausdrücken zur Erfindung des fehlenden gar nicht vorgekommen. Man reicht daher auch hier mit dem vorigen völlig aus.

Nach der sonst gewöhnlichen Auflösungs-Art muß man die Seiten AB, AD, CD, und die Winkel BAD, ADC messen.

Dann steht die Rechnung so:

$$(AB+AD):(AB-AD) = \text{tang } \tfrac{1}{2}(ABD+ADB) : \text{tang } \tfrac{1}{2}(ABD-ADB)$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(ABD-ADB) = \frac{AB-AD}{AB+AD} \times \text{tang } \tfrac{1}{2}(ABD+ADB)$$

und weil $ABD + ADB = 180° - BAD$,
so ist

$$ADB = \tfrac{1}{2}(180° - BAD + (ADB - ABD))$$
$$ABD = \tfrac{1}{2}(180° - BAD - (ADB - ABD))$$

demnach:

$$BDC = ADB + ADC$$
$$DB = AD.\frac{\text{Sin } BAD}{\text{Sin } ABD}.$$

3. Zuweilen wird wohl noch vorausgesetzt, daß weder A noch D von B aus gesehen werden können, und das heißt nun im Grunde weiter nichts, als daß der Punkt A unrichtig gewählt worden. Denn in einem solchen Falle gäbe es zwischen den Seiten und Winkeln des Dreiecks ABD gar keine Relation, folglich auch keine Möglichkeit, etwas daraus zu schließen. Man muß also die Punkte, etwa wie G, G′ so wählen, daß die Dinge des §. 13 bekannt werden, welches wirklich noch sehr wenig ist, und allemal möglich seyn wird, wofern man nicht in undurchdringlichen Wäldern arbeitet, wo man denn überhaupt mit Winkelmessern allein schwerlich vorwärts kommen würde. Man muß sich in solchen Fällen schon an die unmittelbare Messung der Linien halten.

Herr ꝛc. Däzel [1]) der so viel Verdienst um die Polygonometrie erworben hat, räth unter solchen Umständen an, eine Zwischen-Station zwischen D und B zu nehmen, sehr nahe an der Richtung DB, und so viel möglich in der Mitte zwischen D und B, wie etwa a, Fig. 6. Wenn alsdann die Seiten aB, aD nebst dem Winckel BaD gemessen sind, so soll der Winkel aDB aus der Analogie

$$aD : aB = aBD : aDB$$
$$aD + aB : aB = (aBD + aDB) : aDB$$
$$= (2R - BaD) : aDB$$

1) Ueber die zuverlässigste Methode, große Waldungen zu messen u. s. w. — S. 30 ff. 2. Aufl. 1819.

gefunden werden. Um die Seite BD zu finden, soll aus a ein Perpendikel auf BD gefällt, und die dadurch auf BD bestimmten Stücke Db, Bb aus den bekannten Seiten aD, aB und den Winkeln aDB, aBD berechnet werden.

Dieses Verfahren ist aber nur annähernd, nicht methodisch, weil die Voraussetzung, daß sich die Winkel verhalten wie die gegenüber liegenden Seiten, nicht streng ist, desto weniger, je weiter a aus der Mitte zwischen beiden Punkten B, D, und von der Richtung BD entfernt liegt. Da die letztere nicht bekannt ist, so kann man sich von der Erfüllung der andern Forderungen nicht überzeugen, und die gebrauchte Analogie könnte in dem Falle merklich von der Wahrheit abweichen. Auch werden die Winkel aBD, aDB sehr klein, und hierin liegt wieder ein Grund zur Furcht, bei dem Verfahren zu fehlen.

Unterdessen kommen dergleichen Fälle unstreitig, besonders bei der Messung von Waldparcellen vor, wo der Geometer sich an keine Methode halten kann, sondern nur suchen muß, die nöthigen Stücke zu messen. Wenn es aber doch gemessen seyn muß, so mögte ich noch eben so lieb den Punkt a als eine Station ansehen, aus aD, cD und aDc die Seite aC, dann auf ähnliche Weise BC, und endlich aus BC, CD und BCD die Seite BD nebst dem Winkel BDC berechnen.

Das ist allerdings umständlicher, aber da es zu Hause geschehen kann, so wird ein wenig mehr Rechnung nichts ausmachen, da man so viel richtiger arbeitet.

Ich will die hierher gehörigen Fälle nicht mehr häufen, um zu einem andern Satze überzugehen, der unter mancherlei Umständen noch leichter anzuwenden ist.

§. 15.

ABCDE — Fig. 7., sei eine Reihe von Winkelpunkten, daran die Normale gezogen, und die Abweichungen α, β, γ, δ, ε, ζ, ϑ gemessen, auch die Seiten BD, DE, EC, auf irgend einem Wege bekannt sind.

Alsdann ist:

$$\text{tang}\, EBH = -\frac{BC \operatorname{Sin} \beta + CD \operatorname{Sin} \delta + DE \operatorname{Sin} \zeta}{BC \operatorname{Cos} \beta + CD \operatorname{Cos} \delta + DE \operatorname{Cos} \zeta}$$

$$\text{und } BE = \frac{BC. \operatorname{Sin} \beta + CD \operatorname{Sin} \delta + DE \operatorname{Sin} \zeta}{\operatorname{Sin} EBH.}$$

Diese Ausdrücke sind in vielen Fällen anzuwenden, davon einige hier kurz angeführt werden sollen.

1. In den Figuren 7 und 8, ist ABE ein Umfangswinkel, der aber von B nicht angezielt werden kann: man soll den Winkel ABE und die Seite BE bestimmen.

Ausserhalb der Linie BE können die Punkte C und D an einer, oder an beiden Seiten von BE bestimmt, und die Seiten BC, CD, DE gemessen werden. In beiden Fällen ist der Winkel EBH, und die Seite BE ganz nach den vorigen Ausdrükken zu berechnen, daher auch ABE = ABH + HBE bekannt.

2. Die Polygonalwinkel A, B, C, D, Fig. 9., machen einen Theil einer Figur aus, in welcher die Seite BC nicht zu erreichen, auch der Winkel B nur von A und C angezielt werden kann: man soll den Winkel B, nebst der Seite BC bestimmen, wenn die Linie AC bekannt ist.

Man sieht sogleich, daß der Winkel B durch das Anzielen von A und C aus bekannt geworden, weil $\beta + \gamma = \delta + \varepsilon = 2$ R, folglich $\gamma + \delta$

$= 4R - (\beta + \varepsilon)$, und $B = 4R - (\gamma + \delta)$
$= \beta + \varepsilon$. Auch ist:

$$AC = \frac{AB.\ \mathrm{Sin}\ \beta + BC.\ \mathrm{Sin}\ \delta}{\mathrm{Sin}\ CAN}$$

demnach

$$BC = \frac{AC.\ \mathrm{Sin}\ CAN - AB.\ \mathrm{Sin}\ \beta}{\mathrm{Sin}\ \delta}$$

3. Wenn unter den vorigen Voraussetzungen auch noch die Seite AB unbekannt, dagegen die Diagonale BD auf irgend einem Wege gegeben ist, so sieht man leicht, daß das vorige Verfahren auch hier völlig ausreicht. Denn es ist wiederum:

$$BD = \frac{BC.\ \mathrm{Sin}\ \varepsilon + CD.\ \mathrm{Sin}\ \vartheta}{\mathrm{Sin}\ BDP}$$

und

$$BC = \frac{BD.\ \mathrm{Sin}\ BDP - CD.\ \mathrm{Sin}\ \vartheta}{\mathrm{Sin}\ \varepsilon}$$

auf gleiche Weise

$$AB = \frac{AC.\ \mathrm{Sin}\ CAN - BC\ \mathrm{Sin}\ \delta}{\mathrm{Sin}\ \beta}$$

Der Winkel ABC ist aber, wie vorher, bekannt.

Hierbei ist es offenbar, daß es in der Beantwortung der vorgelegten Fragen keinen Unterschied machen könne, wenn auch die unbekannten Seiten nicht neben einander, sondern in einem Perimeter zerstreuet liegen. Die Sache bleibt genau dieselbe, und es scheint daher ganz überflüssig, besondere Probleme daraus zu machen, wie man es hin und wieder findet.

4. Wenn die Diagonalen wie vorhin, nicht gegeben, aber die Seiten BC, DE eines, übrigens

bekannten Polygons gefunden werden sollen, so dienen dazu ebenfalls die vorigen Ausdrücke.

In Fig. 10. ist vermöge der Voraussetzung, daß die Figur bekannt sei, auch die Lage von D bekannt, oder kann allemal gefunden werden, z. B., durch die bei A und F beobachteten Winkel NAD, PFD, und die Seite AF welche jederzeit zu finden ist, wenn der Theil des Perimeters FGHA bekannt ist. Es ist nemlich:

$$AF = \sqrt{\frac{(GF \operatorname{Cos}\mu + HG \operatorname{Cos}\rho + HA \operatorname{Cos}\rho)^2 +}{(GF. \operatorname{Sin}\mu + HG \operatorname{Sin}\rho - HA \operatorname{Sin}\rho)^2}}$$

Demnach sind auch die Längen DY und DZ bekannt. Nun ist

$$DY = DC. \operatorname{Sin}\varepsilon + BC \operatorname{Sin}\gamma + AB \operatorname{Sin}\alpha$$
$$DZ = DE. \operatorname{Sin}\zeta + EF \operatorname{Sin}\gamma$$

daher

$$BC = \frac{DY - (DC. \operatorname{Sin}\varepsilon + AB \operatorname{Sin}\alpha)}{\operatorname{Sin}\gamma}$$

$$DE = \frac{DZ - EF \operatorname{Sin}\eta}{\operatorname{Sin}\zeta}$$

5. Der Theil eines Perimeters ABC .... G Fig. 11. ist in Winkeln und Seiten bekannt, und es soll die Gränzlinie BF ihrer Richtung und Größe nach gefunden werden.

Die gesuchten Dinge sind also: die Linie BF nebst den Winkeln CBF und EFB.

Man hat:

$$tg\,FBH = -\frac{BC. \operatorname{Sin}\gamma + CD \operatorname{Sin}\delta + DE \operatorname{Sin}\varepsilon + EF \operatorname{Sin}\zeta}{BC. \operatorname{Cos}\gamma + CD. \operatorname{Cos}\delta + DC. \operatorname{Cos}\varepsilon + EF \operatorname{Sin}\zeta}$$

Daher

$$CBF = 2R - (\gamma + FBH)$$
$$EFB = 2R - (\zeta + FBH)$$

$$BF = \frac{BC.\,Sin\,\gamma + CD.\,Sin\,\delta + DE.\,Sin\,\varepsilon + EF\,Sin\,\zeta}{Sin\ FBH}$$

6. Es kann bei Polygonal-Messungen wohl der Fall seyn, daß die Schwierigkeiten des Terrains nicht verstatten, an allen Winkelpunkten die Abweichungen der Seiten entweder unmittelbar, oder nur durch Anzielen von den nächsten Stationen zu bestimmen, deren Kenntniß jedoch zur Verzeichnung der Figur nöthig ist. Außer den, hierher gehörigen, bereits angegebenen Fällen, nehme ich noch an:

a) daß in dem Theil eines Perimeters ABCD die beiden Winkel bei B und C nebst der Seite BC fehlen. Fig. 12.

Weil die Punkte A und D, folglich DH als bekannt anzusehen ist, so wird auch:

$Bn = BC\,Sin\,\beta$ dadurch gefunden, daß man

$$Bn = DH - (AB\,Sin\,\alpha + CD\,Sin\,\delta)$$

setzt. Auch ist

$$Cn = \frac{DH}{tang\ HAD} + CD.\,Cos\,\delta - AB.\,Cos\,\alpha$$

und

$$tang\ CBn = \frac{Cn}{Bn}$$

nun ist

$$\beta = R - CBn$$
$$\gamma = R + CBn$$

folglich

$$ABC = 2R + \alpha - \beta = R + \alpha + CBn$$
$$BCD = 2R + \delta - \gamma = R + \delta - CBn$$

und die Seite

$$BC = \frac{Bn}{Sin\,\beta} = Bn.\ Sec.\ CBn$$

Anmerkung. In dem Ausdruck für Bn habe ich die Tangente des Winkels HAD eingeführt, weil der übrige Theil der Figur zwischen A und D nicht in Betrachtung gezogen ist. Durch diesen, hier fehlenden Theil der Figur wird die Breite des Punkts D, oder AH bestimmt, und ich habe tang AHD hier nur dafür in jenem Ausdruck substituirt.

b) Wäre die Richtung der Seiten AB und CD oder die Abweichung α und δ nicht gegeben, so fehlen eigentlich 4 Winkel nebst einer Seite, und das ist ein wenig zu viel. Der Fall ist auch schwer zu denken; denn wenn AB und CD gemessen werden können, so müssen auch ihre Richtungen bekannt seyn. Aber diese beiden Seiten können auf andern Wegen ausgemittelt seyn, und der gedachte Fall kann also doch eintreten, wie er denn auch in einigen Schriften betrachtet wird. In etwas muß man jedoch zu Hülfe kommen, und da nimmt man z. B. an, daß von A zwar nicht nach B, wohl aber nach C, und von D nach B gesehen und gemessen werden könne. Alsdann aber ist $CN = AC.\,\text{Sin}\,NAC$,

und $BM = BD.\,\text{Sin}\,MDB$,

weil auch, vermöge der, in der Figur gegebnen Lage von A und D, die Länge des Punktes D, oder DH bekannt seyn muß, so hat man:

$$HD - BM = BO$$
$$HD - CN = CP,$$

folglich $\text{Sin}\,\alpha = \dfrac{BO}{AB}$

$$\text{Sin}\,\delta = \frac{CP}{CD}$$

dann aber wieder

$$Bn = BM + CN - HD$$
$$= BD.\,\text{Sin}\,PDB + AC.\,\text{Sin}\,NAC - HD$$
$$Cn = \frac{DH}{\text{tang}\,NAD} + CD.\,\text{Cos}\,\delta - AB.\,\text{Cos}\,\alpha$$

woraus denn die Winkel ABC, BCD, und die Seite BC durch das vorhin angegebne Verfahren gefunden werden.

c) Wofern die unbekannten Stücke nicht neben einander in der Figur liegen, sondern zerstreut, z. B. in Fig. 13 die Seite BC, nebst den Winkeln CDE und EFG gesucht werden; so ist dies kein besonderer Fall, wie ich schon vorhin bei ähnlicher Gelegenheit bemerkt habe. Anstatt aber schwieriger zu werden, ist die Sache hier im Gegentheil weit leichter, sofern man die Methode der Normalen braucht, und löset sich beinahe selbst auf.

Denn da die Winkel C, E und G gegeben, folglich ihre Abweichungen γ, ε, ζ und ϑ beobachtet sind, so sind die beiden Winkel d und f zugleich und nothwendig bekannt.

Es ist nemlich $CDE = 4R - (\gamma + \varepsilon)$
und $EFG = 4R - (\zeta + \vartheta)$

Die Zweideutigkeit, ob diese Winkel ein- oder ausgehend sind, hebt sich durch die Ausdrücke selbst. Denn da die Abweichungen allemal außen an der Figur beobachtet werden, so ist der nicht gemeßne Winkel z. B. CDE eingehend, wenn die beiden Abweichungen $(\gamma + \varepsilon) > 2R$, und umgekehrt, ausgehend, wie CD′E wofern $(\gamma + \varepsilon) < 2R$.

Die fehlende Seite BC zu berechnen, ist schon früher gezeigt worden.

d) In einem, übrigens bekannten Vieleck sind die drei, auf einander folgenden Winkel C, D und E, Fig. 13. nicht gemessen werden, und sollen durch Rechnung ausgemittelt werden.

Weil die Winkel B und F bekannt sind, so sind auch die Richtungen BC und FE gegeben, d. h. die Abweichungen β und η sind gemessen. Es kommt daher nur noch darauf an, die Abweichungen γ und ε zu finden.

Da auch die Seiten BC und FE gegeben sind, so sind die Längen und Breiten der Punkte C und E oder ihre Projektion auf AG und AH bekannt. Daher ist Ae — Ac eine bekannte Größe, und man hat

$$CD.\ \mathrm{Sin}\,\gamma + ED\ \mathrm{Sin}\,\varepsilon = ec = Ae - Ae.$$

Ebenfalls ist MO — MN = NO bekannt, und

$$ED.\ \mathrm{Cos}\,\varepsilon - CD\ \mathrm{Cos}\,\gamma = NO.$$

Hieraus kann man nun schon den Sin. oder Cos. von γ oder ε entwickeln, allein die Sache wird etwa weitläuftig. Weit kürzer kommt man auf folgende Art dazu. Man denke sich das Dreieck CDE durch die grade Linie EC geschlossen, so hat man in demselben, weil

$$EC = \sqrt{ec^2 + NO^2}$$

alle drei Seiten bekannt, und wenn deren Summe = s, so erhält man

$$\mathrm{Sin}\,CED = \sqrt{\frac{s.\,(s-2CD.)\,(s-2ED.)\,(s-2EC)}{2.\,ED.\,EC.}}$$

$$\mathrm{Sin}\,CEO = \frac{ec}{EC}$$

$$\text{und } \varepsilon = R + CED + CEO.$$

Ganz auf dieselbe Weise findet man auch den Winkel γ. Man kann aber noch etwas kürzer den

$$\mathrm{Sin}\,CDE = \sqrt{\frac{s.\,(s-2CD.)\,(s-2ED.)\,(s-2EC)}{2.\,CD.\,ED}}$$

nehmen, und daraus

$$\gamma = 4R - (CDE + \varepsilon) \text{ finden.}$$

Wofern die fehlenden Winkel nicht neben einander, sondern zerstreut im ganzen Vieleck liegen, so ist es offenbar, daß die einzelnen Winkel, vermöge des Gebrauchs der Normalen, bereits gefunden sind. Denn wenn ein Polygonal-Punkt von zweien, daneben liegenden Winkelpunkten angezielt wird, und die dabei beobachteten Abweichungen sind = Φ und Ψ

so ist der angezielte, außen an der Figur liegende Polygonal-Winkel allemal $= 4R - (\varphi + \psi)$

Man kann hieraus folgern, daß es bei der Anwendung der Normal-Methode hinreiche, an jedem zweiten Winkel des Perimeters einen Standpunkt zu nehmen, um dennoch alle Winkel zu messen. Dies ist nun auch freilich an sich ganz richtig, und gewährt in vielen Fällen der Ausübung eine sehr willkommne Erleichterung; dem unerachtet wird man doch nicht aus bloßer Bequemlichkeit jeden zweiten Winkelpunkt überschlagen dürfen, indem die Messung, selbst überflüssig scheinender Winkel zur völligen Richtigkeit einer geodätischen Arbeit sehr vieles beiträgt, und daraus Korrektions-Mittel entstehen, welche sonst schon schwieriger seyn können, aufzufinden. Man würde die wahren Vorzüge der Goniometrie verkennen, wenn man sich dabei auf die nothdürftige Messung der Winkel, welche eine Figur konstituiren, beschränken wollte: kann man sich durch goniometrisches Verfahren die Messung von einer Menge Linien, wobei so häufige Fehler vorgefallen, ersparen, so müssen hingegen die Winkel mit desto größerer Schärfe bestimmt werden, wenn man nicht die gewonnenen Vortheile selbst aus den Händen geben will.

§. 16.

Das Zentriren der Winkel findet bei goniometrischen Arbeiten so häufig statt, daß ich darüber einen einzigen Satz hierher setzen will, obgleich der Gegenstand eigentlich nicht hierher gehört.

Der Winkel BDC, Fig. 14 ist gemessen: derselbe soll in A — in gegebner Richtung und Entfernung = AD — zentrirt werden.

Um dieses zu bewirken nehme man einen zweiten Standpunkt irgendwo inner- oder ausserhalb der Figur z. B. in E, jedoch so, daß E in gegebner oder zu messender Richtung und Entfernung von D, auch in C und B sichtbar sei. Der Winkel EDC und die Linie ED sind also bekannt.

Wenn man nunmehr den Winkel DEC mißt, so sind in dem Dreieck CDE die zwei Winkel an D und E, folglich auch der dritte an C, nebst der Seite DE bekannt, und man hat:

$$DC : DE = \text{Sin } DEC : \text{Sin } DCE$$

$$DC = \frac{DE. \text{ Sin } DEC}{\text{Sin } DCE}$$

dann aber in dem Dreieck ADC, aus den beiden Seiten DE, DC, nebst dem Winkel ADC

$$\text{Cot. } ACD = \frac{DC}{AD. \text{ Sin } ADC} \mp \text{Cot. } ADC$$

$$\text{tang, } ACD = \frac{AD. \text{ Sin } ADC}{DD \mp AD. \text{ Cos } ADC}$$

$$= \frac{AD. \text{ Sin } ADC. \text{ Sin } DCE.}{DE. \text{ Sin } DEC \mp AD \text{ Sin } DCE. \text{ Cos. } ADC.}$$

Auf dieselbe Weise erhält man, wenn der Winkel DEB gemessen wird, in dem Dreieck BDE die Winkel an D und E, folglich auch den dritten an B, nebst der Seite DE; deshalb ist auch hier

$$DB = \frac{DE. \text{ Sin } DEB}{\text{Sin } EBD}$$

und dann in dem Dreieck ABD

$$\text{tang. } ABD = \frac{AD. \text{ Sin } ADB}{DB \mp AD. \text{ Cos. } ADB}$$

$$= \frac{AD. \text{ Sin } ADB \text{ Sin } DBE}{DE. \text{ Sin } DEB \mp AD. \text{ Sin } DBE. \text{ Cos } ADB}$$

Da nun die beiden Winkel DCA und DBA dem Unterschiede der beiden Winkel BDC und BAC gleich sind, so hat man den zentrirten Winkel

$$BAC = BDC \mp (ABD + ACD)$$

wenn nemlich A innerhalb der Schenkel BD, DC liegt, folglich größer als D ist, so werden die beiden Winkel ABD und ACD zu BDC addirt, oder das positive Zeichen wird gebraucht.

In solchen Fällen, da die Winkel auf die gedachte Weise zentrirt werden sollen, kann es sich wohl treffen, daß ein Winkel, z. B. EDB größer als 180° ist, oder daß das Dreieck BDE an einer andern Seite der Linie DE liegt als das Dreieck EDC.

Allein die vorigen Ausdrücke bleiben nicht minder gültig, und man erhält sie durch die Rechnung eben so wie vorhin.

Weil aber der Winkel ADC, in Bezug auf eben den Winkel des vorigen Falls, eigentlich der erhobne (4R — ADC) ist, so wird der Sinus dieses Winkels verneint, =

$$-\ \mathrm{Sin}\ ADC = \mathrm{Sin}\ (4R - ADC)$$

und deshalb wird der ganze Ausdruck für tang D′CA verneint. Nun ist aber — tang ω entweder = tang $(2R - \omega)$ oder = tang $(4R - \omega.)$ d. h. der gefundne Winkel erscheint, mit Bezug auf eben den Winkel, welcher vorhin positiv genommen war, als eine negative Größe, und muß daher abgezogen werden. Demnach wird jetzt der zentrirte Winkel

$$BA'C = BDC \mp (A'BD - A'CD).$$

Man kann sich übrigens auch aus der Figur leicht von der Sache überzeugen. Denn man hat den äußern Winkel

$$\begin{aligned}\lambda &= BDC + A'CD\\ &= BA'C + A'BD\end{aligned}$$

demnach ist

$$BDC + A'CD = BA'C + A'BD$$

$$\text{und } BA'C = BDC + A'CD - A'BD$$
$$= BDC - (A'BD - A'CD).$$

Diese Bemerkung macht nun, daß der Ausdruck für den zentrirten Winkel die allgemeine Form erhält:

$$BAC = BDC \mp (ABD \pm ACD)$$

Man wird leicht erkennen, daß die gegenwärtige Auflösung der Aufgabe, einen Winkel zu zentriren, alle andre Fälle, welche sonst häufig als besondre Aufgaben vorgetragen werden, mit einschließt. Denn die Lage von E ist ganz willkührlich genommen, und läßt daher alle Bedingungen zu, welche man daran knüpfen mögte, z. B. daß E in der Verlängerung einer Gesichts-Linie, wie AB, oder in der Linie AB oder deren Verlängerung liegen soll, u. s. w.

Bei dieser Materie nimmt man aber gewöhnlich auch noch die Entfernungen AB, AC als bekannt an, wodurch die Rechnung etwas weniges kürzer wird. Indessen ist es selten der Fall, daß diese Entfernungen würklich bekannt sind, und man pflegt sich dann wohl mit einer Schätzung zu behelfen, wobei man jedoch in merkliche Irrthümer gerathen kann, welche auf die Rechnung erheblich einfließen. Es gehört schon gute Uebung dazu, eine Länge von mehrere 100 Schritten auf ebnem Felde annähernd zu schätzen; schwerer wird die Schätzung auf abhängenden oder aufsteigenden Boden; allein eine Linie von mehrern 100 Schritten über Berg und Thal läßt sich auf die Weise ganz und gar nicht erträglich bestimmen. — Aus der Größe des Sehwinkels eines entfernten Gegenstandes ließe sich eher etwas schließen, wenn man im Stande wäre, diesen Winkel zu schätzen, und dabei die wahre Größe des Gegenstandes kennte. Beides ist nicht oft der Fall, und wenn man auch den scheinbaren Durchmesser des Gegenstandes durch Messung bestimmt, so bleibt doch der wahre fast immer unbekannt. — Aus der Fortpflanzung des Schalls ist auch nur dann etwas über die Entfernungen herzuleiten, wenn gewisse Data vorhanden sind,

welche

welche in der praktischen Geodäsie gewöhnlich fehlen. — Wollte man sich endlich gar auf die Angaben der Entfernungen, die von Ortbewohnern eingezogen werden können, verlassen, so fällt es in die Augen, wie sehr man fehlen, und wie unsicher eine darauf gegründete Rechnung werden könne.

Aus diesen Gründen habe ich geglaubt, daß die vorstehende Auflösung der Aufgabe, bei welcher die Entfernungen der Zielobjekte nicht als bekannt angesehen, sondern gesucht werden, hier einen Platz verdienen könnte, da sie zumal um nichts schwerer, und sehr wenig weitläuftiger ist, als die gewöhnliche. Allein ich habe doch bei dieser Darstellung keine Rücksicht auf die Normallinie genommen, weil man bei goniometrischen Arbeiten oft unerwartet in die Lage versetzt wird, den wahren Winkelpunkt nicht benutzen zu können, und es dann schwer hält, an dem gewählten exentrischen Punkte eine richtige Normale zu legen. Auch kann es Fälle geben, wo die Reduktion excentrischer Winkel ohne Hülfe der Normalen geschehen muß, wie z. B. wenn an den Punkten B und C noch keine Normale gelegt wäre, u. dergl.

Dritter Abschnitt.

§. 17.

Nach der bereits gegebnen Erklärung von dem Begriffe, welcher hier mit der Normallinie verbunden wird, und nachdem die nützliche Anwendung solcher Normalen an einigen oft vorkommenden Fällen im vorhergehenden Abschnitt gezeigt worden, darf ich wohl hoffen, über die Sache selbst allgemein verständlich zu seyn, und ich werde daher jetzt dazu übergehen können, einige goniometrische Folgerungen und deren Gebrauch in der ausübenden Meßkunst darzustellen.

Wenn an einem Winkelpunkte eine Normallinie gezogen wird, so entstehen daraus nothwendig vier Winkel, welche zwischen dieser Normallinie und den Schenkeln des Winkels liegen. Der ursprünglichen Ableitung der Normalen (von den Meridianen) zufolge, und um die eben angedeuteten Winkel durch die Benennung selbst zu bestimmen, mag es mir erlaubt seyn, diese Winkel: Abweichungen (Azimuth) zu nennen, und sie dadurch hier von andern Triangular- oder Polygonal-Winkeln zu unterscheiden. Von den vier Abweichungen aber, welche die Schenkel eines Winkels oder die Seiten einer Figur mit der Normale bilden, werden im Folgenden, wie bisher, nur diejenigen beiden in Betrachtung gezogen, welche außen an dem Winkel, oder außen an der Figur liegen.

Wenn an zwei auf einander folgenden Winkelpunkten eine Normale gezogen, und die Abweichung, welche die zwischen beiden Winkelpunkten gezogne Gränze mit der Normale an einem Punkte macht, beobachtet ist, so muß die Abweichung eben derselben Gränze mit der Normale am andern Punkte, ebenfalls bekannt seyn; denn die Normalen sind mit einander parallel, und die Summe zweier solche Abweichungen ist demnach = 2 R. Daher auch umgekehrt; wenn die Abweichung einer Gränzlinie von der Normale an einem Polygonal-Punkte bekannt ist, so ist auch die Normale an dem nächstfolgenden Winkelpunkte gegeben, denn die Gränzlinie hat an diesem zweiten Endpunkte eine Abweichung von der Normale, welche das Komplement der Abweichung am ersten Punkte zu 2 R, macht.

Wenn die Normalen an zwei Polygonalpunkten gelegt, und die Abweichungen beobachtet sind, welche von den Gränzlinien nach einem dritten (etwa unzugänglichen) Winkelpunkte gebildet werden, so ist auch dieser dritte Winkel gemessen. Denn die Summe der Abweichungen an demselben ist das Komplement jener ersten, bekannten Abweichungen zu 4 rechten Winkeln.

Auch ist jeder Winkel einer Figur das Komplement der Abweichungen an diesem Winkelpunkte zu 4 rechten Winkeln.

Wenn die Normale mit einer Gränzlinie parallel ist, oder dieselbe deckt, so ist die Abweichung dieser Gränzlinie entweder = o, oder = 2 R, je nachdem man sich die Figur an der Normallinie so, oder so gedreht denkt, oder je nachdem die Richtung beschaffen ist, in welcher man die Abweichungen an einer Figur mißt.

Nach diesen vorläufigen Erinnerungen, die an sich leicht verständlich sind, und zu deren etwaiger Erläuterung man irgend eine Figur wählen oder selbst entwerfen kann, gehe ich zur Anwendung derselben über.

§. 18.

Die drei Gränzpunkte **A, B, C Fig.** 15. irgend einer Figur sollen in Grund gelegt werden; man kann aber nicht von einem Punkte zum andern, auch nach B ganz und gar nicht kommen, sondern nur hinsehen. Die Richtung der Normallinie ist aber für die ganze Figur anderweitig gegeben.

Man lege an **A** die Normale **Q A** in der gegebnen Richtung, und beobachte die Abweichung QAB = α. Eben so lege man die Normale NG an C, und beobachte NCB = δ. Alsdann sind die Abweichungen der Gränzen BA, BC, von der Normallinie an B, oder $MBA = 2R - \alpha$; $MBC = 2R - \delta$, und der Polygonal-Winkel $ABC = 4R - (MBA + MBC) = 4R - (2R - \alpha + 2R - \delta) = \alpha + \delta$

Hierdurch sind nun die Punkte A, B, C ihrer Lage nach, geometrisch gegeben, und wenn die Gränzen AB, BC selbst, oder ihr Verhältniß zu einander — kurz, wenn der Maaßstab gegeben ist, so können die drei Punkte auch verzeichnet werden.

Die wirkliche Ziehung der Normalen QA, MB, NC ist bei dieser Operation keine nothwendige Bedingung. Denn da die Lage der Normallinie schon anderweitig; z. B. durch die bekannten Abweichungen QAY, NCZ gegeben ist, so kann man die Abweichungen QAC, NCB schon bestimmen, indem man die ganzen Winkel YAB, ZCB (nemlich den erhabenen) beobachtet. Zieht man hiervon die gegebnen Abweichungen QAY, ZCB ab, so sind die Reste gleich den Abweichungen QAB, NCZ $= \alpha$ und δ. Aus diesen aber erhält man die Abweichungen MBA, MBC, und demnach auf den Winkel ABC' auf die vorhin gedachte Weise.

Diese Bemerkung ist in praktischer Hinsicht nicht ohne Erheblichkeit, da die wirkliche Ziehung der Normalen an jedem Standpunkte zuweilen ihre bedeutenden Schwierigkeiten hat. Hiervon ist schon im 1sten Abschnitt das nothwendigste angeführt worden. Die Unterlassung dieser Arbeit kann jedoch auf der andern Seite fürchten lassen, daß in der richtigen Messung, oder der richtigen Angabe der Abweichungen Fehler, oder Versehen vorfallen mögten, die nicht bemerkt würden, und es ist daher nöthig, hier etwas über die Art, wie sich dergleichen Fehler entdecken, hinzuzufügen.

Gesetzt also, es sei in A ein Fehler vorgefallen, entweder in der Messung des Winkels oder der Lage der Normale durch unrichtige Bestimmung der Abweichungen, so wird dieser Fehler in jedem Falle dadurch ausgedrückt, daß man annimmt, die Normale habe eine, von ihrer wahren wahren Richtung verschiedene Lage, z. B. qA erhalten.

In diesem Falle wird der Winkel qAB kleiner gemessen, als er wirklich ist, nemlich kleiner als QAB, und indem das falsche Maas, in Voraussetzung der richtigen Lage von qA auf die wahre Normale QA bezogen wird, erhält die Gränze AB die Lage Aa. Würde hierauf in C richtig gearbeitet, folglich NCB seinen wahren Werth behalten, so würde B nach a fallen, und das Verhältniß der Seiten Aa : aC würde gestört werden. Wenn demnach dieses Verhältniß = AB : BC gegeben wird, so erscheint der begangne Fehler in der Winkelmessung durch die Verschiedenheit dieser Verhältnisse.

Auch ohne das Verhältniß der Seiten AB : BC als bekannt anzunehmen, erhellet der Fehler aus der Winkelmessung selbst. Denn wenn man in B, oder jetzt vielmehr in a die Normallinie am legt, oder denkt, so kann dieses nur in Bezug auf die an A gelegte qA geschehen, und man muß am $\#$ qA, nicht $\#$ QA legen.

An dieser falschen Normale wird nun die Abweichung aC beobachtet oder gelegt, und dieselbe wird $= maB < NCB$ (oder auch größer je nach der Beschaffenheit des ersten Fehlers an A) gemacht oder gefunden. Hierin aber liegt das Mittel, den Fehler zu entdecken.

Denn wenn richtig gearbeitet ist, folglich am $\#$ NC, so hat man.

$$amC = PCA = 2R - (aCm + maC)$$

und $maC = 2R - (PCA + aCm)$

auch ist

$$maC = CAa + AaC - PCA.$$

Da nun die Winkel an C oder A, und a gemessen sind, so findet man in den vorstehenden Ausdrücken den Werth, welchen maC haben soll, wofern richtig gearbeitet ist. Wird nun für maC ein andrer Werth gefunden, als der vorstehende Ausdruck giebt, so ist am nicht parallel mit NP, und es muß ein Fehler vorgefallen seyn, dessen Größe sich eben durch die Vergleichung ergiebt. In der Voraussetzung nun daß bei C richtig gearbeitet sey, muß der Fehler in A und a zu suchen seyn.

In dem vorhin bemerkten Falle, daß aC auf BC fällt, kann unter gewissen Umständen eine Zweideutigkeit entstehen, wobei es unentschieden bleibt, ob ein Fehler vorgefallen sei, weil nemlich alsdann $aCm = BCA$. Diese verschwindet jedoch wieder, wenn man die Rechnung nach der andern Seite führt und auf die Abweichungen an A bezieht. Man hat — immer in Voraussetzung der richtigen Arbeit

$$amA = OAC = 2R - (maA + aAm)$$
$$maA = 2R - (OAC + aAm)$$

so auch

$$maA = AaC + aCA - OAC.$$

In beiden Fällen ergiebt sich also durch bloße Addition und Subtraktion sowohl das Daseyn als die Größe des begangenen Fehlers.

§. 19.

Wenn zwei Gränzen in AB, AC Fig. 16., eine Neigung gegen einander, und zugleich gegen eine dritte willkührlich gezogene Linie MN haben, so entstehen daraus an der letztern vier Abweichungen, davon zwei außen an der Neigung oder dem Winkel liegen, wie α und β, und zwei andre innerhalb der Neigung wie δ und ε.

Die erstern betrachten wir hier und sagen: der Sinus des, von beiden Gränzen gebildeten Winkels

BAC ist gleich dem Sinus der Summe der beiden Abweichungen, welche dem Winkel entgegen stehen, oder

$$\text{Sin } BAC = \text{Sin } (\alpha + \beta).$$

So lange die Gränzen AB und AC die Lage gegen einander behalten, daß beide Abweichungen α und β auf eben derselben Seite von MN liegen, so ist es für sich klar, daß $\alpha + \beta = 2R - BAC$; denn sie sind entweder Wechselwinkel der beiden Dreieckswinkel, wozu BAC den dritten ausmacht, oder Nebenwinkel welche mit ABC an einer graden Linie liegen, und demnach ist der Satz in jedem Falle richtig.

Wenn man sich aber denkt, daß AC sich um A bewege, und etwa die Lage Ac erhalten habe, so rückt die Abweichung β mit der Seite fort, und gelangt dadurch auch die andre Seite der Linie MN oder deren Verlängerung, etwa wie γ, derjenigen entgegen gesetzt, an welcher α liegt. Alsdann ist die Sache nicht so grade zu deutlich.

Nennt man die Lage von α und β in Beziehung auf MN positiv, so ist klar, daß die Lage von γ in eben der Beziehung negativ sey. Was ein negativer Winkel sei oder bedeuten könne, braucht hier nicht weiter erörtert zu werden; aber es leuchtet ein, daß er allem entgegengesetzt ist, was von einem positiven Winkel gesagt werden kann. Sind demnach Sinus und Kosinus eines positiven Winkels positiv, so müssen diese Funktionen eines negativen Winkels auch negativ seyn. Indem nun $-\gamma$ statt $+\beta$ gebraucht wird, kann man jedoch nicht $\alpha - \gamma$ statt $\alpha + \beta$ schreiben; denn γ soll nicht abgezogen werden, sondern der, in sich negative Winkel soll addirt werden.

Da nun $\mathrm{Sin}\,(\alpha + \beta) = \mathrm{Sin}\,\alpha.\,\mathrm{Cos}\,\beta + \mathrm{Sin}\,\beta.\,\mathrm{Cos}\,\alpha$, so wird man in diesem Ausdruck $-\gamma$ so einführen müssen, daß dessen Funktionen ebenfalls verneint werden. Auf solche Weise erhält man:

$$\mathrm{Sin}\,BAC = -\mathrm{Sin}\,\alpha.\,\mathrm{Cos}\,\gamma - \mathrm{Sin}\,\gamma.\,\mathrm{Cos}\,\alpha$$
$$= -(\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\gamma + \mathrm{Sin}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\alpha)$$

Dieses ist nun $= -\mathrm{Sin}\,(2\,R + (\alpha + \gamma))$

oder auch $= -\mathrm{Sin}\,(4\,R - (\alpha + \gamma))$

welches allemal $= \mathrm{Sin}\,(\alpha + \gamma)$.

Daher ist in jedem Falle, auch wenn β negativ ist, dennoch $\mathrm{Sin}\,BAC = \mathrm{Sin}\,(\alpha + \beta)$. Wären beide Winkel negativ, so würde man noch immer denselben Ausdruck erhalten.

Man könnte etwa auch so sagen: der Sinus des Winkels BAC sei dem Sinus der Summen beider Abweichungen δ und ε gleich, aber entgegen gesetzt, oder

$$\mathrm{Sin}\,BAC = -\mathrm{Sin}\,(\delta + \varepsilon)$$

Denn da $BAC + \delta + \varepsilon = 4R$,

so ist $\mathrm{Sin}\,BAC = \mathrm{Sin}\,(4R - (\delta + \varepsilon))$

$= -\mathrm{Sin}\,(\delta + \varepsilon)$

weil aber $\delta = 2\,R - \alpha$

$\varepsilon = 2\,R - \beta$

folglich $-\mathrm{Sin}\,(\delta + \varepsilon) = -\mathrm{Sin}\,(4R - (\alpha + \beta))$

so ist wieder

$$\mathrm{Sin}\,BAC = -\mathrm{Sin}\,(\delta + \varepsilon) = \mathrm{Sin}\,(\alpha + \beta)$$

und die Sache wird dadurch nicht modificirt.

§. 20.

Um mit mehrerer Deutlichkeit zu übersehen, wie der Sinus von BAC, er sei nun hohl oder erhaben, unter allen Umständen dem Sinus der äußern Abweichungen gleich sei, setze man nach und nach für β die verschiedenen Werthe, wodurch eine Abänderung bewirkt werden könnte, nemlich:

$(R - \alpha)$; o oder $- 2R$; $- \alpha$; $-(2R - \alpha)$; $-(2R + \alpha)$; in dem Ausdruck

$\text{Sin } BAC = \text{Sin } \alpha . \text{Cos } \beta + \text{Sin } \beta . \text{Cos } \alpha .$

Man erhält:

1. für $\beta = (R - \alpha)$

$\text{Sin } BAC = \text{Sin } \alpha^2 + \text{Cos } \beta^2 = 1 = r$ d. h., BAC ist ein rechter Winkel, wie auch nothwendig, wenn $\alpha + \beta = R$, wie die Voraussetzung angiebt.

2. Für $\beta = o$, oder $= - 2R$

$\text{Sin } BAC = \text{Sin } \alpha . 1 - o = \text{Sin } \alpha$, welches also anzeigt, daß $BAC = \alpha$, oder auch $= (2R - \alpha)$; beides richtig, weil in beiden Fällen $AC \#$ MN, oder AC auf MN fällt.

3. Für $\beta = - \alpha$

$$\text{Sin } BAC = \text{Sin } \alpha . \text{Cos } \alpha - \text{Sin } \alpha . \text{Cos } \alpha$$
$$= o$$

d. h. AB und AC decken einander, oder auch, sie liegen in einer graden Linie.

Dies ist auch nothwendig, wenn $cnN = \vartheta$, weil alsdann α und ϑ Scheitelwinkel sind, welches voraussetzt, daß $BA \# cA$, oder was einerlei ist, daß sie zusammen eine grade Linie ausmachen.

Daher ist in diesem Falle $BAB = o$, oder $BAc = 2R$.

4. Für $\beta = -(2R - \alpha)$

$$\text{Sin } BAC = \text{Sin } \alpha \text{ Cos } \alpha + \text{Sin } \alpha \text{ Cos } \alpha$$
$$= 2 \text{ Sin } \alpha . \text{Cos } \alpha$$
$$= \text{Sin } 2 \alpha$$

$$= \quad \mathrm{Sin}\,(\alpha + \beta)$$
$$= - \mathrm{Sin}\,(4\,R - (\alpha + \beta))$$

d. h. BAC ist ein stumpfer Winkel, hohl oder erhaben, dem an 4 rechten Winkeln noch $\alpha + \beta = 2\,\alpha$ fehlt, weil in dem Falle Ac eben so viel unter MN liegt, als AB darüber liegt.

5. Für $\beta = -(2\,R + \alpha)$

$$\mathrm{Sin\,BAC} = \mathrm{Sin}\,\alpha.\ \mathrm{Cos}\,\alpha - \mathrm{Sin}\,\alpha.\ \mathrm{Cos}\,\alpha$$
$$= 0$$

weil nemlich AC so weit um A herum gekommen ist, daß Ac auf AB fällt, daher BAC $= 4\,R$, oder auch $= 0$.

6. Bisher sind die Werthe von β bald positiv, bald negativ, aber immer nur in Beziehung auf die Lage gegen MN genommen. Man kann sich aber auch denken, daß die Abweichung β an sich selbst verneint werde, sofern nemlich der Bogen, welcher das Maas derselben ausdrückt, demjenigen der Richtung nach entgegengesetzt ist, womit α gemessen wird. Dann liegen die Winkel in einander, wie z. B. wenn AC die Lage APc hat und dabei das Maas der Abweichung nach dem Bogen NQ geschätzt wird, während die Größe von α nach dem Bogen QB (in entgegen gesetzter Richtung von NQ) gemessen ist.

Dergleichen geschieht, bei der so eben angedeuteten Ansicht der Sache, 1. zwischen Nr. 2 und 3; denn um β von dem Werthe $= 0$ zu dem $= -\alpha$ zu bringen, muß Ac sich in einer Richtung NQ bewegen, welche der QB entgegen gesetzt ist. 2. Zwischen Nr. 4 und 5, da β, um von dem Werthe $-(2\,R - \alpha)$ zu dem andern $-(2\,R + \alpha)$ zu gelangen, nothwendig durch $2\,R$, d. h. durch 0 gehen, folglich nach dem Durchgange verneint werden muß, wenn der vorherige Werth positiv war.

In beiden Fällen erhält man

$$\text{Sin BAC} = - \text{Sin } (4\text{ R} - (\alpha - \beta)).$$

Diese Fälle, da die beiden Abweichungen in einander fallen, gehören zwar der Strenge nach nicht mehr zur Frage, sondern erscheinen nur in der analytischen Entwickelung; allein sie sind keineswegs unmöglich oder nur idealisch, wie wir weiter unten Gelegenheit haben werden zu bemerken, da es sich denn zeigt, wie nützlich dergleichen analytische Betrachtungen seyn können, wenn gleich nicht sogleich einleuchtet, wozu sie dienen. Uebrigens sind jene Fälle noch immer in der allgemeinen Formel

$$\text{Sin BAC} = \text{Sin } (\alpha + \beta)$$

mit enthalten, weil darin keine Bedingung vorkommt, wonach die Abweichungen positiv seyn oder heißen müßten. Die Begriffe von Positivität und Negativität sind ja überall nur relativ, und beziehen sich auf gewisse, an sich willkührliche Voraussetzungen. Eben so ist es mit den goniometrischen Größen und ihren Funktionen beschaffen, so daß die beiden Abweichungen, oder nur eines davon verneint seyn kann, ohne die Gültigkeit des allgemeinen Ausdruckes zu beschränken.

§. 21.

Wenn die Abweichungen der Gränzen einer ebnen Fläche von der gegebnen Richtung einer Normallinie beobachtet werden, so ist die Summe dieser Abweichungen allemal das Komplement der Polygonwinkel. Dies ist die Folge von demjenigen, was in den vorigen §.§. 19. 20 gesagt worden. Allein es wurde dort (wenn der Polygonalwinkel BAC $= \pi$ gesetzt wird)

$$\text{Sin } \pi = - \text{Sin } (2\text{ R} + (\alpha + \beta))$$

oder auch $= - \text{Sin } (4\text{ R} - (\alpha + \beta))$

gefunden, und es ist noch nicht gesagt, welcher von diesen beiden Werthen gebraucht werden müsse. Um uns nun hierüber ganz zu verständigen, wollen wir die Fig. 17. mit zu Hülfe nehmen.

Wenn man etwa von A anfängt, die Abweichungen der Seiten einer Winkelreihe zu beobachten, so ist die Abweichung der ersten Seite AE, ohne Zweifel $= MAE = \alpha$ in Bezug auf die Normale AM. Die Abweichung der zweiten Seite AB ist nun, in Bezug auf eben die Normale AM von doppelter, einander entgegen gesetzter Art, entweder nach eben der Richtung, wonach α gemessen wird, d. h. nach dem Bogen emb, und in dem Falle ist das Maaß desselben $= 2R + NAB = 2R + \beta$. Beide Abweichungen zusammen sind demnach $= 2R + \alpha + \beta$. Oder zweitens, die Abweichung von AB wird nach der entgegen gesetzten Richtung meb gemessen, und das Maaß derselben ist dann $= 2R - NAB = 2R - \beta$. In dieser Beziehung ist aber die erste Abweichung MAE an sich negativ, (§. 20. Nr. 6.) und ihr negatives Maaß ist $= - em = nbm - em = 2R - \alpha$. Die Summe der Abweichungen ist demnach $= 4R - (\alpha + \beta)$. In dem ersten Falle ist die Summe der Abweichungen außen an dem Polygonalwinkel gelegen, und gehört demselben als Komplement zu 4 R. Dieser Polygonalwinkel ist daher $= \pi = 4R - (2R + \alpha + \beta)$
$$= 2R - (\alpha + \beta).$$

Im zweiten Falle liegen die Abweichungen in dem Polygonalwinkel, sind aber gleichwohl sein Komplement zu 4 R, d. h. $\pi = 4R - (4R - (\alpha + \beta))$
$$= \alpha + \beta$$
oder die Summe der Abweichungen ist dem Polygonalwinkel gleich, natürlich — weil sie darin liegt, und die eine Abweichung dabei verneint ist.

Jetzt werden wir die oben bemerkte Zweideutigkeit über den Werth von π gänzlich wegräumen können. Die Summe der Abweichungen im ersten Falle $= 2R + \alpha + \beta$ liegt außen an der Figur, und gehört der Frage über die Größe des zugehörigen Polygonalwinkels gar nicht an, weil nicht die Neigung, welche außen an der Figur gebildet wird, dem Polygon gehört, sondern diejenige, welche die Seiten nach dem Innern der Figur zu einschließen. Daher ist der Ausdruck: $\text{Sin}\ \pi = - \text{Sin}\ (2R + (\alpha + \beta))$ gar nicht zur Frage gehörig, weil man nicht wissen will, was der Polygonalwinkel nicht sei, sondern das, was er ist. Im zweiten Falle fanden wir, daß die Summe der Abweichungen dem Polygonalwinkel gleich sei, und daß diese Summe $= 4R - (\alpha + \beta)$; also ist $\text{Sin}\ \pi = - \text{Sin}\ (4R - (\alpha + \beta))$.

Dieses alles bezieht sich auf Polygonalwinkel, deren Seiten an einer Seite der Normallinie liegen, und ist für diese ganz allgemein, wenn man nur über die positive oder negative Bedeutung der Abweichungen völlig einverstanden ist. Weil aber dieses zuweilen Anstoß geben kann, so will ich auch den Weg anzeigen, auf welchem man ihn vermeidet, der auch schon in der Sache liegt, jedoch in den allgemeinen Ausdrücken nicht erscheint. Ohne sich also darum zu bekümmern, ob eine Abweichung positiv oder negativ zu nehmen sei, wird man jeder Abweichung an Winkeln, deren Seiten an einer Seite der Normale liegen wie EAM, BAN 90° zulegen können, und dann die Formel gebrauchen. Man sieht leicht, daß dieses eben sowohl bei B als bei A, und überhaupt in einer Figur so oft geschehen müsse, als sich an derselben Winkel finden, deren Seiten auf einer Seite der Normale liegen.

Wenn bisher nur von Polygonal-Winkeln die Rede war, so dürfen doch auch die Ecken nicht vernachlässigt werden, d. h. solche Neigungen der Seiten, deren Maaß nach der Figur zu $> 2R$. Man pflegt dergleichen auch wohl erhabene Winkel zu nennen, wiewohl es mir scheint, daß der gemeine Sprachgebrauch das Wort: Ecke dafür hinreichend billige, daher ich mir erlaube, dies Wort zu brauchen, ohne gleichwohl den Tadel der Neuerungssucht in einer so importanten Angelegenheit auf mir laden zu wollen.

Also, eine solche Ecke wäre bei C, daran die Abweichungen außen an der Figur beobachtet werden sollen. Diese äußern Abweichungen sind aber RCD und QCB, und es ist hier ganz in die Augen fallend, daß sie in einander liegen, welches der, in §. 20. Nr. 6 aufgestellten Betrachtung entspricht. Wir fanden dort, daß allemal

$$\operatorname{Sin} BAC = -\operatorname{Sin}(4R - (\alpha - \beta))$$

sei, und das wird also auch hier der Fall seyn.

Das Maaß der Ecke BCD ist $= 4R - BCD$ und man hat: $BCD = 2R - (DCQ + BCR)$

$$\begin{aligned}
\text{also ist } DCQ &= 2R - RCD \\
&= 2R - \beta \\
BCR &= 2R - BCQ \\
&= 2R - \alpha \\
\text{folglich } BCD &= 2R - (2R - \beta + 2R - \alpha) \\
&= (\alpha + \beta) - 2R \\
\text{und } \pi &= 4R - (\alpha - (2R - \beta))
\end{aligned}$$

so daß in diesem Falle $\beta' = -(2R - \beta)$ ist.

Man hat daher

$$\operatorname{Sin}\pi = \operatorname{Sin} BCD = -\operatorname{Sin}(4R - (\alpha - (2R - \beta)))$$

und es ist auch $\pi = (4R - (\alpha + \beta - 2R))$.

Dies heißt also, daß man bei Ecken von der Summe der Abweichungen 180° abzuziehen habe.

um das Komplement zu 4 rechten Winkeln für die Polygonalecke zu erhalten.

In Verbindung mit demjenigen was vorhin über die Zulage von 90° zu jeder Abweichung von Seiten, welche eine gleichnamige Lage gegen die Normallinie haben, bemerkt wurde, kann man jetzt überhaupt sagen:

$$\text{Sin}\,\pi = -\text{Sin}\,[4\,R - ((\alpha \pm 90^\circ) + (\beta \pm 90^\circ))]$$

Das heißt: in allen Fällen, wo die Seiten eines Vielecks eine gleichnamige Lage gegen die Normale haben, werden jeder beobachteten Abweichung an Polygonal-Winkeln 90° zugelegt, an Ecken hingegen abgezogen. In diesem Verstande ist der Ausdruck allgemein für Polygonalwinkel oder Ecken:

$$\text{Sin}\,\pi = -\text{Sin}\,(4\,R - (\alpha + \beta)$$

denn es ist weiter nichts darin enthalten, was auf die, außen an der Figur liegenden Ecken oder Winkel Bezug hätte.

§. 22.

Wenn die Zahl aller Polygonalwinkel und Ecken überhaupt $= m$, die Summe aller Abweichungen der Polygonalgränzen $= s$, und die Summe aller Polygonalwinkel oder Ecken $= S$; so ist

$$S = 4.\,mR - s$$

dies ist eine unmittelbare Folge von dem Ausdruck:

$$\pi = 4R - (\alpha + \beta)$$

denn, mit m vermehrt giebt er

$$m\,\pi = S = 4\,mR - m\,(\alpha + \beta)$$

wobei begreiflich unter α und β keine unveränderliche Größen, sondern die, an jedem Orte beobachteten Abweichungen der Polygonalseiten von der Normallinie verstanden werden. Daher ist $m\,(\alpha + \beta) = s$, und das giebt den vorigen Ausdruck.

Es ist hierin nichts enthalten, wodurch der gänzliche Schluß einer Figur bedingt würde, und der vorige Satz muß daher auch noch wahr seyn, wenn nur ein Theil eines Perimeters, oder eine beliebige Anzahl von Winkelpunkten in Betrachtung gezogen wird. Dies ist auch sehr leicht einleuchtend: denn da jeder Polygonalwinkel nach dem vorigen $= 4R - (\alpha + \beta)$; so setze man nur für die Summe der Abweichuugen jedesmal den gemessenen Werth, und die bloße Addition wird zu dem Resultate führen:

$$
\begin{array}{ll}
1. & \pi = 4R - (\alpha + \beta) \\
2. & \pi' = 4R - (\gamma + \delta) \\
3. & \pi'' = 4R - (\varepsilon + \zeta) \\
4. & \pi''' = 4R - (\vartheta + \eta) \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n. & \pi^{n-1} = 4R - (\sigma + \tau) \\
\hline
\end{array}
$$

$$(1,2,3,4 - n) = m;\ m.\pi = m.4R - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \vartheta + \eta + \sigma + \tau)$$

heißt nun diese letzte Summe $(\alpha + \beta + \gamma - + \tau) = s$ so ist wieder: $S = m.4R - s$ ohne alle Rücksicht auf die Gestalt des, durch diese Winkelreihe konstituirten Perimeters.

Der Ausdruck dient also dazu, die Summe der Polygonalwinkel eines jeden beliebigen Theils vom Perimeter einer Figur aus den Abweichungen zu finden, indem die Zahl der, in diesem Theile enthaltenen Winkel $= m$ gesetzt wird.

§. 23.

Wenn die Abweichungen an **m** Polygonalstationen gemessen, und man nennt die Summe aller Abweichungen $= s$, die erste Abweichung $= \alpha$, die letzte $= \tau$; die Zahl der Polygonalwinkel, deren Schenkel auf einer Seite der Normale liegen $= p$, und

und welchen nach §. 21. jedesmal 90° hinzugelegt werden sollen; so ist

$$s = (p + m - 1) . 2R + \alpha + \tau$$

Die Zahl aller Abweichungen an m Stationen ist $= 2m$; hiervon die erste und letzte Abweichung abgezogen, bleibt die Zahl der übrigen $= 2(m - 1)$. Von diesen letzten sind allemal je zwei und zwei an den innern Seiten der Normallinien gelegen, vermöge deren Parallelität die Summe solcher zwei innern Abweichungen $= 2R$; daher ist die Summe aller $2(m - 1)$ Abweichungen $= \frac{2(m-1)}{2} . 2R = (m - 1) . 2R$.

Wenn nun in den m Polygonalwinkeln eine Zahl $= n$ vorhanden ist, deren Schenkel auf einer Seite der Normale liegen, so werden nach §. 21. für jeden derselben 2 R zu der vorigen Summe der Abweichungen hinzugelegt, und für Anzahl $= o$ von Polygonalecken eben der Art (deren Abweichungen in einander fallen) abgezogen. Demnach ist die Summe $= (m + n - (o + 1)) . 2R$.

Endlich füge man noch die erste und letzte Abweichung $\alpha + \tau$ hinzu um die Summe aller Abweichungen

$$= s = (m + n - (o + 1)) 2R + \alpha + \tau$$
$$= (p + m - 1) . 2R + \alpha + \tau$$

zu erhalten, wo $p = n - o$.

Wofern die Figur mit der Abweichung τ schließt, so ist auch $\alpha + \tau = 2R$, und für eine jede geschlossene Figur von m Winkeln ist die Summe aller Abweichungen

$$= s = (p + m) . 2R.$$

Aus diesem Ausdruck erhält man auch den Werth der 2mten Abweichung

$$\tau = s - ((p + m - 1) . 2R + \alpha).$$

Wenn man für $n = (m - 1)$ Polygonalwinkel die Summe aller Abweichungen $= s'$ setzt, so ist nun wieder

die $2n$te Abweichung $= \zeta = s' - ((p + n - 1).2R + \alpha)$.

Die nächstfolgende Abweichung, oder die $(2n + 1)$te welche, da $n = (m - 1)$, der $(2m - 1)$sten entspricht, ist $= \sigma = 2R - \zeta$, und demnach ist

die $(2m - 1)$ste Abweichung

$$= \sigma = 2R - s' + (p + n - 1).\ 2R + \alpha$$
$$= (p + n).\ 2R + \alpha - s'$$
$$= (p + m - 1).\ 2R + \alpha - s'.$$

Unter Anwendung der Methode der Normalen kann man demnach (1) die Summe der Polygonalwinkel einer ganzen Figur, oder auch eines jeden beliebigen Theils des Perimeters, und zwar nicht so wie sie etwa gemessen wird, sondern wie sie seyn soll, aus dem §. 22. gegebenen Ausdruck: $s = 4mR - s$; (2) aus dem im gegenwärtigen § gegebnen Ausdruck, die Summe aller Abweichungen an einem geschlossenen Polygon $s = (p + m).\ 2R$, oder einer jeden beliebigen Winkelreihe, so wie sie seyn soll $s = (p + m - 1).\ 2R + \alpha + \tau$; (3) die $(2m - 1)$ste Abweichung $= \sigma = (p + m - 1).\ 2R + \alpha - s'$ und (4) die $2m$te Abweichung an jeder beliebigen Stelle $= \tau = s - ((p + m - 1)2R + \alpha)$ finden. Es ist dabei einleuchtend, da m einen jeden Werth haben kann, daß man jede Zahl von Polygonalwinkeln oder auch Abweichungen finden, so wie jede Abweichung als die $(2m - 1)$ste oder die $2m$te ansehen und bestimmen könne. Hierin liegen aber, wie man leicht erkennt, manche willkommne Mittel, die Richtigkeit einer Arbeit zu prüfen, die Fehler zu erkennen und auch an den Orten zu verbessern, wo sie wirklich liegen. Ich werde dieses gleich nachher durch ein ausführlicheres Beispiel erläutern.

§. 24.

In einem jeden Vieleck, welches nur Winkel, (hohle) keine Ecken (erhabene) hat, sind allemal zwei, aber nicht mehr Polygonalwinkel, deren Schenkel auf einer Seite der Normallinie fallen. Man überzeugt sich sehr leicht aus den beiden vorigen §.§. 22. 23. von der Richtigkeit dieser Behauptung.

Denn da $S = 4\,mR - s$

$s = (m + p) . 2R$

so ist $S = 4\,m\,R - (m + p) . 2R$

$= (m - p) . 2R.$

Ebenfalls ist aus der Geometrie bekannt:

$S = (m - 2) . 2R$

daher; $(m - p) . 2R = (m - 2) . 2R$

und $p = 2.$

Es ist jedoch noch ein Fall übrig, wobei es zweifelhaft scheinen könnte, was aus p werden möchte, nemlich der, wo die Normale mit einer Polygonalseite parallel geht, oder mit derselben zusammen fällt. Es ist schon in §. 17 bemerkt worden, daß die Abweichungen in einem solchen Falle entweder $= 0$ oder $= 2R$ seyn müßten, je nachdem die Vorstellung beschaffen ist, die der Werthbestimmung der goniometrischen Funktionen zum Grunde liegt. Das ist demnach der, in §. 20 Nr. 2 angeführte Fall, und die Abweichungen sind nun das einemal $= 0$ oder $= 2R$, das andremal $= 2R$, oder $= 0$ wovon und wie diese alternativen Werthe anzunehmen sind, man sich auf folgende Weise leicht überzeugt.

Wenn AB Fig 18. eine Polygonalseite und MN eine Normallinie ist, darauf die folgende Polygonal seite BC oder BC′ fällt, und dabei die Richtung BN positiv heißt (wodurch die Neigung ABC einen Winkel kleiner als 180° giebt) so muß BM negativ heißen (wobei ABC′ eine Ecke > 180° bildet).

Alsdann ist der Winkel ABC = 4R — (ABC′ + 2R), dagegen die Ecke ABC′ = 4R — (ABC + o). Daher ist in den allgemeinen Ausdrücken des §. 20 $\beta = 2R$ oder auch $= o$. Ist aber $\beta = 2R$ für den Winkelpunkt B, so muß für den Eckpunkt C nothwendig $\alpha = o$ werden, wofern nemlich BC, BC′ ihre relative Lage nicht ändern, d. h. wofern die nächste Polygonalseite CD an einer andern Seite der Normalline MN liegt als AB. Bleibt hingegen CD‴ auf eben derselben Seite von MN auf welcher AB liegt, so hat BC eigentlich den Halbkreis BB′ durchlaufen, und alsdann ist $\alpha = 2R$, wogegen $\beta = o$. Man sieht hieraus, wie diese Werthe zusammen hängen, nemlich: wenn B und C Winkel sind, so ist:

$$\text{Sin } ABC = \text{Sin } (4R - (\alpha + 2R))$$
$$= \text{Sin } (\alpha + o)$$
$$\text{Sin } BCD''' = BC'D'' = \text{Sin } (4R - (2R + \beta))$$
$$= \text{Sin } (o + \beta)$$

Sind aber von beiden B und C, der eine (B) ein Winkel, der andre (C) eine Ecke, so ist

für den Winkel:

$$\text{Sin } ABC = \text{Sin } (4R - (\alpha + 2R))$$

für die Ecke:

$$\text{Sin } BCD = -\text{Sin } (4R - (\alpha + o))$$

in beiden Fällen = Sin α,

oder umgekehrt:

für die Ecke:

$$\text{Sin } ABC' = -\text{Sin } (4R - (\alpha + o))$$
$$= \text{Sin } \alpha$$

für den Winkel:

$$\text{Sin}\, BC'D' = -\,\text{Sin}\,(4\,R - (2\,R + \beta)) = \text{Sin}\,\beta.$$

Hieraus ist es nun auch klar, daß die Polygonalwinkel π

für jede Ecke $= 4\,R - \alpha$

für jeden Winkel $= 4\,R - (2\,R + \alpha)$

und die Summe der Abweichungen $(\alpha + \beta)$

für die Ecken $= (\alpha + o) = (\beta + o)$

für die Winkel $= (\alpha + 2\,R) = (2\,R + \beta)$

werden müßen.

Es bleibt demnach auch hier für die Summen der Abweichungen bei dem, in §. 21 für alle Fälle gesagten, wo die Gränzen der Polygone oder Winkelreihen auf einer Seite der Normallinie fallen, daß denselben bei Polygonal-Winkeln $2\,R$ zugelegt, bei Ecken abgezogen werden, um den allgemeinen Ausdruck gültig zu brauchen.

§. 25.

Wenn in einem Polygon zwei Ecken, deren Schenkel auf einer Seite der Normallinie liegen, auf einander folgen, so muß die Summe der negativen Abweichungen (§. 21) kleiner als 2 rechte Winkel seyn.

In der Fig. 19 seien b und c zwei auf einander folgende Polygonalecken und die Normallinie $MN \not\#\, OP$, so ist klar, daß Mbc und dcP als negativ erscheinen müssen, wenn abN und bcP positiv genommen worden. Wofern nun die Summe dieser negativen Abweichungen so groß wäre als zwei rechte Winkel oder $Mbc + dcP = 2\,R$, und dabei ohne Zweifel $Mbc + bcP = 2\,R$ (weil $MN \not\#\, OP$) so würde $dcP = bcP$ seyn müssen.

In diesem Falle würde also dc auf bc fallen, folglich die Ecke $bcd = 0$ oder auch $= 4R$ seyn, und es könnte sich bei c weder Winkel noch Ecke finden. Wäre hingegen $Mbc + dcP$ größer als zwei rechte Winkel, also $Mbc + dcP > 2R$ und $Mbc + bcP = 2R$, folglich $dcP > bcP$; so würde $d'c$ auf die andre Seite von bc fallen, und man fände bei c keine Ecke, sondern einen Winkel. Dieser Fall gehört aber nicht mehr zur Frage, indem vorausgesetzt ist, daß b und c Ecken seyn sollen; daher es nothwendig folgt, daß die Summe der negativen Abweichungen an zwei auf einander folgenden Polygonalecken kleiner als $2R$ seyn müsse.

Wofern auf c noch eine dritte Polygonalecke d folgte, so würde für die Abweichungen an c und d eben das gelten müssen, was so eben für b und c als gültig erwiesen worden, daß nemlich:

$$Ocd + edQ < 2R$$

und da $Ocd = 2R - dcP$

so ist $edQ < dcP$.

Nun ist aber schon nach dem vorstehenden

$dcP + Mbc < 2R$, und um so viel mehr muß $edQ + Mbc < 2R$ seyn.

An diesen drei auf einander folgenden Ecken ist daher die Summe der ersten und letzten Abweichung kleiner als zwei rechte Winkel, und da dieses auch für mehrere solcher Ecken auf die gleiche Weise zu beweisen ist, so ist auch für jede Reihe auf einander folgender Polygonalecken, die Summe der ersten und letzten negativen Abweichung (positiv genommen) kleiner als zwei rechte Winkel.

Die Frage: ob die Zahl der auf einander folgenden Ecken von der angegebenen Art in einem Polygonal- oder einer Winkelreihe eine Gränze habe? und welche die Gränze sei? gehört zu den unbestimmten Aufgaben. Die Summe der negativen Abweichungen an je zwei, auf einander folgenden Ecken nähert sich zwar immer mehr dem Werthe von 2 R, je größer die Zahl solcher Ecken wird; allein dieser letzte Werth ist als eine Asymtote anzusehen, die nie erreicht wird. Es giebt sogar einen einzelnen Fall, in welchem gar keine Annäherung mehr statt findet, sondern die Differentialien der Summen Null werden. Dies geschieht, wenn jeder zweite negative Winkel Null ist, oder jede zweite Polygonalseite mit der Normale parallel läuft. In einem solchen Falle würde dieser Theil des Perimeters aus einer unbestimmten Reihe in einander liegender Vierecke, oder wenn ich so reden darf, aus einer viereckigen Spirale bestehen, der aber eine andre, gleichartige, jedoch entgegen gesetzte Spirale folgen muß, wofern die Winkelreihe eine Figur umfassen soll.

Die weitere Entwickelung hierher gehöriger Untersuchungen liegt außer den Gränzen meines gegenwärtigen Zwecks, für welchen kein großer Nutzen davon zu erwarten ist, weil dergleichen Fälle in der Wirklichkeit nicht leicht vorkommen.

§. 26.

Für jede Reihe oder Anzahl von Polygonal-Ecken, deren Schenkel auf einer Seite der Normallinie liegen, muß sich in einem geschlossenen Polygon eine gleiche Anzahl von Winkeln ähnlicher Lage gegen die Normale finden. Denn die allgemeine Richtung des Perimeters, um eine Figur ganz zu schließen, wird durch jede Ecke, sie sei übrigens welche sie wolle, um 2 R aus dieser Richtung verschoben: sie wird rückgängig (— 180°) und muß daher um eben so viel ergänzt, — vorschreitend (+ 180°) werden. Da nun dieses in einem Polygonalperimeter nicht anders als durch einen Winkel von gleicher Lage gegen die Normallinie geschehen kann, so müssen auch nothwendig in jedem geschlossenen Polygon für jede Zahl von Ecken, eine gleiche Zahl von Winkeln angetroffen werden, wodurch die Wirkung der Ecken auf die goniometrischen Summen aufgehoben wird.

Es ist schon vorhin, §. 24 bewiesen, daß in jedem geschlossenen Polygon, an dessen Perimeter lauter Winkel (keine Ecken) sind, zwei derselben die Lage haben müssen, daß ihre Schenkel auf einer Seite der Normallinie fallen, und es folgt daraus, daß in einem Polygon, darin n Ecken vorkommen, (n + 2) Winkel seyn müssen, deren Schenkel die gedachte Lage haben. Weil aber übrigens diese n Winkel nur die Wirkung jener n Ecken aufheben, so ist das Aggregat derselben in einer geschlossenen Figur ohne Einfluß auf die Summe der Abweichungen, und es mögen daher in einem Polygon Ecken seyn oder nicht, so bleibt für die geschlossene Figur jederzeit p = 2. Nur auf die Summe der Abweichungen an einzelnen Theilen des Perimeters behalten die n Ecken und Winkel ihren Einfluß, und ihre Zahl muß für diese Fälle mit in p enthalten seyn. Aus diesem Grunde nur, und um die Richtigkeit der goniometrischen Größen an einzelnen Theilen einer Winkelreihe erforschen zu können, müssen die Ecken und Winkel, welche ganz an einer Seite der Normallinie liegen, mit ihrem additionellen oder subtraktiven Werth angemerkt werden.

§. 27.

Jetzt will ich in aller Kürze zeigen, von welcher Anwendbarkeit und welchem Nutzen die bisherigen Sätze des gegenwärtigen Abschnitts in der speciellen Goniometrie sind. Ich nehme zur Erläuterung an, daß das folgende ein Theil des bei der Messung geführten Manuals sei. Die Fig. 20. kann mit dazu dienen.

des .... Theils,

Jahr 18 geführt von ....

Tag der Beob- achtung.	B... von	Gr.	Min.	Sec.	Anmerkungen.
Juli 6.	A.	26	35	30	
— :	A.				
— :	B.				
— :	B.				
— :	C.	153	24	30	
— :	C.				
— :	D.				
— :	D.				
— :	E.				
— :	E.				
— :	F.				
— :	F.				
	m				

Zu S. 72.

Manual

der beobachteten Abweichungen an den Winkelpunkten des .... Theils, der ..... Sektion im Dreiecknetz ....

Jahr 1821. geführt von ....

Tag der Beob-achtung.	Ort der Beobach-tung.		Beobachtete Abweichungen.			Ueberschuß wegen des Parallelismus.				p.	Korrektion.			Hülfswinkel.					Anmerkungen.
						+		−											
	von	nach	Gr	Min.	Sec.	Min.	Sec.	Min.	Sec.		Gr.	Min.	Sec.	von	nach	Gr.	Min.	Sec.	
Juli 6.	A.	Z.	61	10	15					90				A.	C.	26	35	30	
— „	A.	B.	23	6	12					90									
— „	B.	A.	156	53	48														
— „	B.	C.	30	8	16						÷ „	50	6						
— „	C.	B.	150	41	50									C.	A.	153	24	30	
— „	C.	D.	93	8	30	30	—												
— „	D.	C.	86	51	30														
— „	D.	E.	118	4	20														
— „	E.	D.	61	55	40														
— „	E.	F.	138	57	48						÷ „	20	—						
— „	F.	E.	41	22	12														
— „	F.	G.	50	16	20														
	m		1012	36	41					180									
		+	180	—	—														
			1192	36	41														

1. Man hat zu einer gewissen Zeit eine Anzahl von Abweichungen an m Polygonalstationen gemessen, und will nunmehr wissen, ob die Arbeit richtig sei, um mit Zuverlässigkeit darauf fortgehen zu können.

Hierzu summire man im Manual alle gemessene Abweichungen, so weit selbige nemlich untersucht werden sollen, und bediene sich dann der Formel:

$$s = (p + m - 1)\ 2R + \alpha + \tau,$$

welche in Zahlen aufgelöset, jener gefundenen Summe des Manuals gleich seyn muß. Wofern sich in diesen beiden Summen ein Unterschied findet, so ist auch irgendwo in den Operationen gefehlt. Dieser Fehler, sowohl als auch der Beobachtungsort, wo er vorgefallen ist, wird aber durch den Gebrauch der Formeln für die $(2m-1)$ste und die 2 mte Abweichung $\sigma = (p + m - 1).\ 2R - s'$

$$\tau = s - ((p + m - 1).\ 2R + \alpha)$$

entdeckt.

2. Wir wollen dieses jetzt versuchen.

Die Summe aller, im Manual angeschriebenen Abweichungen ist

$$= 1012^\circ\ 36'\ 41'' + 180^\circ = 1192^\circ\ 36'\ 41''$$

Dieselbe soll gleich seyn

$$s = (p + m - 1).\ 2R + \alpha + \tau$$
$$= (1 + 6 - 1).\ 2.\ 90 + 61^\circ\ 10'\ 15'' + 50^\circ\ 16'\ 20''$$
$$= 6.\ 180^\circ + 111^\circ\ 26'\ 35''$$
$$= 1080^\circ + 111^\circ\ 26'\ 35''' = 1191^\circ\ 16'\ 35''.$$

Da es jedoch hier erscheint, daß diese Summe mit der ersten, aus dem Manual gezogenen Summe der Abweichungen nicht überein stimmt, so muß in den Beobachtungen ein Fehler vorgefallen seyn, welcher $1192^\circ\ 36'\ 41'' - 1191^\circ\ 26'\ 35'' = 1^\circ\ 10'\ 6''$ beträgt.

Um denselben auszumitteln, nehmen wir nun zuerst die Beobachtungen an je zwei Standpunkten für sich zusammen, und wiederholen die vorigen Summirungen mit denselben.

An den beiden Beobachtungsorten A und B ist nach dem Manual die Summe der Abweichungen

$= 271^\circ\ 18'\ 31'' + 180^\circ = 451^\circ\ 18'\ 31''$

und $s = (p + m - 1) . 2R + \alpha + \tau$

$= (1 + 2 - 1) . 2 . 90 + 61^\circ\ 10'\ 15'' + 30^\circ\ 8'\ 16''$

$= 360^\circ + 91^\circ\ 18'\ 31''$

$= 451^\circ\ 18'\ 31''$

Hier stimmen nun die Summen auf beiden Wegen mit einander überein, und es entdeckt sich demnach auch noch kein Fehler. Wir gehen also weiter, und nehmen B und C auf gleiche Weise vor.

Wir finden an diesen Beobachtungsorten die Summe der Abweichungen nach dem Manual

$= 430^\circ\ 52'\ 24''$

und $s = (p + m - 1) . 2R + \alpha + \tau$

$= (0 + 2 - 1) . 2R + 156^\circ\ 53'\ 48'' + 93^\circ\ 8'\ 30''$

$= 180^\circ + 250^\circ\ 2'\ 18''$

$= 430^\circ\ 2'\ 18''$.

Die beiden hier gefundenen Summen sind aber um $50'\ 6''$ von einander verschieden, und es muß demnach in den Beobachtungen an den Stationen B und C ein Versehen vorgefallen seyn.

3. Damit nun der fehlerhafte Winkel entdeckt werde brauchen wir die Formeln für σ und τ, d. h. für die vorletzte und letzte Abweichung.

Es ist nemlich:

$TBA = \tau = s - ((p + m - 1) . 2R + \alpha)$

$= 430^\circ\ 52'\ 24'' - (0 + 2 - 1) . 2R - 93^\circ\ 8'\ 30''$

$= 430^\circ\ 52'\ 24'' - 273^\circ\ 8'\ 30''$

$= 157^\circ\ 43'\ 54''$

$TBC = \sigma = (p + m - 1) . 2R - s'$

$= (0 + 2 - 1) . 2 . 90 - 150^\circ\ 41'\ 50''$

$= 29^\circ\ 18'\ 10''$.

Nun findet man aber im Manual;

TBA (von B nach A) = 156° 53′ 48″

TBC (von B nach C) = 30° 8′ 16″

und der erstere Werth ist um 50′ 6″ zu klein, der letztere um eben so viel zu groß. Dieser Unterschied ist jedoch genau dem Fehler gleich, der vorhin in den Summen gefunden wurde, und es ist daher mit Recht zu schießen, daß eine dieser beiden Abweichungen um so viel fehlerhaft beobachtet, oder notirt sei. Da nun die Summe der gemessenen Abweichungen nach dem Manual größer ist, als sie nach der Rechnung seyn sollte, so muß diejenige Abweichung fehlerhaft seyn, welche größer ist, als die, so eben geführte Rechnung giebt. Das ist hier TBC, und diese muß demnach ein Manual korrigirt werden, wozu eine eigne Spalte reservirt ist.

4. Der ganze Unterschied der beiden Summen wurde in Nr. 2, = 1° 10′ 16″ gefunden, wovon bis jetzt nur bei der Abweichung TBC 50′6″ ausgemittelt sind. Es muß daher noch sonst irgendwo eine Unrichtigkeit von 20′ eingeschlichen seyn, zu deren Auffindung geschritten werden muß, damit die goniometrischen Summen in vollständige Uebereinstimmung kommen.

Wenn man die Reihe der beobachteten Abweichungen des Manuals auf die, so eben angezeigte Weise durchgeht, so findet man für die Beobachtungsorte E und F, die Summe derselben

im Manual = 292° 32′ —

nach der Rechnung: $s = (p + m - 1) . 2R + \alpha + r$

$= 292° 12′$ —

und hier steckt also der Fehler. Bei welcher Abweichung derselbe vorgefallen sei, ergiebt sich auf dem vorhin benutzten Wege durch Berechnung der letzten und vorletzten Abweichungen.

Man findet:

$$WED = \tau = s - ((p + m - 1).\ 2R + \alpha)$$
$$= 292^\circ 32' - ((0 + 2 - 1).2.90^\circ + 50^\circ 16' 20'')$$
$$= 62^\circ 15' 40''$$

$$WEF = \sigma = (p + m - 1).\ 2R - s'$$
$$= (0 + 2 - 1).\ 2.\ 90^\circ - 41^\circ 22' 12''$$
$$= 138^\circ 37' 48''$$

Dafür steht im Manual:

$$WED = \tau = 61^\circ 55' 40''$$
$$WEF = \sigma = 138^\circ 57' 48''$$

ersterer um 20 Min. zu klein, letzterer um eben so viel zu groß. Da nun der in Nr. 2 gefundene Fehler der ganzen Summe noch um diese 20 Min. größer ist, als die, bereits in vor. Nr. 3 entdeckte Korrektion, so muß man auch hier diejenige Abweichung korregiren, welche im Manual größer notirt worden ist, als die Rechnung giebt. Dies ist WEF (von E nach F) welche 138° 37′ 48″ hätte gefunden werden müssen.

Mit diesen, im vorstehenden ausgemittelten Verbesserungen stimmt nun die Summe der Abweichungen genau mit der Rechnung überein, und es ist weiter keine Unrichtigkeit zu fürchten.

5. Ich will hierbei jedoch nicht verschweigen, daß es einen einzelnen Fall giebt, in welchem ein begangenes Versehen auf die bisher (durch Nr. 2 3. 4) angegebene Weise nicht entdeckt wird. Dieser Fall tritt ein, wenn z. B. der Fehler, welcher in TBC (von B nach C) begangen ist, in NCB (von C nach B) wiederholt wird, und man dagegen die folgenden Abweichungen, von C nach D, und von D nach C richtig beobachtet. Alsdann würden die, im Manual notirten Abweichungen so stehen:

von B nach C — 30° 8′ 16″
von C nach B — 149° 51′ 44″
von C nach D — 92° 18′ 24″

von D nach C — 87° 41′ 36″
von D nach E — 118° 4′ 20″
u. s. w.

In diesem Falle wäre der Fehler örtlich, d. h. er hätte blos auf die Lage von C, nicht auf die übrigen Punkte der Winkelreihe, noch auch den Schluß der ganzen Figur, einen Einfluß. Es wäre so viel als ob der Punkt C nach c verlegt wäre, ohne B oder D zu afficiren, wogegen bei den, im Manual angezeichneten Abweichungen die ganze Figur verschoben würde. Ein solcher örtlicher Fehler würde sich nun etwa durch die Anwendung der, im §. 18 vorgetragenen Berichtigungsweise entdecken, wenn nicht die gegenwärtige Ansicht der Sache, wie ich sogleich zeigen werde, leichtere Mittel dazu an die Hand gäbe. Vorgängig bemerke ich nur noch, daß dergleichen örtliche Fehler auf den gewöhnlichen Korrektionswegen goniometrischer Resultate nicht bemerkt werden. Auch sind sie, wenn nicht gröblich gefehlt wird, von unbedeutenden Einfluß auf die Gestalt einer Winkelreihe oder eines ganzen Polygons, so wie auch auf das Areal einer Parcelle. Bei größern Arbeiten hingegen, z. B. zur Anlage von Triangularnetzen sind sie schon von Belang, und müssen billig aufgesucht werden. Wie sich dieses am leichtesten bewirken lasse, will ich jetzt suchen kurz anzugeben.

6. Von jedem guten Geometer, dem es um eine richtige Arbeit zu thun ist läßt sich erwarten, daß er sich nicht dabei beruhigen werde, an jedem Standorte die nothwendigen Dinge zu messen, sondern daß er auch solche Winkel bestimmen werde die, ohne grade nothwendig zum Schluße einer Arbeit zu seyn, doch sehr nützlich zu Korrektionen dienen können. Das Wesen des goniometrischen Verfahrens, welches gegenwärtig so viele Vorzüge hat, erfordert die Beobachtung aller Winkel, welche auf eine Figur einfließen, oder in derselben zu bestimmen sind, und

wer dieses vernachlässigt, indem er sich auf das Nothdürftige beschränkt, verkennt den Werth der Goniometrie, und wird auch nur eine nothdürftige Arbeit liefern.

In der billigen Voraussetzung des Bessern ist hingegen in dem vorgelegten Auszuge aus einem Vermessungsmanuale eine eigne Spalte mit der Rubrik: Hülfswinkel, hinzugefügt, und dabei angenommen, daß der Geometer auf der Station A, außer den Beobachtungen der Abweichungen von AZ, AB, auch nach C, so wie in C zurück nach A gezielt habe. Diese letztere Abweichungen sind im Manual als Hülfswinkel angezeichnet.

Um nun zu prüfen, wiefern c richtig gelegt sei, setze man die Richtigkeit der Lage voraus, so daß nemlich TBc = TBC, oder c auf C fällt. Alsdann ist

$$\begin{aligned}
TBC &= NBC + NBT \\
NBT &= BAM \\
NBC &= BAC + BCA \\
TBC &= BAC + BCA + BAM \\
BAC &= MAC - BAM \\
&= MAC + BCA \\
BCA &= NCA - NCB \\
TBC &= MAC + (NCA - NCB)
\end{aligned}$$

Nun ist nach dem Manual

NCA — (von C nach A)	=	153° 24′ 30″
NCB — (von C nach B)	=	150° 41′ 50″
NCA — NCB	=	2° 42′ 40″
MAC — (von A nach C)	=	26° 35′ 30″
TBC	=	29° 18′ 10″

Dagegen ist diese Abweichung ein Manual zu 30° 8′ 16″ notirt, woraus denn erhellet, daß c falsch gelegt worden. Die Abweichung an c ist nemlich um 30° 8′ 16″ — 29° 18′ 16″ = 50′ 6″ zu groß genommen, welches mit der vorigen Rechnung in Nr. 2 u. 3 völlig überein kommt.

7. Es braucht jetzt wohl nicht mehr erinnert zu werden, was gewissermaßen von selbst einleuchtet, daß nemlich die, in den vorigen Nr. erzählten Korrektionen fast auf der Stelle vorgenommen werden können. Ein aufmerksamer Ueberblick des Manuals kann den Geometer auf jeder zweiten, dritten und folgenden Station zu Bemerkungen über die Richtigkeit seiner Arbeit führen, dadurch er sich spätere, mühsamere Korrektionen erspart. Die Summirung der Abweichungen auf je zwei Stationen, ist schon an sich selbst eine Korrektion, die so zu sagen im Vorbeigehen vorgenommen wird, und daher nicht versäumt werden darf.

8. Wäre ein Fehler in der ersten oder letzten Abweichung α oder τ der Summe $= s$, vorgefallen, so würde derselbe sich auf dem bisherigen Wege zu dieser Zeit noch nicht entdecken, weil diese Größen als bekannt angenommen werden. Allein der letzte Winkel bleibt nicht immer der letzte: war er es dieses Mal, so wird er doch später in der Reihe derer mit vorkommen, welche geprüft werden können, und nur über die erste Abweichung, womit die Arbeit angefangen worden, bleibt die Sache bis zum gänzlichen Schlusse der Arbeit unentschieden. Diese Bemerkung wird aber den Geometer veranlassen können, seine Aufmerksamkeit bei Bestimmung dieser ersten Abweichungen, oder eigentlich, der Lage der ganzen Figur gegen die Normallinie (Orientirung) zu verdoppeln. Da übrigens dieser erste Fehler nur die Lage der Figur, nicht die einzelnen Theile derselben afficirt, so wird sich der Fehler auch korrigiren lassen, oder man wird die Figur um A, gleichsam als um ihren Pol drehen können, ohne die innern Verhältnisse der Seiten und Winkel zu stören.

Wenn hingegen der Fehler bloß in der ersten Abweichung AZ nicht zugleich in der folgenden AB, also nicht in der Lage der Normallinie begangen worden, so muß er sich beim Schlusse der Figur zeigen, da die erste Abweichung (α) alsdann als eine vorletzte (σ) erscheinen muß, und als solche geprüft werden kann.

Die große Leichtigkeit des im vorstehenden angedeuteten Weges zur jedesmaligen partiellen Verbesserung der goniometrischen Operationen, wird derselben hoffentlich eben so sehr zur Empfehlung dienen, als die Sache selbst.

§. 28.

Wenn die Normallinien bei der Messung einer Winkelreihe oder eines Polygons zum Grunde gelegt werden, so ist nichts natürlicher noch auch bequemer als dieselben, oder eine davon als gegebene Mittags-linie zur allgemeinen Projektions- (Abscissen-)Linie anzunehmen, um die geometrische Lage der gemessenen Winkelpunkte zu bestimmen.

Die Seiten des Polygons und ihre Abweichungen sind dabei als vorgängig gemessen oder berechnet, natürlich vorauszusetzen, und alsdann die Orte der Polygonalpunkte durch die **Sin.** und **Cosin.** der Abweichungen als Ordinaten und Abscissen sehr leicht gefunden.

Die Fig. 21. mag eine solche gemessene Winkelreihe, oder auch ein geschlossenes Polygon vorstellen, darin die vorzüglichsten Fälle vorkommen, welche dabei etwa eintreten können. Man nehme nun in der Figur zu erst das, was über — oder auch, was unter — der Normallinie YZ liegt, als eine für sich bestehende Winkelreihe, und YZ für die erste Normale, oder Abscissenlinie an, so ist es klar, daß

die

die einzelnen Winkelpunkte, senkrecht auf die Abscissenlinien projicirt, auf derselben den **Cosinus** der ersten, an denselben Punkten liegenden Abweichungen, abschneiden, wozu die, an eben den Abweichungen liegenden Seiten die Halbmesser abgeben. Die Figur macht es sogleich deutlich, daß a. Cosin β die Abscisse des Punkts 2.; b. Cosin δ die Abscisse des Punkts 3. u. s. w. auf der, jedem Winkelpunkte zugehörigen Normale, und demnach auch auf der ersten Normale YZ, bestimmen. Indem ich übrigens die Bekanntschaft mit diesem, in der Polygonometrie bereits angenommenen Verfahren voraussetze, kann ich mich darauf beschränken, ohne weitere Erläuterung zu sagen:

Die Abscisse eines jeden Winkelpunktes ist gleich der Summe der Abscissen aller vorhergehenden Winkelpunkte vom ersten an gerechnet, oder

$= a.\ \mathrm{Cosin}\ \beta + b\ \mathrm{Cosin}\ \delta + c.\ \mathrm{Cosin}\ \zeta + \ldots\ldots$

Auf gleiche Weise ist der Perpendikus, oder die Ordinate eines jeden Winkelpunkts gleich dem Produkte des Sinus der ersten Abweichung an demselben Punkte in die daran liegende Seite, oder $= a.\ \mathrm{Sin}\ \beta$; $b.\ \mathrm{Sin}\ \delta$; u. s. w. Rechnet man die Ordinaten von dem Winkelpunkte der ersten Normale als Anfang der Abscissenlinie an, so sind dieselben für jeden Winkelpunkt gleich der Summe der Ordinaten der vorhergehenden Winkelpunkte, vom ersten an gerechnet, oder

$= a.\ \mathrm{Sin}\ \beta + b\ \mathrm{Sin}\ \delta + c.\ \mathrm{Sin}\ \zeta + \ldots\ldots$

Hiezu füge ich folgende kurze Bemerkungen:

1. Die vorstehenden Ausdrücke sind in ihrer Entstehungsart und Gestalt ganz diejenigen, welche Hr. Däzel bereits früher gegeben, und nur die gonio-

metrischen Funktionen der einfachen Abweichungen, was im Grunde sehr wenig bedeutet. Hr. Schiereck hat auch in s. Polygonometrie eben das gethan, was hier steht, und seine reducirte Winkel sind eben die, hier gebrauchten Abweichungen, von denen sie nur in der Lage (und übrigen Behandlungsort) verschieden sind. Es kommt hier also eben nicht viel Neues vor, und ich kann mich desto kürzer fassen.

2. Man kann sich über diejenigen Abweichungen, welche in der Rechnung zu brauchen sind, gar nicht irren: ihre Lage ist deutlich bezeichnet, und es findet keine Abänderung darin statt.

Die Cosin. stumpfer Winkel sind negativ, d. h. sie fallen in der Richtung nach dem Anfangspunkte der Absciſſen zu, wie bekannt ist.

Bei Ecken, deren Schenkel auf verschiedenen Seiten der Normale liegen, wie bei 3. werden die ersten Abweichungen ganz nach der Vorschrift genommen.

Bei Ecken, deren Schenkel auf einer Seite der Normale fallen, wie 6. und 11. welche man etwa Wendepunkte — so wie bei 10, welche man Rückkehrpunkt — **punctum reflexus** — nennen könnte, wird man sich dessen erinnern, was früher in §. 20. 21. gesagt worden. Die Absciſſen und Ordinaten, werden alsdann den Komplementen zu 4 R. proportional. Nemlich bei dem Wendepunkt 6. sind nach §. 20. der Wendung wegen 2 R. hinzu zu legen; demnach ist die Absciſſe für den Winkelpunkt $7 = g.$ Cosin $(2R + \mu)$. Es ist $\mu = 2R - \lambda$, folglich jene Absciſſe $= g.$ Cosin $(4R - \lambda)$. Eben so ist auch die Ordinate für diesen Winkelpunkt $= g.$ Sin $(4.R - \lambda)$. Bei dem Polygonal Punkte 11. welcher gleichfalls ein Wendepunkt ist, hat es eben dieselbe Bewandniß.

Anmerkung. Es wird hier nun zwar, wie es scheint, nicht die erste Abweichung an 7, welche π ist, sondern die zweite μ, gebraucht, und auch dieser seine andre, λ, welche die zweite an 6 ist, substituirt. Allein wenn man die Rechnung von 12. an führt, so ist λ allerdings die erste Abweichung, wodurch die Abscisse für den Radius g, bestimmt wird. In diesem Falle würde das Verfahren von 12. bis 6, dem, auf der andern Seite, von 1. bis 6. völlig gleich sein, und 6. käme als Wendungspunkt gar nicht in Betrachtung. Jene Substitution ist daher nur die Folge der Einführung des Wendepunkts in die Rechnung, und auch nur in sofern nöthig. Die Bequemlichkeit, welche mit der Zählung der Abscissen und Ordinaten von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte (Nullpunkt) verbunden ist, und die Betrachtung, daß es zweckmäßig sei, Fälle wie diese, mit vorzutragen, haben mich bewogen, die Rechnung auf die angegebne Art zu führen.

Für den Rückkehrpunkt 10. findet noch wieder dasselbe Verhältniß Statt. Von 12. angefangen ist φ die erste Abweichung, und wegen der Wendung ist die Abscisse $=$ l. Cosin $(2\,R + \varphi)$. Es ist aber φ an sich negativ und $= -(2\,R - \psi)$; demnach ist die Abscisse $=$ l. Cos. ψ (oder wenn man will, auch l. Cos $(4\,R + \psi)$). Die Ordinate ist ebenfalls $=$ l. Sin ψ.

Demnach hat man, von 1. angefangen, die

Abscissen $=$ a. Cos. β + b. Cos δ + c Cos. ζ
+ d. Cosin η + e. Cosin $\varkappa$ +
g. Cos. $(4\,R - \lambda)$ + h. Cos. $(4\,R - \pi)$

$+ i. \text{Cos}\,(4R - \sigma) + k. \text{Cos}.\,(4R - \tau)$
$+ l. \text{Cos}.\,\psi + (m - x). \text{Cos}.\,(4R - \omega)$

Die Ordinaten $= a. \text{Sin}\,\beta + b. \text{Sin}\,\delta + c\,\text{Sin}\,\zeta +$
$d. \text{Sin}\,\eta + e\ \text{Sin}\,\varkappa + g. \text{Sin}\,(4R - \lambda)$
$+ h\ \text{Sin}\,(4R - \pi) + i. \text{Sin}\,(4R - \sigma)$
$+ k. \text{Sin}\,(4R - \tau) + l. \text{Sin}\,\psi$
$+ (m - x). \text{Sin}\,(4R - \omega)$

4. Die **Cosin.** der Komplemente zu 4 R sind an sich positiv, daher werden auch alle Absciſſen positiv, deren zugehörige Abweichungen kleiner als ein rechter Winkel sind. Für größere Abweichungen werden die **Cosin.**, folglich auch die Absciſſen negativ.

Die **Sinus** der Winkel wie $(4R - \alpha)$ hingegen sind negativ, wenn man daher die Ordinaten einer Winkelreihe vom Anfanze bis zum Durchschnittspunkte einer Polygonalseite mit der Absciſſenlinie zuſammen nimmt, ſo müſſen die poſitiven und negativen Ordinaten einander gleich, oder die ganze Summe aller Ordinaten muß Null ſeyn. Das iſt:

$$a. \text{Sin}\,\beta + b. \text{Sin}\,\delta + c. \text{Sin}\,\zeta + d. \text{Sin}\,\eta + e. \text{Sin}\,\varkappa$$
$$= -[g. \text{Sin}(4R - \lambda) + h\ \text{Sin}(4R - \pi) + i. \text{Sin}(4R - \sigma) + k. \text{Sin}(4R - \tau) + l\ \text{Sin}\,\psi + (m - x). \text{Sin}(4R - \omega)]$$

oder
$$o = a. \text{Sin}\,\beta + b. \text{Sin}\,\delta + c. \text{Sin}\,\zeta + d. \text{Sin}\,\eta + e\ \text{Sin}\,\varkappa + g\ \text{Sin}\,(4R - \lambda) + h\ \text{Sin}\,(4R - \pi) + i\ \text{Sin}(4R - \sigma) + k\ \text{Sin}(4R - \tau) + l. \text{Sin}\,\psi + (m - x). \text{Sin}\,(4R - \omega)$$

5. Wenn man eben dieſe Rechnung zur Beſtimmung der Koordinaten für die andre, **unter** der Absciſſenlinie YZ liegende Winkelreihe, oder den andern Theil des Vielecks in fortlaufender Reihe für 13. 14. u. ſ. w. fortſetzt, ſo bleibt es völlig bei der bisherigen Bezeichnungsart. Für 13. hat man die

Abscisse $= x. \text{Cos}\,(4R - \omega)$ für 14. die: $n. \text{Cos}.\,(4R - a)$ u. s. w. Für 17. ist die Abweichung (nemlich die zweite an 16.) $= 0$, oder $= 2R$; daher die Abscisse $= -q$ Für 18. müssen wegen der Wendung, welche der in 6. der Richtung nach entgegen gesetzt ist, 2 R abgezogen werden, daher bleiben nur $2R - g$, oder was dem gleich ist: k. Die Abscisse für 18. ist daher $= r\,\text{Cos}\,k$, und man sieht schon, daß man jetzt, nach dem Umgange durch die Wendungen des Perimeters, wieder in die erste Ordnung (zu Anfang dieses §. und in Nr. 2) komme. Für den Winkelpunkt 20. ist die erste Abweichung $= n$; für 21. sind wegen der Wendung 2 R hinzuzulegen, also ist die Abscisse $= u\,\text{Cosin}\,(2R + q)$ und weil $q = (2R - o)$ so wird diese Abscisse $= u.\,\text{Cosin}\,(4R - o)$.

Für die Ordinaten werden eben dieselben goniometrischen Ausdrücke gebraucht, und sie werden, nach dem Werthe derselben, bald positiv, bald negativ.

Alle Abscissen werden hier negativ (den besondern Fall ausgenommen, da eine der gebrauchten Abweichungen kleiner als 90° wird, wie z. B. bei 4, welcher Fall in der untern Hälfte der Figur grade nicht vorkommt) und die Summe aller negativen Abscissen muß der Summe aller positiven Abscissen, welche für den obern Theil des Vielecks gefunden worden, gleich seyn. Man kann daher auch die gesammte Summe aller Abscissen gleich Null setzen oder:

$$\begin{aligned} 0 = {} & a.\,\text{Cos}.\,\beta + b.\,\text{Cos}.\,\delta + \ldots\ldots g.\,\text{Cos}.\,(4R - \lambda) \\ & + h.\,\text{Cos}.\,(4R - \mu) \ldots . + (m - x\,\text{Cos}.\,(4R - \omega) \\ & + x.\,\text{Cos}.\,(4R - \omega) + n.\,\text{Cos}.\,(4R - a) \\ & \ldots\ldots\ldots + q + r.\,\text{Cos}.\,k.\ldots + u.\,\text{Cos}.\,(4R - o) \\ & + v.\,\text{Cos}.\,\alpha \end{aligned}$$

welches zur Prüfung der Abscissenlinie dient.

Die Ordinaten werden bis zum Wendungspunkte 16. negativ, für 17 = 0, und für die folgenden Winkelpunkte positiv, ausgenommen für 21, wegen der Rückkehr in 20.

Ich habe diese Rechnung rund um den Perimeter in unveränderter Richtung fortgeführt, um dabei zu zeigen, wie die goniometrischen Funktionen sich dem, früher in den §. §. 20. 21. bemerkten gemäß, ihrer Natur nach ändern, und nach vollendetem Cyklus wieder auf ihre ersten Werthe zurück kommen. Allein es ist keinesweges nothwendig, die Rechnung grade so durchzuführen, man kann, wenn man es leichter findet, von 1. bis 12. über 2. 3. u. s. w. und wieder von 1. bis 12. auf dem andern Wege über 21. 20. u. s. w. rechnen. Man braucht dabei nur die Figur umzukehren. Fände man es bequemer, nur von 1. bis 6. und dann wieder von 12. bis 6. so wie von 1. bis 17. und dann von 12. bis 16. zu rechnen, so hätte auch dieses kein Bedenken. Nach dem oben gesagten wird man über die Wahl der zu brauchenden Abweichungen und ihre Werthe nicht in Zweifel sein können.

§. 29.

Das Verfahren des Hrn. **Däzel**, eine Abscissenlinie ungefähr mitten durch das Vieleck zu nehmen, verdient ohne Zweifel alle Empfehlung, sowohl in Rücksicht auf die Verbesserung der Fehler, als auch wegen der, dadurch möglich gemachten Absätze in den Berechnungen, welche allerdings ermüdend werden können, wenn dieselben schlechterdings aus *einem* Anfangspunkte geführt werden sollen.

Wenn man nun mit Beibehaltung dieses Verfahrens eine *mittlere Normallinie* zur Abscissenlinie nimmt, so ist die Lage derselben schon gegeben, und es bedarf der Rechnung nicht, um die Winkel 2. 1. 12 $= \beta$; 11. 12. 1 $= \omega$ zu finden.

Die Länge der Abscissenlinie ist gleich der Summe der Abscissen für die einzelnen Winkelpunkte, und daher eben so zu finden, wie im vorigen §. Nr. 3. gezeigt worden. Um aber den Ort zu finden, wo die angenommene Abscissenlienie eine gegenüber stehende Seite des Vielecks, oder überhaupt, einer Winkelreihe schneidet, wird man erwägen, daß das ganze Vieleck bekannt, folglich auch die Lage eines Winkelpunkts, wie etwa 11. auf irgend einem Wege gegeben sei. Demnach ist die Ordinate für 11. bekannt, wie sie denn auch allemal aus der Gleichung in §. 28. Nr. 4 : $o = a. \operatorname{Sin} \beta + b. \operatorname{Sin} \delta + \ldots\ldots + (m - x) \operatorname{Sin} (4R - \omega)$ gefunden werden kann, weil darin nichts anders als x unbekannt ist, und man erhält das, von der Abscissenlinie abgeschnittne Stück der Seite m, oder:

$$x = \frac{a. \operatorname{Sin} \beta + b. \operatorname{Sin} \delta + \ldots\ldots + l. \operatorname{Sin} \psi}{\operatorname{Sin} (4R - \omega)} + m$$

$$= - \frac{a. \operatorname{Sin} \beta + b. \operatorname{Sin} \delta + \ldots\ldots + l. \operatorname{Sin} \psi}{\operatorname{Sin} \psi} + m$$

Es scheint nun zwar kein Grund vorhanden sein zu können, weshalb von der, bei weitem leichtern und adäquatern Annahme der Normale als Abscissenlinie abgewichen werden sollte; indessen läßt sich doch auch nicht erweisen, daß keine Verbindung von Umständen zur Wahl einer andern Abscissenlinie, als grade der Normale, bestimmen könnte, und es wird daher angemessen seyn, wenigstens das Nöthigste über einen solchen Fall hinzuzufügen.

Hätte nun etwa die Linie 1. 13. aus überwiegenden Gründen zur Abscissenlinie gewählt werden müssen, so kann man dabei doch ohne Zweifel erwarten, daß man diese Wahl auf eine bestimmte Weise werde bezeichnen können, oder daß sie mit karakteristischen Kennzeichen vorgeschrieben werde. Dieses heißt nun doch wohl so viel, daß die Richtung der neuen Abscissenlinie, oder ihre Lage gegen bekannte Punkte des Vielecks gegeben sei Und damit dies geschehe, muß entweder die Abweichung der Abscissenlinie von der Normale, folglich der Winkel 12. 1. 13. oder der Endpunkt 13. in seiner Lage gegen die übrigen Punkte des Vielecks, folglich die Ordinate desselben, gegeben sein.

1. Wofern nun erstlich die Abweichung der neuen Abscissenlinie von der Normale gegeben ist, so kann die Projektion der Winkelpunkte auf die Abscissenlinie alsbald geschehen, wenn man die ganze Figur um irgend einen Punkt, z. B. um 1. oder 6. so viel gedrehet denkt, als die Abweichung der Abscissenlinie von der Normale beträgt, oder mit andern Worten, wenn man alle Normalen so viel drehet, als die gedachte Abweichung der Abscissenlinie von der ersten Normale aus macht. Hätte man nun schon zu Anfang der Messung gewußt, wie die Abscissenlinie liegen solle, so würde man dieselbe begreiflich sogleich als Normale gebraucht, alle andre Normale an den Winkelpunkten damit parallel gelegt, und dann ohne weitere Abänderung eben das Verfahren befolgt haben, welches der vorige §. 28. angiebt, so wie man denn auch eben dieselben Ausdrücke erhalten würde. Wird hingegen die Abscissenlinie nach Beendigung der Messung gegeben oder gewählt, so bringt man diese Messung auch leicht auf die neue Abscissenlinie, indem man die Beobachtungen der Abweichungen (d. i. die Winkel β, δ, η, u. s. w.) um so viel abändert, als die Abscissenlinie von der Normale abweicht. Ist z. B. dieser letzte Abweichungswinkel $= \eta$, so wer-

den die Abweichungen an den Winkelpunkten = $(\beta + \eta)$; $(\delta + \eta)$......; $(\lambda - \eta)$; $(\mu - \eta)$.....; $(\varkappa - \eta)$; $(g - \eta)$; $(k + \eta)$; u. s. w. und man erkennt leicht, wie sich die, im Manual verzeichneten Abweichungen ändern. Mit diesen veränderten, und auf die Abscissenlinie bezogenen Abweichungen wird nun übrigens ganz nach dem vor. §. 28. verfahren.

2. Wären aber zweitens, nicht die Abweichung der Abscissenlinie von der ersten Normale, sondern die Lage ihres Endepunkts 13. gegeben, so erkennt man leicht, daß die Abweichung der Abscissenlinie von der Normale, oder der Winkel 12. 1. 13. auch in diesem Falle gefunden werden könne. Wofern die Lage des Endpunkts 13. nicht anders als durch die Projektion der Polygonal-Winkelpunkte auf die Normale YZ gegeben ist, so hat man doch

$$\text{tang. } 12.\ 1.\ 13. = \frac{\text{Summe der Ordinaten}}{\text{Summe der Abscissen}}$$

oder nach §. 28. Nr. 5.

$$-\text{tang. } 12.\ 1.\ 13. = \left\{\begin{array}{l} n.\,\text{Sin}\,(4R-\mathfrak{a}) + o\,\text{Sin}\,(4R-\mathfrak{b}) \\ +\,p.\,\text{Sin}\,(4R-\mathfrak{d}) + q.\,\text{Sin}\,4R \\ +\,r.\,\text{Sin}\,\mathfrak{k} + s.\,\text{Sin}\,\mathfrak{m} + \\ t.\,\text{Sin}\,\mathfrak{n} + u.\,\text{Sin}\,(4R-\mathfrak{v}) \\ +\,v.\,\text{Sin}\,\alpha \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l} x.\,\text{Cos.}\,(4R-\omega) + \\ n.\,\text{Cos.}\,(4R-\mathfrak{a}) + \\ o.\,\text{Cos.}\,(4R-\mathfrak{b}) + \\ p.\,\text{Cos.}\,(4R-\mathfrak{d}) + \\ q\ \text{Cos.}\,(4R+\ \ ) + \\ r.\ \text{Cos}\,\mathfrak{k} + s\,\text{Cos}\ \mathfrak{m} + \\ t\ \text{Cos}\,\mathfrak{n} + u.\,\text{Cos}\,(4R-\mathfrak{v}) \\ +\,v.\,\text{Cos.}\,\alpha \end{array}\right\}$$

Um diesen Ausdruck aufzulösen, muß man zuvor x, oder das von der Normale abgeschnittene Stück der Seite 11. 13. ausgemittelt haben: wozu im Anfange dieses §. Veranlassung gegeben ist.

Die Tangente wird nicht negativ (wenigstens nicht anders, als dieses durch den eignen Werth der Summen der Ordinaten und Abscissen etwa geschehen könnte) sondern der Nenner des obigen Ausdrucks ist an sich verneint, weil alle Abscissen verneint sind, und das vorgesetzte negative Zeichen dient nur zur Auflösung dieser Negationen. Nemlich, ich habe die Abscissen und Ordinaten hier so beibehalten, wie sie im vor. §. 28. aufgestellt sind, als wären sie alle aus einem Punkte gezählt. Dieses ist aber nur geschehen, um in einer konsequenten Schlußfolge zur Erleichterung der Uebersichtlichkeit zu bleiben, und den Zusammenhang der goniometrischen Funktionen durch keine neu eingeführte Supposition zu stören. Bei jener Zählungsweise wurde nun die Richtung der Abscisse ZY negativ, wenn die andre, YZ positiv genommen war. Allein dieses ist eine relative Vorstellung, welche sich blos auf den Anfangspunkt der Abscissen bezieht, und kann auf den Werth der Tangente einer neuen, davon unabhängigen Abweichung keinen Einfluß haben. Wollte man jedoch bei derselben Relation stehen bleiben, so würde die Abscissenlinie 1. 13. sich von YZ an um den Anfangspunkt der Abscissen 1. rückwärts durch 11.... 10.... 6.... 1. 21.... u. s. w. gedrehet haben, und alsdann auch die Tangente des Winkels allerdings verneint sein, weil die Winkel $= (4R - \eta)$ sein würde. — Wer aber wirklich in die Lage käme, eine solche Rechnung zu führen, würde die Abscissen doch wohl nicht von dem entferntesten Punkte aus zählen, und rund um die Figur herum gehen, sondern damit da anfangen, wo die nöthige Rechnung anfängt, in welchem Falle die Abscissen positiv werden.

Uebrigens muß ich noch zum Beschluß bemerken, daß die Voraussetzung, worauf die Rechnung hier gegründet ist, daß nemlich nichts als die Lage des Endpunkts 13. in Bezug auf die Normale YZ, gegeben sei, nicht füglich statuirt werden darf. Man sieht, daß unter solchen Umständen das ganze Vieleck zuerst auf die Normale YZ bezogen, und gänzlich berechnet werden müsse, bloß um den Winkel der Abweichung einer neuen Abscissenlinie zu finden, da dann die Rechnung in Bezug auf diese letzte Linie noch einmal zu führen wäre. Das hieße etwa so viel: man habe sich nach der Hand anders besonnen — was aber nicht zulässig ist; und sich auch bei einer, gehörig angelegten Messung nicht annehmen läßt. Es ist billig, vorauszusetzen, daß alle Umstände vorher erwogen worden, und in diesem Falle wird der Geometer die doppelte Rechnung, welche bei größern Arbeiten viel Zeit raubt, und durch die Einförmigkeit sehr ermüdet, ohne Zweifel ersparen.

Vierter Abschnitt.

§. 30.

Der Gegenstand, welcher in den §.§. 10 — 12. des 2ten Abschnitts kurz berührt wurde, ist dort abgebrochen, um den Nutzen der Methode der Normalen auch bei andern trigonometrischen Fragen zu zeigen, welche in der praktischen Meßkunst häufig aufgelöset werden müssen.

Jetzt wird es aber doch nützlich seyn, die dort abgebrochenen Betrachtungen noch etwas weiter fortzusetzen.

Im §. 11. wurde gezeigt, daß die Beobachtung der Abweichungen, ODC, ODB, Fig. 4. hinreiche, die Winkel des Dreiecks BCD zu finden, und daher nur noch ein Maasstab nöthig sei, um auch die Seite BC (oder BD, CD) zu bestimmen. Eben dasselbe muß auch für die andre Seite AB gelten, wenn die Winkel des Dreiecks ABD durch die Beobachtung der Abweichungen ODB, ODA, gefunden sind. Wenn daher auch die Entfernungen AB, BC unbekannt oder nicht meßbar sind, so lassen sie sich doch auf dem eben angedeuteten Wege finden, sofern nur der zugehörige Maasstab ausgemittelt ist.

Gesetzt, man hätte, wie in §. 12. noch einen zweiten Punkt E, daran die Normale gezogen, und die Abweichungen PEA, PEB beobachtet wären, so würde die Linie ED den verlangten Maasstab abgeben, wenn sie gemessen, und ihre Abweichung EDR oder ODE beobachtet werden kann. In diesem Falle sind in dem Dreieck BDE bekannt.

Die Seite DE

der Winkel $BDE = 2R - (ODB + RDE)$

— — $DEB = 2R - (PEB - RDE)$

und man hat daher

$$BD = ED. \frac{\text{Sin } DEB}{\text{Sin } EBD}$$

$$BE = ED. \frac{\text{Sin } BDE}{\text{Sin } EBD}$$

In dem Dreieck BCD sind, ausser der Seite BD auch noch die Winkel $CDB = ODB - ODC$

$CBD = MBC - ODB$

bekannt, und daher

die Seite $BC = BD. \frac{\text{Sin } CDB}{\text{Sin } BCD}$

$$= ED. \frac{\text{Sin } BED.\ \text{Sin } CDB}{\text{Sin } EBD.\ \text{Sin } BCD}$$

Auf gleiche Weise sind in dem Dreieck ABE, ausser der Seite BE auch noch

der Winkel $AEB = PEB - PEA$

— — $BAE = MBA + PEA$

bekannt, und man erhält

die Seite $AB = BE . \frac{\text{Sin } AEB}{\text{Sin } BAE}$

$= ED \frac{\text{Sin } BDE . \text{ Sin } AEB}{\text{Sin } EBD . \text{ Sin } BAE}$

Dies heißt nun überhaupt so viel: von einer gegebnen oder gemessenen Standlinie (ED) an welcher die Abweichungen nach je zwei entfernten Orten (wenn auch der dritte Ort von einem Standpunkte nicht gesehen werden kann; z. B. A in D, und C in E nicht sichtbar ist) beobachtet sind, können die Entfernungen der Orte, (A, B, C.) unter einander bestimmt werden. Der Weg dazu ist äußerst einfach, und die Ausdrücke für die gesuchten Seiten sind es nicht minder. Die Sache aber ist nützlich, und wird durch die Leichtigkeit des Weges um so viel brauchbarer.

Wenn aber der Punkt E von D nicht gesehen, folglich die Abweichung RDE nicht beobachtet werden kann, so wird die Sache schon weit schwieriger. Den Abweichungswinkel RDE direkt zu finden, sehe ich noch kein Mittel, wenn keine Linie von bekannter Abweichung gegeben ist. Alle Winkel an den fünf Punkten A, B, C, D, E, können unverändert bleiben, und dennoch bleibt die Lage von D oder E veränderlich, wofern nicht auch der Winkel RDE — oder ein andrer, der die Lage von DE bestimmt — gegeben ist. Nur in dem einzigen Falle, wo die Punkte A, B, C, indem sie verrückt werden, doch in derselben Normale bleiben, behalten auch D und E ihre unveränderte Lage gegen einander. Dies ist aber ein ganz einzelner Fall unter allen übrigen möglichen, wovon die Entwickelung eben deshalb unnütz ist. Beiläufig zeigt aber diese Bemerkung, von welcher wesentlichen Erleichterung der Gebrauch der Normalen auch hier ist. Denn ohne diese letztern würde die vorstehende Aufgabe, welche sich so leicht auflöset, schwer zu lösen sein.

Es kann aber gleich wohl der Fall sein, daß man ED zur Standlinie zu wählen gute Gründe hätte, ungeachtet diese Linie nicht übersehen und nicht gemessen werden könnte. Man kommt alsdann noch am kürzesten zum Ziel, wenn sich irgendwo zwei Punkte wie F, G, ausserhalb der Linie ED finden lassen, deren Entfernung von einander man messen, und von wo aus man die Punkte D und E sehen, folglich die Abweichungen beobachten kann. Man hat dann die Bedingungen eines bekannten trigonometrischen Problems, in welchem aus der Seite FG und den beobachteten Winkeln SFD, SFE u. s. w. die Seite ED und der Winkel FED gefunden werden. Alsdann ist, wegen der Parallelität der Normalen

$$SFE = 2R - FEV$$

$$FEV = FED + VED$$

$$VED = RDE$$

$$SFE = 2R - (FED + RDE)$$

daher $RDE = 2R - (SFE + FED)$

welches die gesuchte Abweichung ist, mit deren Hülfe das obige Problem gelöset wird.

§. 25.

Wenn die vorstehende Betrachtung keinen andern Zweck hätte, als für ein Problem, welches sich ohne Hülfe der Normalen schwer, oder gar nicht lösen läßt, eine leichte Solution vorzutragen, so möchte sie an sich noch immer ihren Werth haben, allein sie würde nicht hierher gehören, und ich hätte derselben auch diesen Platz nicht eingeräumt. Es scheint mir jedoch, daß das goniometrische Verfahren in der Maaße vorzüglicher wird, als es die unmittelbare Messung der Linien mehr und mehr vermeidet. Bei diesen Messungen werden stets Fehler begangen, und sie rauben eine sehr ansehnliche Zeit, welche zuweilen auf Kosten der Genauigkeit erspart wird. Dazu müssen diese Messungen im Felde geschehen während einer Zeit, in welcher die goniometrischen Operationen grade am besten vorzunehmen sind, wogegen die Berechnung der Linien zu den Hausarbeiten gehört, die auf bequeme Muße recht wohl warten, und man zu jeder Tages- nnd Jahreszeit vornehmen kann. Die berechneten Linien aus genau gemessenen Winkeln werden auch weit weniger Fehler enthalten, als die unmittelbar gemessenen, und die Genauigkeit der Arbeit gewinnt in eben dem Verhältniß als man den Messungen die Rechnung substituiren kann.

Die Goniometrie erhält ihre wahre und vorzüglichste Bedeutung durch die Anwendung der Rechnung statt der Messung; denn durch die Beobachtung der Abweichungen der Linien und Punkte von einander bringt sie zur Kenntniß der innern Verhältnisse dieser Linien unter sich, und es kommt dann nur noch auf die Erfindung eines Maaßstabes an, um eine ganze Figur aufzulösen.

Dieses sind die Gründe welche mich bewogen haben, hier etwas über den Weg zu sagen, auf welchem sich ein solcher Maaßstab finden ließe, und aus welchem die Seiten einer Winkelreihe oder eines Polygons bequem berechnet werden könnten. Die Grundidee ist auch hier nicht neu, sondern bei Triangular-Operationen längst angewandt, und es kommt nur darauf an, ob die Anwendung so zweckmäßig und bequem sei, als sich für die Fälle der speciellen Geodäsie wünschen läßt. Meine Gedanken darüber will

will ich hier in möglichster Kürze zur Prüfung, Beurtheilung und Verbesserung vortragen, und dazu habe ich das Problem des vor. §. gebraucht. —

Es sei nunmehr A, B, C, ... O ... Fig. 22. ein Theil einer Winkelreihe oder des Perimeters eines Vielecks, daran die Abweichungen von einer gegebnen oder angenommenen Normallinie beobachtet worden. Von den Seiten AB, BC, u. s. w. sind aber keine gemessen, sondern dieselben sollen berechnet werden.

Man nehme die Punkte V, W, ausserhalb oder innerhalb der Winkelreihe so vortheilhaft als möglich, d. h. so, daß die möglich größte Anzahl von Winkelpunkten aus beiden Standorten V und W frei übersehen werden könne. Auch ist es vortheilhaft, darauf Rücksicht zu nehmen, daß die Linie VW so lang genommen werde als die Umstände gestatten, und daß sie mit der Hauptrichtung der Winkelreihe ABC .... O ... einigermaaßen parallel laufe. Man erhält hierdurch die Vortheile bequemer, und gleichförmig variirender Winkel, wodurch die Fehler vermieden werden, welche mit sehr spitzen oder stumpfen Winkeln verbunden sind.

Die Lage und Länge der Standlinie VW sei nun übrigens unmittelbar gemessen, oder durch eine vorgängige Operation und Rechnung bestimmt worden, so kann diese Linie hier in jeder Rücksicht als bekannt angenommen werden, und macht demnach eine solche Grundlinie aus, von welcher alle Seiten der Winkelreihe oder des Polygons, so weit dieselben von V W aus sichtbar sind, berechnet werden können.

In dem Standorte V beobachte man nun die Abweichungen PVK, PVI, PVH ...... PVA, und in dem Standorte W, die Abweichungen QWK, QWI, QWH ..... QWA; so hat man in den Dreiecken VKW, VIW, VHW ..... VAW, die Seite VW, nebst den Winkeln KVW, KWV; IVW, IWV; HVW, HWV: ..... AVW, AWV; woraus sich die Linien KW, IW, HW .... u. s. w. und die andern AV, BV, CV .... u. s. w. sehr leicht entwickeln lassen.

Um den Zweck der Rechnung zu erreichen, nemlich um die Seiten AB, BC, CD .... IK .... zu bestimmen, ist es übrigens keinesweges nöthig, alle Seiten AV, AW; BV, BW; ...... KV, KW; .... zu kennen; sondern man übersieht hier schon, daß es schon hinreiche, wenn man nur die Hälfte dieser Seiten berechnet, wobei man noch den Vortheil hat, die bequemsten der Lage nach wählen zu können. In der Fig. 22. nehme man z. B. die Seiten AV, BV, ... FV, und dann GW, HW .... bis KW, so finden sich in jedem Dreieck wie ABV, BCV, ... u. s. w. und IKW, HIW ... u. s. w. eine Seite und alle drei Winkel bekannt, um die Seite AB, BC .... IK ... zu finden. Die Zahl der nöthigen Berechnungen wird sich aber noch weiter deprimiren lassen, wie ich bald anführen werde.

§. 32.

Ich will die Abweichungswinkel der Polygonal-Seiten nach der Reihe a, b, c, ... k, und die Abweichungen der Gesichtslinien in V nach A, B, C ... u. s. w. α, β, γ .... λ, μ ... in W, aber a. b, c, ... h, k, und endlich die Abweichung der Standlinie $VW = \omega$ nennen, so daß $PVA = \alpha$; $PVB = \beta$; $PVC = \gamma$ .... u. s. w. $TWA = a$; $TWB = b$; $TWC = c$; ...... $TWG = h$; $TWI = i$; $TWK = k$.

Man hat alsdann zur Berechnung der Seiten AV, BV, CV .... und KW, IW, HW ... u. s. w.

in den Dreiecken AVW, BVW, CVW ..... GVW ..... KVW, folgende bekannte Stücke.

1. Die bekannte Seite

$$VW = A.$$

2. Die Winkel

$$WVA = PVA + PVW = \alpha + \omega$$
$$WVC = PVC + PVW = \gamma + \omega$$
$$WVB = PVB + PVW = \beta + \omega$$

3. Die Winkel

$$VWA = 2R - (TWA + PVW) = 2R - (a + \omega)$$
$$VWB = 2R - (TWB + PVW) = 2R - (b + \omega)$$
$$VWC = 2R - (TWC + PVW) = 2R - (c + \omega)$$

4. Die Winkel

$$\begin{aligned} VAW &= 2R - (WVA + VWA) \\ &= 2R - (\alpha + \omega) - 2R + (a + \omega) \\ &= a - \alpha \\ VBW &= 2R - (WVB + VWB) \\ &= 2R - (\beta + \omega) - 2R + (b + \omega) \\ &= b - \beta \\ VCW &= 2R - (WVC + VWC) \\ &= 2R - (\gamma + \omega) - 2R + (c + \omega) \\ &= c - \gamma \end{aligned}$$

u. s. w.

woraus sich denn die Seiten

$$AV = A. \frac{\text{Sin}\,(a + \omega)}{\text{Sin}\,(a - \alpha)}$$

$$BV = A. \frac{\text{Sin}\,(b + \omega)}{\text{Sin}\,(b - \beta)}$$

$$CV = A. \frac{\text{Sin}\,(c + \omega)}{\text{Sin}\,(c - \gamma)}$$

$$DV = A.\ \frac{\operatorname{Sin}(\mathfrak{d} + \omega)}{\operatorname{Sin}(\mathfrak{d} - \delta)}$$

u. s. w. ergeben. Auf gleiche Weise erhält man

1. die Winkel

$$WVK = PVK + PVW = \mu + \omega$$
$$WVI = PVI + PVW = \lambda + \omega$$
$$WVH = PVH + PVW = \varkappa + \omega$$

2. die Winkel

$$\begin{aligned} VWK &= 2R - (TWK + PVW) \\ &= 2R - (\mathfrak{k} + \omega) \\ VWI &= 2R - (TWI + PVW) \\ &= 2R - (i + \omega) \\ VWH &= 2R - (TWH + PVW) \\ &= 2R - (\mathfrak{h} + \omega) \end{aligned}$$

3. die Winkel

$$\begin{aligned} VKW &= 2R - (WVK + VWK) \\ &= 2R - (\mu + \omega) - 2R + (\mathfrak{k} + \omega) \\ &= \mathfrak{k} - \mu \\ VIW &= 2R - (WVI + VWI) \\ &= 2R - (\lambda + \omega) - 2R + (i + \omega) \\ &= i - \lambda \\ VHW &= 2R - (WVH + VWH) \\ &= 2R - (\varkappa + \omega) - 2R + (\mathfrak{h} + \omega) \\ &= \mathfrak{h} - \varkappa \end{aligned}$$

u. s. w.

woraus sich die Seiten

$$KW = A.\ \frac{\operatorname{Sin}(\mu + \omega)}{\operatorname{Sin}(\mathfrak{k} - \mu)}$$

$$IW = A.\ \frac{\operatorname{Sin}(\lambda + \omega)}{\operatorname{Sin}(i - \lambda)}$$

$$HW = A. \frac{\mathrm{Sin}\,(\varkappa + \omega)}{\mathrm{Sin}\,(\mathfrak{h} - \varkappa)}$$

u. s. w. finden lassen.

Man wird nun aus der vorstehenden Auseinandersetzung sogleich erkennen, wie sich die Werthe der Winkel jedes mal ergeben, und wie sie durch bloße Addition und Subtraktion für jeden Polygonal-Winpunkt — jedoch mit Bezug auf den Standort V. oder W, gefunden werden.

§. 33.

Nach der Bestimmung dieser Seiten AV, BV, CV ..... HW, IW, KW ..... sind nun in den Dreiecken ABV, BCV, CDV ..... HIW. IKW ..... alle Winkel und zwei Seiten bekannt; man wird also die dritte noch fehlende Seite AB, BC .... HI, IK ... welche die Polygonal-Seite ist, auf jedem beliebigen Wege finden können. Die Wahrnehmung aber, daß auf dem, im vor. §. angezeigten Wege mehr Stücke gefunden werden, als zur Bestimmung der Seiten AB, BC u. s. w. nöthig sind, giebt nun hier Veranlassung, die am Schlusse des §. 31. gemachte Bemerkung zu bestätigen. Man übersieht nemlich leicht, daß man nicht alle Seiten wie AV, BV, CV ..... KW, IW, HW ..... berechnen dürfe, sondern an einer Seite für zwei aneinander liegende Dreiecke, wie z. B. an BV für die Dreicke ABV, BCV oder IW für die Dreiecke IKW, HIW genug habe.

Man findet die Winkel in diesen Dreiecken so:

$$AVB = WVA - WVB$$
$$= (\alpha + \omega) - (\beta + \omega) = \alpha - \beta$$
$$BVC = WVB - WVC$$
$$= (\beta + \omega) - (\gamma + \omega) = \beta - \gamma$$

$$CVD = WVC - WVD$$
$$= (\gamma + \omega) - (\delta + \omega) = \gamma - \delta$$
$$DVE = WVD - WVE$$
$$= (\delta + \omega) - (\varepsilon + \omega) = \delta - \varepsilon$$

$$VAB = a - PVA = a - \alpha$$
$$VBC = b - PVB = b - \beta$$
$$VCD = c - PVC = c - \gamma$$
$$VDE = d - PVD = d - \delta$$
$$VCB = 2R - b + PVC = 2R - (b - \gamma)$$
$$VED = 2R - d + PVE = 2R - (d - \varepsilon)$$

und ferner:

$$KWI = TWI - TWK = i - \mathfrak{k}$$
$$IWH = TWH - TWI = \mathfrak{h} - i$$
$$HWG = TWG - TWH = \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$$
$$GWF = TWF - TWG = \mathfrak{f} - \mathfrak{g}$$

$$IKW = 2R - i + TWK = 2R - (i - \mathfrak{k})$$
$$HIW = 2R - h + TWI = 2R - (h - i)$$
$$GHW = 2R - g + TWH = 2R - (g - \mathfrak{h})$$
$$FGW = 2R - f + TWG = 2R - (f - \mathfrak{g})$$
$$IHW = h - TWH = h - \mathfrak{h}$$

Man hat nunmehr in dem Dreieck ABV

$$AB : BV = \text{Sin}\, AVB : \text{Sin}\, VAB$$
$$= \text{Sin}\,(\alpha - \beta) : \text{Sin}\,(a - \alpha)$$
$$AB = BV . \frac{\text{Sin}\,(\alpha - \beta)}{\text{Sin}\,(a - \alpha)}$$

vorhin war:

$$BV = A. \frac{\sin(b + \omega)}{\sin(b - \beta)}$$

daher:

$$AB = A. \frac{\sin(b + \omega)}{\sin(b - \beta)} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(a - \alpha)}$$

Ferner im Dreieck BCV

$$BC : BV = \sin BVC : \sin VCB$$

$$= \sin(\beta - \gamma) : \sin(2R - (b - \gamma))$$

$$BC = BV. \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(b - \gamma)}$$

$$BC = A. \frac{\sin(b + \omega)}{\sin(b - \beta)} \cdot \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(b - \gamma)}$$

Im Dreieck CDV.

$$CD : DV = \sin CVD : VCD$$

$$= \sin(\gamma - \delta) : \sin(c - \gamma)$$

$$CD = DV. \frac{\sin(\gamma - \delta)}{\sin(c - \gamma)}$$

es war vorhin

$$DV = A. \frac{\sin(d + \omega)}{\sin(d - \delta)}$$

daher

$$CD = A. \frac{\sin(d + \omega)}{\sin(d - \delta)} \cdot \frac{\sin(\gamma - \delta)}{\sin(c - \gamma)}$$

Im Dreieck DEV.

$$DE : DV = \sin DVE : \sin VED$$

$$= \sin(\delta - \varepsilon) : \sin(2R - (d - \varepsilon))$$

$$DE = DV. \frac{\sin(\delta - \varepsilon)}{\sin(d - \varepsilon)}$$

$$= A. \frac{\text{Sin}(\mathfrak{d} + \omega)}{\text{Sin}(\mathfrak{d} - \delta)} \cdot \frac{\text{Sin}(\delta - \varepsilon)}{\text{Sin}(d - \varepsilon)}$$

Von der andern Seite gerechnet hat man im Dreieck IKW

$$IK : IW = \text{Sin}\, IWK : \text{Sin}\, IKW$$
$$= \text{Sin}(i - \mathfrak{k}) : \text{Sin}(i - \mathfrak{k})$$

$$IK = IW. \frac{\text{Sin}(i - \mathfrak{k})}{\text{Sin}(i - \mathfrak{k})}$$

vorhin war gefunden

$$IW = A. \frac{\text{Sin}(\lambda + \omega)}{\text{Sin}(i - \lambda)}$$

daher

$$IK = A. \frac{\text{Sin}(\lambda + \omega)}{\text{Sin}(i - \lambda)} \cdot \frac{\text{Sin}(i - \mathfrak{k})}{\text{Sin}(i - \mathfrak{k})}$$

Im Dreieck HIW

$$HI : IW = \text{Sin}\, HWI : \text{Sin}\, IHW$$
$$= \text{Sin}(\mathfrak{h} - i) : \text{Sin}(h - \mathfrak{h})$$

$$HI = IW. \frac{\text{Sin}(\mathfrak{h} - i)}{\text{Sin}(h - \mathfrak{h})}$$

$$= A. \frac{\text{Sin}(\lambda + \omega)}{\text{Sin}(i - \lambda)} \cdot \frac{\text{Sin}(\mathfrak{h} - i)}{\text{Sin}(h - \mathfrak{h})}$$

Nur um über die Verbindung der Winkel, deren Summen oder Differenzen in den Rechnungssätzen vorkommen, keinen Zweifel zu lassen, habe ich die Ausdrücke so weit fortgesetzt. Wenn man sich die Summen und Differenzen so untereinander schreibt:

$$
\begin{array}{llll}
\dfrac{\mathfrak{a}+\omega}{\mathfrak{a}-\alpha} \ldots\ldots \dfrac{\mu+\omega}{\mathfrak{k}-\mu} & & \dfrac{\alpha-\beta}{a-\alpha} & \\
\dfrac{\mathfrak{b}+\omega}{\mathfrak{b}-\beta} \ldots\ldots \dfrac{\lambda+\omega}{\mathfrak{i}-\lambda} & & \dfrac{\beta-\gamma}{b-\gamma} \ldots\ldots & \dfrac{\mathfrak{l}-\mathfrak{k}}{i-\mathfrak{k}} \\
\dfrac{\mathfrak{c}+\omega}{\mathfrak{c}-\gamma} \ldots\ldots \dfrac{\varkappa+\omega}{\mathfrak{h}+\varkappa} & & \dfrac{\gamma-\delta}{c-\gamma} \ldots\ldots & \dfrac{\mathfrak{h}-\mathfrak{i}}{h-\mathfrak{h}} \\
\dfrac{\mathfrak{d}+\omega}{\mathfrak{d}-\delta} & & \dfrac{\delta-\varepsilon}{d-\varepsilon} &
\end{array}
$$

so kann man unmöglich über die Fortschritte ungewiß bleiben, worin diese Summen und Unterschiede für die Berechnung aller Polygonal-Seiten zu nehmen sind. Wenn man sich von den, hierin herrschenden Gesetzen eine deutliche Vorstellung macht, so kann man die, bei jedem Rechnungssatze zu brauchenden Winkel gradezu hinschreiben, ohne die Operation aus der Figur erst herzuleiten. Da sich auch die Polygonal-Seiten auf verschiedenen Wegen, z. B. BC durch BV, oder CV, oder CW finden lassen, so behält man die freie Wahl der bequemsten Winkel. Uebrigens empfehlen sich diese Rechnungssätze eben so wohl durch ihre einfache und übersichtliche Gestalt, welche sich dem Gedächtnisse bald einprägt, als durch ihre Bequemlichkeit zur logarithmischen Auflösung.

§. 27.

Auf die vorstehende Weise wären denn alle Polygonal-Seiten von A bis K, oder soweit die Winkelreihe von V und W aus, zu übersehen ist, sehr leicht berechnet — eine Arbeit, welche sich im Zimmer mit aller Muße und großer Genauigkeit ausführen läßt, während die wirklichen Messungen zeitraubend, beschwerlich und fehlerhaft ausfallen. Um daher auch einem andern Theil des Perimeters, oder einer, von V und W aus, nicht sichtbaren Winkelreihe, z. B. von K bis O .... durch ähnliche Rechnung zu finden, wird man eine andre Standlinie, z. B. YZ nehmen müssen. Man kann eine solche Linie messen — oder auch berechnen.

Zum Behuf des letztern lassen sich wohl mancherlei Kombinationen denken: um eine davon auszuwählen nehme ich einmal an, daß die Endpunkte einer neuen Standlinie YZ, zwar von dem einen Punkte W, der erstern gesehen werden können, daß aber am andern Punkte V, nur das nächste Ende Y, der neuen Standlinie sichtbar sei.

In dem Dreieck VWY sind die Winkel WVY und VWY nebst der Seite VW bekannt, und man kann daher die Seite WY bestimmen.

Man erhält:

$$WY = A. \frac{\text{Sin } WVY}{\text{Sin}(WVY + VWY)}$$

Wenn man demnächst in Y die Abweichung des Punkts Z, d. i. SYZ beobachtet, so hat man auch in den Dreieck WYZ die Seite WY, den Winkel $YWZ = TWZ - TWY$, und den Winkel $WYZ = 2R - SYZ + TWY$. Hieraus ergiebt sich nun die Seite

$$YZ = WY. \frac{\text{Sin } YWZ}{\text{Sin } WZY}$$

$$= A. \frac{\text{Sin } WVY}{\text{Sin}(WVY + VWY)} \cdot \frac{\text{Sin }(TWZ - TWY)}{\text{Sin }(SYZ - TWZ)}$$

Hiernach kann nun der Theil des Perimeters K, L, M, N, O, ... völlig ebenso von YZ aus bestimmt werden, als vorhin der Theil A.......K von VW aus berechnet würde, und man sieht, daß es an sich nicht die geringste Schwierigkeit habe, mit 3 oder 4 solchen Standlinien um eine ganze Figur herum zu gehen, ohne mehr als eine einzige Linie zu messen.

Indessen will ich hiermit doch keinesweges geläugnet haben, daß nicht Umstände eintreten könnten, wodurch die unmittelbare Messung der Standlinien YZ, u. s. w. zweckmäßiger werden möchte als die Berechnung. Es ist hier blos im allgemeinen von dem Wege die Rede, auf welchem sich die verlangten Resultate durch Rechnung finden lassen, ohne daß jedoch alle andre Operationen unmittelbarer Messungen ausgeschlossen wären.

§. 35.

Es ist bei der Berechnung der Polygonal-Seiten aus einer, oder einigen Standlinien in jeder Rücksicht wünschenswerth, der letztern so wenig zu haben, als die Umstände irgend gestatten. Die Wahl der Endpunkte solcher Linien hängt vorzüglich davon ab, daß der möglich größte Theil des Perimeters oder der Winkelreihe übersehen werde, und die Winkel, welche die Gesichtslinien nach den Polygonal-Winkelpunkten mit der Standlinie machen, eine bequeme Größe haben. Wenn nur diese Endpunkte, als die eigentlichen Beobachtungsorte diese vortheilhafte Lage haben, so kann ihre Wahl dadurch nicht beschränkt werden, daß die Linie, welche sie verbindet, nicht übersehen, und nicht gemessen werden kann. Man wird doch eine andre Linie, wie AB, finden, welche die, im §. 30. angeführten Eigenschaften hat, und durch welche also die Länge der Linie VW bestimmt werden kann. Es scheint sogar nützlich, eine solche kleinere Linie AB zu messen, und die größere, eigentliche Standlinie VW, daraus zu berechnen, weil die Messung so langer Linien, wenn sie mit Genauigkeit geschehen soll, oft mit vielen Schwierigkeiten verbunden ist, welche man durch die Wahl einer kleinern vermeidet. In jedem Falle muß jedoch die gemessene Linie mit der größten Sorgfalt und Genauigkeit bestimmt werden, weil darauf die Richtigkeit der ganzen Operation beruhet, wie es an sich schon einleuchtet.

Kann man die erste Grund- und Standlinie VW in das Innere der Figur verlegen, so ist dieses ohne Zweifel sehr oft vortheilhaft, theils weil man im Innern weit mehr Winkelpunkte übersehen, theils, weil man mit der gehörigen Aufmerksamkeit, so zu sagen im Vorbeigehen, eine große Anzahl von Punkten zum Anhalt und zur Beschleunigung der Detail-Messung fest legen kann. Es ist jedoch nicht allemal möglich oder aus andern Rücksichten räthlich, die erste Grundlinie in dem innern Raum eines Polygons zu ziehen, und in solchen Fällen wird man sich der, vorhin angegebenen Methode mehr oder weniger bedienen müssen.

Hierbei ist es wohl möglich, daß die Standlinien wie VW, YZ eine solche Lage gegen einen Theil des Perimeters erhalten, daß einzelne Seiten desselben nicht hinreichend übersehen werden können, so wie dieses in der Fig. 22. bei der Linie KL der Fall ist. Man kann nun solche Linien, deren es bei gehöriger Wahl der Standlinien, immer doch nur wenige geben wird, unmittelbar messen, wofern dieses für das kürzeste gehalten wird: man kann sie aber auch berechnen. Zu diesem Endzweck bemerke man, daß in den Dreiecken KWY und LWY alles bekannt sei, was erfordert wird, um die Seite KY oder auch LY zu bestimmen. Wenn eine dieser Seiten bekannt ist, so kann auch die Seite KL im

Dreieck KYL berechnet werden. Da diese Sache ganz einfach ist, und völlig mit demjenigen übereinstimmt, was zur Berechnung der Seiten AB, BC u. s. w. bereits in den §. §. 32. 33. ausführlich nachgewiesen, so kann ich mich hier darauf beschränken, bloß die Rechnungssätze herzustellen.

Wenn daher $TWY = m$; $SYK = \nu$; $SYL = \varrho$, so ist

$$KY = WK. \frac{\text{Sin } KWY}{\text{Sin } KYW}$$

$$= WK. \frac{\text{Sin } (k - m)}{\text{Sin } (\nu - m)}$$

und weil im §. 32.

$$WK = A. \frac{\text{Sin } (\mu + \omega)}{\text{Sin } (k - \mu)}$$

$$KY = A. \frac{\text{Sin } (\mu + \omega)}{\text{Sin } (k - \mu)} \cdot \frac{\text{Sin } (k - m)}{\text{Sin } (\nu - m)} -$$

ferner:

$$KL = KY. \frac{\text{Sin } KYL}{\text{Sin } KLY}$$

$$= KY. \frac{\text{Sin } (\varrho - \nu)}{\text{Sin } (k - \varrho)}$$

$$KL = A. \frac{\text{Sin } (\mu + \omega)}{\text{Sin } (k - \mu)} \cdot \frac{\text{Sin } (k - m)}{\text{Sin } (\nu - m)} \cdot \frac{\text{Sin } (\varrho - \nu)}{\text{Sin } (k - \varrho)}$$

Man sieht leicht, wie auch dieser Ausdruck denen des §. 33. vollkommen ähnlich sei, indem der vierte Faktor nur von dem Mangel des Winkels PVL herrührt. Wo fern die Winkel KWL und KLW nicht zu spitz, und deshalb unbequemer würden, so könnte man die Seite KL nach §. 33. kürzer finden. Man hätte

$$KL = KW. \frac{\mathrm{Sin}\, KWL}{\mathrm{Sin}\, KLW}$$

$$= A. \frac{\mathrm{Sin}\,(\mu + \omega)}{\mathrm{Sin}\,(k - \mu)} . \frac{\mathrm{Sin}\,(k --- l)}{\mathrm{Sin}\,(k --- l)}$$

§. 36.

Ein paar besondre Fälle, welche bei dieser Berechnung der Polygonal-Seiten eintreffen können, will ich hier noch kurz berühren, um damit den Bedenklichkeiten zu begegnen, wozu die Lage einzelner Seiten Anlaß geben könnte.

Erster Fall: Es könnte sein, daß eine Polygonal-Seite wie z. B. GH Fig. 23. mit der Richtung einer Visirlinie WH in grader Linie läge, wobei TWH = TWG würde. Dies verursacht indessen nicht die geringste Schwierigkeit, indem man die Linien GV, HV nichts desto weniger nach §. 32. findet!

$$GV = A. \frac{\mathrm{Sin}\,(g + \omega)}{\mathrm{Sin}\,(g - \vartheta)}$$

$$HV = A. \frac{\mathrm{Sin}\,(h + \omega)}{\mathrm{Sin}\,(h - \eta)}$$

und demnach GH beliebig aus GV oder HV, nebst den bekannten Winkeln, völlig so berechnen kann, wie AB, BC, u. s. w. im §. 33. gefunden worden.

Zweiter Fall. Wenn sich eine Seite des Polygons z. B. HI so weit zurück zieht, daß der Winkelpunkt I von V aus nicht mehr gesehen werden kann, so hat es doch keine Schwierigkeit, die Seite HI aus HW, und die folgende Seite IK aus der

Seite KW zu berechnen. Man braucht dazu nur der Anleitung zu folgen, welche in den §. §. 32. 33. enthalten sind, indem man

$$IK = KW. \frac{\mathrm{Sin}\,IWK}{\mathrm{Sin}\,KIW}$$

$$= A. \frac{\mathrm{Sin}(\mu + \omega)}{\mathrm{Sin}(\mathfrak{k} - \mu)} \cdot \frac{\mathrm{Sin}(i - \mathfrak{k})}{\mathrm{Sin}(i - \mathfrak{i})}$$

und

$$HI = HW. \frac{\mathrm{Sin}\,IWH}{\mathrm{Sin}\,HIW}$$

$$= A. \frac{\mathrm{Sin}(\varkappa + \omega)}{\mathrm{Sin}(\mathfrak{h} - \varkappa)} \cdot \frac{\mathrm{Sin}(\mathfrak{h} - \mathfrak{i})}{\mathrm{Sin}(h - \mathfrak{h})}$$

sucht.

Eben so wenig würden die Polygonal-Seiten IL, LN, NO unbekannt bleiben dürfen, wenn sie gleich alle drei so gelegen wären, daß sie nur von dem einen Standpunkte W, nicht aber vom andern, V, angezielt werden können. Denn da O, (oder auch ein folgender Winkelpunkt P') von V aus gesehen, folglich die Seite OW berechnet werden kann, so läßt sich in den Dreieck NOW,, sowohl die Polygonal-Seite NO, als auch die Ziel-Linie NW berechnen, und durch die letztere kann wieder LW, dann auch IW gefunden werden, wofern man diese letztere brauchen wollte, was jedoch nicht nöthig ist. Es liedet demnach keinen Zweifel, daß die Polygonal-Seiten IL, LN, NO ausgemittelt werden können.

Dritter Fall. Nur der Fall, da ein Winkelpunkt, z. B. P, von keinem Standorte V und W sichtbar ist, könnte vielleicht etwas bedenklicher scheinen. Indessen wird sich auch hier sehr bald ein Ausweg finden.

Denn, da sich die Seite LW, durch HW, und QW durch RW, nach dem vorstehenden finden lassen, so ziehe man noch die Diagonale LQ. Alsdann sind in dem Dreieck LQW, die beiden Seiten LW, QW und der, von denselben eingeschloßne Winkel LWQ bekannt, woraus sich sowohl die Diagonale LQ, als auch die Winkel, QLW, LQW berechnen lassen. Man findet demnächst aus den letztern Winkeln nebst den Polygonalpunkten L, P, Q, die beiden Winkel PLQ und PQL, z. B. auf folgende Weise:

$$PLQ = ZLP - ZLQ$$
$$ZLQ = QLW - ZLW$$
$$= QLW - (2R - TWL)$$
$$PLQ = 2R - (QLW + TWL - ZLP)$$
$$PQL = YWQ + TWQ - LQW.$$

Der eine dieser Winkel hätte auch, wie man sogleich erkennt, aus dem andern, mit der bekannten Polygonal-Ecke, LPQ gefunden werden können. In jedem Falle sind in dem Dreieck PLQ die Winkel nebst der Diagonale LQ bekannt, um daraus die Polygonal-Seiten PL, PQ zu berechnen.

Zieht sich jedoch die Perimeter noch weiter zurück, so daß z. B. zwei Punkte P und S von keinem der beiden Standorte V und W sichtbar sind, so wird die Sache schon weit verwickelter. Wofern man es nicht vermeiden konnte, der Grundlinie VW eine solche Lage zu geben, wobei mehrere, auf einander folgende Polygonalpunkte ganz unsichtbar bleiben, so scheint es am kürzesten, für diesen unsichtbaren Theil des Perimeters eine eigne Standlinie, z. B. eine Diagonale LU zu wählen, selbige zu messen oder zu berechnen, und aus derselben die fehlenden Polygonal-Seiten zu bestimmen. Es kann auch wohl sein, daß ein solcher, von der Grundlinie unsichtbarer Theil des Perimeters sich bequem unmitteltelbar messen läßt, welches denn von den örtlichen Umständen abhängt.

§. 37.

Hierher kann noch, seiner Aehnlichkeit wegen der besondre Fall gehören, da zwei von einander entfernt liegende Felder, Wiesen, Aecker, Forsten, u. dgl. gegen einander in eine richtige geographische Lage gebracht werden sollen. Da dies keine, aus der bloßen Vorstellung genommene Forderung ist, sondern bei Vermessung der Forsten, Domainen, großen Güter u. s. w. in der That häufig gemacht wird, so kann es zweckmäßig scheinen, etwas darüber mit Bezug auf die Methode der Normalen zu sagen.

Die Sache hat bei dem gewöhnlichen goniometrischen Verfahren wirklich nicht geringe Schwierigkeiten, deren Wegräumung oft bedeutende Arbeit kostet. Dies zu erweisen wird überflüssig seyn, da ich voraussetzen darf, daß die Erfahrung darüber schon hinlänglich belehrt habe. Daher beschränke ich mich darauf, hier zu zeigen, um wie viel kürzer der Forderung Genüge geleistet werden kann, wenn man sich bei den Messungen der einzelnen Theile der Methode der Normalen bedient hat.

Es seien demnach ABCDEF und GHIKL zwei von einander entfernt liegende Polygone, und beide mit Anwendung der Normalen vermessen. Um nun diese beiden Figuren in gehöriger Lage auf die Zeichnung zu bringen, oder mit andern Worten, richtig zu orientiren, ist es, wie man leicht sieht, nur nöthig, sich von der Entfernung und Lage eines bekannten Punkts in dem einen Polygon von einem eben solchen Punkte im andern zu unterrichten, um die Aufgabe völlig lösen zu können; denn alsdann findet sich alles übrige von selbst. Wäre GHK das eine Polygon, welches gegen ACE orientirt werden soll, so ist es einleuchtend, daß alle Polygonal-Punkte des erstern bereits unter sich, vermöge der Normalen orientirt sind. Wenn demnach nur die Lage von G oder H, oder überhaupt irgend eines perimetrischen Punkts des ersten Polygons gegen das letztere ACE aufgefunden wird, so ist die Frage auch beantwortet. Bei den, hier zu erforderlichen Operationen können nun vorzüglich zwei Fälle eintreten, nemlich erstens, daß ein Theil des Perimeters GHK sich von einem Theile des andern ACE übersehen läßt, oder zweitens, daß GHK von ACE aus gar nicht sichtbar ist. Diese beiden Fälle will ich daher noch kurz betrachten, wiewohl es nach allem vorhergehenden fast überflüssig sein mögte.

1. Man kann G oder H, oder irgend einen Punkt in GHK von A und C übersehen und beobachtet die Abweichungen von G bei A und bei C, d. i. die Winkel UAG und TCG. Es ist klar, daß man in dem ganz bekannten Polygon ACE die Seite AC nebst den Winkeln ACT, CAU kenne, oder leicht finden könne. Die §. §. 15. 28. 29. geben dazu alle erforderliche Anleitung. Man hat alsdann in dem Dreieck ACG oder ACH alle drei Winkel und die Seite AC, woraus sich AG oder CG (AH oder CH) bestimmt. Es ist nemlich:

$$ACG = ACT + TCG$$
$$AGC = UAG - TCG$$

und

$$AC = AC. \frac{\text{Sin}\, AGC}{\text{Sin}\, ACG}$$

Wollte man die Linie AG (oder CH) unmittelbar messen, so bedürfte es nur der Beobachtung der Abweichung UAG (oder TCH) um das Polygon GHK gegen ACE zu orientiren.

2. Man kann in dem Polygon ACE nichts von GHK sehen, allein der Ort M ist von beiden Polygonen aus sichtbar.

In diesem Falle wird man den Punkt M von A und C aus durch eben dieselbe Rechnung festlegen, d. h. an M die Normale ziehen (durch Anzielen aus A oder C) und die Entfernung CM berechnen, so wie solches so eben für G geschah. Hierauf wird man noch wieder dieselbe Rechnung in dem Dreieck GHM wiederholen um die Seite HM zu finden, wodurch denn das Vieleck GHK gegen ACE dergestalt orientirt ist, daß beide Figuren in richtiger Lage gegen einander verzeichnet werden können. Es leuchtet nemlich ein, daß die Punkte M und H (oder G) gegen irgend eine erste Normale als Abscissenlinie grade so bestimmt werden, als dieses bei andern Polygonal-Punkten geschieht; denn A und G oder C, M oder H, sind nunmehr als Punkte eines Polygons zu betrachten. Die Polygonometrie, und auch hier die §. §. 28. 29. geben zulängliche Auskunft hierüber.

Es können wohl manche örtliche Umstände eintreten, wodurch die Sache bald erleichtert, bald etwas verwickelter wird, und ich könnte hier leicht dergleichen anführen. Allein ich darf hoffen, daß ein kundiger Geometer sich in allen Fällen unbedenklich zurecht finden werde, und folge daher dem Gesetz der Sparsamkeit, wonach mir hier nur noch wenige Blätter übrig bleiben.

Dies ist gewiß, kann und will man eine Standlinie VW für beide Polygone benutzen, wie §. 31. f.f. zeigen, so bedarf es der in gegenwärtigem § angegebenen Rechnung nicht, weil sich dann CH als eine Polygonal-Seite findet.

Fünfter Abschnitt.

§. 38.

Ueber die Zeichnung und Berechnung der goniometrisch aufgenommenen Figuren habe ich wenig oder nichts zu sagen. Der Zweck der gegenwärtigen kleinen Schrift beschränkt sich eigentlich auf Messungs-Methode, und was nicht dazu gehört, liegt dem Wesen nach ausserhalb ihrer Gränzen. Nichts desto weniger habe ich mich bestrebt, die in dem Vorstehenden abgehandelte Methode so sehr als irgend möglich, denen Formen anzupassen, welche bereits bei den goniometrischen Arbeiten eingeführt sind, und um dies zu erreichen habe ich gern einige Abänderungen aufgeopfert, wodurch einige Ausdrücke etwas abgekürzt worden wären. So wie ich mit beständiger Rücksicht auf das Angenommene und das bekannte Verfahren, die Methode der Normalen vorgetragen habe, ist sie in der That der gebräuchlichen Goniometrie äußerst ähnlich geblieben, und ich darf daher gewiß hoffen, daß niemand, dem die letztere bekannt ist, bei dem Gebrauch der Normalen auf irgend eine Bedenklichkeit oder Ungewißheit stoßen werde. Was ich im §. 28 und 29 über die Werthe der Abscissen und Ordinaten für die Projektion der Polygonal-Winkel-Punkte auf die Normale gesagt habe, enthält wohl alles was darüber anzumerken nöthig sein mochte: es betrifft vorzüglich die Werthe, welche den Abweichungen (womit gerechnet wird) beizulegen ist, weil nur diese, als gewissermaaßen veränderliche Größen, der gegenwärtigen Methode eigenthümlich sind, während alles übrige die

Verzeichnung und Berechnung der Figuren betreffende, wiederum ganz mit dem gewöhnlichen Verfahren zusammen trifft. Und um mich von letzterm auch nicht weiter zu entfernen, habe ich es unterlassen, den Ausdrücken für die Breiten und Längen eine andre, allgemeinere und abgekürzte Gestalt zu geben, deren sie sonst wohl fähig gewesen wären. So wie ich diese Ausdrücke aufgestellt habe, sind sie völlig in der gewöhnlichen Form beblieben und gleichwohl noch etwas einfacher, auch bequemer, in sofern zu ihrer Anwendung keine Reduktion oder Permutation der Polygonal-Winkel, oder der darin liegenden äussern nöthig ist, sondern die goniometrischen Größen unmittelbar aus dem Manual in die Rechnung übergeführt werden können. Ich werde daher nicht nöthig haben, noch etwas zur Erläuterung der Verzeichnungs- und Berechnungsart hinzuzufügen, indem ich dieselbe als bekannt voraussetze und mich übrigens auf die §.§. 28. 29. beziehe. Sonach bleibt mir für jetzt wenig zu sagen übrig, und dieses Wenige betrifft vorzugsweise die Anwendung der Normal-Methode in einem etwas ausgedehntern Sinne.

§. 39.

Nach meiner Meinung entstehen aus der gegenwärtig vorgetragenen Methode, ausser den Vortheilen, welche sie bei den Messungen selbst gewährt, noch andre eben so wesentliche dadurch, daß die Normale auch zugleich als Abscissen- oder Projektions-Linie der Polygonal-Winkel-Punkte dient, und ich darf daher voraussetzen, daß mit der Annahme der Methode überhaupt zugleich die Bestimmung verbunden werde, daß die Abscissen-Linien nicht willkührlich gewählt, sondern dazu allemal die Normalen selbst angenommen werden. Hierdurch entstehen nothwendig Gleichförmigkeit und Zusammenhang unter mehrern, zu einem Ganzen gehörigen einzelnen Messungen, wie sie ohne jene Bestimmung schwerlich, oder doch nur durch mancherlei Reduktionen zu bewirken sind. So etwas wird man vorzüglich bei den Kadastral-Vermessungen, und unter manchen Umständen auch bei den geodätischen Arbeiten erfahren, welche den Separationen der Gemeinheiten und überhaupt dem Theilungs Geschäft von Gesammtgründen vorausgehen müssen, und es scheint mir nicht zweifelhaft, daß die Methode der Normalen ihre Brauchbarkeit durch Erleichterung und Vereinfachung sämmtlicher Arbeiten bewähren werde.

Auch für die ausführenden Geometer hat die angegebene Bestimmung der Normale als Abscissenlinie bedeutende Vortheile, welche ihnen die ganze Methode um so angemessener machen wird, als sie außer den Vorzügen bei den Messungen selbst, die Hausarbeiten sehr merklich erleichtert. Denn sie sind dabei aller Reduktionen der Winkel, aller Berechnungen von einer Linie auf die andre überhoben, und finden die nöthigen Data zu den jedesmaligen Rechnungen ganz unmittelbar in ihren Manualen oder Vermessungs-Registern. Die Anschlüsse an die zunächst gelegenen Sectionen, oder überhaupt an nachbarliche Mitarbeiter werden auch bei weitem leichter bewirkt, wenn beide sich auf eine gemeinschaftliche, oder wenigstens in der Richtung gleichlaufende Linie beziehen, und ein etwaiges Versehen in der Lage der Figur oder den einzelnen Gränzen wird dabei schneller entdeckt und leichter berichtigt. Wenn die einzelnen Vermessungs-Sectionen zusammen genommen zu irgend einer weitern Bestimmung benutzt werden sollen, so ist die Uebereinstimmung in der Verzeichnung durch die Reduktion auf eine gemeinschaftliche Normale, wiederum ein willkommnes Hülfsmittel um zu einer schnellen und richtigen Uebersicht zu gelangen. Sollen mehrere Vermessungs-Abtheilungen demnächst in eine einzige zusammenhängende Zeichnung gebracht werden, so ist auch diese Reduktion leichter, die Genauigkeit wahrscheinlicher, wenn alle einzelne Abtheilungen schon gleichförmig orientirt waren. Diese und andre praktische Vortheile sind an sich so einleuchtend, daß ich mich der weitern Erläuterung derselben wohl gewiß überheben darf.

§. 40.

Für größere zusammenhängende Arbeiten über eine ganze Provinz oder sonst eine beträchtliche Erdfläche möchte ich gern, daß man noch einen Schritt weiter gehen wollte; daß man sich zu der Bestimmung entschließen mögte: die Normalen sollen wahre Mittagslinien sein. Diese Bestimmung scheint mir nicht bloß das bequemste, sondern auch bei weitem das vorzüglichste Mittel zu sein, um die Messungen verschiedener einzelnen Sektionen in die Dreiecke eines größern Netzes genau einzupaßen und unvermeidlich richtig zu orientiren.

Wenn die Hauptpunkte eines großen Dreiecknetzes ihre geographische Ortsbestimmung durch astronomische Hülfsmittel erhalten haben, wenn als die wahren Mittagslinien jener Hauptpunkte also gegeben anzusehen sind, und nun die Mittagslinien der Triangular-Punkte in den kleinern Netzen durch Rechnung bestimmt (oder auch unmittelbar beobachtet) werden, so sind die Normalen schon so gut also gegeben, oder doch sehr leicht ausgemittelt. Und welche erfreuliche Uebereinstimmung, welches erwünschte Anpassen aller einzelnen Arbeiten läßt sich nicht von einer solchen allgemeinen Normale hoffen! Wie viel Wahrheit wird in den Plan eines großen Landes kommen, daß auf diese Weise vermessen und gezeichnet wird! Es fehlt wenig an der stereographischen Projektion desselben, wenn man der sphärischen Ueberschüsse gehörige Rechnung thut, was bei großen Dreiecknetzen ohnehin geschehen wird.

Hierbei werde ich doch wohl nicht den Vorwurf befürchten dürfen, daß ich von parallelen Normalen rede, während die wahren Mittagslinien namhafte Winkel mit einander machen. Es wird nicht nöthig sein, noch besonders zu erinnern, daß der Parallelismus der Normalen sich allemal auf ihre nächsten Mittagslinien beziehe, und daß eben darin die Genauigkeit bestehe, mit welcher die einzelnen kleinen Flächenstücke in die nächsten Dreiecke, diese wieder in die größern u. s. w. passen.

Wenn man die Bogenlänge eines Aequatorgrades nach den scharfsinnigen Untersuchungen des sel. Prof. Klügel zu 57247 tois. oder 29624,8 rhein. Ruthen als Mittelzahl annimmt, so wird die Bogenlänge eines Längengrades

unter 50° Polhöhe = 19042,46 rhein. Ruthen,
" 52 " = 18228,86 " "

betragen. Zwischen zwei solchen Graden kämen demnach durchschnittlich auf 1 Min. in Gradmaas 310,6775 Ruthen rhein. in Längenmaas. Wenn man daher annehmen wollte, daß die speciellen Vermessungen mit einer Genauigkeit von ½ Min. bewirkt werden könnten, so würde zwischen je 155,8387 Ruthen eine Verbesserung der Lage der Normale von 30 Sec. vorzunehmen sein. Diese Korrektion ist hinreichend, um die Sections-Vermessungen in völlige Uebereinstimmung mit den Dreiecknetzen zu bringen; denn wofern alsdann die Lage irgend eines Meridians in der Sektion gegeben ist, so wird dieselbe für jede Ordinatenlänge von 155⅓ Ruthen um 30 Sec. verändert, nach einer oder der andern Seite, je nachdem die Richtung ist, in welcher die Ordinaten mit Bezug auf die Zählungs-Richtung der Meridiane liegen. Etwas diesem Aehnliches enthält die Untersuchung des §. 6.

Es ist gewiß allemal möglich und auch leicht, die Lage eines Meridians für jede Section anzugeben, wenn nemlich die Dreieckpunkte des umfassenden Dreiecks durch Beobachtung oder Rechnung geographisch fest gelegt sind. Und dieses letztere kann wiederum nicht fehlen, wenn die Hauptpunkte eines großen Dreiecknetzes astronomisch bestimmt sind. Die erforderlichen Operationen und Rechnungen, wodurch allen diesen Punkten ihre Lagen gegen eine erste Mittagslinie angewiesen, folglich auch die Neigungen aller Meridiane gegen die ersten und unter einander bestimmt werden, sind denen bekannt, welchen so wichtige Arbeiten übertragen werden. Daher bleibt mir nur der Wunsch übrig, daß diese, so wie überhaupt diejenigen, welche die Leitung großer Messungen übernehmen, die Gedanken, welche ich in vorstehenden Worten nur angedeutet habe, erwägen und würdigen mögen.

§. 41.

Die Methode der Normalen, davon ich gesucht habe die Grundzüge aufzustellen, hat an sich selbst Vorzüge genug, um sich zur Anwendung zu empfehlen, wenn gleich die Annahme der Meridiane als allgemeiner Normalen, noch zur Zeit nicht unmittelbar ausgeführt werden kann, indem dazu gewisse Vorbereitungen und allgemeine Dispositionen in der Anlage großer Messungen nöthig sind, die sich nicht sogleich vernehmen lassen, wenn gleich die Messungen bereits verordnet worden. Deshalb habe ich auch auf diese Herbeiführung der Meridiane in den frühern

Betrachtungen über die Anwendung der Normalen, keine weitere Rücksicht genommen, ungeachtet die ganze Idee eigentlich aus dem Gebrauch der Meridiane in der mathematischen Geographie entstanden ist. Die goniometrischen Ausdrücke welche ich in den obigen Untersuchungen aufgestellt habe, beziehen sich daher auch auf wirkliche Parallelen, und nicht auf Meridiane, welche gegeneinander geneigt sind.

Hieraus könnte aber vielleicht ein anscheinender Widerspruch hergeleitet werden, indem die hier angenommene vollkommne Parallelität der Normalen verhindert, die wahren Meridiane als Normalen zu brauchen; denn, die Vorschrift, Meridiane zu Normalen zu machen, hebt die Anwendbarkeit der, in den vor. §§. gegebenen goniometrischen Ausdrücke auf. Wenn ich nun diese Behauptung in der Allgemeinheit, womit sie aufgestellt ist, einräume, so wird es doch nur weniger Bemerkungen bedürfen, um zu zeigen, wie sehr leicht sich beides in völlige Uebereinstimmung bringen läßt.

§. 42.

Was zuerst die Messung der Abweichungen betrifft, so ist klar, daß die Normalen eben sowohl gegen einander geneigt, als parallel sein könnten, ohne die Arbeit im geringsten schwieriger zu machen, wofern nur die Neigung der Normalen gegen einander gegeben ist. Denn in diesem Falle würde nur nöthig sein, den Parallelismus um die gegebne Größe zu alteriren, wodurch denn die Abweichung an einem Winkelpunkte auf der einen Seite um eben diese Neigung größer, auf der andern Seite kleiner ausfallen müßte, als unter der Voraussetzung des Parallelismus der Normalen geschehen wäre. Zugleich aber ergiebt sich auch, daß die Summe zweier Abweichungen an einem Winkelpunkte noch eben dieselbe bleiben, und daß überhaupt die Summe aller Abweichungen an einer geschlossenen Figur durch den Mangel der Parallelität der Normalen ganz und gar nicht geändert würde, da allemal gleiche Größen entgegengesetzter Art erscheinen, deren Summen sich aufheben.

Fig 25. sei ABC ein großes Dreieck, durch dessen Winkelpunkte die Meridiane SN, MO, PQ gelegt sind, wovon die letztern gegen die erste eine Neigung $= MAm = \mu$, und $PCp = \nu$ haben. Die Abweichungen der Seiten dieses Dreiecks mögen a, b, c, d, e, f heißen, wenn die Normalen MO, PQ mit SN parallel sind. Sie werden aber gemessen, und so gefunden:

die Abweichung $CA = f - \nu + R$ (wegen §. 21.)

" " $AC = a - \mu + R$

" " $AB = b + \mu + R$

" " $BC = d$

" " $BA = c$

" " $CB = e + \nu + R$

oder $f + a = 2R - (\mu + \nu) + 2R$

$b + c = 2R + \mu + R$

$d + e = 2R + \nu + R$

zusammen $3 . 2R \ldots . + 2 . 2R$.

Nach dem, im §. 23. gegebenen Ausdruck soll

$s = (m + p) . 2R$

$= (3 + 2) . 2R$ sein, welches völlig mit der vorigen Summe übereinstimmt. Man übersieht hier auch sogleich, wie die positiven (südlichen) Ueberschüsse gegen die negativen (nördlichen) in einer geschlossenen Figur aufgehoben werden. Es sind in Wahrheit Komplemente zu 2R. Begreiflich ist hier jedoch kein sphärisches Dreieck gemeinet, sondern ein Sehnen-Dreieck, worin daher kein sphärischer Ueberschuß der Winkel zu betrachten, (oder schon reducirt) ist. Demnach ist der Einfluß des Mangels an Parallelität nur örtlich, d. h. er ändert nur die Größe der einzelnen Abweichungen (nicht ihre Summe) an den Polygonal-Punkten, wo die Normale eine Neigung gegen die frühern erhält.

§. 43.

Ein Sektion mag beiläufig 500 Ruthen in der Breite, und 600 Ruthen in der Länge haben, und die Lage dar Normale (Meridian) ist für einen ersten, äußersten Punkt gegeben; so wird die Normale des letzten Punkts (der Länge) eine Neigung von 2 Min. gegen die erste haben. Diese Neigung wird (wenn die Genauigkeit der Winkelmessung auf 30 Sec. festgesetzt ist, was jedoch bei speciellen Arbeiten wohl selten der Fall sein mag) auf 4 Normalen an der einen Längenseite, und eben so viel an der andern (rückwärts) vertheilt, welche zwischen 150 bis 160 Ruthen in grader Längenrichtung von einander entfernt sind.

Die Meridiane MN, OP ..... YZ, Fig. 26. mögen diejenigen sein, an welchen die Neigung von 30 Sec. gegen die vorhergehende zu bewirken ist, indem alle zwischen liegenden Normalen des erlaubten Fehlers wegen völlige Parallelen bleiben. Man habe von A angefangen und gehe an der Südseite in der Länge gegen B fort, so muß die Abweichung OBA $= 2R - MAB + 30$ Sec. genommen werden, und man wird die folgende Abweichung OBC um 30 Sec. kleiner finden, als geschehen sein würde, wenn OP $\#$ MN gemacht wäre. Eben dasselbe wird in C, D u. s. w. geschehen, und auf dem Rückwege an der Nordseite von F nach L wird ein Gleiches, jedoch entgegengesetztes geschehen, d. h. die Abweichung W G F muß $= 2R - ZFW - 30$. Sec. sein, wogegen die zweite Abweichung an eben dem Winkelpunkte, W G H um eben so viel größer wird, als bei völliger Parallelität der Normale gefunden wäre.

Die Wirkung hiervon äußert sich nun eigentlich nur auf die Sin. und Cosin. der veränderten Abweichungen, d. h. auf die Projektion der Polygonal-Winkelpunkte oder ihre Längen und Breiten, sofern nemlich die Berechnung jener goniometrischen Funktionen sich auf die nächstliegenden Normalen bezieht. In diesem Falle müssen die Längen (Sinus) für spitze Abweichungen etwas größer, für stumpfe hingegen etwas kleiner ausfallen, als man bei parallelen gefunden hätte. Die positiven Breiten (Cosinus) werden etwas kleiner, die negativen etwas größer; in beiden Fällen ist aber der Unterschied sehr unbeträchtlich. Streng betrachtet behandelt man nicht die graden Linien der Geodäsie, sondern die Bogen der Sphärik. Alsdann können aber die positiven Längen (von A bis F) den negativen (von F bis B) nicht gleich werden, wie es bei parallelen Normalen nothwendig ist, und auch für die Breiten findet man andre Werthe. Die Unterschiede in den letztern heben sich jedoch auf, und auch die der Längen verschwinden in der Wahrheit, wenn man erwägt, daß die Summe der nördlichen Längen zwischen zwei Meridianen in der That kleiner seyn muß, als die der südlichen. Denn in der Voraussetzung paralleler Normalen, wo also $MX \# YZ$, würde man nicht bloß bis L, sondern weiter, bis X messen, und dadurch die Gleichheit der Längen wieder herstellen, welche aber auch aufhören würden, wahre Längen zu sein, weil L, aber nicht X in dem Meridian von A liegt.

Die sphärische Betrachtung eines so kleinen Theils der Erdfläche als eine gewöhnliche Vermessungs-Section einnimmt, scheint übrigens zu den Spitzfindigkeiten zu gehören, welche aus der Praxis mit allem Recht verwiesen werden. Man wird auch mit aller Strenge richtig rechnen und zeichnen, wenn man auf die Ueberschüsse wegen des Parallelismus der Normalen gar keine weitere Rücksicht nimmt, sondern den gegebnen Meridian als Absciſſenlinie betrachtet und alle Abweichungen so in Rechnung bringt, als wenn sämmtliche Normalen mit jener Absciſſenlinie völlig parallel wären. Es wird dabei kein Fehler merklich, und daher hinreichend, wenn die Ueberschüsse wegen des Parallelismus der Normalen in dem Manual gehörigen Orts zu anderweitigem Gebrauch bemerkt werden, wozu das Probeblatt des §. 27. auch eine Rubrik enthält.

Wollte man auch davon abstrahiren, daß die allmählige Neigung der Normalen gegen einander aus den ebenen Flächen, welche die Geodäsie betrachtet, Kugelflächen macht, und die Veränderungen der Abweichungen schlechthin auf die Sehnen beziehen, was freilich bei weitem zu große Resultate geben würde, so wären die dabei bemerkten Unterschiede der Längen für die Praxis ohne Bedeutung. Angenommen, z. B. daß die Abweichungen, deren Funktionen als Faktoren in den Ausdrücken für die Längen erscheinen, durchschnittlich 45° betragen, und daß dieselben auf je 155 Ruthen um 30 Sec. größer oder kleiner genommen werden, so findet man die daraus entstehenden Unterschiede in Zahlen:

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 155 & = 2{,}1903317 \\ \text{Log. Sin. } 45^\circ & = 9{,}8494850 - 10 \\ \hline \text{Log. } 109{,}601 & = 2{,}0398167 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 155 & = 2{,}1903317 \\ \text{Log. Sin. } 45^\circ 30'' & = 9{,}8495481 - 10 \\ \hline \text{Log. } 109{,}6174 & = 2{,}0398798 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Log. } 155 & = & 2{,}1903317 \\ \text{Log. Sin. } 44^\circ 59' 30'' & = & 9{,}8494218 - 10 \\ \hline \text{Log } 109{,}5856 & = & 2{,}0397535 \end{array}$$

d. h. würden die Abweichungen um 30 Sec. größer, so wäre der Unterschied in der Länge:

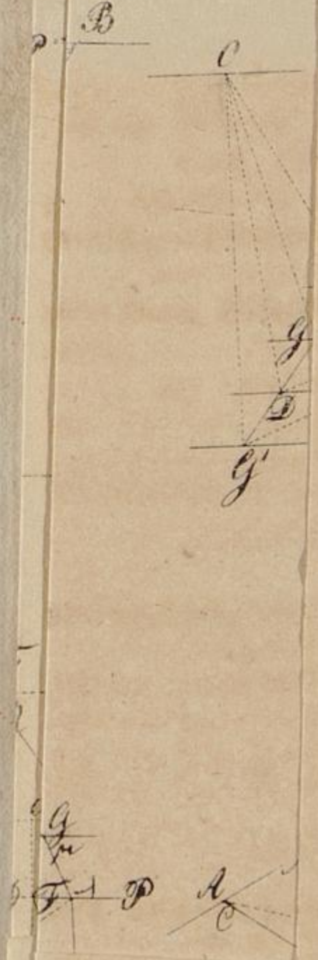
$$= 109{,}6174 - 109{,}601 = 0{,}0164$$

würden die Abweichungen kleiner, so wäre der Unterschied

$$= 109{,}601 - 109{,}5856 = 0{,}0154,$$

oder auf 150 Ruthen etwa $1\frac{1}{2}$ Zoll, welches nur $\frac{1}{10000}$ der ganzen Länge beträgt, ein Fehler, der bei speciellen Arbeiten gänzlich der Beachtung entgeht. Dennoch wiederhole ich, daß diese Unterschiede, sphärisch betrachtet, noch bei weitem nicht so beträchtlich ausfallen würden.

Es hat übrigens hiermit für alle Sections-Vermessungen gar nichts auf sich: die Beobachtung der Abweichungen geschieht ohne Einschränkung mit Bezug auf parallele Normalen, und die Anwendung derselben bei den Berechnungen der Längen und Breiten giebt Resultate, welche von der Wahrheit nicht abweichen. Demnach ist hier eigentlich nur die Rede von der Lage der ersten Normale, welche als Abscissenlinie dienen soll, wozu freilich am besten wahre Meridiane gewählt werden möchten. Auch bleibt es hierbei immer wünschenswerth, daß diese erste Normale, nach den richtigen Bemerkungen des Hrn. Däzel, so viel möglich durch die Mitte der Sectionen gelegt werde.


B
C
G
D
G'
G
F
P
A
C